

基礎数学Ⅰ 春休み宿題

【1】 次の計算をせよ。

- (1) $-3^2+(-2)^3$
- (2) $x^2y^3\times(3xy^2)^2$
- (3) $\sqrt{12}\times\sqrt{75}$
- (4) $\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{8}$
- (5) $(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$
- (6) $|-2+5|-|8-10|+|-3|$

【2】 整式 $8x-3x^3+4x^2-5-2x$ を降べきの順に整理せよ。

【3】 $A=2x^2-x-5$, $B=-x^2+3x+2$ のとき, $A+B$, $A-B$ を求めよ。

【4】 次の式を展開せよ。

- (1) $(x-5)^2$
- (2) $(2x+1)^2$
- (3) $(3x+2y)(3x-2y)$
- (4) $(x+5)(x-9)$

【5】 次の式を展開せよ。

- (1) $(2x-1)(x+2)$
- (2) $(a+b+2)^2$

【6】 次の式を因数分解せよ。

- (1) $2a^2b-6ab^2+10ab$
- (2) $49x^2-64y^2$
- (3) $x^2-8xy+16y^2$
- (4) $3x^2-16x-12$

【7】 次の式の分母を有理化せよ。

- (1) $\frac{3}{\sqrt{6}}$
- (2) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

【8】 次の不等式を解け。

- (1) $x+2>7$
- (2) $x-7\geq-3$
- (3) $-3x<6$

【9】 次の不等式を解け。

- (1) $5x>3x+8$
- (2) $4x-3>7x+6$

(3) $2x-3\geq-5x+18$

【10】 次の不等式を解け。

- (1) $2x+3\geq4(x+1)+7$
- (2) $\frac{2(x+6)}{3}>\frac{x-4}{4}$

【11】 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 2(3-x)<x & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3(x-2)-2(x-1)\geq0 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

【12】 不等式 $6x+8(4-x)>5$ の解のうちで, 2桁の自然数をすべて求めよ。

【13】 全体集合 U を20以下の自然数の集合とする。 U の部分集合 A , B を

$A=\{x|x\text{は4の倍数}\}$

$B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

とするとき, 次の集合を求めよ。

- (1) \overline{A}
- (2) $A\cap B$
- (3) $A\cup B$

【14】 次の命題の真偽を答えよ。また, 偽であるときは反例をあげよ。

- (1) $x=7\Rightarrow x^2=49$
- (2) $x^2=49\Rightarrow x=7$
- (3) $x^2-x=0\Rightarrow x=1$
- (4) $x^2-2x+1=0\Rightarrow x=1$

【15】 次の命題の真偽を答えよ。また, 偽であるときは反例をあげよ。

- (1) $x\geq3\Rightarrow x\geq0$
- (2) $x>-1\Rightarrow x>3$
- (3) $x<0\Rightarrow x<2$
- (4) $x\leq1\Rightarrow x\leq-2$

【16】 次の条件 p , q について, p は q であるための必要条件である, 十分条件である, 必要十分条件である, のうち最も適切なものを答えよ。

- (1) $p:x=4, \quad q:x^2-16=0$
- (2) $p:x=2, \quad q:x^2-4x+4=0$
- (3) p :図形 F は台形である。
 q :図形 F は平行四辺形である。

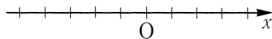
【17】 次の条件の否定をつくれ。

- (1) 自然数 m , n はいずれも偶数である。

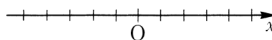
(2) $-2 < x$ かつ $x \leq 4$

【18】 次の条件を満たす x の集合を図示することにより、 p は
 $q: -4 \leq x < 2$ であるための必要条件か十分条件かを答えよ。

(1) $p: -3 < x < 1$



(2) $p: -5 < x < 3$



【19】 次の命題の逆、裏および対偶をつくり、その真偽を調べよ。

(1) $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$

(2) 正方形ならば台形である。

【20】 次の各問に答えよ。

(1) 2次関数 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ について、 $f(2) = \square$ である。

