**Свойства линейного пространства**

**1.** В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

**2.** В линейном пространстве $V$ для каждого вектора $\vec{x} \in V$ существует единственный ему противоположный вектор $-\vec{x} \in V$.

**3.** Для вектора $-\vec{x} \in V$ противоположным вектором является $\vec{x} \in V$.

**4.** $0 \otimes \vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{x} \in V$.

**5.** $-1 \otimes \vec{x} = -\vec{x}, \forall \vec{x} \in V$.

**6.** Произведение любого числа $\alpha$ на нулевой вектор есть нулевой вектор, то есть $\alpha \otimes \vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in P$.

**7.** Если $\alpha \otimes \vec{x} = \vec{0}$ и $\alpha \neq 0$, то $\vec{x} = \vec{0}$.

**8.** Если $\alpha \otimes \vec{x} = \vec{0}$ и $\vec{x} \neq \vec{0}$, то $\alpha = 0$.

**Линейным (векторным) пространством** называется непустое множество $V$ элементов произвольной природы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$, то есть $V = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots\}$, условно называемых векторами, над которыми определены две **операции**: **сложения двух векторов** $\oplus: \forall \vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow \vec{x} \oplus \vec{y} \in V$, и **умножения вектора на число** $\otimes: \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha \in P \Rightarrow \alpha \otimes \vec{x} \in V$, $P-$ некоторое числовое множество, удовлетворяющие восьми аксиомам:

**1**. $\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$;

**2.** $(\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z} = \vec{x} \oplus (\vec{y} \oplus \vec{z})$, $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$;

**3.** существует нуль–вектор $\vec{0} \in V$ такой, что $\vec{x} \oplus \vec{0} = \vec{x}$ для любого $\vec{x} \in V$;

**4.** для каждого $\vec{x} \in V$ существует ему противоположный элемент $-\vec{x} \in V$ такой, что $\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = \vec{0}$;

**5.** $1 \otimes \vec{x} = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in V$;

**6.** $\alpha \otimes (\beta \otimes \vec{x}) = (\alpha\beta) \otimes \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in V, \forall \alpha, \beta \in P$;

**7.** $\alpha \otimes (\vec{x} \oplus \vec{y}) = (\alpha \otimes \vec{x}) \oplus (\alpha \otimes \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \forall \alpha \in P$;

**8.** $(\alpha + \beta) \otimes \vec{x} = (\alpha \otimes \vec{x}) \oplus (\beta \otimes \vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V, \forall \alpha, \beta \in P$.

$n=1$

**Определение 2 (линейного подпространства).**

Множество $V_1$ элементов линейного пространства $V$ называется **подпространством** пространства $V$, если выполнены условия:

1) в множестве $V_1$ операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются также, как и в $V$;

2) если $\vec{x}, \vec{y} \in V_1$, то и $\vec{x} \oplus \vec{y} \in V_1$;

3) если $\alpha \in P, \vec{x} \in V_1$, то и $\alpha \otimes \vec{x} \in V_1$.

Заметим, что всякое подпространство $V_1$ линейного пространства является линейным пространством.

**Определение 3.** Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ линейного пространства $V$ называется линейно зависимой, если существует набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, среди которых хотя бы одно не равно нулю, такой, что $(\alpha_1 \otimes \vec{x}_1) \oplus (\alpha_2 \otimes \vec{x}_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \otimes \vec{x}_n) = \vec{0}$.

**Определение 4.** Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ линейного пространства $V$ называется линейно независимой, если векторное равенство $(\alpha_1 \otimes \vec{x}_1) \oplus (\alpha_2 \otimes \vec{x}_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \otimes \vec{x}_n) = \vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

**Определение 5.** Пусть в линейном пространстве $V$ выполнены условия:

1) существует $n$ линейно независимых векторов;

2) любая система $n+1$ векторов линейно зависима.

Тогда число $n$ называется **размерностью линейного пространства** $V$ и обозначается $\dim V = n$.

**Определение 6. Базисом** $n-$**мерного линейного пространства** $V$ называется любая упорядоченная система $n$ линейно независимых векторов этого пространства.

**Определение 7.** Выражение (1) называется **разложением вектора** $\vec{x}$ **по базису** $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются **координатами вектора** $\vec{x}$ **в этом базисе**.

**Определение 8.** Линейное пространство $V$ называется **конечномерным**, если в нем имеется базис, состоящий из конечного числа векторов.

Линейное пространство $V$ называется **бесконечномерным**, если в нем существует система из любого числа линейного независимых векторов.

