KEG 上におけるクロスキャップ数の計算

Kaito Yamada

2022-10-27

概 要

研究の要旨。なんやかんや

目 次

1　はじめに

1.1　研究背景

1.1.1　S^+ のアルゴリズムとは

1.1.2　KEG とは

1.2　先行研究

1.2.1　C(K)=3 の場合

1.2.2　KEG の同値判定

1.3　研究目的

2　アルゴリズムと計算量

2.1　グラフの拡張

2.1.1　頂点の分割のアルゴリズム

2.1.2　RI^+ のアルゴリズム

2.1.3　計算量

2.2　S^+ の対象の列挙

2.2.1　列挙のアルゴリズム

S^+ はグラフへの操作だが、本質的にはオイラー閉路のうち二辺に対する操作である。あるグラフ G が与えられたとき、G に対応するオイラー閉路 (辺のリスト) が一つに定まるが、その閉路の中で S^+ の対象となりうる辺のペアは複数現れる。よってそのペア (操作対象) を列挙することが必要である。各ペアの列挙は、以下の操作で実現される。

1. グラフ G のオイラー閉路 C_e を求める。C_e の長さはグラフの辺の総数と等しいので、E。
2. C_e を 2 個連結する。
3. i=[0, E-1] をループし、e_s=C_e[i] とする。j=[1, E-1] とし、e_g=C_e[i+j] とする。

結果として生成されるペアは E(E-1) 組となる。

2.2.2　計算量

1. オイラー閉路の取得 →DFS なので $O(E+V)$
2. オイラー閉路の連結 → 長さ E のものを結合するので $O(E)$
3. ペアの列挙 → 各辺を e_s として、e_g の候補が E-1 通りなので $O(E^2)$

$E=2V \Rightarrow E+V=E+\frac{1}{2}E=\frac{3}{2}E$ であるため、$O(E+V)=O(E)$ とみなせる。

2.3　S^{+} の適用

2.3.1　KEG における S^{+} のアルゴリズム

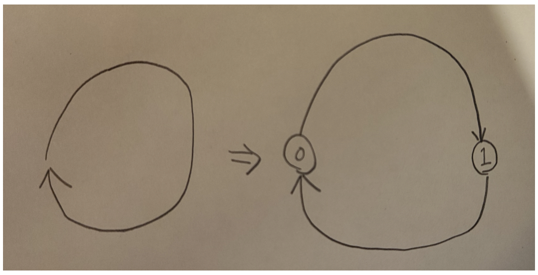
KEG を対象とした S^{+} のアルゴリズムはいかに示す通りである。

1. Odd 頂点 O を追加する。
2. a, b から O に、O から c, d に繋がるように辺を追加する。この時 a と d, b と c がそれぞれ O の同じ側 (A/B) に繋がるようにする。即ち、(a, O, T_a, A), (b, O, T_b, B), (O, c, B, T_c), (O, d, A, T_d) の 4 辺を追加する。
3. C_e で e_s と e_g の間にある辺全てを逆向きにした辺を追加する。即ち、(u, v, T_u, T_v) を (v, u, T_v, T_u) にする。
4. $[e_s, e_g]$ の辺を削除する

2.3.2　操作例

ここでは単純な例を二つ上げ、他の例については付録にて示す。

step0 → step1 の例

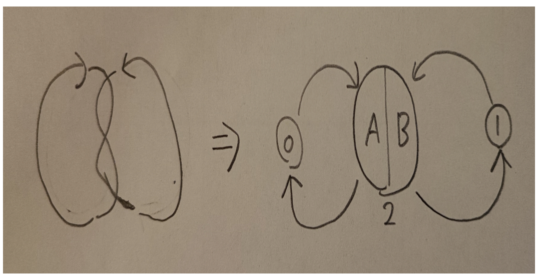


[(0, 1, N, N), (1, 0, N, N)]

