Типовик 9

Казаков Никита

May 2020

1 На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно вытащить 5 из них так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

Представим, что 5 книг уже вынуты и структура полки представляет собой 010101010101010, где 1 это стоящая книга, 0 пустая книга. Теперь понятно, что эту задачу можно представить, как количество вариантов возврата этих книг на полку, ведь после возврата мы просто сдвинем книги на полку, чтобы не было просветов и получим исходную полку, но получив все возможные способы их вытащить.
Тогда количество таких вариантов равно $\binom{8}{5} = 56$

2 Сколькими способами можно распределить 150 студентов по 25 человек в группе?

Сначала наберём первую группу: $\binom{150}{25}$
Затем из всех оставшихся соберём вторую группу: $\binom{125}{25}$
Потом третью и т.д., но нам надо учесть, что группы не отличаются друг от друга $\to$ итоговый результат надо поделить на 6!

$$\frac{\binom{150}{25}\binom{125}{25}\binom{100}{25}\binom{75}{25}\binom{50}{25}\binom{25}{25}}{6!}$$

3 Сколько перестановок всех букв английского алфавита, которые не содержат в себе подстрок fish, rat или bird?

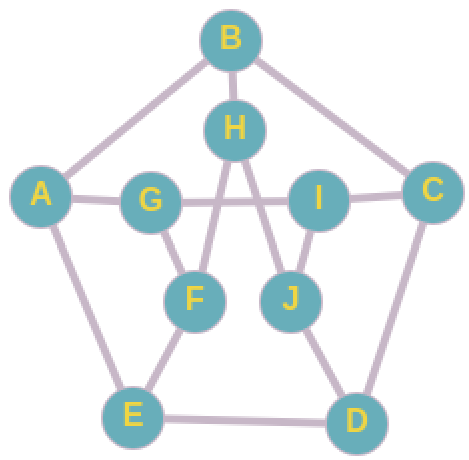
Количество букв 26 $\to$ количество различных строк $= 26!$
Т.к. подстрока rat не пересекается с fish и bird $\Rightarrow$ среди строк с подстрокой rat будет все строки с подстроками fish и bird, поэтому будем считать только rat. Всего различных вариантов размещений подстроки rat(это можно

понять, просто "проталкивая"эту подстрочку в строке) 24. Кроме того при каждом положении подстроки все остальныу 23 буквы могут принимать любое положение $\Rightarrow$ количество строк, содержащих подстроку rat = 23! * 24 = 24!
Итого: количество строк НЕ содержащих ни одну подстроку = 26! - 24!

4 Шесть игроков играют в мафию по особым правилам. Они садятся за круглый стол и сами выбирают себе одну из двух ролей. Какое количество вариантов начальной позиции (совокупностей пар вида человек + его роль) существует? Мы считаем ситуации, когда из одной позиции можно перейти к другой поворотом стола, одинаковыми.

Сначала рассмотрим количество доступных нам рассадок вокруг стола.
Если не накладывать никакие игранинчения, то коичество таких рассадок = 6!, однако мы должны учесть последнее условие с поворотом. Представим массив, как буффер из 6-ти элементов. Теперь представим каждого игрока, как номер (1, 2, 3...). Тогда буффер в одной из его вариаций может выглядеть, как [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Очевидно, что мы можем 6 раз применить на него перестановку (1->2->3->4->5->6), чтобы он вернулся в изначальное положение. Это говорит, нам о том, что для каждой рассадки существуют ещё 5 идентичных, которые мы не учитываем $\Rightarrow$ количество рассадок = $\frac{6!}{6} = 5! = 120$
Теперь для каждой рассадки рассмотрим количество вариантов выбора игроками ролей. Первый может выбрать из 2 ролей, второй из 2 и т.д. $\Rightarrow$ Всего таких вариантов $2^6 = 64$
Теперь для каждой рассадки мы учтём возможные вариации ролей, перемножив их $\Rightarrow 64 * 120 = 7680$

Если же я неправильно понял вопрос, и под совокупностью пар вида человек + его роль имеется ввиду просто (представим людей, как массив 0 и 1, где 0-первая роль, а 1-вторая) количество возможных комбинаций массива из 6 элементов, состоящего из 0 и 1, то для нас не имеет значение то, где он сидит. Нам важно первая он роль или вторая, тогда ответ $2^6 = 64$. В любом случае условие не очень понятное.



5 Для представленного графа определите:

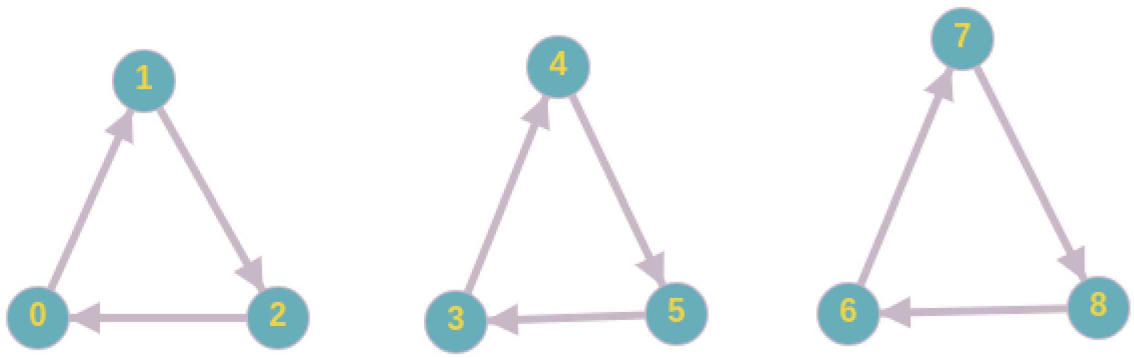
5.1 есть ли в графе Эйлеров цикл или Эйлерова цепь? Если есть, то выпишите. Если нет, то обоснуйте отсутствие

Согласно теореме, доказанной Эйлером, эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда граф связный или будет являться связным, если удалить из него все изолированные вершины, и в нём отсутствуют вершины нечётной степени. Однако в нём ВСЕ вершины нечётной степени $\Rightarrow$ в графе нет Эйлерова цикла.
Кроме того по той-же причине в графе нет Эйлеровой цепи, т.к. в графе может быть Эйлерова цепь тогда и только тогда, когда граф связный и содержит не более 2 вершин нечётной степени.