Множество всех аналитических (бесконечное число раз дифференцируемых) функций является примером бесконечномерного пространства, в котором в качестве базиса можно взять совокупность многочленов $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.

**Теорема 1.** Если к системе $r$ линейно зависимых векторов присоединить любые $m$ векторов, то получим систему $r+m$ линейно зависимых векторов.

**Теорема 2.** Если из системы $r$ линейно независимых векторов отбросить любые $m, m < r$, векторов, то получим систему $r-m$ линейно независимых векторов.

**Теорем 3.** Если среди векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ имеется нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

**Теорема 4.** Для того, чтобы векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, n > 1$, линейного пространства $V$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.

**Теорема 5.** Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ − базис $n-$мерного линейного пространства $V$, то любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$, то есть

$$\vec{x} = (\alpha_1 \otimes \vec{e}_1) \oplus (\alpha_2 \otimes \vec{e}_2) \oplus \ldots \oplus (\alpha_n \otimes \vec{e}_n), \tag{1}$$

причем коэффициенты разложения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ определены однозначным образом.

**Теорема 6.** Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ − система линейно независимых векторов линейного пространства $V$ и любой вектор $\vec{x}$ этого пространства линейно выражается через векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$, то $\dim V = n$.

## Элементы функционального анализа

**Определение 1.** Линейное пространство $V$ называется **евклидовым**, если каждой паре векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из пространства $V$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое $(\vec{x},\vec{y})$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(\vec{x},\vec{x}) \geq 0, \forall \vec{x} \in V$, и $(\vec{x},\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
2) $(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{y},\vec{x}), \forall \vec{x},\vec{y} \in V$;
3) $(\vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2,\vec{y}) = (\vec{x}_1,\vec{y}) + (\vec{x}_2,\vec{y}), \forall \vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{y} \in V$;
4) $(\alpha \otimes \vec{x},\vec{y}) = \alpha \cdot (\vec{x},\vec{y}), \forall \alpha \in R, \forall \vec{x},\vec{y} \in V$.

Введенная операция называется **скалярным умножением векторов**, число $(\vec{x},\vec{y})$ – **скалярным произведением векторов** $\vec{x}$ и $\vec{y}$, а число $(\vec{x},\vec{x})$ – **скалярным квадратом вектора** $\vec{x}$ и обозначается $\vec{x}^2$.

**Замечание.** Если хотя бы один из векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ является нулевым, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $(\vec{0},\vec{y}) = 0, \forall \vec{y} \in V$.

Действительно, применяя свойство 4 линейного пространства, а затем аксиому 4 евклидова пространства, имеем

$$(\vec{0},\vec{y}) = (0 \otimes \vec{x},\vec{y}) = 0 \cdot (\vec{x},\vec{y}) = 0, \forall \vec{x},\vec{y} \in V.$$

**Определение 2.** Если $n$–мерное линейное пространство является евклидовым, то оно называется **евклидовым $n$–мерным пространством**, а базис линейного пространства – **базисом евклидова пространства**.

**Определение 3.** Непустое множество $X$ элементов произвольной природы $x, y, z, \ldots$ называется **метрическим пространством**, если любым двум элементам $x$ и $y$ из множества $X$ ставится в соответствие действительное число $\rho(x,y)$, называемое расстоянием между $x$ и $y$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

**1.** $\rho(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X$, и $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
**2.** $\rho(x,y) = \rho(y,x), \forall x,y \in X$.
**3.** $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y), \forall x,y,z \in X$.

**Определение 4.** Множество $\{x : x \in X, \rho(x,x_0) < r\}$ называется **открытым шаром** $B(x_0,r)$ с центром в точке $x_0$ и с радиусом $r$ или $r$ – окрестностью точки $x_0$.

**Определение 5.** Множество $A \subset X$ называется **открытым**, если для любого $x \in A$ существует радиус $r > 0$ такой, что $B(x,r) \subset A$.

**Определение 6.** Пусть $A \subset X$. Точка $x$ называется **предельной точкой** множества $A$, если для любого $r > 0$ шар $B(x,r)$ содержит хотя бы одну точку множества $A$, то есть существует последовательность $\{x_n\}$ элементов множества $A$, сходящаяся к $x$.

**Определение 7.** Пусть $A \subset X$ называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

**Определение 8.** Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства $(X,\rho)$ называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любых $n,m > N$ выполнено неравенство $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon$.

**Определение 9.** Метрическое пространство $(X,\rho)$ называется **полным**, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому $x \in X$.

