

KEG上におけるクロスキャップ数の計算

2022年10月21日

Kaito Yamada

概要

目次

第 1 章	はじめに	2
1.1	研究背景	2
1.2	先行研究	2
1.3	研究目的	2
第 2 章	アルゴリズムと計算量	3
2.1	S^+ のアルゴリズム	3
2.2	グラフの拡張	6
第 3 章	まとめ	7
謝辞		8
参考文献		8
参考文献		9

第1章

はじめに

1.1 研究背景

1.1.1 S^+ のアルゴリズムとは

1.1.2 KEG とは

1.2 先行研究

1.2.1 $C(K)=3$ の場合

1.2.2 KEG の同値判定

1.3 研究目的

第2章

アルゴリズムと計算量

2.1 S^+ のアルゴリズム

2.1.1 KEG における S^+ のアルゴリズム

KEG を対象とした S^+ のアルゴリズムはいかに示す通りである。

1. オイラー閉路を辺のリストで持つ
2. オイラー閉路から始辺 $e_s(a, b, T_a, T_a)$ と、終辺 $e_g(c, d, T_c, T_d)$ を選ぶ (この時 $e_s \neq e_g$ となるようにする)
3. Odd 頂点 O を追加する。
4. a, b から O に、O から c, d に繋がるように辺を追加する。この時 a と d, b と c がそれぞれ O の同じ側 (A/B) に繋がるようにする。即ち、(a, O, T_a, A), (b, O, T_b, B), (O, c, B, T_c), (O, d, A, T_d) の 4 辺を追加する。
5. オイラー閉路で e_s と e_g の間にある辺全てを逆向きにした辺を追加する。即ち、(u, v, T_u, T_v) を (v, u, T_v, T_u) にする。
6. e_s から e_g までの辺を削除する

2.1.2 操作対象の列挙

S^+ はグラフへの操作だが、本質的にはオイラー閉路のうち二辺に対する操作である。あるグラフ G が与えられたとき、G に対応するオイラー閉路 (辺のリスト) が一つに定まるが、その閉路の中で S^+ の対象となりうる辺のペアは複数現れる。よってそのペア (操作対象) を列挙することが必要である。

上記の手順 1, 2 の各ペアの列挙は、以下の操作で実現される。

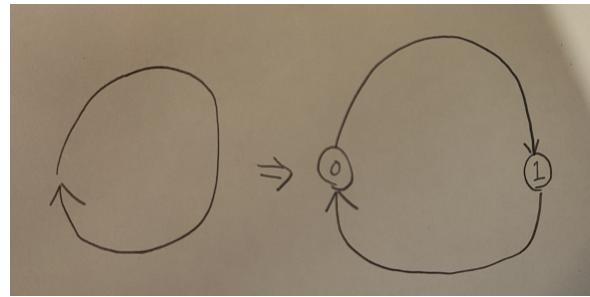
1. グラフ G のオイラー閉路 C_e を求める。 C_e の長さを n とする。
2. C_e を 2 個連結する。
3. $i=[0, n-1]$ をループし、 $e_s=C_e[i]$ とする。 $j=[1, n-1]$ とし、 $e_g=C_e[i+j]$ とする。

