

# 1. Уравнение свободных колебаний под действием квазиупругой силы и его общее решение

**Свободные колебания** — это колебания, происходящие в системе, после выведения ее из состояния равновесия. Свободные колебания могут быть гармоническими и затухающими.

Силы, пропорциональные смещению и стремящиеся вернуть систему в положение равновесия, называются **квазиупругими силами**.

Уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$m \ddot{x} = -r \dot{x} - kx$$

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

дифф уравнение малых затухающих колебаний

где  $b = r/2m$  – коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  – собственная угловая частота колебаний системы.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$

уравнение собственных незатухающих колебаний.

Одним из решений этого уравнения является уравнение гармонических колебаний  $x = A \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$ .

$A$  – амплитуда колебания,  $\omega_0$  – циклическая частота,  $\omega_0 t + \varphi_0$  – фаза колебания,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебания.

Чтобы убедиться в этом, найдем вторую производную по времени от  $x$ :  $\ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 x$ . Подставив этот результат в уравнение движения, получим тождество  $0 = 0$ , ч.т.д.

## 2. Гармонический осциллятор. Энергия гармонического осциллятора

Систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где  $\omega_0^2$  — постоянная положительная величина, называют **гармоническим осциллятором** (или гармоническим вибратором). Решение этого уравнения имеет вид:

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Следовательно, гармонический осциллятор представляет собой систему, которая совершает гармонические колебания около положения равновесия.

Все результаты, полученные для гармонического колебания, справедливы, разумеется, и для гармонического осциллятора.

$\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , где  $\nu_0$  - собственная частота осциллятора

$$S = \frac{1}{\nu_0} E,$$

$$E = \nu_0 S.$$

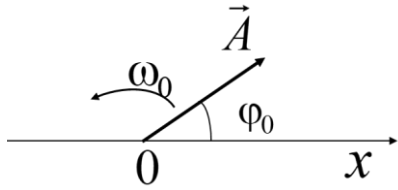
Таким образом, полная энергия гармонического осциллятора пропорциональна площади эллипса, причем коэффициентом пропорциональности служит собственная частота осциллятора.

Площадь эллипса может быть вычислена как интеграл  $\oint p dx$ .

$$E = \nu_0 \oint p dx.$$

### 3. Сложение гармонических колебаний

Сложение колебаний проходит аналитически, но иногда может быть осуществлено геометрически, при помощи вектора амплитуды.



Если вектор амплитуды привести во вращение вокруг точки O, взятой на оси x, с угловой скоростью  $\omega_0$ , то проекция конца этого вектора на ось x будет совершать гармонические колебания с циклической частотой  $\omega_0$  по закону:

$$x = A \cos \varphi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$\varphi_0$  – угол, образованный вектором амплитуды и осью x в начальный момент времени.

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01})$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02})$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega; \quad A_1 \neq A_2; \quad \varphi_{01} \neq \varphi_{02}$$

Проекция конца вектора  $\vec{A}$  определяет результирующее смещение в начальный момент времени:  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$

Так как оба вектора  $A$  вращаются в процессе колебаний с одной и той же угловой скоростью  $\omega_0$ , с такой же скоростью будет вращаться и вектор результирующей амплитуды

По теореме косинусов:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = -\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}$$

### Фигуры Лиссажу

Рассмотрим сложение колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях

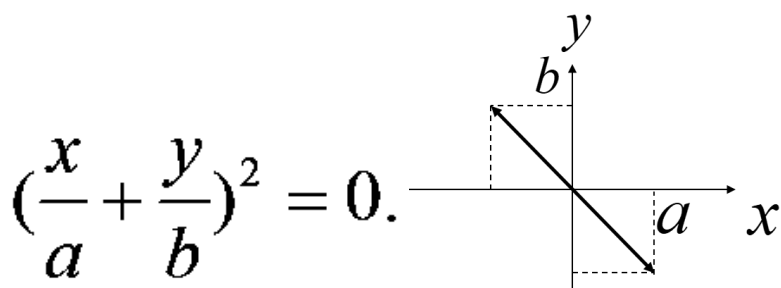
$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = b \cos(\omega t + \alpha).$$

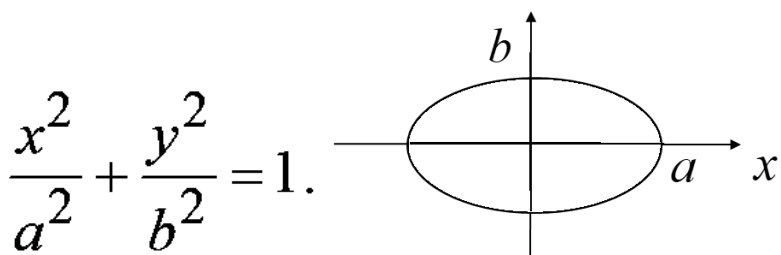
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha$$

. - уравнение эллипса

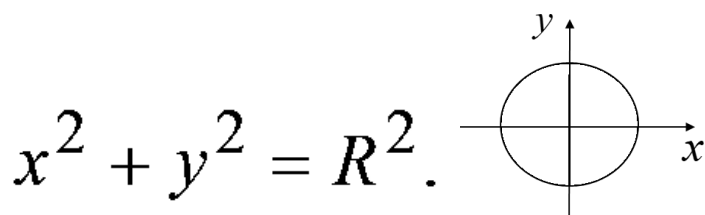
разность фаз =  $\pm \pi$



разность фаз =  $\pm \pi/2$



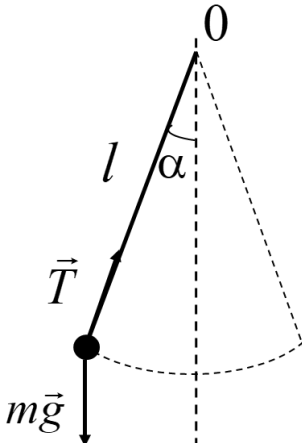
$$a = b = R.$$



#### 4. Физический и математический маятник (малые колебания без затухания)

**Математический маятник** представляет собой материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити.

В соответствии с динамическим уравнением вращательного движения

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z, \quad I \beta_z = M_z.$$


Для системы инерция и её момент  $I = ml^2$ ,  
 $M_z = -mgl \sin \alpha$ .

Следовательно ур-е движения имеет вид:  
 $ml^2 \ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha$ .

Для малых углов  $\ddot{\alpha} + \frac{g}{l} \alpha = 0$

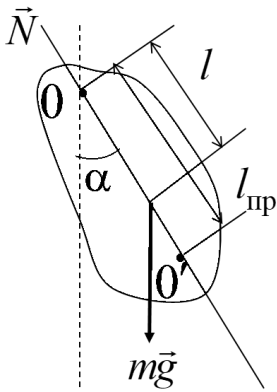
Введя обозначение  $\frac{g}{l} = \omega_0^2$ , получим  $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$   
Решением этого ур-я является функция  
 $\alpha(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

- кинематическое уравнение гармонических колебаний математического маятника.

Период этих колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  Частота  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$

**Физический маятник** представляет собой твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг

неподвижной точки или оси. (Исключением является центра масс и ось, проходящая через центр масс).



Уравнение колебаний физического маятника аналогично уравнению математического маятника и запишется в виде

$$J \ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0 \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0,$$

где  $\omega_0^2 = mgl / J$

Период колебаний физического маятника определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

Математический маятник с приведенной длиной

$$l_{пр} = \frac{J}{m\ell}$$

будет иметь такой же период колебаний как и данный физический. При этом точка будет центром качания физического маятника.

## 5. Затухающие колебания. Уравнение затухающих колебаний и его решение.

**Затухающие колебания** - колебания с постоянно убывающей со временем амплитудой.

При наличии сопротивления ускорение материальной точки, совершающей колебания, обусловлено действием двух сил: возвращающей (квазиупругой) и силы сопротивления.

По второму закону Ньютона:

Дифференциальное уравнение свободно затухающих колебаний линейной системы задаётся в виде:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \quad (1)$$

где  $s$  – колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс,  $\delta = \text{const}$  – коэффициент затухания,  $\omega_0$  – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы, т.е. при  $\delta = 0$  (при отсутствии потерь энергии) называется собственной частотой колебательной системы.

Решение уравнения (1) рассмотрим в виде  $s = e^{-\delta t} u$  (2), где  $u = u(t)$ .

После нахождения первой и второй производных выражения (2) и подстановки их в (1) получим  $\ddot{u} + (\omega_0^2 - \delta^2)u = 0$ . Решение уравнения зависит от знака коэффициента перед искомой величиной.

Пусть этот коэффициент положителен:  $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ .

Тогда получим уравнение типа:  $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$ , решением которого является функция  $u = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$ . Таким образом, решение уравнения в случае малых затуханий  $s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$ ,

где  $\delta = r/(2m)$  в случае механических колебаний и  $\delta = R/(2L)$  в случае электромагнитных колебаний;  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  – частота затухающих колебаний;  $A_0 e^{-\delta t}$  – амплитуда затухающих колебаний.

Затухающие колебания не являются гармоническими. Их амплитуда убывает по экспоненциальному закону  $A = A_0 e^{-\delta t}$

Циклическая частота собственных затухающих колебаний системы связана с циклической частотой свободных незатухающих колебаний этой же системы соотношением:  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ .

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \quad \text{— период затухающих колебаний}$$



## 6. Вынужденные колебания

Если на систему, кроме квазиупругой силы и силы сопротивления, действует также внешняя периодическая сила, система будет совершать **вынужденные колебания**.

Пусть внешняя сила (будем называть эту силу вынуждающей)

изменяется по гармоническому закону:  $F = F_0 \cos \Omega t$  где  $F_0$  -

амплитуда периодически изменяющейся силы,  $\Omega$  - циклическая частота.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет следующий вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

$$\beta = \frac{r}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad f_0 = \frac{F_0}{m}$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения складывается из двух частей: общего решения соответствующего однородного уравнения, которое определяет затухающие колебания:

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Частное решение  $x_2 = A \cos(\Omega t - \alpha_0)$

Затухающие колебания играют роль только на этапе установления колебаний. Установившиеся вынужденные колебания

происходят по гармоническому закону  $x_2 = A \cos(\Omega t - \alpha_0)$

А- установившихся вынужденных колебаний,  $\alpha_0$  - сдвиг фаз между колебаниями координаты и вынуждающей силы.

Подставив решение в динамическое уравнение, получим :

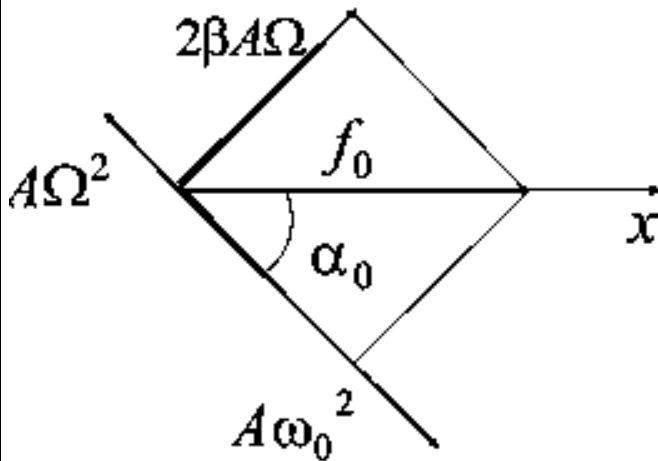
$$-A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha_0) - 2\beta A\Omega \sin(\Omega t - \alpha_0) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t - \alpha_0) = f_0 \cos \Omega t$$

Приведем его к виду:

$$A\Omega^2 \cos(\Omega t - \alpha_0 + \pi) + 2\beta A\Omega \cos(\Omega t - \alpha_0 + \frac{\pi}{2}) + \omega_0^2 A \cos(\Omega t - \alpha_0) = f_0 \cos \Omega t$$

Применим метод векторных амплитуд

из рисунка получим



$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

Продифференцируем выражение для амплитуды

$$2(\omega_0^2 - \Omega_{рез}^2) \cdot (-2\Omega_{рез}) + 8\beta^2\Omega_{рез} = 0$$

При частоте  $\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

амплитуда вынужденных колебаний

$$A_{\max} = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

достигает своего максимума

## 7. Явление резонанса, определение его характеристик

**Резонанс** - явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебаний системы.

**Частота резонанса:** Это частота, при которой система достигает максимальной амплитуды или эффективности. Когда внешняя частота совпадает с частотой резонанса, возникает резонансное явление. Частота резонанса определяется инерцией и упругостью системы.

**Амплитуда:** В резонансе система имеет максимальную амплитуду колебаний или максимальное значение отклика. Это происходит из-за эффекта накопления энергии, когда внешняя частота близка к частоте резонанса.

**Качество (Q-фактор):** Качество системы характеризует ее способность поддерживать резонанс на определенной частоте в течение длительного времени. Оно определяется соотношением энергии, запасенной в системе, к энергии, потерянной в результате трения и диссипации. Чем выше Q-фактор, тем более острый резонанс и меньше потери энергии.

**Фазовый сдвиг:** В резонансе может происходить фазовый сдвиг между внешней силой и откликом системы. Фазовый сдвиг может быть положительным (отставание) или отрицательным (выпередание), и его величина зависит от характеристик системы и частоты внешнего воздействия.

