Билет 1

1. Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\vec{x}) = \dfrac{(\vec{x}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})} \cdot \vec{a}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$, $\vec{a} = (1; -1; 0)$, $\vec{b} = (2; 1; 4)$, найдите матрицу A, ядро $Ker A$ и область значений $\operatorname{Im} A$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Решите краевую задачу $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x, 0) = 6 \sin \dfrac{2\pi x}{5}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$, $x \in [0, 5]$, $u(0, t) = u(5, t) = 0$, $t \geq 0$.

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^{\ln 2} \left(y'^2 + 2y^2 + 2y \right) \cdot e^{-x} dx, \quad y(0) = y(\ln 2) = 0.$$

5. Решите разностное уравнение $y(n+2) - y(n) = \sin \dfrac{\pi n}{2}$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

Билет 2

1. Выясните, образует ли линейное пространство множество всех векторов из R^3, параллельных прямой $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+7}{4}$, с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число. В случае положительного ответа укажите размерность и какой-либо базис этого линейного пространства.

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\vec{x})=(2x_1+3x_3;\ x_1+x_2+x_3;\ -3x_1+4x_3)$, найдите матрицу A, ядро $KerA$ и область значений $\operatorname{Im} A$ в базисе $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$.

3. Разложите в ряд Фурье 2π – периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi \le x \le 0,\\ 2-x, & 0<x<\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$.

Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[4]{\left(1+x^2\right)^3}}$.

5. Решите задачу Коши операционным методом $y''+2y=2+e^t$, $y(0)=1,\ y'(0)=2$.

Билет 3

1. Докажите, что данный набор векторов $\vec{e}_1 = (1; -1; -1)$, $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\vec{e}_3 = (1; 3; 2)$ образует базис линейного пространства $V = R^3$, и найдите координаты вектора $\vec{y} = (-1; 4; 2)$ в этом базисе.

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\vec{x}) = (3x_2;\ x_1 - 2x_2;\ 2x_2 + x_3)$, найдите собственные значения и собственные векторы в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Постройте разложение функции $f(x) = 2x$, $x \in [0;1)$, в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что функция определена на полупериоде и является нечетной. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(y^2 + y'^2 + 2 \cdot y \cdot e^x\right) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

5. Найдите Z – преобразование решетчатой функции $y(n) = n \cdot \cos\frac{\pi n}{2}$.

Билет 4

1. Докажите, что данный набор векторов $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ образует базис линейного пространства V всех матриц второго порядка, и найдите координаты вектора $Y = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

2. Постройте ортонормированный базис в пространстве R^3 по данному базису $\vec{x}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{x}_2 = (1; -2; -1)$, $\vec{x}_3 = (2; -1; 1)$. Докажите, что полученная система векторов является ортонормированной.

3. Постройте разложение функции $f(x) = x - 1$, $x \in [0;2)$, в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что функция определена на полупериоде и является четной. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_0^1 x^3 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^5 dx$.

5. Найдите изображение функции $f(t) = t \cdot \mathrm{ch} 2t \cdot \cos 2t$.

Билет 5

1. Докажите, что данный набор векторов $f_1(x) = -1,\ f_2(x) = x - 1,\ f_3(x) = x^2 + 4,\ f_4(x) = x^3 + x + 1$ образует базис линейного пространства V всех многочленов, степень которых не превосходит 3, и найдите координаты вектора $Y(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 3$ в этом базисе.

2. Выясните, является ли пространство R^2 евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x} = (x_1; x_2)$ и $\vec{y} = (y_1; y_2)$ поставлено в соответствие число $(\vec{x}, \vec{y})$, определяемое равенством $(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$. В случае положительного ответа найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = (-1;1)$ и $\vec{b} = (2;-1)$.

3. Найдите комплексную форму ряда Фурье функции $f(x) = e^{-2x}$, $(-\pi; \pi)$.

4. . Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_1^2 \left(3 \cdot x \cdot (y')^5 - 5 \cdot y \cdot (y')^4\right) dx,\ y(1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

5. Найдите решетчатую функцию по ее Z – преобразованию $F(z) = \dfrac{z - 1}{(z + 2)^3}$.

Билет 6

1. Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 6. \end{cases}$$

2. Выясните, является ли линейное пространство всех матриц второго порядка евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x} = A$ и $\vec{y} = B$, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, поставлено в соответствие число $(\vec{x}, \vec{y})$, определяемое равенством $(A, B) = 2a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 + d_1 \cdot d_2$. В случае положительного ответа найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Разложите в ряд Фурье по многочленам Лежандра функцию $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3, \quad x \in [-1;1]$. Выполните проверку.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(x-2)^2}$.

5. Найдите оригинал по данному изображению $F(p) = \frac{p+2}{(p+1)\cdot(p-2)\cdot(p^2+4)}$.

Билет 7

1. В пространстве $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой $\rho\left(f(x),g(x)\right)=\max\limits_{[a;b]}\left|f(x)-g(x)\right|$ найдите расстояние между функциями $f(x)=4\sin x+4\sqrt{3}\cos x$, $g(x)=3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right]$.

2. Для линейного оператора $f:R^3\to R^3$ зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости Oxy, найдите матрицу A, ядро $KerA$ и область значений $\operatorname{Im} A$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Найдите синус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{x}{3}, & 0\le x\le 3\pi,\\ 0, & x>3\pi.\end{cases}$$

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)]=\int\limits_0^1[y^2(x)+y'^2(x)+2y(x)e^x]dx\,,\ y(0)=y(1)=0.$$

5. Решите разностное уравнение $y(n+2)-5y(n+1)+4y(n)=2\cdot(-1)^n$, $y(0)=0, y(1)=1$.

Билет 8

1. В пространстве $C_2[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой $\rho(f(x),g(x))=\left(\int\limits_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx\right)^{1/2}$ найдите расстояние между функциями $f(x)=\cos x$, $g(x)=x$ на отрезке $[0;\pi]$.

2. Для линейного оператора $f:R^3\to R^3$ поворота векторов пространства R^3 относительно оси Ox в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$, найдите собственные значения и собственные векторы в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Найдите косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3\cdot(3-x)^2}}$.

5. Решите задачу Коши операционным методом $y''+y=\operatorname{sh}t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Билет 9

1. Выясните, образует ли линейное пространство множество всех плоских векторов, перпендикулярных прямой $3x+4y-8=0$, с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число. В случае положительного ответа укажите размерность и какой-либо базис этого линейного пространства.

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\bar{x}) = \bar{x} - 6\cdot(\bar{x},\bar{a})\cdot\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|^2}$, $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$, $\bar{a} = (-1; -2; 1)$, найдите матрицу A, ядро $KerA$ и область значений $\operatorname{Im} A$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

3. Решите краевую задачу $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = 4\sin\dfrac{\pi x}{2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $x \in [0, 2]$, $u(0,t) = u(2,t) = 0$, $t \geq 0$.

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(12xy + yy' + y'^2\right)dx,\ y(0) = 1,\ y(1) = 4.$$

5. Решите разностное уравнение $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 2\cdot 4^n$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Билет 10

1. В пространстве $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой $\|f(x)\| = \max\limits_{[a;b]}|f(x)|$ найдите норму функции $f(x) = 2^{-x^2+2x+8}$ на отрезке $[-1;2]$.

2. В пространстве всех верхних треугольных матриц второго порядка со скалярным произведением $(A,B) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$, постройте ортонормированный базис по данному базису $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Дана функция $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{x}{3}, & |x| \le \dfrac{3\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$ Представьте функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_1^{+\infty} (\ln x)^5 \cdot \dfrac{dx}{x^2}$.