**Определение 10.** Линейное пространство $V$ называется нормированным, если каждому вектору $\vec{x} \in V$ поставлено в соответствие действительное число $\|\vec{x}\|$, называемое нормой вектора $\vec{x}$, удовлетворяющее аксиомам:

**1.** $\|\vec{x}\| \geq 0, \forall \vec{x} \in V$, и $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
**2.** $\|\alpha \otimes \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|, \forall \alpha \in R(C), \forall \vec{x} \in V$;
**3.** $\|\vec{x} \oplus \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \forall \vec{x},\vec{y} \in V$.

**Определение 11. Углом между ненулевыми векторами** евклидова пространства $V$ называется угол $\varphi$, косинус которого определяется по формуле (2).

**Определение 12.** Два вектора называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

Нулевой вектор ортогонален любому другому вектору.

**Определение 13.** Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, n \ge 2,$ в евклидовом пространстве называется **ортогональной**, если эти векторы попарно ортогональны, то есть $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = 0, \forall i \ne j; i, j, = 1, 2, \dots n.$

**Определение 14.** Вектор $\vec{x}$ называется **нормированным или единичным**, если $\|\vec{x}\| = 1$.

Если $\vec{x} \ne \vec{0}$, то существует два нормированных вектора $\vec{x}_1^0 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ и $\vec{x}_2^0 = -\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$.

Нахождение для данного вектора нормированного вектора по указанным формулам называется **нормированием** данного **вектора**, а множитель $\mu = \pm \frac{1}{\|\vec{x}\|}$ – **нормирующим множителем**.

**Определение 15.** Система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, n \ge 2,$ в евклидовом пространстве называется **ортонормированной**, если она ортогональна и каждый вектор является нормированным, то есть

$$(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \begin{cases} 0, \forall i \ne j, \\ 1, \forall i = j, \end{cases} i, j, = 1, 2, \dots n.$$

**Определение 16.** Базис евклидова пространства называется ортогональным, если базисные векторы составляют ортогональную систему векторов.

**Определение 17.** Базис евклидова пространства называется ортонормированным, если базисные векторы составляют ортонормированную систему векторов.

**Определение 18.** Линейное пространство $H$ называется **унитарным**, если каждой паре векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из пространства $H$ поставлено в соответствие действительное или комплексное число , обозначаемое $(\vec{x}, \vec{y})$ и удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(\vec{x}, \vec{x}) \ge 0, \forall \vec{x} \in H,$ и $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
2) $(\vec{x}, \vec{y}) = \overline{(\vec{y}, \vec{x})}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$;
3) $(\vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y}), \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in H$;
4) $(\alpha \otimes \vec{x}, \vec{y}) = \alpha \cdot (\vec{x}, \vec{y}), \forall \alpha \in C, \forall \vec{x}, \vec{y} \in H$.

---

Введенная операция называется **скалярным умножением векторов**, число $(\vec{x}, \vec{y})$ – **скалярным произведением векторов** $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

**Определение 19.** Полное унитарное пространство называется **гильбертовым**.

**Теорема.** Множество $A$ открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus A$ замкнуто.

Каждая предельная точка множества $A$, которая не является его внутренней точкой, называется **граничной точкой** множества $A$. Она может не принадлежать множеству $A$.

**Теорема.** Любая сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной последовательностью.

**Теорема.** Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

**Теорема (процесс ортогонализации Грама–Шмидта).**
В любом $n$–мерном евклидовом пространстве, $n \ge 2$, существует ортонормированный базис.

**Неравенство Коши–Буняковского.**
Для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ евклидова пространства справедливо неравенство

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \le \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})}.$$

**Свойства линейного оператора**

**1.** Собственный вектор линейного оператора имеет единственное собственное значение.

**2.** Если $\vec{x}$ – собственный вектор линейного оператора $f$ с собственным значением $k$ и $\lambda$ – любое отличное от нуля число, то $\lambda \cdot \vec{x}$ – также собственный вектор линейного оператора $f$ с собственным значением $k$.

**3.** Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – линейно независимые собственные векторы линейного оператора $f$ с одним и тем же собственным значением $k$, то $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ – собственный вектор линейного оператора $f$ с собственным значением $k$.

**4.** Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – собственные векторы линейного оператора $f$ с собственными значениями $k_1$ и $k_2$ соответственно, и $k_1 \neq k_2$, то $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ – линейно независимые векторы.

## 12. Линейные преобразования.

Пусть $V$ – линейное пространство.

**Определение 1.** Если задан закон $f$, по которому каждому вектору $\vec{x} \in V$ поставлен в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in V$, то будем говорить, что задано **преобразование (отображение, оператор)** $f$ пространства $V$ в себя и записывать $f : V \to V$.