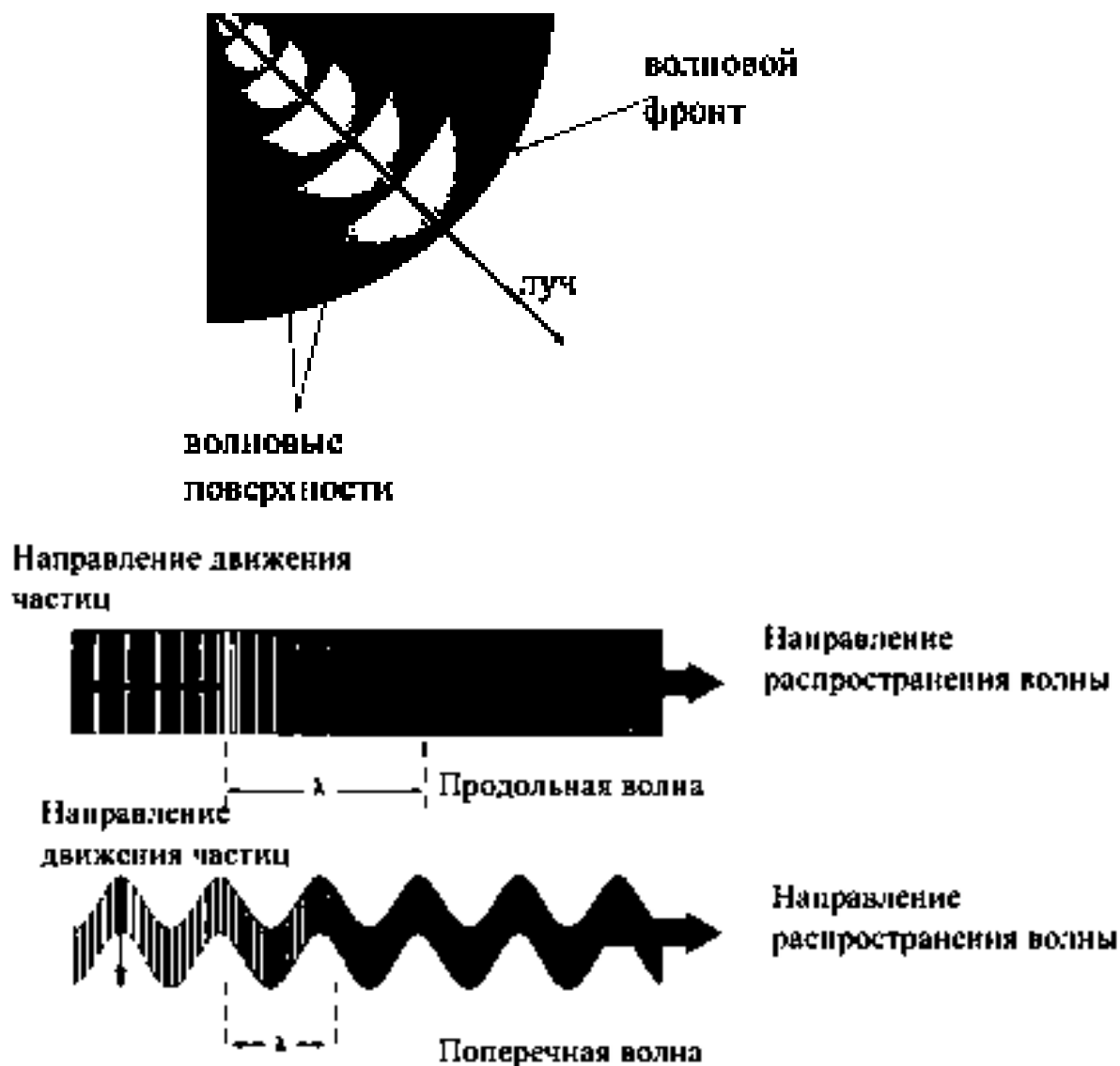
**Резонансная кривая:** График, показывающий зависимость амплитуды или эффективности системы от частоты внешнего воздействия, называется резонансной кривой. На этой кривой можно наблюдать пик или пики, соответствующие резонансным частотам системы.

Важно отметить, что резонанс может быть полезным или нежелательным в зависимости от контекста. В некоторых случаях резонанс может приводить к повреждению системы или вызывать нежелательные эффекты, в то время как в других случаях он может быть использован для усиления сигнала или улучшения эффективности системы.

## 8. Основные характеристики напряжений в упругих средах.

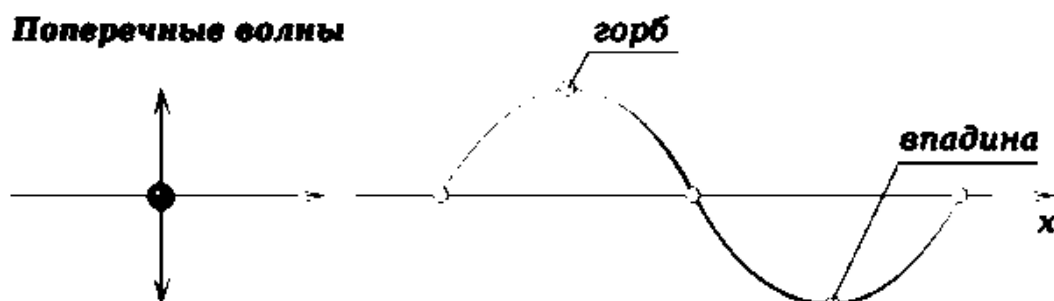
### Распространение волн. Продольные и поперечные волны

**Волновая поверхность** — геометрическое место точек, колеблющихся синфазно. **Волновой фронт** — волновая поверхность, разделяющая еще не возмущенный и возмущенный участки упругой среды (рис. 2.6).

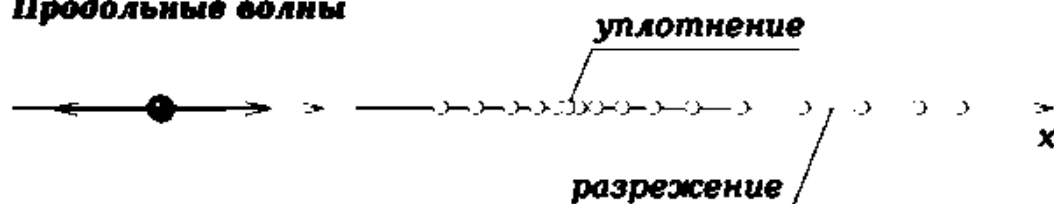


**Продольная волна** — волна, направление распространения которой совпадает с направлением движения частиц. При распространении продольной волны в среде образуются области растяжения и сжатия.

### **Поперечные волны**



### **Продольные волны**



**Поперечная волна** — волна, направление колебания частиц в которой перпендикулярно направлению распространения (рис. 2.10). В жидкостях и газах поперечных волн не существует, т. к. в этих средах отсутствует упругость формы.

## 8. Фазовая скорость волны. Длина волны

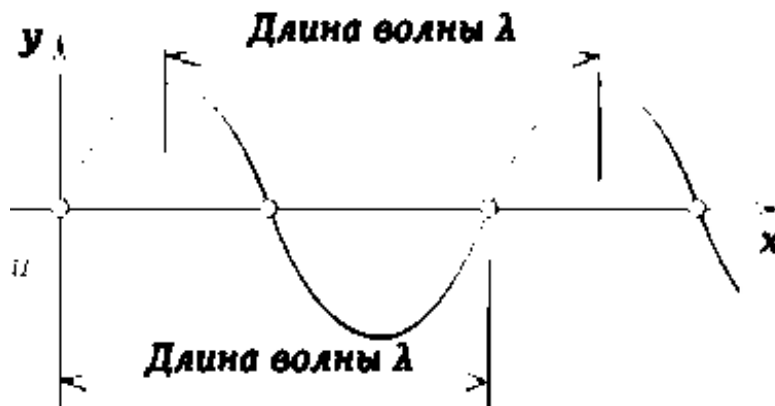
Фазовая скорость упругой продольной волны определяется упругими свойствами среды и ее плотностью

$$v_{\phi} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad , \quad v_{\phi} = \frac{\omega}{k}$$

Скорость распространения синусоидальной волны  $v$  называется **фазовой скоростью**; это есть скорость распространения фиксированной фазы волны. Для простой синусоидальной волны фиксированная фаза соответствует фиксированной амплитуде.

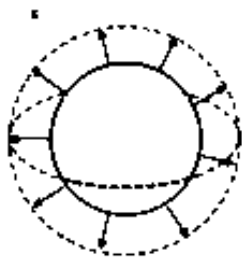
Минимальное расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебания точки среды около положения равновесия, называется **длиной волны**.

**Длиной волны**  $\lambda$  называется наименьшее расстояние между двумя точками среды, совершающими колебания в фазе (т.е. разность их фаз равна  $2\pi$ ).

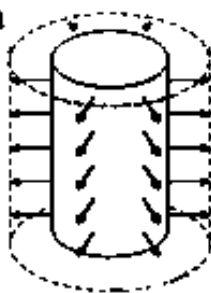


## 9. Плоские сферические и цилиндрические волны, уравнения плоской и сферической волн

Сферическая волна



волна



### Плоская волна

Для плоских волн волновой фронт имеет вид плоскости. Источником таких волн являются плоскопараллельные пластины, испытывающие периодические деформации растяжения-сжатия по толщине. Для плоской волны расхождение лучей отсутствует, и ее ослабление обусловлено только затуханием в среде. **Уравнение**

**плоской волны**  $s = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$

$$u(t, r) = u_0 \sin(\omega t - kr)$$

Волновые поверхности сферических волн имеют вид концентрических сфер. Источником сферических волн является точечный объект или сфера малого диаметра. Поскольку расхождение лучей осуществляется в двух плоскостях, ослабление амплитуды с увеличением расстояния  $r$  для такой волны будет максимальным.

**Уравнение сферической волны**

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos[\omega t - kr + \varphi_0]$$

$$u(t, r) = (u_0/r) \sin(\omega t - kr)$$

Цилиндрические волны имеют цилиндрический волновой фронт. Их источником является колеблющийся протяженный цилиндр малого диаметра. Волна с цилиндрическим фронтом распространяется в одной плоскости, вследствие чего ее амплитуда медленнее, чем у сферической волны, ослабевает с увеличением расстояния. **Уравнение**

$$u(t, r) = \frac{u_0}{\sqrt{r}} \sin(\omega t - kr)$$

цилиндрической волны

## 9+10. Волновое уравнение для плоской волны. Связь скорости плоской волны с характеристиками упругой волны

Плоские волны: волновые поверхности – параллельные плоскости.

Сферические волны: волновые поверхности – концентрические сферы

**Уравнение волнового процесса(волны)** – это выражение, дающее смещение колеблющейся частицы как функцию ее координат и времени:

1) Для плоской волны (в положительном направлении оси  $x$ ):

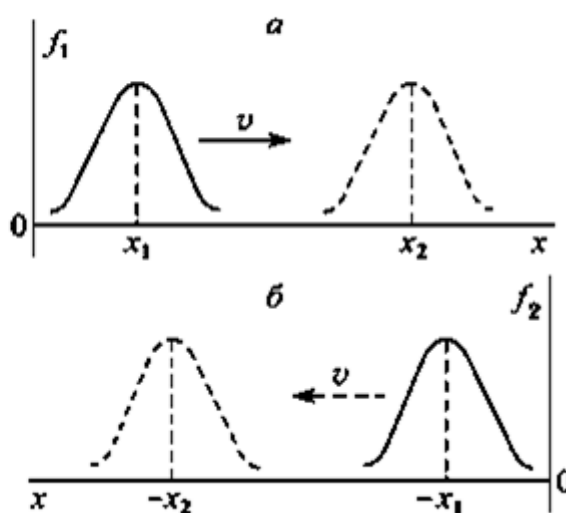
$$s = f(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right]$$

В отрицательном направлении оси  $x$ :

$$s = A \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{v} \right) + \varphi \right]$$

$A$  – амплитуда волны;

$\varphi$  – начальная фаза



Его можно записать в симметричной относительно  $x, t$  форме, введя величину:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad - \text{ волновое число}$$

Тогда

$$s = f(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (*)$$

Продифференцируем уравнение (\*) дважды по координате  $x$ :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f''$$

Продифференцируем уравнение (\*) дважды по времени  $t$ :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = f''$$



Сопоставив выражения, получаем

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}} \quad \text{- волновое уравнение}$$

Для волны, распространяющейся в произвольном направлении:

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right)}$$

Рассмотрим продольную плоскую волну в твердой среде:

**Деформация среды** в плоскости  $x$ :

(взяв символ частной производной,  
т.к.  $s = s(x, t)$ )

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x}}$$

**Нормальное напряжение**

пропорционально деформации

(для малых деформаций):

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial s}{\partial x}}$$

где  $E$  – модуль Юнга среды.

• В положениях максимального отклонения частиц от положения равновесия ( $\partial s / \partial x = 0$ )  $\varepsilon = 0$ ,  $\sigma = 0$

• В местах прохождения частиц через положения равновесия  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  **максимальны** (с чередованием  $\pm \varepsilon$ , т.е. растяжений и сжатий)

Скорость продольной волны связана с характеристиками среды следующим образом:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}, \quad \text{где } \rho \text{ – плотность среды.}$$

Для поперечной волны

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}}, \quad G \text{ – модуль сдвига.}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad 1)$$

## 11. Энергия плоской упругой волны

**Упругие (механические) волны** – механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Тело называется упругим, а его деформации, вызываемые внешними воздействиями, называются упругими деформациями, если они полностью исчезают после прекращения этих воздействий (Закон Гука:  $F_{\text{упр}} = -kx$ ).