5. Решите задачу Коши операционным методом $y'' - y' = t^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Билет 11

1. В пространстве $C_2[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой $\|f(x)\| = \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{1/2}$ найдите норму функции $f(x) = \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\bar{x}) = (-3x_1 + 2x_2; -2x_1 + x_2; 15x_1 - 7x_2 + 4x_3)$, найдите собственные значения и собственные векторы в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Найдите прямое преобразование Фурье $F(z)$ функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \le \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}.$$

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(y + 2xy' + y'^2\right) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

5. Решите разностное уравнение при данных начальных условиях.

$y(n+2) - 16y(n) = -15$, $y(0) = 1$, $y(1) = 5$.

Билет 12

1. Найдите косинус угла между функциями $f(x)$ и $g(x)$ евклидова пространства $C[a,b]$ со скалярным произведением $\left(f(x),g(x)\right)=\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)dx$, если $f(x)=x, g(x)=\cos x, a=0, b=\dfrac{\pi}{2}$.

2. Постройте ортонормированный базис в пространстве R^3 по данному базису $x_1=(-1,-1,1)$, $x_2=\left(-2,2,1\right)$, $x_3=(0,-2,1)$. Докажите, что полученная система векторов является ортонормированной.

3. Разложите в ряд Фурье $2\pi-$периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}-2, & -\pi<x\le 0,\\ 4, & 0<x<\pi,\end{cases}$ заданную на промежутке $(-\pi;\pi)$. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \dfrac{x^6}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$.

5. Найдите изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $\int\limits_0^t \tau\cdot \mathrm{sh}2\tau\cdot d\tau$.

Билет 13

1. Докажите, что данный набор векторов $\bar{e}_1 = (0; 1; 2)$, $\bar{e}_2 = (1; 0; 1)$, $\bar{e}_3 = (-1; 2; 4)$ образует базис линейного пространства $V = R^3$, и найдите координаты вектора $\bar{y} = (-2; 4; 5)$ в этом базисе.

2. В пространстве $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой $\rho(f(x), g(x)) = \max\limits_{[a;b]} |f(x) - g(x)|$ найдите расстояние между функциями $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 3$, на отрезке $[0, 1]$.

3. Постройте разложение функции $f(x) = \cos\dfrac{x}{\pi}$, $x \in (0; \pi)$, в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что функция определена на полупериоде и является нечетной. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(y'^4 - 6 \cdot y'^2\right) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

5. Решите разностное уравнение при данных начальных условиях.

$$y(n+2) - 7y(n+1) + 12y(n) = 6, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

Билет 14

1. Докажите, что данный набор векторов $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ образует базис линейного пространства V всех матриц второго порядка, и найдите координаты вектора $Y = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 47 & 49 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

2. В пространстве $C_2[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой $\rho(f(x), g(x)) = \left(\int\limits_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2}$ найдите расстояние между функциями $f(x) = \ln x$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ на отрезке $[1;e]$.

3. Постройте разложение функции $f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x \le 3, \\ 0, 3 < x < \pi, \end{cases}$, $x \in (0;\pi)$, в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что функция определена на полупериоде и является четной. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2 \cdot (x-1)} dx$.

5. Найдите изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $\dfrac{\sin^2 3t}{t}$.

Билет 15

1. Докажите, что данный набор векторов $f_1(x)=1,\ f_2(x)=x+1,\ f_3(x)=(x+1)^2,\ f_4(x)=(x+1)^3$ образует базис линейного пространства V всех многочленов, степень которых не превосходит 3, и найдите координаты вектора $Y(x)=x^3-2x^2+3x-4$ в этом базисе.

2. Выясните, является ли пространство R^2 евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x}=(x_1;x_2)$ и $\vec{y}=(y_1;y_2)$ поставлено в соответствие число $(\vec{x},\vec{y})$, определяемое равенством $(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2$. В случае положительного ответа найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=(-1;1)$ и $\vec{b}=(2;-1)$.

