

## KEG上におけるクロスキャップ数の計算

Kaito Yamada

2022-11-02

概要

# 目次

<b>1 はじめに</b>	<b>3</b>
1.1 研究背景 . . . . .	3
1.1.1 $S^+$ のアルゴリズムとは . . . . .	3
1.1.2 KEG とは . . . . .	3
1.2 先行研究 . . . . .	3
1.2.1 $C(K) = 3$ の場合 . . . . .	3
1.2.2 KEG の同値判定 . . . . .	3
1.3 研究目的 . . . . .	3
<b>2 アルゴリズムと計算量</b>	<b>3</b>
2.1 グラフの拡張 . . . . .	3
2.1.1 頂点の分割のアルゴリズム . . . . .	3
2.1.2 $RI^+$ のアルゴリズム . . . . .	3
2.1.3 計算量 . . . . .	3
2.2 $S^+$ の対象の列挙 . . . . .	3
2.2.1 列挙のアルゴリズム . . . . .	3
2.2.2 計算量 . . . . .	3
2.3 $S^+$ の適用 . . . . .	4
2.3.1 KEG における $S^+$ のアルゴリズム . . . . .	4
2.3.2 操作例 . . . . .	4
2.3.3 計算量 . . . . .	5
<b>3 まとめ</b>	<b>6</b>
<b>謝辞</b>	<b>6</b>

# 1 はじめに

## 1.1 研究背景

### 1.1.1 $S^+$ のアルゴリズムとは

### 1.1.2 KEG とは

## 1.2 先行研究

### 1.2.1 $C(K) = 3$ の場合

### 1.2.2 KEG の同値判定

## 1.3 研究目的

# 2 アルゴリズムと計算量

## 2.1 グラフの拡張

### 2.1.1 頂点の分割のアルゴリズム

### 2.1.2 $RI^+$ のアルゴリズム

### 2.1.3 計算量

## 2.2 $S^+$ の対象の列挙

### 2.2.1 列挙のアルゴリズム

$S^+$  はグラフへの操作だが、本質的にはオイラー閉路のうち二辺に対する操作である。あるグラフ  $G$  が与えられたとき、 $G$  に対応するオイラー閉路(辺のリスト)が一つに定まるが、その閉路の中で  $S^+$  の対象となりうる辺のペアは複数現れる。よってそのペア(操作対象)を列挙することが必要である。各ペアの列挙は、以下の操作で実現される。

1. グラフ  $G$  のオイラー閉路  $C_e$  を求める。 $C_e$  の長さはグラフの辺の総数と等しいので、 $E$ 。
2.  $C_e$  を 2 個連結する。
3.  $i=[0, E-1]$  をループし、 $e_s=C_e[i]$  とする。 $j=[1, E-1]$  とし、 $e_g=C_e[i+j]$  とする。

結果として生成されるペアは  $E(E-1)$  組となる。

### 2.2.2 計算量

1. オイラー閉路の取得  $\rightarrow$  DFS なので  $O(E + V)$
2. オイラー閉路の連結  $\rightarrow$  長さ  $E$  のものを結合するので  $O(E)$
3. ペアの列挙  $\rightarrow$  各辺を  $e_s$  として、 $e_g$  の候補が  $E-1$  通りなので  $O(E^2)$

$E = 2V \Rightarrow E + V = E + \frac{1}{2}E = \frac{3}{2}E$  であるため、 $O(E + V) = O(E)$  とみなせる。

## 2.3 $S^+$ の適用

### 2.3.1 KEG における $S^+$ のアルゴリズム

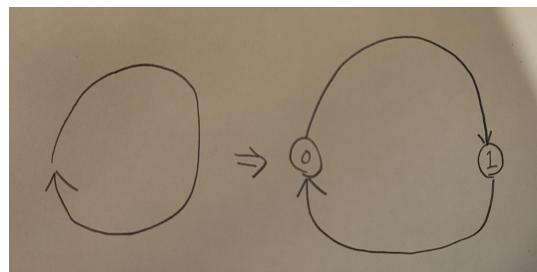
KEG を対象とした  $S^+$  のアルゴリズムはいかに示す通りである。

1. Odd 頂点 O を追加する。
2. a, b から O に、O から c, d に繋がるように辺を追加する。この時 a と d, b と c がそれぞれ O の同じ側 (A/B) に繋がるようにする。即ち、(a, O, T<sub>a</sub>, A), (b, O, T<sub>b</sub>, B), (O, c, B, T<sub>c</sub>), (O, d, A, T<sub>d</sub>) の 4 辺を追加する。
3. C<sub>e</sub> で e<sub>s</sub> と e<sub>g</sub> の間にある辺全てを逆向きにした辺を追加する。即ち、(u, v, T<sub>u</sub>, T<sub>v</sub>) を (v, u, T<sub>v</sub>, T<sub>u</sub>) にする。
4. [e<sub>s</sub>, e<sub>g</sub>] の辺を削除する