Газ, жидкость обладают только объёмной упругостью, т.е. способностью сопротивляться изменению объёма. **Твёрдое тело** – объёмная упругость и упругость формы. **Звуковые (акустические) волны** – упругие волны малой интенсивности.

### Энергия упругой волны

Сумма кинетической и потенциальной энергии выделенного объема дает его полную механическую энергию, то есть:

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_p = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + V_\phi^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V \Rightarrow w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{\rho}{2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + V_\phi^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Дифференцирование уравнения плоской волны по  $t$  и по  $x$  дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -a\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0); & \frac{\partial \xi}{\partial x} &= ak \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \Rightarrow \\ w &= \frac{\rho a^2}{2} (\omega^2 + V_\phi^2 k^2) \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0); & k &= \frac{\omega}{V_\phi} \Rightarrow kV_\phi = \omega \Rightarrow \\ & & w &= \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0). \end{aligned}$$

Полученное выражение означает, что объёмная плотность энергии волны в каждый момент времени в различных точках пространства различна. В данной точке плотность энергии изменяется со временем по закону квадрата синуса. Этот результат справедлив для всех механических волн.

### Поток энергии волны

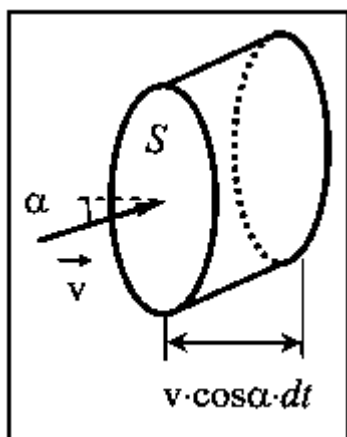
Среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной; следовательно, волна переносит с собой энергию. Количество энергии, переносимое через некоторую поверхность в единицу времени, называется потоком энергии.

энергии. Если через данную за время  $dt$  переносится энергия  $dW$ , то поток энергии  $\Phi$  равен

$$\Phi = \frac{dW}{dt}; \quad [\Phi] = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = 1 \text{ Вт}.$$

## 11. Вектор Умова

Пусть энергия переносится со скоростью  $v$  в направлении под углом к нормали некоторой малой площадки  $S$ .



Тогда вся энергия, прошедшая через эту площадку за малое время  $dt$  окажется в области, объем которой  $dV = S \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dt$  (на рисунке эта область является косым цилиндром). Если объемная плотность энергии равна  $w$ , то энергия этого объема  $W = w \cdot dV = w \cdot S \cdot v \cdot \cos \alpha \cdot dt$ . Мощность переноса энергии через площадку  $S$ :  $dW/dt = w \cdot S \cdot v \cdot \cos \alpha$ .

Введем вектор плотности потока энергии (Вектор Умова)  $j = w \cdot v$ , тогда  $dW/dt = j \cdot S \cdot \cos \alpha$ . Если ввести вектор  $S = \vec{n} \cdot S$ , направленный по нормали к площадке, и скалярное произведение  $j \cdot S \cdot \cos \alpha = (j, S)$  определить как поток вектора Умова через площадку  $S$ , то мощность переноса энергии через площадку определяется потоком вектора Умова через эту площадку  $dW/dt = (j, S)$ . Интенсивность волны – это средняя по времени мощность энергии переносимая волной через площадку в направлении перпендикулярном к этой площадке. Для

$$I = \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2} S v$$

плоской волны интенсивность не меняется при распространении волны. Для сферической волны интенсивность через любую сферу радиуса  $R$  с центром в источнике

$$I = \frac{\rho \cdot \omega^2 A^2}{2} S v = \frac{\rho \cdot \omega^2 A_0^2}{2} 4\pi R^2 v = 2\pi \rho v \cdot \omega^2 A_0^2$$

тоже является постоянной величиной. Если интенсивность волны при её распространении в некоторой среде уменьшается, то среда называется диссипативной. Если интенсивность волны увеличивается, то среда называется активной.

## **12. Термодинамический и статистический методы исследования. Термодинамические параметры. Термодинамическое равновесие. Обратимые и необратимые процессы. Квазистатический процесс**

Для исследования свойств и процессов, происходящих в макроскопической системе (система, состоящие из очень большого числа частиц), применяют два взаимно дополняющих друг друга метода, термодинамический и молекулярно-кинетический или статистический.

**Статистический метод** исходит из представлении об атомно-молекулярном строении макрообъектов. Статистический метод основан на использовании теории вероятностей и определенных моделей строения изучаемых систем.

Например, хотя характеристики, описывающие движение отдельной микрочастицы являются величинами случайными, предсказать которые просто невозможно, в совокупном поведении большого числа частиц проявляются особые закономерности, называемые статистическими закономерностями. Т.е. в системе, состоящей из большого числа частиц, существуют некоторые средние значения физических величин, характеризующих всю совокупность частиц в целом. Так, в газе существуют средние значения скоростей теплового движения молекул и их энергий. В твердом теле существует средняя энергия, приходящаяся на каждую степень свободы колебательного движения частицы и т.д.

**Термодинамический метод** не учитывает внутреннее строение веществ тех тел (систем), которые изучаются, и характер движения отдельных частиц.

Термодинамический метод основан на изучении различных превращений энергии, происходящие в системе. Условия этих превращений и соотношения между разными видами энергии позволяют изучать физические свойства исследуемых систем при самых разнообразных процессах, в которых эти системы участвуют.

Обычно **термодинамическими параметрами** выбирают **давление, удельный объем и температуру**.

**Равновесным состоянием или состоянием термодинамического равновесия** называется состояние системы, не изменяющееся с течением времени, т.е. стационарное состояние, причем стационарность состояния не связана с процессами, происходящими во внешней среде. Равновесное состояние устанавливается в системе при постоянных внешних условиях и сохраняется произвольно долгое время. Во всех частях термодинамической системы, находящейся в равновесном состоянии температура одинакова.

**Обратимым** называется процесс, допускающий возможность возвращения системы в первоначальное состояние без каких-либо изменений во внешней среде и в самой системе. В противном случае процесс необратимый.

Необходимым и достаточным условием необратимости процесса является его неравновесность. Следует иметь в виду, что реальные процессы, происходящие в природе являются необратимыми.

Бесконечно медленный процесс, состоящий из последовательности равновесных состояний, называется **квазистатический процесс**

### 13. Уравнение состояния системы. Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа

Состояние некоторой массы газа определяется значениями трех параметров: давления  $p$ , объема  $V$  и температуры  $t^\circ$ . Эти параметры закономерно связаны друг с другом, так что изменение одного из них влечет за собой изменение других. Указанная связь может быть задана аналитически в виде функции

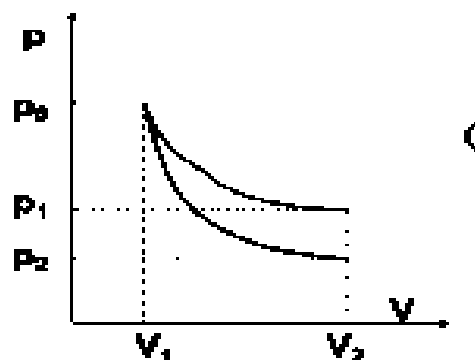
$$F(p, V, t^\circ) = 0. \quad (98.1)$$

Соотношение, дающее связь между параметрами какого-либо тела, называется уравнением состояния этого тела. Следовательно, (98.1) представляет собой уравнение состояния данной массы газа.

Название (пост. параметр)	Закон (формула)	Объяснения на основе МКТ	Примеры проявления	Графики
Изотермический T-const	$p_1 V_1 = p_2 V_2$ Закон Бойля-Мариотта	$V \downarrow \rightarrow p \uparrow$ , т.к. $p = n k T$ , $V \sim 1/n$ , $V \downarrow \rightarrow n \uparrow$ $p \sim n$ , $n \uparrow \rightarrow p \uparrow$ .	Медленное сжатие или расширение газа под поршнем	
Изохорный V-const	$p_1/T_1 = p_2/T_2$ Закон Гей-Люссака	$T \downarrow \rightarrow p \downarrow$ , т.к. $p = n k T$ , $p \sim T$ , $T \downarrow \rightarrow p \downarrow$ $V = \text{const} \rightarrow$ $N = \text{const}$	В электр. лампе при нагревании давление увеличивается	
Изобарный P-const	$V_1/T = V_2/T_2$ Закон Шарля	$T \downarrow \rightarrow V \downarrow$ , т.к. $n = p/kT$ или то $V \sim T$ ( $N$ , $k$ , $p = \text{const}$ )	Расширение газа при нагревании в цилиндре	

**Адиабатический процесс** – термодинамический процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой.

**Политропический процесс.** Процесс, при котором теплоёмкость газа остаётся постоянной. Политропический процесс – общий случай всех перечисленных выше процессов.



Газ, обладающий такими же свойствами, как и совокупность невзаимодействующих материальных точек, называется идеальным.

## **Основное уравнение МКТ**

---

С учетом вышесказанного о температуре, **основное уравнение молекулярно-кинетической теории** можно записать по-другому.

$$p = nkT$$

Уравнение Менделеева –Клапейрона связывает основные параметры состояния идеального газа.

$$pV = \frac{m}{\mu} RT$$



# 14+15. Внутренняя энергия идеального газа. Теплообмен и количество теплоты. Работа сил давления газа. Первое начало термодинамики.

**Внутренняя энергия идеального газа**—это сумма кинетических энергий движения молекул. В случае с идеальным газом его внутренняя энергия зависит только от его температуры (закон Джоуля) и определяется по формуле:

$$u = \frac{i}{2} \nu RT,$$

Теплообмен — самопроизвольный процесс передачи внутренней энергии от тела с большей температурой телу с меньшей температурой без совершения работы

При теплообмене не происходит превращения энергии из одной формы в другую: часть внутренней энергии более нагретого тела передаётся менее нагретому

Количество теплоты является количественной мерой энергии, переданной телу в процессе теплообмена

Количество теплоты, сообщаемое при нагревании тела (выделяющееся при охлаждении):  
 $Q = cm(T_2 - T_1)$

Количество теплоты, необходимое для плавления твёрдого тела, находящегося при температуре плавления:  
 $Q_{пл} = \lambda m$   
 Количество теплоты, выделяющееся при кристаллизации жидкости:  
 $Q_{кр} = -\lambda m$

Количество теплоты, необходимое для превращения жидкости, находящейся при температуре кипения, в пар:  
 $Q_{п} = Lm$   
 Количество теплоты, выделяющееся при конденсации пара:  
 $Q_{к} = -Lm$

Количество теплоты, выделяющееся при полном сгорании топлива:  
 $Q_{сг} = qm$

Теплота, подводимая к системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение этой системой работы над внешними телами:  $Q = \Delta U + A$ . (Первое начало термодинамики)

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P(V) dV.$$

работа газа при изменении объёма

## 15.Теплоемкость как функция термодинамического процесса.

### Уравнение Майера.

Удельная теплоемкость вещества—величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}$$

Молярная теплоемкость—величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моля вещества на 1 К

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил равна нулю и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии.

Если нагревать изобарно в сосуде с поршнем то он поднимется на высоту  $h$ , т.е. совершит работу  $(C_p)(dA=pdV)$

Теплоёмкость при постоянном объёме:  $C_v=dQ/dT=dU_m/dT$

Если газ нагревается при постоянном давлении, то выражение можно

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{pdV_m}{dT}$$

за-писать в виде

$C_p = C_v + R$ . (9-22) Выражение (9-22) называется уравнением Майера; оно показывает, что  $C_p$  всегда больше  $C_v$  на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа.

## 15. Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона

Адиабатический, процесс — термодинамический процесс в макроскопической системе, при котором система не обменивается теплотой с окружающим пространством. Адиабатические процессы обратимы только тогда, когда в каждый момент времени система остаётся равновесной (например, изменение состояния происходит достаточно медленно) и изменения энтропии не происходит.

адиабатический процесс в силу отсутствия теплообмена () системы со средой сводится только к последним двум процессам. Поэтому, первое начало термодинамики в этом случае приобретает вид

$$\Delta U = -A,$$

Уравнение Пуассона описывает адиабатный процесс, протекающий в идеальном газе. Адиабатным называют такой процесс, при котором отсутствует теплообмен между рассматриваемой системой и окружающей средой:  $\Delta Q = 0$ .

Уравнение Пуассона имеет вид:  $PV^k = \text{const}$

Показатель адиабаты можно рассчитать, как отношение изобарной

$$k = \frac{C_p}{C_v}$$

теплоемкости газа к его изохорной теплоемкости:

## 16. Понятие функции распределения (плотности вероятности) случайной величины

Определение: *Случайной величиной  $X$  называется функция, заданная на множестве элементарных исходов (или в пространстве элементарных событий),*

$$X = f(\omega)$$

Определение. **Функцией распределения** случайной величины  $X$  называется функция  $F(x)$ , выражающая для каждого  $x$  вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение, меньшее  $x$ :

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию  $F(x)$  иногда называют *интегральной функцией распределения* или *интегральным законом распределения*.