3. Найдите комплексную форму ряда Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0,\\ 1, & 0<x<2,\end{cases}\quad x\in(-2;2).$$

4. . Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)]=\int_0^1\left(e^{x+y}-y'-\sin x\right)dx,\ y(0)=2,\quad y(1)=0.$$

5. Решите разностное уравнение при данных начальных условиях.

$$y(n+2)+y(n)=1-(-1)^n,\ y(0)=0,\ y(1)=1.$$

Билет 16

1. Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

2. Выясните, является ли линейное пространство всех многочленов степени не выше двух евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\bar{x} = f(x)$ и $\bar{y} = g(x)$ поставлено в соответствие число $(\bar{x}, \bar{y})$, определяемое равенством
$(\bar{x}, \bar{y}) = f(1)\cdot g(1) - 2f(1)\cdot g(0) - 2f(0)\cdot g(1) + 5f(0)\cdot g(0) + f(2)\cdot g(2)$. В случае положительного ответа найдите косинус угла между векторами $\bar{a} = -x^2 + x + 2$ и $\bar{b} = 3x - 1$.

3. Разложите в ряд Фурье по многочленам Лежандра функцию $f(x) = 5x^3 - 3x + 2x - 1$, $x \in [-1;1]$. Выполните проверку.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл

$$\int_0^{+\infty} x^3 \cdot e^{-2x} dx.$$

5. Решите задачу Коши операционным методом $2y'' - y' = \sin 3t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Билет 18

1. В пространстве $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой $\|f(x)\| = \max\limits_{[a;b]} |f(x)|$ найдите норму функции $f(x) = x \cdot e^{-x^2/2}$ на отрезке $[-1;1]$.

2. В пространстве всех многочленов, степень которых не выше двух, со скалярным произведением $(f(x), g(x)) = \int\limits_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ постройте ортонормированный базис по данному базису $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = -x^2$ на отрезке $[-1;1]$.

3. Найдите косинус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{x}{3}, & 0 \le x \le 3\pi, \\ 0, & x > 3\pi. \end{cases}$$

4. Вычислите $J_{\frac{7}{2}}(x)$.

5. Найдите изображение $F(p)$ по заданному оригиналу $\int\limits_0^t \tau^2 \cdot e^{-\tau} \cdot d\tau$.

Билет 20

1. Выясните, образует ли линейное пространство множество всех векторов, параллельных плоскости $x-3y+2z=0$, с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число. В случае положительного ответа укажите размерность и какой-либо базис этого линейного пространства.

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\bar{x}) = (4x_1 - x_2 - x_3;\ x_1 + 2x_2 - x_3;\ x_1 - x_2 + 2x_3)$, найдите собственные значения и собственные векторы в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Вычислите $J_{-\frac{7}{2}}(x)$.

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_1^3 xy'\left(6 + x^2 y'\right)dx\,,\quad y(1) = 5,\ y(3) = 3.$$

5. Решите задачу Коши операционным методом $y'' + y' - 2y = -2(t+1)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Билет 21

1. Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=7, \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=6. \end{cases}$$

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\vec{x})=\dfrac{(\vec{x},\vec{b})}{(\vec{a},\vec{b})}\cdot\vec{a}$, $\vec{x}=(x_1;x_2;x_3)\in R^3$, $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(-3;2;-1)$, найдите матрицу A, ядро $KerA$ и область значений $\operatorname{Im} A$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Решите краевую задачу $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=81\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0)=\sin \pi x$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=18\pi\sin 2\pi x$, $x\in[0,5]$, $u(0,t)=u(5,t)=0$, $t\ge 0$.

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+y^2}{y'}dx,\ y(0)=0,\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

5. Решите разностное уравнение $y(n+2)+4y(n)=n$, $y(0)=1$, $y(1)=1$.

Билет 22

1. Выясните, образует ли линейное пространство множество всех векторов из R^3, перпендикулярных плоскости $3x-5y+7z+2=0$, с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число. В случае положительного ответа укажите размерность и какой-либо базис этого линейного пространства.

