Задачи 9

Казаков Никита

May 2020

1 Принцип умножения в комбинаторике.

Если у нас есть предмет A, который можно вытащить x способами, и есть предмет B, который можно вытащить y способами, то количество способов вытащить пару предметов A и B = x*y

2 Принцип сложения в комбинаторике.

Если у нас есть предмет A, который можно вытащить x способами, и есть предмет B, который можно вытащить y способами, то количество способов вытащить A или B = x+y

3 Принцип включения-исключения (для двух множеств).

Рассмотрим два конечных множества A и B, пересечение которых может быть и непусто.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

когда мы считаем количество |A| элементов в множестве A и складываем его с количеством |B| элементов в множестве B, мы любой элемент, принадлежащий как множеству A, так и множеству B, считаем дважды. Чтобы этот избыток убрать, нам нужно один раз вычесть количество элементов, содержащихся в пересечении этих двух множеств.

4 Перестановки. С ПРИМЕРАМИ

Перестановки подразделяются на перестановки без повторений и перестановки с повторениями.
Перестановки без повторений: в данном случае перестанвка множества из n элементов- расположение элементов этого множества в определённом порядке. Количество таких перестановок = n!
Примеры:

1)Сколько существует различных трёхзначных чисел из цифр 1, 2 и 3: 3*2*1 = 6
2)Сколько существует не обязательно осмысленных четырёхбуквенных слов из букв а, б, в, г при условии, что каждую букву можно брать только один раз: 4*3*2*1 = 24
Перестановки с повторениями: рассмотрим n элементов m различных типов, причем в каждом типе все элементы одинаковы. Тогда перестановки из всех этих элементов с точностью до порядка следования однотипных элементов называются перестановками с повторением. Количество таких перестановок равно мультиномиальному коэффициенту $\binom{n}{k_1,\ldots,k_i}$, где k- количество элементов i-го типа.
Примеры:
1)Сколько существует различных трёхзначных чисел из цифр 1, 2 и 2: $\frac{3!}{2!} = 3$
2)Сколько существует не обязательно осмысленных четырёхбуквенных слов из букв а, б, в, в, при условии, что каждую букву можно брать только один раз: $\frac{4!}{2!} = 12$

5 Размещения. С ПРИМЕРАМИ

Размещение (из n по k)- упорядоченный набор из k различных элементов из некоторого множества различных n элементов. Также подразделяется на два варианта.
Без повторений: количество таких размещений = убывающему факториалу.
Пример:
Сколько существует различных двухзначных чисел из цифр 1, 2, 3 и 4: 4*3=12
С повторениями: это размещение «предметов» в предположении, что каждый «предмет» может участвовать в размещении несколько раз. Количество равно n^k
Пример:
Сколько существует не обязательно осмысленных трёхбуквенных слов из букв а, б, в: 3*3*3=27

6 Сочетания. С ПРИМЕРАМИ

сочетанием из n по k называется набор k элементов, выбранных из данного множества, содержащего n различных элементов. Также есть два варианта:
Без повторений: количество таких сочетаний = биномальному коэффициенту из n по k
Пример:
Сколько есть способов выбрать 5 яблок из корзины с 8 яблоками: $\binom{8}{5} = 56$
С повторениями: количество таких сочетаний = $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$

Пример:
Есть 3 вида яблок A, B, C. Сколько существует различных сочетаний, если нужно купить 6 штук: $\left(\!\binom{3}{6}\!\right) = \binom{8}{6} = 28$

7 Отличие перестановок и размещений.

Рассмотрим размещение без повторений из n элементов по k. Перестановкой можно назвать частный случай, когда k==n и размещения отличаются только порядком элементов, однако если взять k<n, то это уже нельзя назвать перестановкой, т.к. отличается не только порядок, но и набор элементов, из которых состоит размещение.

8 Наличие упорядоченности в перестановках, размещениях и сочетаниях. Общая теорема о принципе Дирихле.

В перестановких и размещениях порядок играет важную роль, т.к. именно он определяет отличие одной перестановки от другой, а также одного размещения от другого в случае, если состав элементов в размещении идентичен. В сочетаниях упорядоченность роли не играет.
Принцип Дирихле: Если у нас имеется n+1 предметов, разложенных в n ящиков, то хотя бы в одном ящике есть 2 предмета

9 Лексикографический порядок.

Слово α предшествует слову β ($\alpha < \beta$), если:
1)либо первые m символов этих слов совпадают, а m+1-й символ слова α меньше m+1-го символа слова β
2)либо слово α является началом слова β

10 Генерация следующего в лексикографическом порядке объекта (сочетания и перестановки) С ПРИМЕРАМИ

Это нахожденик следующего объекта за данным в лексикографическом порядке. Объект Q называется следующим за объектом P, если P<Q, и нет такого R, что P<R<Q.
Алгоритм получения следующего объекта:
1)находим суффикс минимальной длины, который можно изменить без изменения префикса текущего объекта

2)к оставшейся части дописываем минимальный возможный элемент (чтобы было выполнено правило)
3)дописываем минимальный возможный хвост.

Алгоритм генерации следующей перестановки:
1)Двигаясь справа налево, находим элемент, нарушающий убывающую последовательность (в обычном порядке, слева направо)
2)Меняем его с минимальным элементом, большим нашего, стоящим правее
3)Перевернем правую часть
Пример: 1-2-5-4-3 → 1-2-5-3-4

Алгоритм для генерации следующего сочетания:
1)Добавим в конец массива с сочетанием – максимальный элемент.
2)Пойдём справа налево. Будем искать номер элемента, который отличается от предыдущего на 2 и больше.
3)Увеличим найденный элемент на 1, и допишем в конец минимально возможный хвост, если такого элемента нет – на вход было дано последнее сочетание.
Пример: 1-3-4-5 → 1-3-4-5-6 → [1]-3-4-5-6 → 2-3-4-5-6 → 2-3-4-5