5.2 есть ли в графе Гамильтонов цикл, Гамильтонова цепь? Если есть, то выпишите. Если нет, то обоснуйте отсутствие

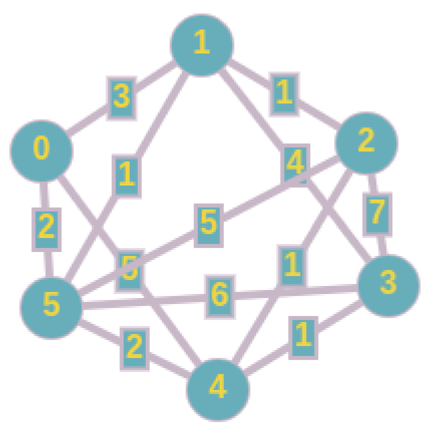
Путь: H→J→I→G→F→E→A→B→C→D
Цикл: H→J→I→C→D→E→F→G→A→B→H

6 **Нарисуйте орфорграф с 3мя компонентами сильной связности, имеющий не более 13 вершин и не менее 5.**

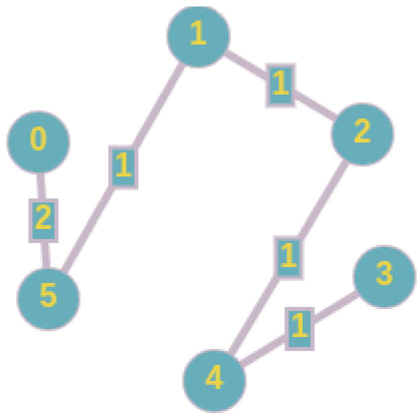


7 **Граф задан матрицей расстояний. Требуется:**

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & - & - & 5 & 2 \\ & 0 & 1 & 4 & - & 1 \\ & & 0 & 7 & 1 & 5 \\ & & & 0 & 1 & 6 \\ & & & & 0 & 2 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

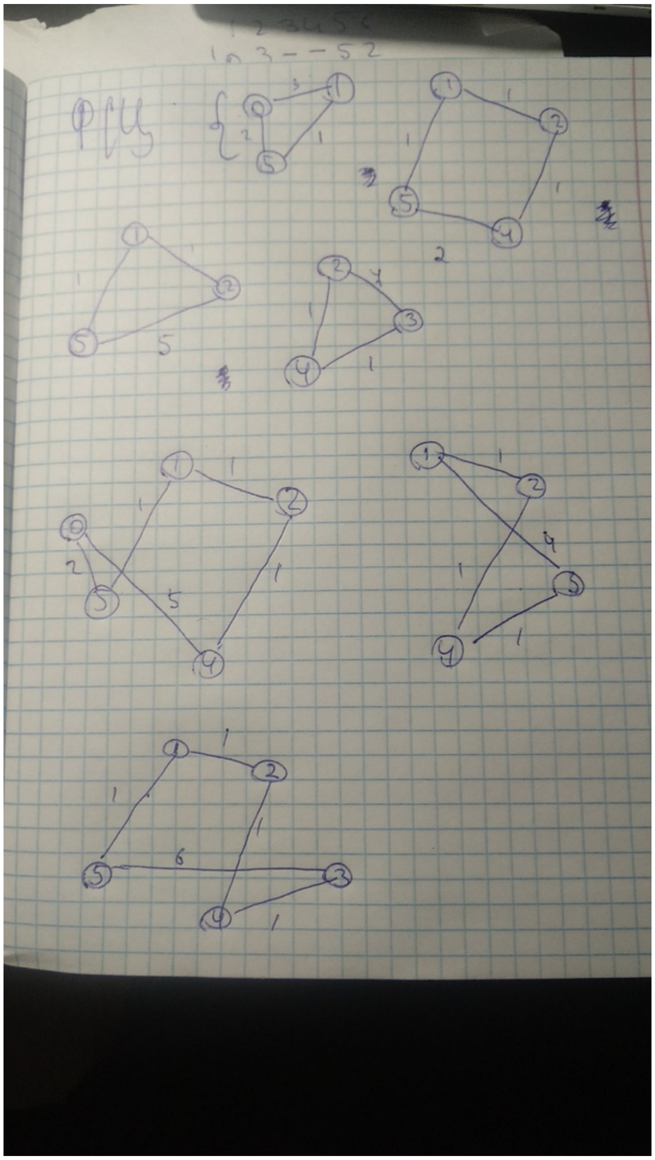


7.1 построить минимальное остовное дерево



Здеь и в дальнейшем использовал переобозначение, где n-той вершине сопоставлялась n-1 вершина.

7.2 построить фундаментальную систему циклов, ассоциированную с этим остовом



7.3 найти кратчайшие пути от вершины 4 до всех остальных вершин графа

Для нахождения использовал самописную программу, использующую алгоритм Флойда-Уоршелла.

$3 \to 0$ - 5
$3 \to 1$ - 3
$3 \to 2$ - 2
$3 \to 3$ - 0
$3 \to 4$ - 1
$3 \to 5$ - 3