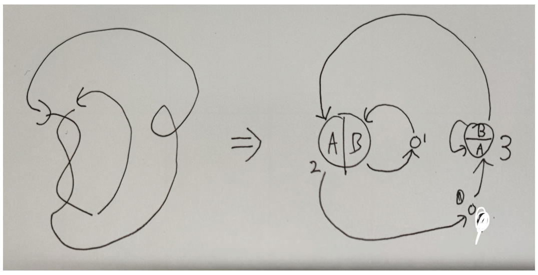
区間 $[0, 1]$ を対象に S^{+} を行う。

1. Odd 頂点 2 を追加。
2. a=0, T_a=N, b=1, T_b=N, c=1, T_c=N, d=0, T_d=N として、頂点 2 と繋がる辺を追加。(0, 2, N, A),(1, 2, N, B),(2, 1, B, N),(2, 0, A, N) の 4 辺。
3. (0, 1, N, N), (1, 0, N, N) を消去。

最終的に残る辺は [(0, 2, N, A),(1, 2, N, B),(2, 1, B, N),(2, 0, A, N)] の 4 辺。



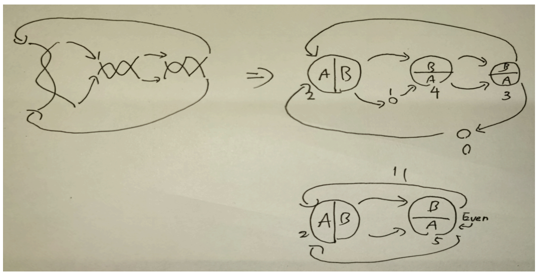
step1 → step2-2 の例　step1 に RI^+ を行い、Odd 頂点 3 が追加され以下の状態になる。



[(1, 2, N, B), (2, 0, A, N), (0, 3, N, A), (3, 3, B, A), (3, 2, B, A), (2, 1, B, N)]
区間 $[0, 3]$ を対象に S^+ を行う。

1. Odd 頂点 4 を追加
2. a=1, T_a=N, b=2, T_b=B, c=3, T_c=B, d=3, T_d=A として、頂点 3 と繋がる 4 辺を追加。(1, 4, N, A), (2, 4, B, B), (4, 3, B, B), (4, 3, A, A) の 4 辺。
3. (1, 2, N, B), (3, 3, B, A) を消去。
4. (2, 0, A, N), (0, 3, N, A) を反転して (0, 2, N, A), (3, 0, A, N) にする。

[(3, 2, B, A), (2, 1, B, N), (1, 4, N, A), (2, 4, B, B), (4, 3, B, B), (4, 3, A, A), (0, 2, N, A), (3, 0, A, N)]
頂点 3, 4 は Odd+Odd→ Even に統合でき、Even 頂点 5 の追加と空頂点の削除をすると以下の通りになる。
[(2, 5, B, B), (5, 2, B, A), (2, 5, B, A), (5, 2, A, A)]



2.3.3　計算量

ある KEG において、任意の 2 辺に対する S^+ の結果を得るのに必要な計算量を考えていく。

1. 頂点追加 → $O(1)$
2. Odd 頂点への 4 辺の追加 → 定数なので $O(1)$
3. e_s と e_g の間の辺を逆にする → 最大 E-2 辺に行われるので $O(E)$
4. 逆転前の辺を削除する → 最大 E-2 辺に行われるので $O(E)$

2.2 節で列挙したペアのそれぞれについて S^+ を適用するため、各計算ステップの最大次数を見ると E^2 回のループで $O(E)$ の操作をするためトータルで $O(E^3)$

3　まとめ

研究のまとめ。なんやかんや

謝辞

本論文を作成するにあたり、—- みなさまに感謝の意を表します.

参考文献

[1] Noboru Ito and Yusuke Takimura. Crosscap number three alternating knots. J. Knot Theory Ramifications, 31(4):2250026–1–2250026–11, 6 2022.

[2] Noboru Ito and Kaito Yamada. Plumbing and computation of crosscap number. JP Journal of Geometry and Topology, 26(2):103–115, 11 2021.

[2] [1]