結果として生成されるペアは $n(n-1)$ 組となる。

2.1.3 操作例

手順 3, 4, 5, 6 について、ここでは単純な例を二つ上げ、他の例については付録にて示す。

step0 → step1

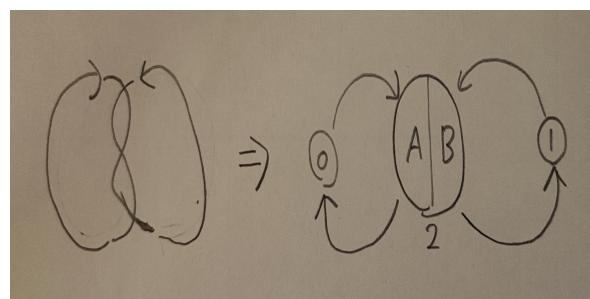


$[(0, 1, N, N), (1, 0, N, N)]$

区間 $(0, 1)$ を対象に S^+ を行う。

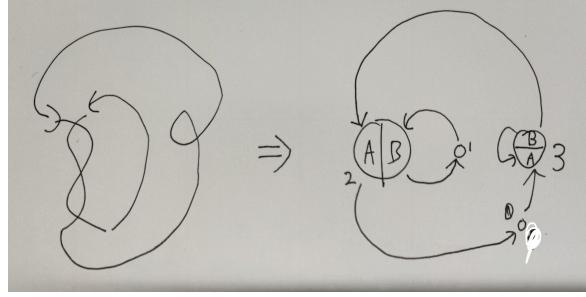
1. Odd 頂点 2 を追加。
2. $a=0, Ta=N, b=1, Tb=N, c=1, Tc=N, d=0, Td=N$ として、頂点 2 と繋がる辺を追加。 $(0, 2, N, A), (1, 2, N, B), (2, 1, B, N), (2, 0, A, N)$ の 4 辺。
3. $(0, 1, N, N), (1, 0, N, N)$ を消去。

最終的に残る辺は $[(0, 2, N, A), (1, 2, N, B), (2, 1, B, N), (2, 0, A, N)]$ の 4 辺。



step1 → step2-2

step1 に RI+ を行い、Odd 頂点 3 が追加され以下の状態になる。



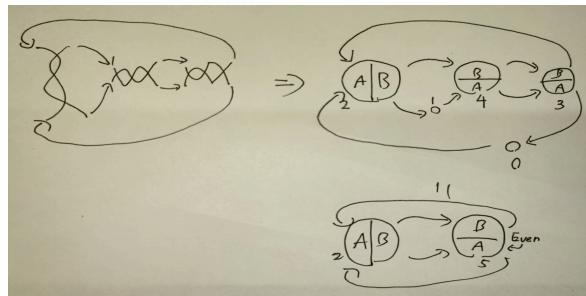
$[(1, 2, N, B), (2, 0, A, N), (0, 3, N, A), (3, 3, B, A), (3, 2, B, A), (2, 1, B, N)]$
区間 $(0, 3)$ を対象に $s+$ を行う。

1. Odd 頂点 4 を追加
2. $a=1, Ta=N, b=2, Tb=B, c=3, Tc=B, d=3, Td=A$ として、頂点 3 と繋がる 4 辺を追加。
 $(1, 4, N, A), (2, 4, B, B), (4, 3, B, B), (4, 3, A, A)$ の 4 辺。
3. $(1, 2, N, B), (3, 3, B, A)$ を消去。
4. $(2, 0, A, N), (0, 3, N, A)$ を反転して $(0, 2, N, A), (3, 0, A, N)$ にする。

$[(3, 2, B, A), (2, 1, B, N), (1, 4, N, A), (2, 4, B, B), (4, 3, B, B), (4, 3, A, A), (0, 2, N, A), (3, 0, A, N)]$

頂点 3, 4 は Odd+Odd-Even に統合でき、Even 頂点 5 の追加とともに空頂点の削除をすると以下の通りになる。

$[(2, 5, B, B), (5, 2, B, A), (2, 5, B, A), (5, 2, A, A)]$



2.1.4 計算量

各ステップの計算量を考えていく。

1. オイラー閉路の取得 \rightarrow DFS なので $O(E + V)$
2. ペアの列挙 \rightarrow 各辺を e_s として e_g の候補が $E-1$ 通りなので $O(E^2)$
3. 頂点追加 $\rightarrow O(1)$
4. Odd 頂点への 4 辺の追加 \rightarrow 定数なので $O(1)$
5. e_s と e_g の間の辺を逆にする \rightarrow 最大 $E-2$ 辺に行われる所以 $O(E)$

6. 逆転前の辺を削除する → 最大 E-2 辺に行われる所以 $O(E)$

手順 1, 2 で列挙したペアのそれぞれについて手順 3, 4, 5, 6 を適用するため、最大次数を見ると E^2 回のループで $O(E)$ の操作をするためトータルで $O(E^3)$

2.2 グラフの拡張

2.2.1 頂点の分割

2.2.2 RI⁺ のアルゴリズム

2.2.3 計算量

第3章

まとめ

謝辞

本論文を作成するにあたり、— みなさまに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] Noboru Ito and Yusuke Takimura. Crosscap number three alternating knots. *J. Knot Theory Ramifications*, 31(4):2250026–1–2250026–11, 6 2022.
- [2] Noboru Ito and Kaito Yamada. Plumbing and computation of crosscap number (available with downloaded from arxiv). *JP Journal of Geometry and Topology*, 26(2):103–115, 11 2021.

[2] [1]