(2) 2次関数 $y = 2x^2 - 1$ のグラフの頂点の座標は \square である。

(3) 2次関数 $y = -3(x-1)^2$ のグラフは直線 \square に関して対称である。

(4) 2次関数 $y = 2x^2$ のグラフを x 軸の方向に3、 y 軸の方向に4だけ平行移動した放物線をグラフとする2次関数は \square である。

(5) 2次関数 $y = -2x^2 + 4$ の最小値はないが、最大値は \square である。

(6) 2次関数 $y = x^2 (-1 \leq x \leq 2)$ の最大値は4であり、最小値は \square である。

【21】 次の2次関数のグラフはどれか。記号で答えよ。

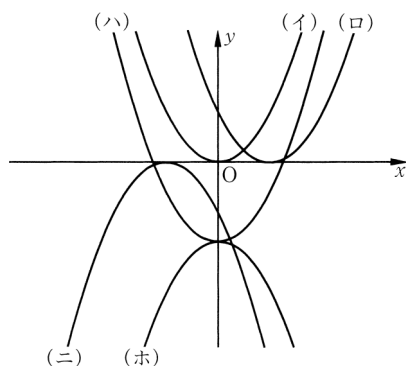
(1) $y = \frac{1}{2}x^2$ \square

(2) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$ \square

(3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$ \square

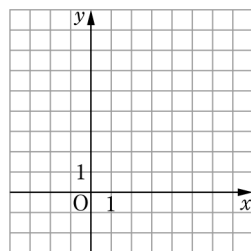
(4) $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$ \square

(5) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2$ \square

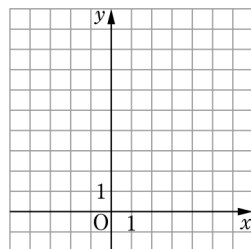


【22】 次の2次関数のグラフをかけ。

(1) $y = x^2 - 4x + 5$

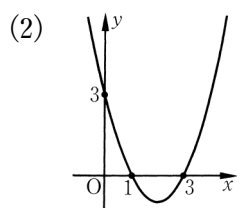
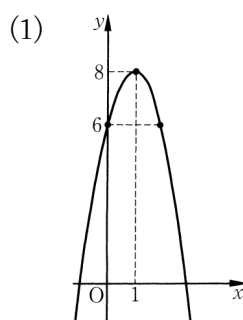


(2) $y = x(x-2)$



【23】 2次関数 $y = x^2 - ax$ のグラフが、点 $(1, 3)$ を通るとき、 a の値を求めよ。また、この関数の最大値または最小値を求めよ。

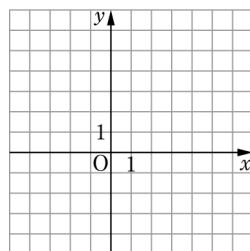
【24】 下の図のような放物線をグラフとする2次関数を求めよ。



【25】 $f(x) = -2x^2 + ax + 3$ について、 $f(3) = -3$ を満たしているとき、次の問に答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 2次関数 $y = f(x)$ のグラフの軸と頂点を求め、そのグラフをかけ。



(3) 2次関数 $y = f(x)$ において、定義域が $-1 \leq x \leq 2$ のときの最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。

【26】 次の2次方程式を解け。

(1) $x^2 - 5x - 24 = 0$

(2) $2x^2 - x - 1 = 0$

(3) $x^2 + 5x - 1 = 0$

(4) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

【27】 2次方程式 $2x^2 + 3x + k = 0$ が異なる2つの実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

【28】 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標を求めよ。

(1) $y=x^2+5x+6$

(2) $y=3x^2-6x+1$

【29】 次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(1) $y=3x^2+2x+1$

(2) $y=-2x^2+x+3$

【30】 2次関数 $y=x^2-3x+k$ のグラフが x 軸と1点で接するような定数 k の値を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