Вектор $\vec{y}$ называется **образом** вектора $\vec{x}$, а вектор $\vec{x}$ – **прообразом** вектора $\vec{y}$. Если преобразование $f$ переводит вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$, то это будем записывать как $\vec{y} = f(\vec{x})$.

**Определение 2.** Преобразование $f$ называется **линейным**, если выполнены два условия:

1) $f(\vec{x}_1 \oplus \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) \oplus f(\vec{x}_2), \forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$;

2) $f(\lambda \otimes \vec{x}) = \lambda \otimes f(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha \in R$.

**Замечание.** Линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой.

Действительно,

$$f(\vec{0}) = f(\vec{x} \oplus (-\vec{x})) = f(\vec{x}) \oplus f(-\vec{x}) = f(\vec{x}) \oplus f(-1 \otimes \vec{x}) = f(\vec{x}) \oplus \left(-1 \otimes f(\vec{x})\right) = f(\vec{x}) \oplus \left(-f(\vec{x})\right) = \vec{0}.$$

**Определение 3.** Преобразование $f$ называется тождественным, если оно каждому вектору пространства $V$ ставит в соответствие этот же вектор, то есть $f(\vec{x}) = \vec{x}$.

Тождественное преобразование является линейным.

Пусть линейное преобразование $f$ переводит базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ в векторы $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$, то есть $f(\vec{e}_i) = \vec{e}_i', i = 1,2,\ldots,n$, при этом

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n, \\ \vec{e}_2' = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}_n' = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{cases}$$

**Определение 4.** Матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей линейного преобразования** $f$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

**Определение 5.** Ранг $r$ матрицы $A$ называется **рангом преобразования**, а число $n - r$ – **дефектом** этого **преобразования**.

**Связь между координатами вектора и его образа**

Пусть вектор $\vec{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то есть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Найдем $f(\vec{x})$.

Предположим, что $f(\vec{x}) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда $f(\vec{x}) = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n$.

С другой стороны

$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + x_n f(\vec{e}_n) =$$
$$= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n) + \ldots + x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n) =$$
$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)\vec{e}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n)\vec{e}_2 + \ldots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n)\vec{e}_n.$$

Отсюда

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Обозначим $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\\y_n\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$. Тогда система (1) примет вид $Y=AX$.

**Определение 6.** Областью значений линейного оператора $f$ называется множество $\operatorname{Im}A$ векторов вида $\bar{y}=A\bar{x}$, то есть $\operatorname{Im}A=\{\bar{y}\in V \mid \bar{y}=A\bar{x}, \bar{x}\in V\}$.

**Определение 7.** Ядром линейного оператора $f$ называется множество $KerA$ всех векторов $\bar{x}\in V$, для которых $A\bar{x}=\bar{0}$, то есть $\ker A=\{\bar{x}\in V \mid A\bar{x}=\bar{0}\}$.

**Связь между координатами вектора и его образа**

**Определение 8.** Пусть в линейном пространстве $V$ даны два базиса $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ и $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\dots,\vec{e}_n'$ и

$$\begin{cases}\vec{e}_1'=t_{11}\vec{e}_1+t_{21}\vec{e}_2+\dots+t_{n1}\vec{e}_n,\\\vec{e}_2'=t_{12}\vec{e}_1+t_{22}\vec{e}_2+\dots+t_{n2}\vec{e}_n,\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\\vec{e}_n'=t_{1n}\vec{e}_1+t_{2n}\vec{e}_2+\dots+t_{nn}\vec{e}_n.\end{cases}$$

Матрица $T=\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&\dots&t_{1n}\\t_{21}&t_{22}&\dots&t_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\t_{n1}&t_{n2}&\dots&t_{nn}\end{pmatrix}$ называется **матрицей перехода от базиса** $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ **к базису** $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\dots,\vec{e}_n'$.

Если $\vec{x}(x_1;x_2;\dots;x_n)$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$ и $\vec{x}(x_1';x_2';\dots;x_n')$ в базисе $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\dots,\vec{e}_n'$, то покажем, что $X=TX'$, где $X'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\\dots\\x_n'\end{pmatrix}$.

