

KEG 上におけるクロスキャップ数の計算

Kaito Yamada

last compiled: 2022-10-27

概要

研究の要旨。なんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんや
 かんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんや
 なんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんやなんやかんや

目次

第 1 章	はじめに	2
1.1	研究背景	2
1.2	先行研究	2
1.3	研究目的	2
第 2 章	アルゴリズムと計算量	3
2.1	グラフの拡張	3
2.2	S^+ の対象の列挙	3
2.3	S^+ の適用	4
第 3 章	まとめ	7
	謝辞	8
	参考文献	9

第 1 章

はじめに

1.1 研究背景

1.1.1 S^+ のアルゴリズムとは

1.1.2 KEG とは

1.2 先行研究

1.2.1 $C(K)=3$ の場合

1.2.2 KEG の同値判定

1.3 研究目的

第 2 章

アルゴリズムと計算量

2.1 グラフの拡張

2.1.1 頂点の分割のアルゴリズム

2.1.2 RI^+ のアルゴリズム

2.1.3 計算量

2.2 S^+ の対象の列挙

2.2.1 列挙のアルゴリズム

S^+ はグラフへの操作だが、本質的にはオイラー閉路のうち二辺に対する操作である。あるグラフ G が与えられたとき、 G に対応するオイラー閉路 (辺のリスト) が一つに定まるが、その閉路の中で S^+ の対象となりうる辺のペアは複数現れる。よってそのペア (操作対象) を列挙することが必要である。各ペアの列挙は、以下の操作で実現される。

1. グラフ G のオイラー閉路 C_e を求める。 C_e の長さはグラフの辺の総数と等しいので、 E 。
2. C_e を 2 個連結する。
3. $i=[0, E-1]$ をループし、 $e_s=C_e[i]$ とする。 $j=[1, E-1]$ とし、 $e_g=C_e[i+j]$ とする。

結果として生成されるペアは $E(E-1)$ 組となる。

2.2.2 計算量

1. オイラー閉路の取得 → DFS なので $O(E + V)$
2. オイラー閉路の連結 → 長さ E のものを結合するので $O(E)$
3. ペアの列挙 → 各辺を e_s として、 e_g の候補が $E-1$ 通りなので $O(E^2)$

$E = 2V \Rightarrow E + V = E + \frac{1}{2}E = \frac{3}{2}E$ であるため、 $O(E + V) = O(E)$ とみなせる。

2.3 S^+ の適用

2.3.1 KEG における S^+ のアルゴリズム


KEG を対象とした S^+ のアルゴリズムはいかに示す通りである。

1. Odd 頂点 O を追加する。
2. a, b から O に、 O から c, d に繋がるように辺を追加する。この時 a と d, b と c がそれぞれ O の同じ側 (A/B) に繋がるようにする。即ち、 $(a, O, T_a, A), (b, O, T_b, B), (O, c, B, T_c), (O, d, A, T_d)$ の 4 辺を追加する。
3. C_e で e_s と e_g の間にある辺全てを逆向きにした辺を追加する。即ち、 (u, v, T_u, T_v) を (v, u, T_v, T_u) にする。
4. $[e_s, e_g]$ の辺を削除する

2.3.2 操作例

ここでは単純な例を二つ上げ、他の例については付録にて示す。

step0 → step1



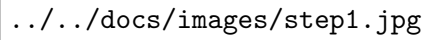
../../docs/images/step0.jpg

$[(0, 1, N, N), (1, 0, N, N)]$

区間 $[0, 1]$ を対象に S^+ を行う。

1. Odd 頂点 2 を追加。
2. $a=0, T_a=N, b=1, T_b=N, c=1, T_c=N, d=0, T_d=N$ として、頂点 2 と繋がる辺を追加。 $(0, 2, N, A), (1, 2, N, B), (2, 1, B, N), (2, 0, A, N)$ の 4 辺。
3. $(0, 1, N, N), (1, 0, N, N)$ を消去。

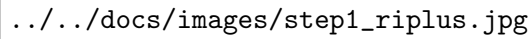
最終的に残る辺は $[(0, 2, N, A), (1, 2, N, B), (2, 1, B, N), (2, 0, A, N)]$ の 4 辺。



../../docs/images/step1.jpg

step1 → step2-2

step1 に RI+ を行い、Odd 頂点 3 が追加され以下の状態になる。



../../docs/images/step1_riplus.jpg

[(1, 2, N, B), (2, 0, A, N), (0, 3, N, A), (3, 3, B, A), (3, 2, B, A), (2, 1, B, N)]

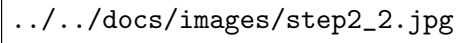
区間 [0, 3] を対象に S^+ を行う。

1. Odd 頂点 4 を追加
2. $a=1, Ta=N, b=2, Tb=B, c=3, Tc=B, d=3, Td=A$ として、頂点 3 と繋がる 4 辺を追加。
(1, 4, N, A), (2, 4, B, B), (4, 3, B, B), (4, 3, A, A) の 4 辺。
3. (1, 2, N, B), (3, 3, B, A) を消去。
4. (2, 0, A, N), (0, 3, N, A) を反転して (0, 2, N, A), (3, 0, A, N) にする。

[(3, 2, B, A), (2, 1, B, N), (1, 4, N, A), (2, 4, B, B), (4, 3, B, B), (4, 3, A, A), (0, 2, N, A), (3, 0, A, N)]

頂点 3, 4 は Odd+Odd-Even に統合でき、Even 頂点 5 の追加と空頂点の削除をすると以下の通りになる。

[(2, 5, B, B), (5, 2, B, A), (2, 5, B, A), (5, 2, A, A)]



```
../../docs/images/step2_2.jpg
```

2.3.3 計算量

ある KEG において、任意の 2 辺に対する S^+ の結果を得るのに必要な計算量を考えていく。

1. 頂点追加 $\rightarrow O(1)$
2. Odd 頂点への 4 辺の追加 \rightarrow 定数なので $O(1)$
3. e_s と e_g の間の辺を逆にする \rightarrow 最大 $E-2$ 辺に行われるので $O(E)$
4. 逆転前の辺を削除する \rightarrow 最大 $E-2$ 辺に行われるので $O(E)$

2.2 節で列挙したペアのそれぞれについて S^+ を適用するため、各計算ステップの最大次数を見ると E^2 回のループで $O(E)$ の操作をするためトータルで $O(E^3)$

第 3 章

まとめ

研究のまとめ。なんやかんや

謝辞

本論文を作成するにあたり、―― みなさまに感謝の意を表します.

参考文献

- [1] Noboru Ito and Yusuke Takimura. Crosscap number three alternating knots. J. Knot Theory Ramifications, 31(4):2250026–1–2250026–11, 6 2022.
 - [2] Noboru Ito and Kaito Yamada. Plumbing and computation of crosscap number. JP Journal of Geometry and Topology, 26(2):103–115, 11 2021.
- [2] [1]