Общие свойства функции распределения:

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей
2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси
3. На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности равна единице
4. Вероятность попадания случайной величины в интервал  $[x_1, x_2)$  (включая  $x_1$ ) равна приращению ее функции распределения на этом интервале

Определение: *Плотность вероятности (плотностью распределения или просто плотностью)  $p(x)$  непрерывной случайной величины  $X$  называется производная ее функции распределения*

$$p(x) = F'(x)$$

## 16. Распределение молекул идеального газа по скоростям (Распределение Максвелла)

Закон распределения молекул идеального газа по скоростям, теоретически полученный Максвеллом определяет, какое число  $dN$  молекул однородного ( $p = \text{const}$ ) одноатомного идеального газа из общего числа  $N$  его молекул в единице объёма имеет при данной температуре  $T$  скорости, заключенные в интервале от  $v$  до  $v + dv$ .

Для вывода функции распределения молекул по скоростям  $f(v)$  равной отношению числа молекул  $dN$ , скорости которых лежат в интервале  $v - v + dv$  к общему числу молекул  $N$  и величине интервала  $dv$

$$f(v) = \frac{dN(v)}{N dv}$$

Максвелл использовал два предположения:

а) все направления в пространстве равноправны и поэтому любое направление движения частицы, т.е. любое направление скорости одинаково вероятно. Это свойство иногда называют свойством изотропности функции распределения.

б) движение по трем взаимно перпендикулярным осям независимы т.е.  $x$ -компоненты скорости  $v_x$  не зависят от того каково значения ее компонент  $v_y$  или  $v_z$ . И тогда вывод  $f(v)$  делается сначала для одной компоненты  $v_x$ , а затем обобщается на все координаты скорости.

Считается также, что газ состоит из очень большого числа  $N$  тождественных молекул находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при одинаковой температуре. Силовые поля на газ не действуют.

Используя методы теории вероятностей, Максвелл нашел функцию  $f(v)$  - закон распределения молекул идеального газа по скоростям:

$$f(v) = 4\pi(m_0/2\pi kT)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

$f(v)$  зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметра состояния (от температуры  $T$ )

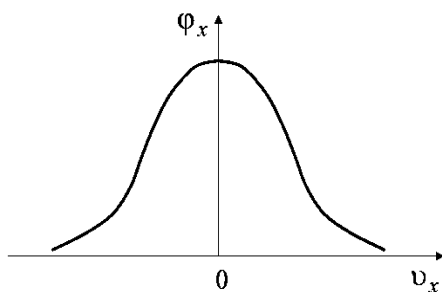
Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется наиболее вероятной скоростью  $v_{\text{нв}}$

$$v_{HE} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$$

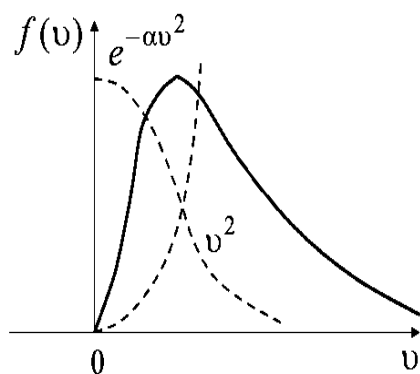
Скорости, характеризующие состояние газа

- $v_{H.E} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$
- $v_{cp} = \sqrt{\frac{3RT}{\pi\mu}}$
- $v_{cp.KE.} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$

Функция распределения молекул по компоненте скорости имеет вид



Функция распределения молекул по значениям скорости имеет вид



## 17.Средняя, среднеквадратичная и наиболее вероятностная скорости молекул

Средняя скорость

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m};$$

Среднеквадратичная скорость

$$\langle v \rangle_{\text{ср.кв.}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m};$$

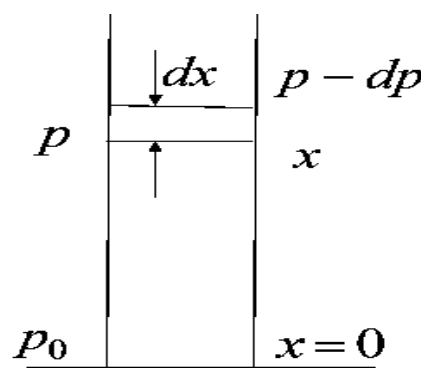
Наиболее вероятностная

$$v_{\text{н.в.}} = \sqrt{2kT/m}.$$

## 18. Распределение молекул идеального газа по координатам во внешнем поле (распределение Больцмана)

Атмосфера обязана своим существованием наличию одновременно теплового движения молекул и силы притяжения к Земле. При этом устанавливается распределение молекул по высоте. В соответствии с этим устанавливается и определенный закон изменения давления газа с высотой.

Выделим произвольный столб воздуха и рассмотрим изменение давления с высотой.



$p$   
 $dx$   
 $p - dp$   
 $x$   
 $x = 0$   
 $p_0$

$$dp = -\rho g dx;$$

$$\rho = mn;$$

$$n = \frac{p}{kT}.$$

$$dp = -\frac{mg}{kT} p dx. \quad \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{mg}{kT} dx.$$

1,1                      1,2                      1,3                      1,4

После подстановки  $\rho$  и  $n$  получим 1,3

Разделим переменные и проинтегрируем: 1,4

$$\ln p = -\frac{mg}{kT} x + \ln C. \quad p = C e^{-\frac{mg}{kT} x}.$$

Константу определяем из условия  $x = 0, \quad p = p_0$ , следовательно

$$C = p_0. \quad \Rightarrow \quad p = p_0 e^{-\frac{mg}{kT} x}.$$

Закон, устанавливающий зависимость давления от высоты, называется барометрической формулой.

Распределение Больцмана:

В барометрической формуле  $mgx$  представляет потенциальную энергию молекулы на высоте  $x$ . Таким образом барометрическая формула дает распределение молекул по потенциальным энергиям



$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$ . Поведение газа не изменится, если вместо силы тяжести на него будет действовать другая сила.  $n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}}$ .

## 18. Распределение Максвелла-Больцмана

Распределение Максвелла даёт распределение частиц по скоростям и компонентам скоростей. (Проще говоря будем рассматривать вероятность распределения молекул по скоростям).

Вероятность того, что компонента скорости некоторой молекулы имеет значение в пределах от  $v$ ,  $v+dv$  может быть представлена в виде

$$dP_x = \frac{dn_x}{n_x} = \varphi(v_x)dv_x, \quad dP_y = \frac{dn_y}{n_y} = \varphi(v_y)dv_y, \quad dP_z = \frac{dn_z}{n_z} = \varphi(v_z)dv_z$$

Для функций распределения были получены выражения:

$$\varphi_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right), \quad \varphi_y = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right), \quad \varphi_z = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right).$$

Вероятность одновременного наблюдения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

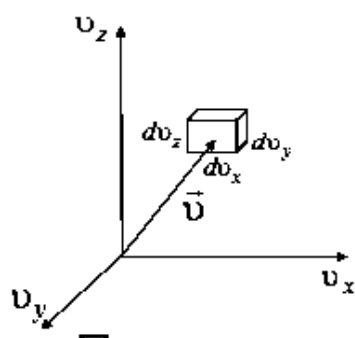
$$dP_{x,y,z} = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_x dv_y dv_z.$$

Следовательно, вероятность того, что молекулы газа обладают скоростями, составляющие которых по осям координат лежат в интервалах между  $v_x$ ,  $v_x + dv_x$ ,  $v_z$  и  $v_z + dv_z$ ,  $v_y$  и  $v_y + dv_y$ , равна

$$dP_{x,y,z} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z.$$

Количество молекул из числа находящихся в единице объема газа с компонентами скорости, попадающими в заданные интервалы,

определится следующим образом:  $dn = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z$  Перейдем в пространство скоростей

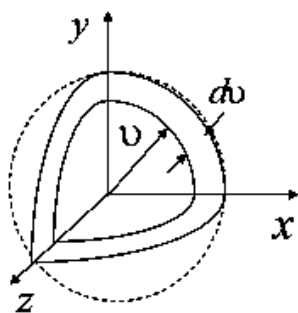


$$\frac{dn}{dV} = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

где  $dV = dv_x dv_y dv_z.$

Полученное выражение не зависит от направления скорости

Найдем функцию распределения молекул по скоростям независимо от их направления. В интервал  $v, v+dv$  попадут молекулы, находящиеся в шаровом слое объемом  $4\pi v^2 dv$ .

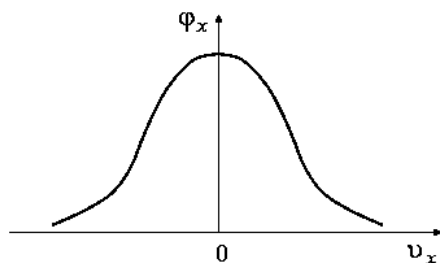


$$dn = 4\pi n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

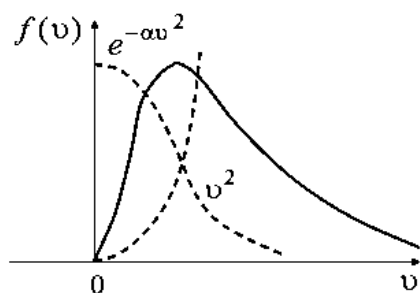
Функция распределения молекул по скоростям – закон Максвелла:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Ф-ция распределения молекул по компоненте скорости:



По значениям скорости



## 19+20. Закон равнораспределения Энергии по степеням свободы. Статистический смысл температуры

Закон Больцмана лежит в основе теории идеального газа. Он позволяет получить всё, что касается равновесия газа. В частности, позволяет решить вопрос об энергии газа.

Используя закон Больцмана можно получить среднее значение энергии молекулы вида по формуле:

$$\langle \varepsilon(\alpha) \rangle = \frac{\sum n_{\alpha} \varepsilon(\alpha)}{N},$$

где сумма берётся по всем возможным значениям энергии вида ,  
N – полное число молекул газа.

Для вычисления средней кинетической энергии молекулы воспользуемся результатом, полученным при выводе основного уравнение МКТ идеального газа. Для среднего значения кинетической энергии поступательного движения таких молекул получено:

$$\langle \varepsilon \rangle_{\text{пост}} = \langle \frac{mv^2}{2} \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Так как поступательному движению соответствуют три степени свободы, то в среднем на каждую степень свободы поступательного движения молекулы приходится энергия, равная:

$$\frac{1}{3} \langle \varepsilon \rangle_{\text{пост}} = \frac{1}{2} kT.$$

В модели идеального газа, когда молекулы представляются связанными состояниями атомов, как точечных образований, кроме поступательного движения молекулы совершают вращательное движение.

Так как по структуре кинетическая энергия вращательного движения аналогична кинетической энергии поступательного движения, т.е. обе они пропорциональны квадрату переменной ( $K_{\text{пост}} \sim v^2$ ,  $K_{\text{вр}} \sim \omega^2$ ), можно полагать, что на каждую степень вращательного движения молекулы в среднем также приходится энергия.

Таким образом, на любую степень свободы молекулы при умеренных температурах в среднем приходится энергия  $\frac{1}{2}kT$ .

Полученный закон называется законом равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы распространяется на любые частицы, участвующие в тепловом движении. Например, мелкие частицы пыли совершают хаотические движения и на каждую степень свободы пылинки в среднем также приходится энергия.

$$C_v = iR/2. \quad C_p = (i+2)/2 * R \quad \text{Для молярной массы газа}$$

## **20.Статистический вес макросостояния. Статистический смысл энтропии. Энтропия системы.**

Энтропия –отношение полученной или отданной системой или отданной системой теплоты в обратимом процессе к температуре, при которой происходит эта передача.

$$S = \int \frac{dQ_{\text{обр}}}{T}$$

Величина аддитивная, т.е. равна сумме всех энтропий, входящих в систему  $S = \sum S_j$

Термодинамическая вероятность  $W$  максимальна, когда система находится в равновесном ,максимальна и энтропия. Между ними существует связь

$$S = k \ln W.$$

Связь между  $S$  и  $W$  позволяет несколько иначе сформулировать второе начало термодинамики: наиболее вероятным изменением энтропии является ее возрастание.

Энтропия замкнутой системы максимальна при достижении системой равновесного состояния.

Макросостояние - это состояние вещества, характеризующее его термодинамическими параметрами.

Микросостояние – состояние, характеризующее его термодинамич

## **20.Второй закон термодинамики. Неравенство Клаузиуса. Закон возрастания энтропии. Энтропия и необратимость.**

Второе начало термодинамики: энтропия замкнутой системы при любых происходивших в ней пределах не может убывать

$$\Delta S \geq 0$$

Неравенство Клаузиуса: при любом необратимом процессе в замкнутой системе энтропия возрастает

$$\oint \frac{dQ}{T} > 0 \text{ или } \Delta S_{\text{необр}} > 0$$

Закон возрастания энтропии: энтропия в адиабатически изолированной системе не может убывать: она или сохраняется, если в системе происходит только обратимые процессы, или возрастает, если в системе протекает хотя бы один необратимый процесс.