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\vec{x}) = (6x_1 + x_2 - x_3;\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3;\ x_1 - x_2 + 4x_3)$, найдите матрицу A, ядро $KerA$ и область значений $\operatorname{Im} A$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Разложите в ряд Фурье 2π – периодическую функцию $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \le x \le 0, \\ 2x, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ заданную на промежутке $[-\pi;\pi)$.

Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x^2} \cdot x^4 dx$.

5. Решите задачу Коши операционным методом $y'' + y = 6e^{-t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

Билет 23

1. Докажите, что данный набор векторов $\vec{e}_1 = (-5; 2; -3)$, $\vec{e}_2 = (1; -1; 0)$, $\vec{e}_3 = (-4; 1; 6)$ образует базис линейного пространства $V = R^3$, и найдите координаты вектора $\vec{y} = (1; -7; -6)$ в этом базисе.

2. Для линейного оператора $f : R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\vec{x}) = (9x_1 - 6x_2 - 6x_3; -2x_1 + 5x_2 - 2x_3; -2x_1 + 2x_2 - 13x_3)$, найдите собственные значения и собственные векторы в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Постройте разложение функции $f(x) = 1 - x$, $x \in [0;1)$, в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что функция определена на полупериоде и является нечетной. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_1^2 y'\left(1 + x^2 y'\right)dx,\ y(1) = 3,\quad y(2) = 5.$$

5. Найдите Z – преобразование решетчатой функции $y(n) = n^2 \cdot (-1)^n$.

Билет 24

1. Докажите, что данный набор векторов $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ образует базис линейного пространства V всех матриц второго порядка, и найдите координаты вектора $Y = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$ в этом базисе.

2. Постройте ортонормированный базис в пространстве R^3 по данному базису $\vec{x}_1 = (-1; 1; 1)$, $\vec{x}_2 = (-2; 1; -1)$, $\vec{x}_3 = (-2; 0; 2)$. Докажите, что полученная система векторов является ортонормированной.

3. Постройте разложение функции $f(x) = 2 + 3x$, $x \in [0;3)$, в тригонометрический ряд Фурье, полагая, что функция определена на полупериоде и является четной. Постройте графики функции $f(x)$ и суммы $S(x)$ ее ряда Фурье.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)^3 \cdot \sin^{-1/2} x \cdot \cos^{-1/2} x dx.$

5. Найдите изображение функции $f(t) = t^2 \cdot \mathrm{ch} 2t$.

Билет 25

1. Докажите, что данный набор векторов $f_1(x)=1,\ f_2(x)=-2x+1,\ f_3(x)=x^2-2x-3,\ f_4(x)=x^3-1$ образует базис линейного пространства V всех многочленов, степень которых не превосходит 3, и найдите координаты вектора $Y(x)=3x^3-7x^2+4x+15$ в этом базисе.

2. Выясните, является ли пространство R^2 евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x}=(x_1;x_2)$ и $\vec{y}=(y_1;y_2)$ поставлено в соответствие число $(\vec{x},\vec{y})$, определяемое равенством $(\vec{x},\vec{y})=2x_1y_1+7x_1y_2+3x_2y_1+x_2y_2$. В случае положительного ответа найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=(-1;1)$ и $\vec{b}=(2;-1)$.

3. Найдите комплексную форму ряда Фурье функции $f(x)=e^{-3x}$, $(-1;1)$.

4. . Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)]=\int_1^e\left(x\cdot(y')^2-2y'\right)dx,\quad y(1)=1,\quad y(e)=2.$$

Найдите решетчатую функцию по ее Z – преобразованию

$$)=\frac{z+3}{z^2-2z-8}.$$

Билет 26

1. Решите систему линейных уравнений. Для соответствующей однородной системы определите базис (фундаментальную систему решений) и размерность пространства ее решений.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4=10, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=8. \end{cases}$$

2. Выясните, является ли линейное пространство всех матриц второго порядка евклидовым пространством, если каждой паре векторов $\vec{x}=A$ и $\vec{y}=B$, $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, поставлено в соответствие число $(\vec{x},\vec{y})$, определяемое равенством $(A,B)=a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1-c_1\cdot d_2-c_2\cdot d_1$. В случае положительного ответа найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ и $\vec{b}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Разложите в ряд Фурье по многочленам Лежандра функцию $f(x)=2x^3-x^2+3x-1$, $x\in[-1;1]$. Выполните проверку.

Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл

$$\ldots -x)\,dx.$$

5. Найдите оригинал по данному изображению $F(p)=\dfrac{p^2+2p-1}{p^3-2p^2+2p-1}$.

Билет 27

1. В пространстве $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой $\rho(f(x),g(x)) = \max\limits_{[a;b]}|f(x)-g(x)|$ найдите расстояние между функциями $f(x) = -2x^2+3$, $g(x) = 5x$ на отрезке $[-2;1]$.

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$ зеркального отражения векторов пространства R^3 относительно плоскости Oyz, найдите матрицу A, ядро $KerA$ и область значений $\operatorname{Im} A$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Найдите синус-преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 4x-1, & 0 \le x \le \dfrac{1}{4}, \\ 0, & \dfrac{1}{4} < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} [y'^2 - 9y^2 + 4xy\sin x]dx, \; y(0) = -\frac{1}{16}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{48}.$$

5. Найдите решетчатую функцию по ее Z – преобразованию $F(z) = \dfrac{z+3}{z^2+3z-10}$.

Билет 28

1. В пространстве $C_2[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой $\rho(f(x),g(x))=\left(\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,dx\right)^{1/2}$ найдите расстояние между функциями $f(x)=\sin x$, $g(x)=x$ на отрезке $[0;\pi]$.

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$ поворота векторов пространства R^3 относительно оси Oy в отрицательном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$, найдите собственные значения и собственные векторы в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Найдите косинус-преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-\frac{x}{3}}$, $x \geq 0$.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}\,dx$.

5. Решите задачу Коши операционным методом $y''+4y'+29y=e^{-2t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Билет 29

1. Выясните, образует ли линейное пространство множество всех плоских векторов, сумма координат которых равна нулю, с естественными операциями сложения двух векторов и умножения вектора на действительное число. В случае положительного ответа укажите размерность и какой-либо базис этого линейного пространства.

2. Для линейного оператора $f: R^3 \to R^3$, заданного условием $f(\vec{x}) = -2\vec{x} + 3\cdot(\vec{x},\vec{a})\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) \in R^3$, $\vec{a} = (1;2;-2)$, найдите матрицу A, ядро $KerA$ и область значений $\operatorname{Im} A$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

3. Решите краевую задачу $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0) = 5\sin 3\pi x$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 20\pi\sin 4\pi x$, $x \in [0, 3]$, $u(0,t) = u(3,t) = 0$, $t \ge 0$.

4. Найдите допустимые экстремали функционала

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi}[4y\cos x + y'^2 - y^2]dx, \; y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

5. Найдите решетчатую функцию по ее Z – преобразованию $F(z) = \dfrac{z-1}{(z+1)\cdot(z+2)^2}$.

Билет 30

1. В пространстве $C[a;b]$ всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с нормой $\|f(x)\| = \max\limits_{[a;b]}|f(x)|$ найдите норму функции $f(x) = 5^{-x^2+x+1}$ на отрезке $[-1;2]$.

2. В пространстве всех верхних треугольных матриц второго порядка со скалярным произведением $(A,B) = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2$, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$, постройте ортонормированный базис по данному базису $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Дана функция $f(x) = \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}, |x| < 2\pi, \\ 0, \quad |x| > 2\pi. \end{cases}$. Представьте функцию $f(x)$ интегралом Фурье.

4. Используя гамма- и бета-функции, вычислите интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}}$.

5. Решите задачу Коши операционным методом $y'' + y' + y = 7e^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.