【31】 次の2次不等式を解け。

(1) $x^2+x-2>0$

(2) $x^2-6x-7\leq 0$

(3) $4x^2-4x+1>0$

(4) $x^2-8x+17\geq 0$

【32】 次の2次不等式を満たす整数 x をすべて求めよ。

$$2x^2-x-15<0$$

【33】 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} x^2-4x+3>0 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ x^2-3x-10\leq 0 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

【34】 次の式を展開せよ。

$$(x-2)^3$$

【35】 次の式を因数分解せよ。

$$x^3-8$$

【36】 $(x+2)^7$ の展開式における x^4 の係数を求めよ。

【37】 次の分数式を計算せよ。

$$\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+x-2}$$

【38】 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}$

(2) $\frac{6}{\sqrt{-3}}$

(3) $(2+i)(3-i)$

(4) $\frac{i}{2+i}$

【39】 解の公式を用いて、次の2次方程式を解け。

$$x^2-x+4=0$$

【40】 次の2次方程式のうち、異なる2つの虚数解をもつものはどれか。

(イ) $3x^2-x+2=0$

(ロ) $16x^2-8x+1=0$

(ハ) $4x^2-x-2=0$

(ニ) $2x^2+3x+5=0$

【41】 2次方程式 $2x^2-7x+4=0$ の2つの解を α, β とするとき、

(1) $\alpha+\beta, \alpha\beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

(3) 2数 $2\alpha-1, 2\beta-1$ を解とする2次方程式を1つ求めよ。

【42】 2次方程式 $x^2+(a+1)x+4=0$ が重解をもち、2次方程式 $x^2+2x+a=0$ が虚数解をもつように、実数 a の値を定めよ。

【43】 整式 $P(x)=x^3-3x+a$ が $x-1$ で割り切れるとき、次の間に答えよ。

(1) 定数 a の値を求めよ。

(2) この $P(x)$ を $x+3$ で割った余りを求めよ。

(3) 方程式 $x^3-3x+a=0$ を解け。

【44】 次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

$$a(x^2-3)+b(x+3)+c=3x^2+2x-5$$

【45】 次の等式を証明せよ。

$$(a+3b)^2=(a-3b)^2+12ab$$

【46】 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ のとき $\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$ を証明せよ。

【47】 次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

$$x^2+4\geq -4x$$

【48】 $a>0$ のとき、次の不等式を証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

$$a+\frac{36}{a}\geq 12$$

【49】 次の計算をせよ。

(1) $a^2\times a^5\div a^3$

(2) $(a^3)^2\times(a^2)^{-4}$

【50】 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{-343}$

(2) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{54}$

(3) $(\sqrt[4]{49})^2$

【51】 次の値を求めよ。

(1) $36^{\frac{3}{2}}$

(2) $8^{-\frac{1}{3}}$

(3) $125^{-\frac{2}{3}}$

【52】 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{a^7}$

(2) $\sqrt[7]{a^{10}}\div\sqrt[7]{a^3}$

【53】 次の各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1) $4, \sqrt[3]{16}, \sqrt{2^3}$

(2) $\sqrt[5]{\frac{1}{9}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt[9]{\frac{1}{81}}$