## 21. Электрический заряд и его свойства. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Принцип суперпозиции сил.

Электрический заряд  $q$  – это физическая величина, которая характеризует свойство тел или частиц вступать в электромагнитные взаимодействия и определяет значения сил и энергий при таких взаимодействиях. Ему присущи следующие фундаментальные свойства:

1) электрический заряд существует в двух видах: отрицательные и положительные заряды;

2) Электрический заряд дискретен;

3) алгебраическая сумма электрических зарядов замкнутой системы остается постоянной (закон сохранения электрического заряда);

4) электрический заряд - величина релятивистски инвариантная, т.е. не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется заряд или покоится.

Закон сохранения электрического заряда утверждает: электрические заряды не возникают и не исчезают, они могут быть лишь переданы от одного тела другому или перемещены внутри данного тела.

$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const} \quad \text{ИЛИ} \quad q_1 + q_2 + q_3 + \dots = \text{const},$$

Закон Кулона утверждает: сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Этот закон можно записать в виде:

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}$$

• Принцип суперпозиции сил – суммарное действие нескольких факторов равно сумме этих факторов.



## 22. Электростатическое поле. Напряженность $E$ электростатического поля. Принцип суперпозиции полей. Напряженность электростатического поля точечного заряда и системы зарядов

Электростатическим полем называется электрическое поле неподвижных в выбранной системе отсчета зарядов. Основными характеристиками электростатического поля являются вектор напряженности и потенциал.

**Напряженность  $\vec{E}$**  электрического поля в некоторой его точке – векторная физическая величина, являющаяся силовой характеристикой электрического поля и равная отношению силы  $\vec{F}$ , действующей со стороны поля на помещенный в данную точку неподвижный точечный пробный заряд  $q_{\text{пр}}$ , к этому заряду:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_{\text{пр}}}.$$

В СИ  $[E] = \text{В/м}$ .

Вектор напряженности электрического поля точечного заряда  $q$  в точке с радиус-вектором  $\vec{r}$  относительно этого заряда определяется на основе закона Кулона как:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{q}{r^3} \vec{r}, \quad (2.1.1)$$

где  $k$  – размерная константа,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Кл}^{-2}$ .

Для электрических полей справедлив **принцип суперпозиции**: напряженность в каждой точке электрического поля, созданного несколькими неподвижными источниками, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым источником по отдельности в этой точке. Для системы  $n$  точечных зарядов:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(\vec{r}),$$

где  $\vec{E}_i(\vec{r})$  – напряженность поля точечного заряда  $q_i$  в точке с  $\vec{r}_i$ .

## 23. Поток векторного поля $E$ через поверхность. Теорема Гаусса для поля вектора $E$ электростатического поля.

Полное число силовых линий проходящих через поверхность  $S$  называется потоком вектора напряженности  $\Phi$ , через эту поверхность.

Поток через элементарную площадку может быть определена как:

$$d\Phi_E = E_n dS = \vec{E} d\vec{S},$$

В пределах элементарной площади  $dS$  вектор  $E = \text{const}$

Для произвольной поверхности поток через неё определяется:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS,$$

Теорема Гаусса: поток вектора напряженности, сквозь замкнутую поверхность  $S$  равен алгебраической сумме зарядов, охваченных этой поверхностью, деленной на  $\epsilon\epsilon_0$

$$\oint_S (E, d\vec{S}) = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}$$

## 24. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля.

Из механики нам известно, что гравитационные силы являются консервативными. Работа консервативных сил по замкнутой траектории равна нулю. Учитывая аналогию между законом Кулона и законом всемирного тяготения, можно утверждать, что электрические силы также являются консервативными. Следовательно, работа электрических сил по замкнутой траектории равна нулю:

$$A = \oint_L F dr = q \oint_L E dr = 0$$

Так как  $q \neq 0$ , то:  $\oint_L E dr = 0$ .

Интеграл от по замкнутой траектории называется циркуляцией вектора.

Мы получили математическое выражение консервативности (потенциальности) электростатического поля: циркуляция вектора электростатического поля равна нулю. Это утверждение составляет содержание теоремы о циркуляции, физический смысл которой заключается в том, что работа по перемещению единичного электрического заряда в электростатическом поле по замкнутой траектории равна нулю.

Следствием теоремы о циркуляции является независимость работы по перемещению электрического заряда из одной точки поля в другую от формы траектории.

## **24+26. Потенциал электростатического поля. Потенциал поля точечного заряда и системы зарядов.**

Потенциалом электростатического поля называется энергетическая характеристика поля, численно равная отношению потенциальной энергии пробного электрического заряда, помещенного в данную точку поля, к величине заряда.

Соотношение определяет потенциал поля точечного, положительного заряда  $Q$ , находящегося в вакууме, в точке, на расстоянии  $r$  от заряда, создающего поле.

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{\text{пр}}} = k \frac{Q}{r}$$

Пусть поле создается системой  $N$  точечных зарядов ( $q_1, \dots, q_N$ ), а расстояния от каждого заряда до данной точки поля - ( $r_1, \dots, r_N$ ).

$\varphi = \sum \varphi_i$ , если распределение зарядов дискретно.

Потенциал поля системы точечных зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных каждым зарядом в отдельности. В этом заключается принцип суперпозиции потенциала электростатического поля.

Если заряды распределены непрерывно по всему объёму, то потенциал поля равен:

$$\varphi = \int_V d\varphi$$

В СИ единица измерения потенциала -  $[\varphi] = 1 \text{ Дж/Кл} = 1 \text{ В}$

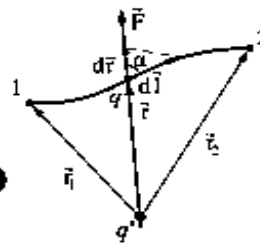
## 25. Связь между напряженностью и потенциалом

- Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке  $d\vec{l}$  можно найти так:

$$\partial A = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha = F_l dl = q E_l dl,$$

Эта работа равна убыли потенциальной энергии

$$\partial A = -q d\varphi; \quad E_l q dl = -q d\varphi$$



- Приравнявая два выражения для работы, получаем:

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl} = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}$$

- Поступим по другому. Вспомним связь силы с потенциальной энергией:

$$\vec{F} = -\text{grad } W$$

$$q\vec{E} = -\text{grad } q\varphi$$

- Окончательно:  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$
- В развернутом виде:

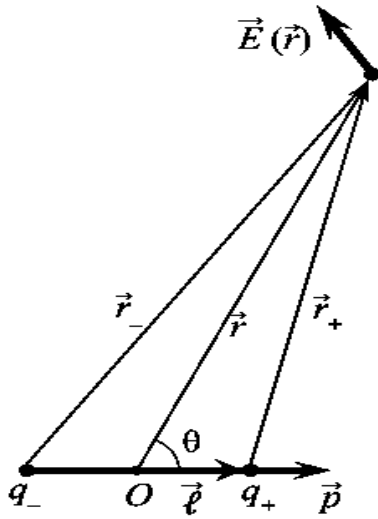
$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

- следовательно

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

## 26. Электрическое поле диполя в дальней зоне

Электрическим диполем называется совокупность двух равных по величине разноименных точечных зарядов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Количественной мерой способности диполя участвовать в электрическом взаимодействии и создавать электрическое поле является дипольный электрический момент  $\vec{p} = q\vec{l}$ .



Геометрическое место точек на плоскости, для которых  $l \ll r$  определим как дальняя зона поля диполя. В таком приближении упрощается расчет потенциала электростатического поля, который находится по принципу суперпозиции:

$$\varphi(r) = k \cdot q \cdot \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r_+} \right) = k \cdot q \cdot \frac{r_- - r_+}{r_- r_+} \approx k \cdot q \cdot$$

$$\frac{l \cdot \cos(\theta)}{r^2} \quad (7)$$

где  $r_- - r_+ \approx l \cos(\theta)$ ,  $r_- r_+ \approx r^2$ , окончательно, получаем

$$\varphi(r, \theta) \approx k \cdot \frac{p \cos(\theta)}{r^2}.$$

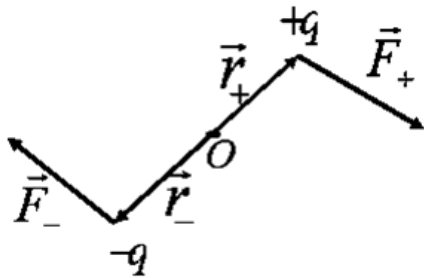
Применяя связь напряженности электростатического поля и потенциала  $E = -\text{grad } \varphi$  в полярной системе координат, можно из выражения (7) получить формулу для модуля вектора напряженности электрического диполя, которая будет иметь вид:

$$E(r, \theta) \approx k \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Аналитический расчет поля удастся только в наиболее простых случаях. Сложные электростатические поля исследуются обычно экспериментально методом моделирования

## 27. Момент сил, действующих на диполь в электрическом поле. Потенциальная энергия диполя в электрическом поле

Рассмотрим в системе центра масс как ведет себя диполь в электрическом поле (пара сил).



$$\vec{M} = [\vec{r}_+, \vec{F}_+] + [\vec{r}_-, \vec{F}_-] = [\vec{r}_+, q\vec{E}_+] - [\vec{r}_-, q\vec{E}_-]$$

Для достаточно малого плеча диполя

$$\vec{E}_+ \approx \vec{E}_-$$

$$\vec{M} = [\vec{r}_+ - \vec{r}_-, q\vec{E}] = [q\vec{l}, \vec{E}] = [\vec{p}, \vec{E}]$$

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}]}$$

Этот момент сил стремится развернуть диполь так, чтобы дипольный момент установился по направлению внешнего поля. Такое положение диполя является устойчивым.

Именно в этом положении диполь имеет минимальную энергию.

$$W = q_+ \varphi_+ + q_- \varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-),$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\partial \varphi}{\partial l} l, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial l} = -E_l,$$

$$\varphi_+ - \varphi_- = -E_l l = -\vec{E} \cdot \vec{l},$$

$$W = -q\vec{E} \cdot \vec{l} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

## 28. Плотность и сила тока. Основы теории Друде для классической электропроводности металлов

Электрическим током называется любое упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. В проводнике под действием приложенного электрического поля  $E$  свободные электрические заряды перемещаются: положительные — по полю, отрицательные — против поля, т.е. в проводнике возникает электрический ток, называемый током проводимости.

Количественной мерой электрического тока служит сила тока  $I$  — скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Ток, сила и направление которого не изменяются со временем, называется постоянным. Для постоянного тока.

$$I = \frac{q}{\Delta t}$$

Единица силы тока — ампер (А). Более детально ток можно охарактеризовать с помощью вектора плотности тока  $j$ .

Плотностью тока называется физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

Направление вектора  $j$  совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов. Единица плотности тока — ампер на метр в квадрате (А/м<sup>2</sup>).

или

$$j = en\langle u \rangle$$

где  $j$  — плотность тока,  $n$  — концентрация свободных электронов,  $q$  — заряд электрона.

Друде предположил, что электроны в металле ведут себя так же как молекулы идеального газа. В промежутках между соударениями электроны движутся свободно, пробегая в среднем некоторый путь. В отличие от молекул газа, которые сталкиваются между собой, электроны сталкиваются с узлами кристаллической решетки.



Среднее значение скорости при равноускоренном движении равно

половине максимальной  $\langle u \rangle = \frac{1}{2} \frac{eE\tau}{m}$

Для плотности тока получаем выражение

$$j = en\langle u \rangle = \frac{1}{2} \frac{ne^2 E \tau}{m} = \frac{1}{2} n \frac{e^2 \lambda}{m\nu} E$$

Закон Ома в дифференциальной форме  $j = \sigma E$ , следовательно

$$\sigma = \frac{ne^2 \lambda}{2m\nu}$$

## 29+44. Уравнение непрерывности. Закон Ома в локальной (дифференциальной) форме

Уравнение непрерывности:

Скорость изменения заряда внутри замкнутой поверхности равна потоку вектора через эту поверхность взятому со знаком минус.

В дифференциальной форме:

$$\oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{dq}{dt} \quad (\vec{\nabla}, \vec{j}) = -\frac{\delta \rho}{\delta t}$$

В интегральной форме:

Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи (не

$$I = \frac{U}{R}$$

содержащего ЭДС)

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Для однородного линейного проводника выразим  $R$  через  $\rho$ :

$\rho$  – удельное объемное сопротивление;  $[\rho] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$ . Найдем связь между  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  в бесконечно малом объеме проводника – закон Ома в дифференциальной форме. В изотропном проводнике (в данном случае с постоянным сопротивлением) носители зарядов движутся в направлении действия силы, т.е. вектор плотности тока и вектор напряженности поля коллинеарны.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Edl}{\rho \frac{dl}{dS}} = \frac{EdS}{\rho}$$

Исходя из закона Ома, имеем:

А мы знаем, что  $j = \frac{dl}{dS} = \frac{1}{\rho} E$  или  $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ . Отсюда можно записать  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

это запись закона Ома в дифференциальной форме.

Здесь  $\sigma = 1/\rho$  – удельная электропроводность. Размерность  $\sigma$  –  $[\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$ . Плотность тока можно выразить через заряд электрона  $e$ , количество зарядов  $n$  и дрейфовую скорость  $\vec{v}$ :  $\vec{j} = en\vec{v}$ . Обозначим  $b = \frac{\vec{v}}{\vec{E}}$ , тогда  $\vec{v} = b\vec{E}$ ,  $\vec{j} = enb\vec{E}$  получим указанную выше формулу.