Действительно,

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{x}=x_1'\vec{e}_1'+x_2'\vec{e}_2'+\dots+x_n'\vec{e}_n'=x_1'\cdot(t_{11}\vec{e}_1+t_{21}\vec{e}_2+\dots+t_{n1}\vec{e}_n)+x_2'\cdot(t_{12}\vec{e}_1+t_{22}\vec{e}_2+\dots+t_{n2}\vec{e}_n)+$$
$$+\dots+x_n'\cdot(t_{1n}\vec{e}_1+t_{2n}\vec{e}_2+\dots+t_{nn}\vec{e}_n)=$$
$$=(t_{11}x_1'+t_{12}x_2'+\dots+t_{1n}x_n')\vec{e}_1+(t_{21}x_1'+t_{22}x_2'+\dots+t_{2n}x_n')\vec{e}_2+\dots+(t_{n1}x_1'+t_{n2}x_2'+\dots+t_{nn}x_n')\vec{e}_n.$$

Отсюда

$$\begin{cases}x_1=t_{11}x_1'+t_{12}x_2'+\dots+t_{1n}x_n',\\x_2=t_{21}x_1'+t_{22}x_2'+\dots+t_{2n}x_n',\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\x_n=t_{n1}x_1'+t_{n2}x_2'+\dots+t_{nn}x_n',\end{cases}\qquad(2)$$

или в матричной форме

$$X=TX'.\qquad(3)$$

**Определение 9.** Формулы (2) или(3) называются **формулами преобразования координат**.

**Определение 10.** Многочлен $\det(A-\lambda\cdot E)$ степени $n$ относительно $\lambda$ называется **характеристическим многочленом** матрицы $A$ или линейного оператора $f$.

**Определение 11. Характеристическим уравнением** линейного оператора $f$ называется уравнение вида

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0,\qquad(1)$$

где $A$ – матрица линейного оператора $f$ в некотором базисе.

**Определение 12.** Корни характеристического уравнения (1) называются **характеристическими числами** матрицы $A$ или линейного оператора $f$.

**Замечание.** При переходе от одного базиса к другому матрица линейного оператора меняется, а характеристический многочлен остается неизменным.

Пусть $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора $f$ в некотором базисе. Тогда характеристическое уравнение примет вид

$$\det(A-\lambda\cdot E)=0\Leftrightarrow\det\left(\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

## Собственные векторы линейного оператора.

**Определение 13.** Вектор $\vec{x}$ линейного пространства называется **собственным вектором линейного оператора** $f$, если этот вектор ненулевой и существует действительное число $k$ такое, что

$$f(\vec{x}) = k \cdot \vec{x}. \qquad (1)$$

**Определение 2.** Число $k$ называется **собственным числом вектора** $\vec{x}$ относительно линейного оператора $f$.

Равенство (1) можно записать в матричном виде

$$A \cdot X = k \cdot X \Leftrightarrow A \cdot X = k \cdot (E \cdot X) \Leftrightarrow A \cdot X = (k \cdot E) \cdot X \Leftrightarrow (A - k \cdot E) \cdot X = O,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица линейного оператора $f$ в некотором базисе, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ –матрица–столбец из координат вектора $\vec{x}$ в том же базисе.

## Собственные векторы линейного оператора

### Зависимость между матрицами одного и того же оператора в различных базисах.

**Теорема 1.** Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ – два базиса некоторого линейного пространства и $A$ – матрица линейного оператора $f$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, то матрица $B$ этого оператора в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ имеет вид

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T, \qquad (1)$$

где $T$ – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$.

**Следствие.**

Если линейный оператор имеет в некотором базисе невырожденную матрицу, то и в любом другом базисе матрица этого оператора является невырожденной.

Действительно, пусть $A$ и $B$ –матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ соответственно и $\det A \neq 0$. Так как $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$, где $T$ – невырожденная матрица, то найдем $\det B$, получим

$$\det B = \det\left(T^{-1} \cdot A \cdot T\right) = \det\left(T^{-1}\right) \cdot \det A \cdot \det T = \frac{1}{\det T} \cdot \det A \cdot \det T = \det A \neq 0,$$

то есть $\det A = \det B \neq 0$.

**Замечание.**

Если $A$ и $B$ –матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ соответственно, то $A = T \cdot B \cdot T^{-1}$.

### Характеристическое уравнение линейного оператора.

**Теорема 2.**

Если $A$ и $B$ –матрицы линейного оператора в двух различных базисах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n'$ соответственно, то

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \det(B - \lambda \cdot E),$$

где $\lambda$ – произвольное число и $E$ – единичная матрица порядка $n$.

**Теорема 3.**

Для того, чтобы линейный оператор $f$ имел собственный вектор $\vec{x}$ с собственным значением $k$, необходимо и достаточно, чтобы число $k$ являлось корнем характеристического уравнения этого оператора.

**Теорема 4.**

Пусть $k$ – собственное число линейного оператора $f$ с матрицей $A$ $n$ – мерного линейного пространства. Если ранг матрицы $A - k \cdot E$ равен $r$, то существует $n - r$ линейно независимых собственных векторов линейного оператора $f$ с собственным числом $k$.