Задачи 9

Казаков Никита

May 2020

1 Какое максимальное количество двоичных слов длины 10 (последовательностей из десяти нулей и единиц) можно выбрать, чтобы любые два слова отличались по крайней мере в двух местах?

-

2 Сколько четырёхзначных чисел больше 2100 можно составить из цифр [0-5], если каждую можно выбрать только один раз?

Мы должны учесть два случая:
1) [2][*][*][*] - здесь на второй позиции не может быть только 0 $\rightarrow$ 4 возможных
На третьей позиции все оставшиеся $\rightarrow$ 4 возможных
На четвёртой аналогично $\rightarrow$ 3 возможных $\Rightarrow$ Всего при первой двойке может быть $4 * 4 * 3 = 48$ различных чисел
2) [>2][*][*][*] - здесь нам важно, что на первой позиции может быть только 3 цифры, а на остальных любые оставшиеся $\Rightarrow 3 * 5 * 4 * 3 = 180$
Итого: $180 + 48 = 228$

3 Сколько различных слов можно составить из букв в слове МАТЕМАТИКА?

Всего у нас есть 10 букв, которые мы можем поставить в произвольном порядке $\rightarrow$ количество способов их расставить $= 10!$
Однако некоторые из букв повторяются (М - 2, А - 3, Т - 2). Соответственно, т.к. мы рассматриваем сочетания без повторений мы должны исключить случаи, где мы меняем местами две одинаковые буквы $\Rightarrow \frac{10!}{2!*3!*2!} = 151200$

4 Шесть игроков играют в мафию по особым правилам. Они садятся за круглый стол и сами выбирают себе одну из двух ролей. Какое количество вариантов начальной позиции (совокупностей пар вида человек + его роль) существует? Мы считаем ситуации, когда из одной позиции можно перейти к другой поворотом стола, одинаковыми.

Сначала рассмотрим количество доступных нам рассадок вокруг стола.
Если не накладывать никакие игранчения, то количество таких рассадок $= 6!$, однако мы должны учесть последнее условие с поворотом. Представим массив, как буффер из 6-ти элементов. Теперь представим каждого игрока, как номер (1, 2, 3...). Тогда буффер в одной из его вариаций может выглядеть, как [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Очевидно, что мы можем 6 раз применить на него перестановку (1->2->3->4->5->6), чтобы он вернулся в изначальное положение. Это говорит, нам о том, что для каждой рассадки существуют ещё 5 идентичных, которые мы не учитываем $\Rightarrow$ количество рассадок $= \frac{6!}{6} = 5! = 120$
Теперь для каждой рассадки рассмотрим количество вариантов выбора игроками ролей. Первый может выбрать из 2 ролей, второй из 2 и т.д. $\Rightarrow$ Всего таких вариантов $2^6 = 64$
Теперь для каждой рассадки мы учтём возможные вариации ролей, перемножив их $\Rightarrow 64 * 120 = 7680$

Если же я неправильно понял вопрос, и под совокупностью пар вида человек + его роль имеется ввиду просто (представим людей, как массив 0 и 1, где 0-первая роль, а 1-вторая) количество возможных комбинаций массива из 6 элементов, состоящего из 0 и 1, то для нас не имеет значение то, где он сидит. Нам важно первая он роль или вторая, тогда ответ $2^6 = 64$. В любом случае условие не очень понятное.

5 Пирамидка, в которую играет ребенок, состоит из 49 дисков, по 7 каждого размера (диски одного размера неразличимы). Пирамидка устроена таким образом, что на нижнем слое может находиться только самый большой диск, а на верхнем слое только самый маленький. Мы будем называть правильной сборкой пирамидки такую последовательность из семи дисков, что каждый следующий не больше предыдущего, первый диск — самого большого размера, а последний — самого маленького (например, 7654321, 7775331, и 7222211 — правильные сборки, а 7654322 нет). Сколько всего существует правильных сборок?

В данном случае мы должны найти количество возможных комбинаций невозрастающих чисел, начиная от 7. Кроме того мы сразу может откинуть первую и последнюю позицию, т.к. они зафиксированы и роли при вычислении не сыграют. В сухом остатке у нас есть пять позиций, на которые нужно расставить числа [1-7] в неубывающем порядке.
Можно перефразировать задачу так: Есть 7 различимых коробок, в которые нужно раскидать 5 неразличимых предметов. Для этого воспользуемся формулой вычисления количества k-мультимножеств над множеством из n элементов (информация, как и все обозначения взяты из конспекта с лекций по элементарной комбинаторике 1 курса КТ Омельченко А.В.).

$$\left(\!\binom{7}{5}\!\right) = \binom{7+5-1}{5} = \binom{11}{5} = 462$$

6 Существует 10 натуральных чисел меньше 100, цифры которых в сумме дают 9(9,18,27,36,45,54,63,72,81,и 90). У скольких натуральных чисел меньше 10,000 сумма цифр равна 9?

Перефразируем задачу. У нас есть 9 неразличимых единиц и их нужно раскидать по 4 коробкам(коробки символизируют единицы, десятки, сотни и тысячи). Для этого воспользуемся формулой вычисления количества k-

мультимножеств над множеством из n элементов ещё раз.
Итого:
$\left(\!\binom{4}{9}\!\right) = \binom{4+9-1}{9} = \binom{12}{9} = 220$

7 У скольких натуральных чисел меньше 10,000 сумма цифр равна 10?

Задача аналогична предыдущей за исключением того, что не сущёствет цифры 10, соответственно посчитав их количество необходимо вычесть 4, т.к. 10 может появиться только в 4 случаях: на месте единиц и остальные нули, на месте сотен и остальные нули, на месте тысяч и остальные нули и на месте десятков и остальные нули. $\Rightarrow \left(\!\binom{4}{10}\!\right) - 4 = \binom{10+4-1}{10} - 4 = \binom{13}{10} - 4 = 286 - 4 = 282$

8 Какой коэффициент будет стоять при $x^{1996} * y^{21}$, если раскрыть выражение $(x-2y)^{2017}$?

Рассмотрим бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$a = x$
$b = -2y$

$$(x-2y)^{2017} = \sum_{k=0}^{2017} \binom{2017}{k} x^{2017-k} (-2y)^k$$

Т.к. в исходном выражении y стоит в степени 21, возмём $k = 21$:
$\binom{2017}{21} x^{2017-21} (-2y)^{21} \Rightarrow$ коэффициент перед $x^{1996} * y^{21} = \binom{2017}{21} * (-2)^{21}$