### 30. Вектор магнитной индукции. Магнитное поле равномерно движущегося заряда

Движущиеся электрические заряды (токи) изменяют свойства окружающего их пространства – создают в нем *магнитное поле*. Это поле проявляется в том, что на помещенные в нем проводники с током действуют силы. *Силовой характеристикой* магнитного поля является *индукция поля*, играющая роль аналога напряженности электрического поля, которая характеризует силовое действие электрического поля на заряды.

Как установили на опыте Био и Савар индукция магнитного поля, создаваемого проводниками с током различной конфигурации, во всех случаях пропорциональна силе тока в проводнике  $I$  и зависит от расстояния  $r$  до точки, в которой определяется поле. Анализируя результаты опытов Био и Савара, Лаплас пришел к выводу, что *магнитное поле любого тока* может быть вычислено как *результат векторного сложения (суперпозиции) магнитных полей*, создаваемых отдельными элементами тока. Это правило получило название *принципа суперпозиции магнитных полей*.

Для магнитной индукции поля, создаваемого элементом тока  $I d\vec{l}$ , Лаплас получил формулу, названную впоследствии *законом Био-Савара-Лапласа*:

$$d\vec{B} = k \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$$

, где коэффициент  $k$  имеет то же значение, что и в законе Ампера (в СИ:  $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ ).

Направление вектора  $d\vec{B}$  образует с векторами  $\vec{r}$  и  $d\vec{l}$  правовинтовую систему.

Силу тока можно выразить через плотность:  $i = jS = enuS$

$$i d\vec{l} = enuS d\vec{l} = enS dl \vec{u}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{enS dl [\vec{u}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{eN [\vec{u}, \vec{r}]}{r^3}$$

Тогда индукция поля положительного заряда, движущегося со скоростью  $\vec{u}$ .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e [\vec{u}, \vec{r}]}{r^3}$$

### **31.Эффект холла**

Эффект Холла - это явление, при котором приложение магнитного поля к проводнику, по которому течет электрический ток, приводит к возникновению поперечной разности потенциалов вдоль проводника. Этот эффект был впервые открыт американским физиком Эдвином Холлом в 1879 году.

Суть эффекта Холла заключается в следующем: если пропустить электрический ток через проводник, находящийся в магнитном поле, то появится поперечная разность потенциалов между двумя противоположными сторонами проводника. Эта разность потенциалов вызвана силой Лоренца, которая действует на движущиеся заряды проводника, перпендикулярно направлению тока и магнитному полю. В результате чего возникает электрическое поле, направленное перпендикулярно и к току, и к магнитному полю, которое создает поперечную разность потенциалов.

Эффект Холла имеет много практических применений. Он используется для измерения магнитной восприимчивости материалов, определения типа и концентрации носителей заряда в полупроводниках и металлах, а также для создания устройств, таких как магнитометры и генераторы.

## 32. Магнитное поле стационарного тока. Закон Био-Савара-Лапласа

Стационарным магнитным полем называется магнитное поле постоянного тока. Это поле соответствует режиму установившегося движения зарядов.

Закон Био-Савара-Лапласа определяет вектор магнитной индукции поля, созданного элементом тока:

Магнитное поле в точке пространства, создаваемое малым отрезком проводника, по которому течет электрический ток, пропорционально силе тока, обратно пропорционально квадрату расстояния от этой точки до проводника и направлено перпендикулярно по отношению и к току, и к направлению на проводник.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \left[ d\vec{l}, \vec{r} \right]}{r^3}.$$

Модуль:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl \sin \alpha}{r^2}$$

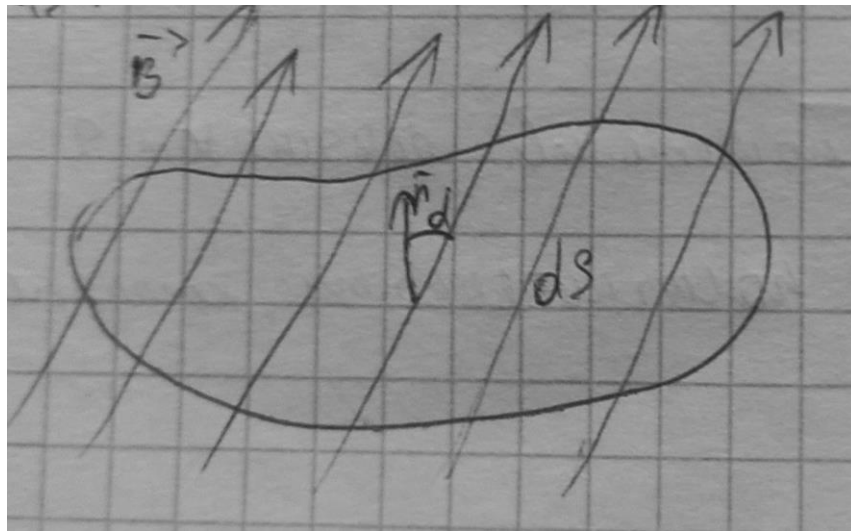
Направление вектора  $d\vec{B}$  определяется правилом правого винта.

### 33. Магнитный поток. Теорема Гаусса для магнитного поля

Магнитный поток  $d\Phi$  через элементарную площадку  $dS$  определяется скалярным произведением вектора  $\vec{B}$ ,  $d\vec{S}$ .

$$d\Phi = (\vec{B}, d\vec{S})$$

где  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$



Теорема Гаусса для магнитного потока: магнитный поток через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю

$$\oint_{(S)} \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

### 34. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в интегральной и дифференциальной форме.

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна произведению  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охваченный контуром  $L$ .

В интегральной форме:

$$\oint_l (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_{j=1}^N I_j$$

В дифференциальной форме:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта.

### **35. Контур с током в магнитном поле, момент сил. Сила, действующая на контур в неоднородном магнитном осесимметричном поле.**

Когда контур с током помещается в магнитное поле, на него начинают действовать силы. Одна из таких сил - момент силы или механический момент, который проявляется вращающимся движением контура вокруг оси.

Момент силы, действующей на контур с током в магнитном поле, определяется по формуле:

$$M = I * B * S * \sin(\theta)$$

где:  $M$  - момент силы, выраженный в ньютон-метрах ( $\text{Н}\cdot\text{м}$ ) или дин-сантиметрах ( $\text{д}\cdot\text{см}$ );  $I$  - сила тока, протекающего по контуру, измеряемая в амперах (А);  $B$  - индукция магнитного поля, измеряемая в теслах (Тл);  $S$  - площадь контура, перпендикулярная магнитному полю, измеряемая в квадратных метрах ( $\text{м}^2$ );  $\theta$  - угол между вектором площади контура и вектором индукции магнитного поля.

Сила, действующая на контур в неоднородном магнитном осесимметричном поле, определяется суммой моментов сил, действующих на каждый элемент контура. Для точечного элемента контура с длиной  $dl$  и током  $I$ , сила, действующая на него, равна:

$$dF = I * (dl \times B)$$

где:  $dF$  - сила, действующая на элемент контура, измеряемая в ньютонах (Н);  $dl$  - вектор длины элемента контура;  $B$  - вектор индукции магнитного поля.

Для получения общей силы, действующей на контур, необходимо проинтегрировать силу  $dF$  по всем элементам контура:

$$F = \int (I * (dl \times B))$$

Таким образом, сумма всех сил, действующих на контур в неоднородном магнитном осесимметричном поле, определяется интегралом от произведения тока, вектора длины элемента контура и вектора индукции магнитного поля.



### **36. Работа сил магнитного поля при перемещении проводника с током.**

Когда проводник с током перемещается в магнитном поле, силы магнитного поля выполняют работу над проводником. Работа, выполненная магнитными силами, определяется формулой:

$$W = BIL$$

где:  $W$  - работа, выполненная магнитными силами (измеряется в джоулях, Дж);  $B$  - индукция магнитного поля (измеряется в теслах, Т);  $I$  - сила тока, протекающего по проводнику (измеряется в амперах, А);  $L$  - длина проводника, перпендикулярного к направлению магнитного поля (измеряется в метрах, м).

Формула говорит о том, что работа, выполненная магнитными силами, пропорциональна произведению индукции магнитного поля, силы тока и длины проводника. Работа может быть положительной или отрицательной, в зависимости от направления перемещения проводника и направления силы магнитного поля.

Положительная работа означает, что магнитные силы совершают работу над проводником, передавая ему энергию. Например, при движении проводника в направлении силовых линий магнитного поля, магнитные силы будут выполнять положительную работу.

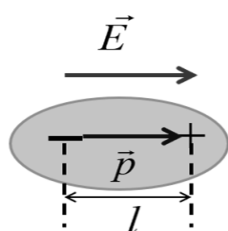
Отрицательная работа означает, что проводник совершает работу над магнитными силами, передавая им энергию. Например, при движении проводника против направления силовых линий магнитного поля, проводник будет выполнять отрицательную работу над магнитными силами.

Работа, выполненная магнитными силами, может приводить к эффектам нагрева проводника или использоваться для совершения работы, например, в электромагнитных двигателях или генераторах.

# 37+38. Полярные и неполярные молекулы. Поляризация диэлектриков. Поляризованность. Поле внутри диэлектрика. Связанные и сторонние заряды. Диэлектрическая восприимчивость.

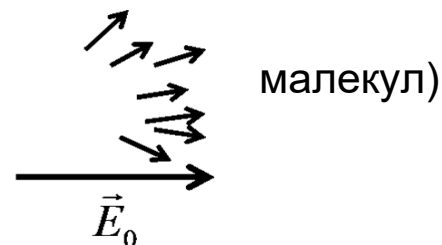
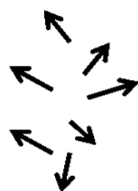
Молекулы, которые не имеют собственного дипольного момента называются неполярными. Центры тяжести положительного и отрицательного зарядов у таких молекул совпадают. Если не совпадают, то молекулы называются полярными.

Смещение электрических зарядов вещества под действием электрического поля, в результате чего на поверхности, а также, вообще говоря, и в его объеме появляются нескомпенсированные заряды, называется **поляризацией**.

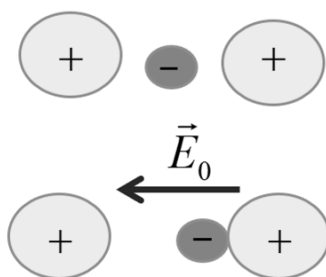


При внесении диэлектрика в электрическое поле происходит смещение зарядов в пределах молекулы: положительных – по полю, отрицательных – против поля. Молекула приобретает дипольный момент

Молекулы других диэлектриков(полярных) могут иметь собственный дипольный момент.



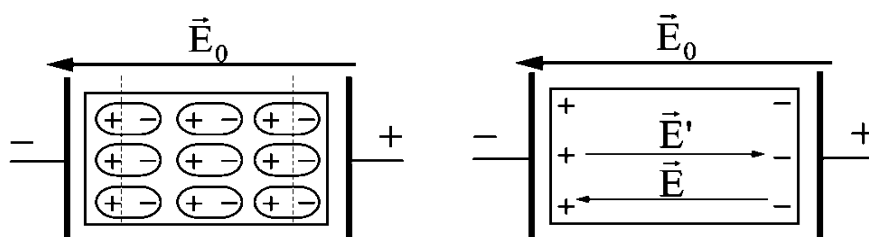
Ионная поляризация



характерна для твердых диэлектриков, у которых решетка построена из положительных и отрицательных ионов. Подрешетки располагаются таким образом, что электрический момент кристаллов равен 0. При включении поля подрешетки сдвигаются друг относительно друга, кристалл

приобретает электрический момент

При поляризации на поверхности диэлектрика появляются поверхностные связанные заряды



Для количественного описания поляризации диэлектрика берут дипольный момент единицы объёма

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i,$$

где  $\Delta V$  - физически бесконечно малый объем.

Вектор поляризации (поляризованность) представим в виде:

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_i = \frac{N}{\Delta V} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{N} = n \langle \vec{p} \rangle$$

Для большинства изотропных диэлектриков:

$$\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$$

где  $k = n\beta$  – диэлектрическая восприимчивость, а  $\beta$  – поляризуемость одной молекулы, которая показывает насколько легко индуцировать электрическим полем дипольный момент у молекулы.

**Свободными** называют заряды, которые могут под воздействием электрического поля перемещаться на значительные расстояния.

Заряды, которые входят в состав нейтральных молекул диэлектриков, ионы, закрепленные в узлах кристаллических решеток у положений своего равновесия, являются **связанными** зарядами.

### 39. Теорема Гаусса для вектора поляризации

Поток вектора  $\vec{P}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен взятому с противоположным знаком избыточному связанному заряду диэлектрика в объеме, охватываемом поверхностью  $S$ .

$$\int_S \vec{P} d\vec{S} = -q'_{\text{внутр}}$$

#### 40. Вектор электрического смещения. Диэлектрическая проницаемость. Теорема Гаусса для вектора электрического смещения

Вектор  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  называют вектором электрического смещения. Вектор электрического смещения вводится для удобства расчета полей в средах

Теорема Гаусса для вектора  $\vec{D}$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{внутр.}}$$

Поток вектора электрического смещения сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, охватываемых этой поверхностью.

В дифференциальной форме:

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

- В случае изотропных диэлектриков, для которых справедливо

$$\vec{P} = \kappa \varepsilon_0 \vec{E}$$

получаем

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \kappa) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

- Величина  $\varepsilon = 1 + \kappa$  называется диэлектрической проницаемостью вещества.