### 2.3.2 操作例

ここでは単純な例を二つ上げ、他の例については付録にて示す。

#### 2.3.2.1 step0 → step1 の例

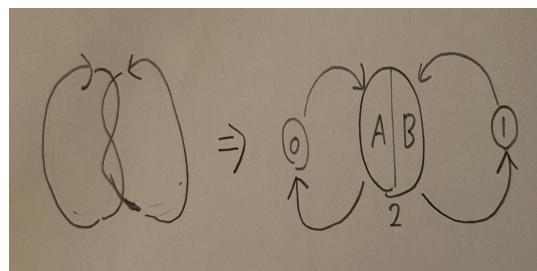


$[(0, 1, N, N), (1, 0, N, N)]$

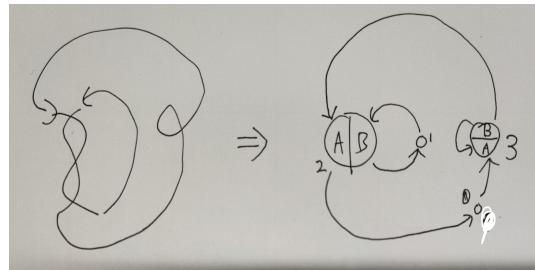
区間  $[0, 1]$  を対象に  $S^+$  を行う。

1. Odd 頂点 2 を追加。
2. a=0, T<sub>a</sub>=N, b=1, T<sub>b</sub>=N, c=1, T<sub>c</sub>=N, d=0, T<sub>d</sub>=N として、頂点 2 と繋がる辺を追加。 $(0, 2, N, A), (1, 2, N, B), (2, 1, B, N), (2, 0, A, N)$  の 4 辺。
3.  $(0, 1, N, N), (1, 0, N, N)$  を消去。

最終的に残る辺は  $[(0, 2, N, A), (1, 2, N, B), (2, 1, B, N), (2, 0, A, N)]$  の 4 边。



**2.3.2.2 step1 → step2-2 の例** step1 に RI<sup>+</sup> を行い、Odd 頂点 3 が追加され以下の状態になる。



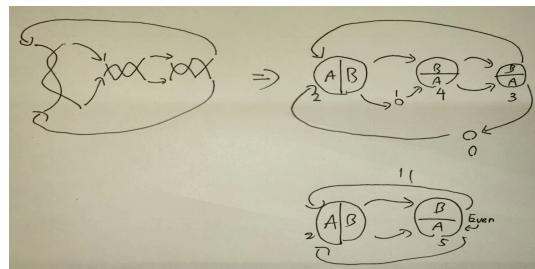
$[(1, 2, N, B), (2, 0, A, N), (0, 3, N, A), (3, 3, B, A), (3, 2, B, A), (2, 1, B, N)]$   
区間  $[0, 3]$  を対象に  $S^+$  を行う。

1. Odd 頂点 4 を追加
2.  $a=1, T_a=N, b=2, T_b=B, c=3, T_c=B, d=3, T_d=A$  として、頂点 3 と繋がる 4 辺を追加。 $(1, 4, N, A), (2, 4, B, B), (4, 3, B, B), (4, 3, A, A)$  の 4 辺。
3.  $(1, 2, N, B), (3, 3, B, A)$  を消去。
4.  $(2, 0, A, N), (0, 3, N, A)$  を反転して  $(0, 2, N, A), (3, 0, A, N)$  にする。

$[(3, 2, B, A), (2, 1, B, N), (1, 4, N, A), (2, 4, B, B), (4, 3, B, B), (4, 3, A, A), (0, 2, N, A), (3, 0, A, N)]$

頂点 3, 4 は Odd+Odd → Even に統合でき、Even 頂点 5 の追加と空頂点の削除をすると以下の通りになる。

$[(2, 5, B, B), (5, 2, B, A), (2, 5, B, A), (5, 2, A, A)]$



### 2.3.3 計算量

ある KEGにおいて、任意の 2 辺に対する  $S^+$  の結果を得るのに必要な計算量を考えていく。

1. 頂点追加  $\rightarrow O(1)$
2. Odd 頂点への 4 辺の追加  $\rightarrow$  定数なので  $O(1)$
3.  $e_s$  と  $e_g$  の間の辺を逆にする  $\rightarrow$  最大 E-2 辺に行われる所以  $O(E)$

4. 逆転前の辺を削除する → 最大 E-2 辺に行われる所以  $O(E)$

2.2 節で列挙したペアのそれぞれについて  $S^+$  を適用するため、各計算ステップの最大次数を見ると  $E^2$  回のループで  $O(E)$  の操作をするためトータルで  $O(E^3)$

3 まとめ

謝辞

本論文を作成するにあたり、— みなさまに感謝の意を表します.

参考文献

- [1] Noboru Ito and Yusuke Takimura. Crosscap number three alternating knots. *J. Knot Theory Ramifications*, 31(4):2250026–1–2250026–11, 6 2022.

[2] Noboru Ito and Kaito Yamada. Plumbing and computation of crosscap number. *JP Journal of Geometry and Topology*, 26(2):103–115, 11 2021.