【54】 方程式 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 16$ を解け。

【55】 方程式 $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$ を解け。

【56】 次の等式を満たす M, a の値を求めよ。

(1) $\log_3 M = 2$

(2) $\log_a 27 = 3$

【57】 次の値を求めよ。

(1) $\log_5 \sqrt{5}$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} 27$

(3) $\log_{\frac{1}{8}} 16^2$

【58】 次の計算をせよ。

(1) $\log_3 54 - \log_3 6$

(2) $3\log_4 2 + \log_4 6 - \log_4 3$

【59】 底の変換公式を用いて、次の計算をせよ。

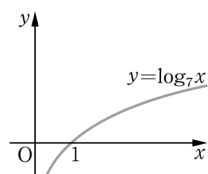
(1) $\log_{\sqrt{7}} 49$

(2) $\log_3 25 \cdot \log_5 27$

【60】 方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$ を解け。

【61】 次の数を小さい方から順に並べよ。

$\log_7 4, \log_7 \frac{3}{4}, \log_7 9$



【62】 $\log_{10} 6 = 0.7782$ を用いて、 6^{20} の桁数を求めよ。

【1】

(1) -17

(2) $9x^4y^7$

(3) 30

(4) $3\sqrt{2}$

(5) $7-2\sqrt{10}$

(6) 4

【2】

$-3x^3+4x^2+6x-5$

【3】

$A+B=x^2+2x-3, A-B=3x^2-4x-7$

【4】

(1) $x^2-10x+25$

(2) $4x^2+4x+1$

(3) $9x^2-4y^2$

(4) $x^2-4x-45$

【5】

(1) $2x^2+3x-2$

(2) $a^2+b^2+2ab+4a+4b+4$

【6】

(1) $2ab(a-3b+5)$

(2) $(7x+8y)(7x-8y)$

(3) $(x-4y)^2$

(4) $(x-6)(3x+2)$

【7】

(1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

【8】

(1) $x>5$

(2) $x\geq 4$

(3) $x>-2$

【9】

(1) $x>4$

(2) $x<-3$

(3) $x\geq 3$

【10】

(1) $x\leq -4$

(2) $x>-12$

【11】

$x\geq 4$

【12】

$10, 11, 12, 13$

【13】

(1) $\overline{A}=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19\}$

(2) $A\cap B=\{4, 8\}$

(3) $A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 16, 20\}$

【14】

(1) 真

(2) 偽 反例 $\cdots x=-7$

(3) 偽 反例 $\cdots x=0$

(4) 真

【15】

(1) 真

(2) 偽 (反例 $x=0$)

(3) 真

(4) 偽 (反例 $x=0$)

【16】

(1) p は q であるための十分条件である。

(2) p は q であるための必要十分条件である。

(3) p は q であるための必要条件である。

【17】

(1) 自然数 m, n の少なくとも一方は奇数である。

(2) $x\leq -2$ または $4<x$

【18】

(1) p は q であるための十分条件である。

(2) p は q であるための必要条件である。

【19】

- (1) 逆 $x^2=4 \Rightarrow x=-2$ 偽 (反例… $x=2$)
 裏 $x \neq -2 \Rightarrow x^2 \neq 4$ 偽 (反例… $x=2$)
 対偶 $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq -2$ 真

- (2) 逆 台形ならば正方形である。
 偽 (反例…長方形)
 裏 正方形でないならば台形でない。
 偽 (反例…長方形)
 対偶 台形でないならば正方形ではない。 真

【20】

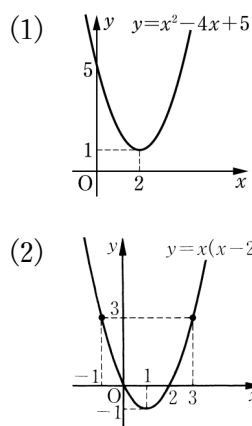
- (1) -3
 (2) $(0, -1)$
 (3) $x=1$
 (4) $y=2(x-3)^2+4$

- (5) 4
 (6) 0

【21】

- (1) (イ)
 (2) (ハ)
 (3) (ホ)
 (4) (ロ)
 (5) (ニ)

【22】



- 【23】
 $a = -2$
 $x = -1$ のとき最小値 -1 , 最大値なし

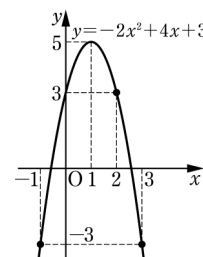
【24】

- (1) $y = -2(x-1)^2 + 8$
 (2) $y = x^2 - 4x + 3$

【25】

- (1) $a = 4$

- (2) 軸は 直線 $x=1$
 頂点は 点 $(1, 5)$
 グラフは右の図。



- (3) $x=1$ のとき
 最大値 5
 $x=-1$ のとき
 最小値 -3

【26】

- (1) $x = -3, 8$
 (2) $x = -\frac{1}{2}, 1$
 (3) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$
 (4) $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