#### 41. Условия на границе двух диэлектриков.

При переходе границы раздела двух диэлектриков происходят скачкообразные изменения диэлектрических свойств среды. В соответствии с этим скачкообразно меняются полевые величины  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{P}$ .

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$  позволяет определить поведение тангенсальных составляющих полевых величин. При переходе из одной среды в другую тангенсальная составляющая вектора  $\vec{E}$  меняется непрерывно, а вектора  $\vec{D}$  претерпевает скачок.

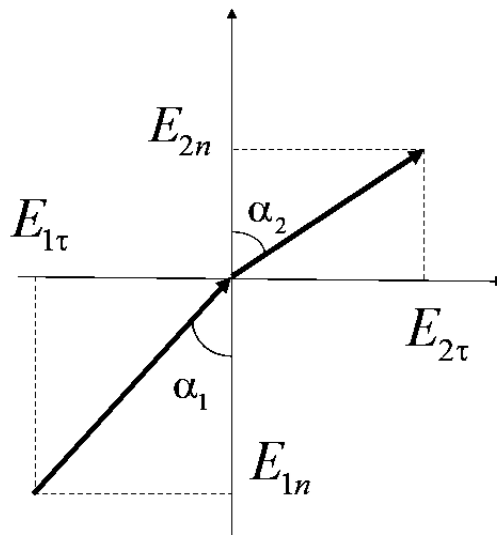
- Рассмотрим рисунок.

Из рис. ясно, что

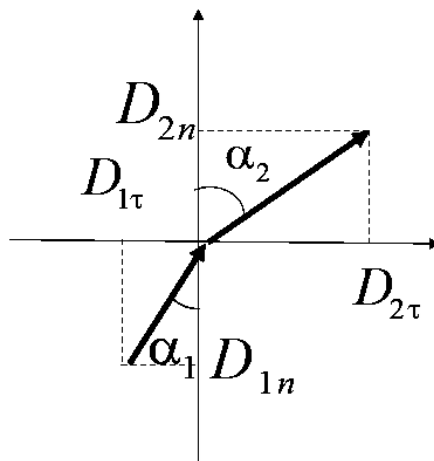
$$\frac{E_{1\tau}/E_{1n}}{E_{2\tau}/E_{2n}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$



- Полученный закон преломления справедлив и для линий вектора электрического смещения



Теорема Гаусса  $\vec{D}$  вектора помогает определить поведение нормальных составляющих векторов. При переходе границы раздела двух сред нормальная составляющая  $\vec{D}$  меняется непрерывно, а вектора  $\vec{E}$  претерпевает скачок.

Формулы, определяющие граничные условия играют важную роль при установлении законов преломления и отражения света.

При перемещении диэлектрика во внешнее электрическое поле, он поляризуется. В результате поляризации по объему и на границе диэлектрика возникают связанные заряды  $q'$ . Распределение которых задается  $\rho', \sigma'$ .

## 42.Сегнетоэлектрики и их электрическая структура.

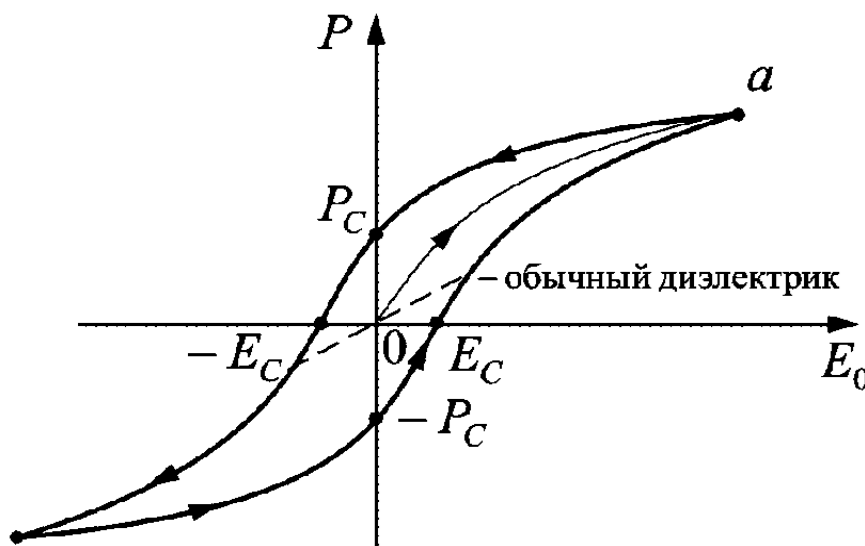
### Нелинейный характер поляризации сегнетоэлектрика

Сегнетоэлектрики (ферроэлектрики) — группа веществ, обладающих спонтанной поляризацией, ориентацию которой можно изменить посредством внешнего электрического поля.

#### Основные свойства сегнетоэлектриков:

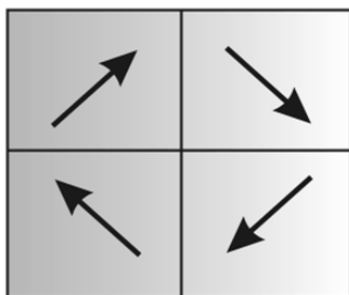
- 1.Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  в некотором температурном интервале велика.
- 2.Значение  $\epsilon$  зависит не только от внешнего поля  $E_0$ ,
3. но и от предыстории образца (явление гистерезиса).
- 4.Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  (а следовательно, и  $P$ ) — нелинейно зависит от напряженности внешнего электростатического поля (*нелинейные диэлектрики*).
- 5.Наличие точки Кюри - температуры, при которой сегнетоэлектрические свойства исчезают.

### ПЕТЛЯ ГИСТЕРЕЗИСА

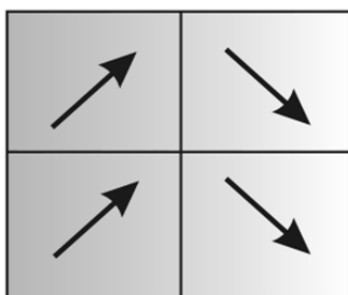


Стремление к минимальной потенциальной энергии и наличие дефектов структуры приводит к тому, что сегнетоэлектрик разбит на домены





$$P = 0$$



$$P \sim E$$



### 43. Проводники в электростатическом поле. Поле внутри проводника и у его поверхности. Распределение заряда в проводнике

Проводники в электростатическом поле. В металлах свободными заряженными частицами являются электроны. Это происходит потому, что электроны, находящиеся на внешних оболочках атомов, утрачивают связи со своими атомами и могут относительно свободно передвигаться по всему объёму металла.

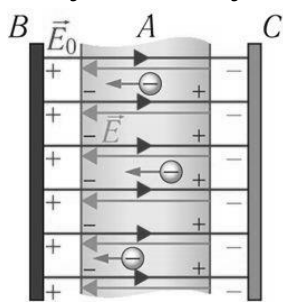


Рис. 118.2

Выясним, что происходит в однородном металлическом проводнике, если его внести в электростатическое поле. Для этого поместим металлический проводник  $A$  в электростатическое поле, созданное двумя заряженными пластинами  $B$  и  $C$  (рис. 118.2). Напряжённость  $\vec{E}_0$  этого поля направлена от положительно заряженной пластины  $B$  к отрицательно заряженной пластине  $C$ . Под действием электрических сил свободные электроны наряду с непрерывающимся тепловым движением начнут двигаться упорядоченно. Они будут накапливаться слева у поверхности проводника  $A$ , создавая там избыточный отрицательный заряд. Недостаток электронов на правой стороне проводника приведёт к возникновению на ней избыточного положительного заряда.

Перераспределившиеся заряды создают собственное электрическое поле  $\vec{E}$ . Линии напряжённости этого поля в проводнике направлены в сторону, противоположную линиям напряжённости внешнего поля  $\vec{E}_0$ . Упорядоченное перемещение свободных электронов в проводнике прекратится, если собственное поле  $\vec{E}$  компенсирует внешнее  $\vec{E}_0$ . В этом случае напряжённость результирующего поля внутри проводника станет равной нулю, т. е. электростатическое поле в проводнике исчезнет.

Следовательно, *электростатическое поле внутри проводника отсутствует*. Таким образом, *проводник — одна из моделей*,

используемых в электростатике, описывающая однородное тело, внутри которого напряжённость электростатического поля равна нулю.

Суммарный заряд любой внутренней области проводника равен нулю и не влияет на распределение зарядов на его поверхности и на напряжённость поля внутри проводника. На этом свойстве проводников основана *электростатическая защита*. Чтобы защитить чувствительные к электрическому полю приборы, их помещают внутрь заземлённых полых проводников со сплошными или сетчатыми стенками. Чаще, однако, экранируют не приборы, а сам источник электрического поля, от нежелательного воздействия которого необходимо защитить расположенные поблизости устройства

## 29+44. Уравнение непрерывности. Закон Ома в локальной (дифференциальной) форме

Уравнение непрерывности:

Скорость изменения заряда внутри замкнутой поверхности равна потоку вектора через эту поверхность взятому со знаком минус.

В дифференциальной форме:

$$\oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{dq}{dt} \quad (\vec{\nabla}, \vec{j}) = -\frac{\delta \rho}{\delta t}$$

В интегральной форме:

Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи (не

$$I = \frac{U}{R}$$

содержащего ЭДС)

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Для однородного линейного проводника выразим  $R$  через  $\rho$ :

$\rho$  – удельное объемное сопротивление;  $[\rho] = [\text{Ом} \cdot \text{м}]$ . Найдем связь между  $\vec{j}$  и  $\vec{E}$  в бесконечно малом объеме проводника – закон Ома в дифференциальной форме. В изотропном проводнике (в данном случае с постоянным сопротивлением) носители зарядов движутся в направлении действия силы, т.е. вектор плотности тока и вектор напряженности поля коллинеарны.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Edl}{\rho \frac{dl}{dS}} = \frac{EdS}{\rho}$$

Исходя из закона Ома, имеем:

А мы знаем, что  $j = \frac{dl}{dS} = \frac{1}{\rho} E$  или  $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ . Отсюда можно записать  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

это запись закона Ома в дифференциальной форме.

Здесь  $\sigma = 1/\rho$  – удельная электропроводность. Размерность  $\sigma$  –  $[\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}]$ . Плотность тока можно выразить через заряд электрона  $e$ , количество зарядов  $n$  и дрейфовую скорость  $\vec{v}$ :  $\vec{j} = en\vec{v}$ . Обозначим  $b = \frac{\vec{v}}{\vec{E}}$ , тогда  $\vec{v} = b\vec{E}$ ,  $\vec{j} = enb\vec{E}$  получим указанную выше формулу.

## 45. Электроёмкость уединённого проводника. Ёмкость системы проводников. Энергия электрического поля

Электрическая ёмкость — характеристика проводника, характеризующая его способность накапливать электрический заряд. Ёмкость определяется как отношение величины заряда проводника к потенциалу проводника. Ёмкость обозначается как  $C$ .

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

где  $Q$  — заряд,  $\varphi$  - потенциал.

В системе СИ ёмкость измеряется в фарадах.

Конденсатор - СИСТЕМА ПРОВОДНИКОВ!

Конденсатор — двухполюсник с определённым значением ёмкости и малой омической проводимостью; устройство для накопления энергии электрического поля. Конденсатор является пассивным электронным компонентом. Обычно состоит из двух электродов в форме пластин (называемых обкладками), разделённых диэлектриком, толщина которого мала по сравнению с размерами обкладок.

Ёмкость плоского конденсатора.

Ёмкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью  $S$  каждая, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, в системе СИ выражается формулой:

$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$ , где  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами (эта формула справедлива, лишь когда много меньше линейных размеров пластин).

При параллельном соединении:  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ ;

При последовательном соединении:  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$ .

Энергия заряженного уединенного проводника.

Если уединенный проводник имеет заряд  $q$ , то вокруг него существует электрическое поле, потенциал которого на поверхности проводника равен  $\varphi$ , а емкость -  $C$ . Увеличим заряд на величину  $dq$ . При переносе заряда  $dq$  из бесконечности должна быть совершена работа

равная  $dA = dq(\varphi - \varphi_0)$ . Но потенциал электростатического поля данного проводника в бесконечности равен нулю  $\varphi_0 = 0$ . Тогда

$$dA = dq\varphi = \frac{q}{C}dq.$$

При переносе заряда  $dq$  с проводника в бесконечность такую же работу совершают силы электростатического поля. Следовательно, при увеличении заряда проводника на величину  $dq$  возрастает потенциальная энергия поля, т.е.

$$dW = dA = \frac{q}{C}dq.$$

Проинтегрировав данное выражение, найдем потенциальную энергию электростатического поля заряженного проводника при увеличении его заряда от нуля до  $q$ :

$$W = \int_0^q \frac{1}{C} q dq = \frac{q^2}{2C}$$

Применяя соотношение  $\varphi = q/C$ , можно получить следующие выражения для потенциальной энергии  $W$ :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}; \quad W = \frac{1}{2} \cdot C\varphi^2; \quad W = \frac{1}{2} q\varphi$$

Для заряженного конденсатора разность потенциалов (напряжение) равна  $U = \frac{q}{C}$  поэтому соотношение для полной энергии его электростатического поля имеют вид

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}; \quad W = \frac{1}{2} \cdot CU^2; \quad W = \frac{1}{2} qU$$

$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V$   $V = Sd$ , где  $d$  – расстояние между обкладками,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды,  $E$  – напряженность.

