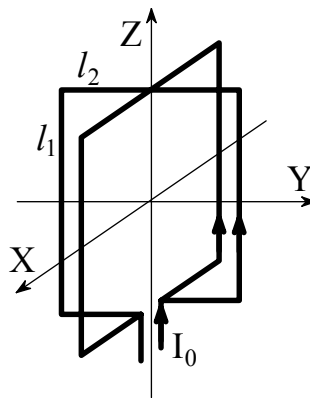


Radiogoniómetro formado por dos espiras

Un radiogoniómetro es una de las ayudas a la navegación más antiguas y permite conocer la dirección de llegada de una señal emitida por una radiobaliza. La antena de la figura está formada por dos espiras ortogonales.

El sistema funciona a 300 kHz. Las dos espiras son iguales y tienen lados $l_1=1.1$ m. y $l_2=0.8$ m. Se pide analizarlas cuando sus bornes están conectados como se indica en la figura, obteniendo:

- a) El diagrama de radiación de la antena. Represéntelo en los planos $z=0$ e $y=0$, $\phi = 135^\circ$
- b) La polarización de la antena en las direcciones de los ejes coordenados.
- d) La directividad de la antena
- e) La longitud efectiva de la antena



Nota: Se recomienda emplear las expresiones basadas en el momento dipolar.

$$\vec{m} = \iint_{S'} I \hat{n}' dS', \text{ y } \vec{N} = jk\vec{m} \times \hat{r}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

Solución

Diagramas de radiación

Los momentos dipolares de las espiras son

$$\begin{aligned}\vec{m}_1 &= \iint_{S'} I \hat{y} dS' = I l_1 l_2 \hat{y} \\ \vec{m}_2 &= \iint_{S'} I \hat{x} dS' = I l_1 l_2 \hat{x}\end{aligned}\quad \text{siendo } I = I_0 / 2$$

El vector de radiación es

$$\begin{aligned}\vec{N}_1 &= jkIl_1l_2 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{vmatrix} = jkIl_1l_2 (\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \cos \phi \hat{z}) \\ \vec{N}_2 &= jkIl_1l_2 \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{vmatrix} = jkIl_1l_2 (-\cos \theta \hat{y} - \sin \theta \sin \phi \hat{z})\end{aligned}$$

Para obtener el diagrama de radiación basta pasar el vector de radiación a esféricas. En general

$$d(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{|N_\theta(\theta, \phi)|^2 + |N_\phi(\theta, \phi)|^2}}{|N_{\max}|}$$

$$N_{1\theta} = N_{1x} \cos \theta \cos \phi - N_{1z} \sin \theta = jkIl_1l_2 (\cos^2 \theta \cos \phi + \sin^2 \theta \cos \phi) = jkIl_1l_2 \cos \phi$$

$$N_{1\phi} = -N_{1x} \sin \phi = -jkIl_1l_2 \cos \theta \sin \phi$$

$$N_{2\theta} = N_{2y} \cos \theta \sin \phi - N_{2z} \sin \theta = -jkIl_1l_2 (\cos^2 \theta \sin \phi + \sin^2 \theta \sin \phi) = -jkIl_1l_2 \sin \phi$$

$$N_{2\phi} = N_{2y} \cos \phi = -jkIl_1l_2 \cos \theta \cos \phi$$

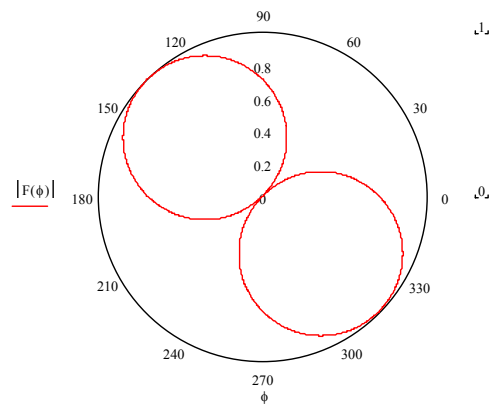
Sumando ambas contribuciones,

$$N_\theta = N_{1\theta} + N_{2\theta} = jkIl_1l_2 (\cos \phi - \sin \phi)$$

$$N_\phi = N_{1\phi} + N_{2\phi} = -jkIl_1l_2 \cos \theta (\cos \phi + \sin \phi)$$