【27】

$$k < \frac{9}{8}$$

【28】

- (1) $-2, -3$
 (2) $\frac{3-\sqrt{6}}{3}, \frac{3+\sqrt{6}}{3}$

【29】

- (1) 0 個
 (2) 2 個

【30】

$$k = \frac{9}{4}, \text{ 接点の座標は } \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

【31】

- (1) $x < -2, 1 < x$
 (2) $-1 \leq x \leq 7$
 (3) $\frac{1}{2}$ 以外のすべての実数
 (4) すべての実数

【32】

$$-2, -1, 0, 1, 2$$

【33】

$$-2 \leq x < 1, 3 < x \leq 5$$

【34】

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

【35】

$$(x-2)(x^2+2x+4)$$

【36】

$$280$$

【37】

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

【38】

$$(1) \quad -2\sqrt{3}$$

$$(2) \quad -2\sqrt{3}i$$

$$(3) \quad 7+i$$

$$(4) \quad \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

【39】

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{15}i}{2}$$

【40】

(イ) と (ニ)

【41】

$$(1) \quad \alpha + \beta = \frac{7}{2}, \quad \alpha\beta = 2$$

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{33}{4}$$

$$(3) \quad x^2 - 5x + 2 = 0$$

【42】

$$a = 3$$

【43】

$$(1) \quad a = 2$$

$$(2) \quad -16$$

$$(3) \quad x = 1 \text{ (重解)}, \quad -2$$

【44】

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c = -2$$

【45】

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= (a+3b)^2 \\ &= a^2 + 6ab + 9b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (a-3b)^2 + 12ab \\ &= (a^2 - 6ab + 9b^2) + 12ab \\ &= a^2 + 6ab + 9b^2 \end{aligned}$$

ゆえに 左辺 = 右辺

【46】

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \text{ とおくと } a = bk, \quad c = dk \text{ と表せるから}$$

$$\text{左辺} = \frac{b}{a+b} = \frac{b}{bk+b} = \frac{b}{b(k+1)} = \frac{1}{k+1}$$

$$\text{右辺} = \frac{d}{c+d} = \frac{d}{dk+d} = \frac{d}{d(k+1)} = \frac{1}{k+1}$$

ゆえに 左辺 = 右辺

【47】

$$\text{左辺} - \text{右辺} = x^2 + 4x + 4$$

$$= (x+2)^2 \geq 0$$

$$\text{ゆえに } x^2 + 4 \geq -4x$$

$$\text{等号が成り立つのは } x+2=0$$

すなわち, $x = -2$ のときである。

【48】

$$a > 0, \quad \frac{36}{a} > 0 \text{ であるから, 相加平均と相乗平均の関係より}$$

$$a + \frac{36}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{36}{a}} = 2 \cdot 6 = 12$$

$$\text{等号が成り立つのは } a = \frac{36}{a} \text{ のとき, すなわち } a^2 = 36 \quad (a > 0) \text{ より,}$$

$a = 6$ のときである。

【49】

$$(1) \quad a^4$$

$$(2) \quad a^{-2}$$

【50】

$$(1) \quad -7$$

$$(2) \quad 6$$

$$(3) \quad 7$$

【51】

$$(1) \quad 216$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \frac{1}{25}$$

【52】

$$(1) \quad a^3$$

$$(2) \quad a$$

【53】

$$(1) \quad \sqrt[3]{16} < \sqrt{2^3} < 4$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt[9]{\frac{1}{81}} < \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$$

【54】

$$x = -3$$

【55】

$$x = 1$$

【56】

$$(1) \quad M = 9$$

$$(2) \quad a = 3$$

【57】

(1) $\frac{1}{2}$

(2) -3

(3) $-\frac{8}{3}$

【58】

(1) 2

(2) 2

【59】

(1) 4

(2) 6

【60】

$x=7$

【61】

$\log_7 \frac{3}{4} < \log_7 4 < \log_7 9$

【62】

16