#### 46.Магнитные моменты атомов. Опыт Эйнштейна-Д'хааса

В общем случае магнитный момент электрона складывается из орбитального и спинового магнитных моментов. Магнитный момент атома (молекулы) равен векторной сумме магнитных моментов электронов, входящих в его состав (как показывают эксперименты, магнитные моменты ядер атомов ничтожно малы)

$$\vec{p}_m = \sum \vec{p}_{me} + \sum \vec{p}_{ms} \quad p_{me} = IS = e v S.$$

Электрон, движущийся по орбите эквивалентен круговому току и обладает поэтому орбитальным магнитным моментом  $\vec{p}_m = IS\vec{n}$  и модулем  $p_m = IS = evS$ , так как  $-I = ev$  сила тока.  $v$  частота вращения электрона,  $S = \pi r^2$  площадь орбиты.

Теперь

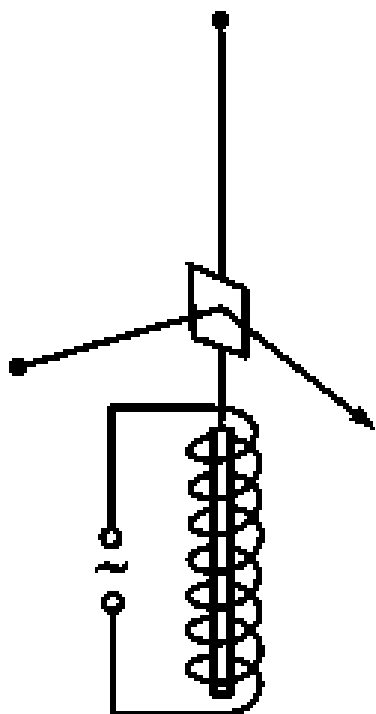
$$p_m = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}$$



Эйнштейн и Де Хааз доказали, что намагничивание магнетика приводит к его вращению. Они исследовали вынужденные крутильные колебания – вращение свободно подвешенного на тончайшей кварцевой нити железного стержня при его намагничивании во внешнем магнитном поле. Стержень помещался внутри соленоида. Экспериментаторы наблюдали за смещением светового зайчика, отраженного от зеркальца, укрепленного на нити.

Экспериментально в описанных выше опытах было обнаружено аномальное значение гиромагнитного отношения для

ферромагнетиков, равное  $e/m_e$ . При этом знак носителей, обуславливающих молекулярные токи, совпадал со знаком заряда электрона. Открытие в дальнейшем того, что кроме орбитальных моментов, электрон обладает собственным механическим моментом импульса, т.е. спином, позволило объяснить данный результат.



**Рис. 27.3. Схема эксперимента Эйнштейна — де Хааза**



## 47. Намагниченность. Токи намагничивания.

Намагниченность — векторная физическая величина, характеризующая магнитное состояние макроскопического физического тела. Определяется как магнитный момент единицы объёма вещества: здесь  $J$  — вектор намагниченности;  $p_m$  — вектор магнитного момента;  $V$  — объём.

В общем случае (случае неоднородной, по тем или иным причинам,

$$J = \frac{\sum_{\Delta V} p_m}{\Delta V}$$

среды) намагниченность выражается как:

Где  $dp_m$  — суммарный магнитный момент в объеме  $dV$

Связь между  $M$  и напряженностью магнитного поля  $H$  в диамагнитных и парамагнитных материалах, обычно линейна (по крайней мере, при не слишком больших величинах намагничивающего поля):

$$M = \chi_m H$$

где  $\chi_m$  называют магнитной восприимчивостью.

Магнитная индукция определяется через намагниченность как:

$$B = \mu_0 (M + H)$$

Намагничивание вещества обусловлено ориентацией магнитных моментов отдельных молекул в одном направлении. Это можно сказать и об элементарных круговых токах, связанных с каждой молекулой (молекулярные токи). Такое поведение молекулярных токов приводит к возникновению токов намагничивания.

$$B_{\text{век}} = \mu_0 I + \mu_0 I_m$$

Где  $I$  — макроскопический ток,  $I_m$  — ток намагничивания

$$\text{rot} B = \mu_0 (J + j_m)$$

$j, j_m$  — плотности макроскопического тока и тока намагничивания.

Плотность молекулярных токов определяется значением ротора намагниченности.

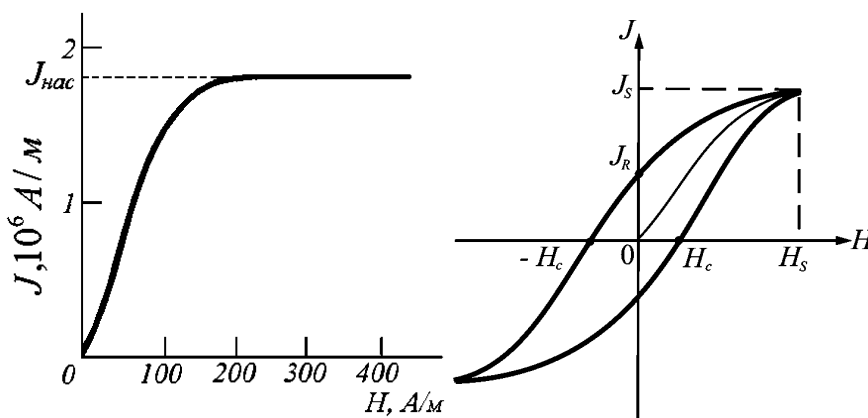
$$I_m = \int_S j_m dS = \oint_{\Gamma} J dl = \int_S \text{rot} J dS \qquad j_m = \text{rot} J$$

## 48+49. Вектор напряженности магнитного поля и теорема о его циркуляции. Условия для магнитного поля на границе двух магнетиков.

Диамагнетики – намагничиваются в направлении, противоположном внешнему полю. Магнитные моменты в отсутствие внешнего поля равны нулю.

Парамагнетики – атомы и молекулы обладают собственным магнитным моментом даже в отсутствие внешнего поля. В обычном состоянии магнитные моменты ориентированы хаотично вследствие теплового движения. Внешнее поле стремится их сориентировать вдоль линий индукции, однако этому препятствует тепловое движение. В результате чего магнитные моменты атомов ориентируются вдоль внешнего поля, т.е. парамагнетик намагничивается.

Ферромагнетики – вещества, обладающие произвольной намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля.



$J_R$  – остаточная намагниченность;

$H_c$  – коэрцитивная сила;

$J_s$  – максимальное значение намагниченности;

$H_s$  – значение напряженности магнитного поля, при котором наступает насыщение намагниченности.

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_c} \text{ – закон Кюри – Вейсса. } T_c \text{ – температура Кюри}$$

Домены – области самопроизвольной намагниченности. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и имеет определенный магнитный момент.

Магнитный *гистерезис* – запаздывание изменений магнитных состояний от измерений напряженности внешнего магнитного поля.

При увеличении напряженности, намагниченность также возрастает и достигает насыщения. При уменьшении напряженности, намагниченность уменьшается. При появлении остаточная индукция.

Образец полностью размагничивается лишь в достаточно сильном поле противоположного направления, называемого коэрцитивным полем (коэрцитивной силой).

## 50. Диа- и парамагнетизм. Ферромагнетизм. Магнитная структура ферромагнетика

Вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего поля называют ферромагнетиками. Это железо, кобальт, гадолиний, никель и их сплавы. Ферромагнетизм присущ им только в кристаллическом состоянии. Их намагниченность до  $10^{10}$  раз превосходит намагниченность диа- и парамагнетиков.

Магнитная проницаемость ферромагнетика достигает максимума немного раньше, чем наступает насыщение намагниченности. При

$$H \rightarrow \infty, \quad \mu \rightarrow 1.$$

Это следует из формулы

$$\mu = 1 + \frac{J}{H}$$

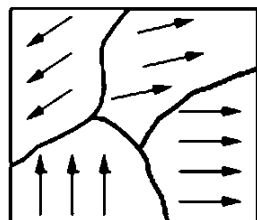
Для ферромагнетиков характерно явление гистерезиса

Ответственными за магнитные свойства ферромагнетиков являются собственные моменты электронов. При определенных условиях в кристалле могут возникнуть обменные силы, которые заставляют магнитные моменты электронов выстраиваться параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного намагничивания, которые называют доменами.

В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения и обладает определенным магнитным моментом. Направления магнитных моментов доменов произвольны, так что в отсутствие внешнего поля суммарный момент всего тела равен нулю. Домены имеют размеры порядка 1-10 мкм.

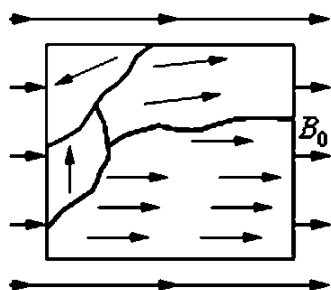
Действие поля на домены на разных стадиях процесса намагничивания оказывается различным. Вначале при слабых полях, наблюдается смещение границ доменов, в результате происходит увеличение тех доменов, моменты которых составляют меньший угол с  $H$ , за счет доменов, у которых угол больше. Это происходит до тех пор пока домены с меньшим углом не поглотят целиком энергетически менее выгодные домены.

На следующей стадии имеет место поворот магнитных моментов доменов в направлении поля. При этом моменты электронов в пределах доменов поворачиваются одновременно, без нарушения параллельности. Эти процессы являются необратимыми, что и является причиной гистерезиса.



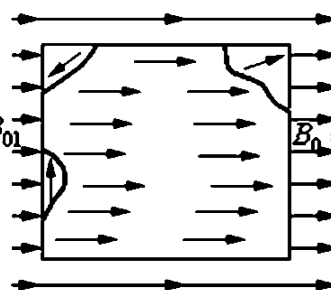
(1)

$$B_0 = 0$$



(2)

$$B_0 = B_{01}$$

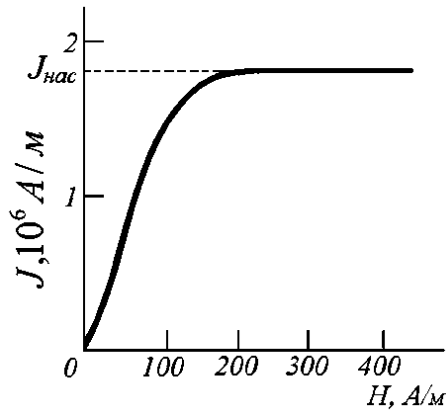


(3)

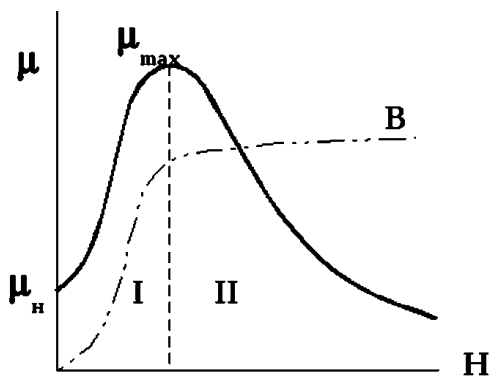
$$B_0 = B_\infty > B_{01}$$

## 51.Кривая намагничивания ферромагнетика. Принцип магнитной записи информации

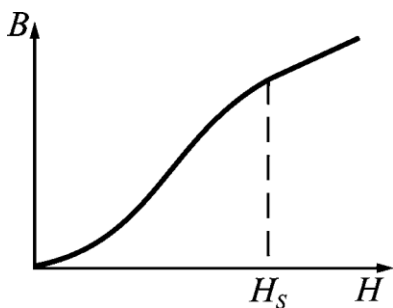
Намагниченность ферромагнетиков зависит от  $H$  сложным образом. На рис. дана кривая намагниченности ферромагнетика, магнитный момент которого первоначально равен нулю (она называется основной кривой намагничивания).



Магнитная проницаемость ферромагнетика достигает максимума немного раньше, чем наступает насыщение намагниченности.

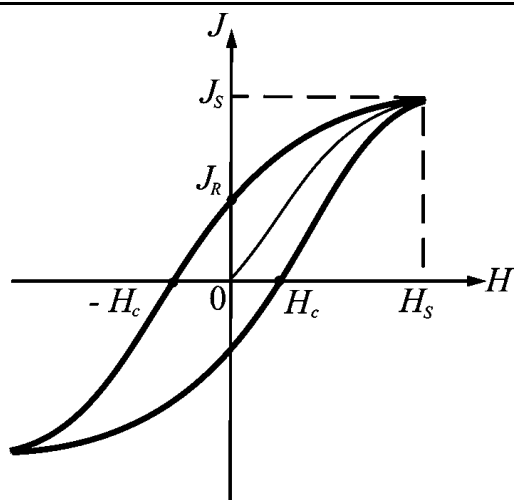


После того как намагниченность ферромагнетика достигает насыщения, зависимость принимает линейный характер



$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J})$$

Для ферромагнетиков характерно явление гистерезиса



$J_R$  - остаточная намагниченность;

$H_c$  - коэрцитивная сила;

$J_s$  - максимальное значение намагниченности;

$H_s$  - значение напряженности магнитного поля, при котором наступает насыщение намагниченности.