El diagrama de radiación en el plano $Z=0$, se obtiene particularizando las expresiones anteriores en $\theta = 90^\circ$

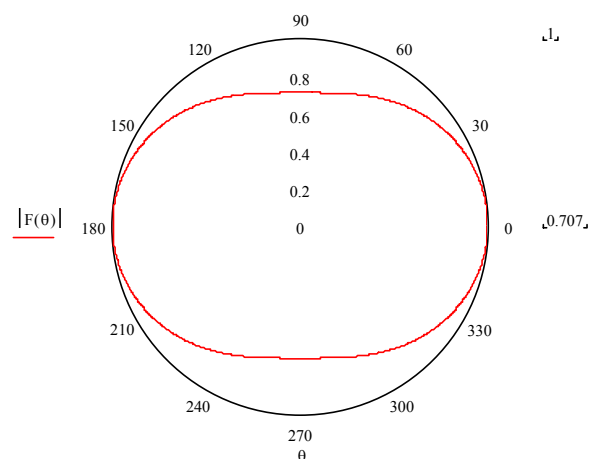
$$d(\theta = 90^\circ, \phi) = \frac{|N_\theta(\phi)|}{|N_{\max}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} |\cos \phi - \sin \phi|$$



Nótese que el diagrama representado es el **plano-H** de la antena ya que contiene la dirección del máximo y el vector de campo magnético en dicha dirección

El diagrama de radiación en el plano $Y=0$, se obtiene particularizando las expresiones anteriores en $\phi = 0^\circ$

$$d(\theta, \phi = 0^\circ) = \frac{\sqrt{|N_\theta(\theta)|^2 + |N_\phi(\theta)|^2}}{|N_{\max}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \theta}$$



Finalmente, el diagrama de radiación en el plano $\phi = 135^\circ$ es $d(\theta, \phi = 135^\circ) = cte.$. Nótese que este plano contiene al máximo de radiación y al vector de campo eléctrico en dicha dirección y es por tanto el **diagrama plano E** de la antena

Polarización

La polarización en la dirección de los ejes se obtiene particularizando en las expresiones del vector de polarización

eje X: ($\theta=90^\circ$, $\phi=0^\circ$)

$$\begin{aligned} N_\theta &= jkIl_1l_2 \\ N_\phi &= 0 \end{aligned} \quad \text{Polarización lineal según } \hat{\theta}$$

eje y: ($\theta=90^\circ$, $\phi=90^\circ$)

$$\begin{aligned} N_\theta &= -jkIl_1l_2 \\ N_\phi &= 0 \end{aligned} \quad \text{Polarización lineal según } \hat{\theta}$$

eje Z: ($\theta=0^\circ$, $\phi=\text{indeterminado}$) No podemos expresar la polarización en función de los vectores de esféricas. Observamos la polarización de cada espira por separado y aplicamos superposición:

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &= jkIl_1l_2 \hat{x} \\ \vec{N}_2 &= -jkIl_1l_2 \hat{y} \end{aligned} \quad \text{Lineal según } \hat{x} - \hat{y}$$

Directividad

El cálculo de la directividad podemos hacerlo a partir de la integración del diagrama de potencia de la antena

$$D_{\text{máx}} = \frac{4\pi}{\iint_{\Omega} t(\theta, \phi) d\Omega}$$

siendo

$$t(\theta, \phi) = \frac{|N_\theta(\theta, \phi)|^2 + |N_\phi(\theta, \phi)|^2}{|N_{\text{máx}}|^2} = \frac{1}{2} \left[(\cos \phi - \sin \phi)^2 + \cos^2 \theta (\cos \phi + \sin \phi)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} t(\theta, \phi) d\Omega &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + \\ &+ \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(4\pi + \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

La directividad resulta $D_{m\acute{a}x} = 1.5$. Valor esperado ya que cualquier antena el\u00e9ctricamente peque\u00f1a presenta esta directividad.

Longitud efectiva

e) La longitud efectiva m\u00e1xima de la antena se obtiene mediante

$$\vec{l}_{ef\ m\acute{a}x} = \frac{1}{I_0} \vec{N}_{m\acute{a}x} = jkl_1 l_2 \frac{I}{I_0} (\hat{x} + \hat{y}) = \frac{jkl_1 l_2}{2} (\hat{x} - \hat{y})$$