Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра электронных вычислительных машин

Дисциплина: Системный анализ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №4

«Методы и процедуры принятия решений при многих критериях»

Вариант 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент группы 250502 |  | Бригадир А.С. |
| Преподаватель |  | Туровец Н.О. |

Минск 2025

# ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Предприятие предполагает приобрести станок. Характеристики станков, из которых делается выбор, следующие.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Станок | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ5 | СТ6 |
| Производительность, изделий/ч | 25 | 25 | 30 | 15 | 20 | 35 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 140 | 100 | 200 | 100 | 100 | 200 |
| Надежность | достаточно высокая | средняя | очень высокая | достаточно высокая (немного ниже, чем у СТ1 и СТ6) | средняя | достаточно высокая |

Важность критериев оценивается двумя экспертами.

По мнению первого эксперта, основной критерий - производительность, немного менее важный - на­дежность, еще немного менее важный - стоимость.

По мнению второго эксперта, основной критерий - производительность, менее важный - стоимость, еще немного менее важный - надежность.

# ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

## 2.1 Выбор множества Парето

Выбор множества Парето-оптимальных решений (множества Парето) представляет собой отбор перспективных альтернатив, из которых затем отбирается одна (лучшая) альтернатива.

Множество Парето представляет собой множество альтернатив, обладающих следующим свойством: любая из альтернатив, входящих во множество Парето, хотя бы по одному критерию лучше любой другой альтернативы, входящей в это множество. Другими словами, ни одна из альтернатив, входящих во множество Парето, не уступает какой-либо другой альтернативе из этого множества по всем критериям. Поэтому множество Парето называют также множеством недоминируемых альтернатив: в нем отсутствуют альтернативы, явно (по всем критериям) отстающие от какой-либо другой альтернативы.

Выбор множества Парето производится следующим образом. *Все* альтернативы *попарно* сравниваются друг с другом *по всем критериям*. Если при сравнении каких-либо альтернатив (обозначим их как *Ai*и *Aj*) оказывается, что одна из них (например, *Aj*) *не лучше другой ни по одному критерию*, то ее можно исключить из рассмотрения. Исключенную альтернативу (в данном случае – альтернативу *Aj*) не требуется сравнивать с другими альтернативами, так как она явно неперспективна.

Выберем множества Парето:

Сравним альтернативы СТ1 и СТ2. По критерию «Производительность» альтернативы одинаковы; по критерию «Стоимость станка» альтернатива СТ2 лучше альтернативы СТ1; по критерию «Надежность» СТ1 лучше, чем СТ2. Таким образом, ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним альтернативы СТ1 и СТ3. По критериям «Производительность» и «Надежность» СТ3 лучше, чем СТ1; по критерию «Стоимость станка» альтернатива СТ1 лучше, чем СТ3. Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним альтернативы СТ1 и СТ4. По критерию «Производительность» и «Надежность» СТ1 лучше, чем СТ4; по критерию «Стоимость станка» альтернатива СТ4 лучше, чем СТ1. Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним альтернативы СТ1 и СТ5. По критерию «Производительность» и «Надежность» СТ1 лучше, чем СТ5; по критерию «Стоимость станка» альтернатива СТ5 лучше, чем СТ1. Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним альтернативы СТ1 и СТ6. По критерию «Производительность» СТ6 лучше, чем СТ1; по критерию «Стоимость станка» СТ1 лучше, чем СТ6; по критерию «Надежность» альтернативы одинаковы. Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним альтернативы СТ2 и СТ3. По критериям «Производительность» и «Надежность» СТ3 лучше, чем СТ2; по критерию «Стоимость станка» альтернатива СТ2 лучше, чем СТ3. Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним альтернативы СТ2 и СТ4. По критерию «Производительность» СТ2 лучше, чем СТ4; по критерию «Стоимость станка» они равны; по критерию «Надежность» альтернатива СТ4 лучше, чем СТ2. Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним альтернативы СТ2 и СТ5. По критерию «Производительность» СТ2 лучше, чем СТ5; по критериям «Стоимость» и «Надежность» альтернативы одинаковы. Таким образом, альтернативу СТ5 следует исключить из рассмотрения, так как она явно не лучшая из имеющихся. Сравнивать с СТ5 другие альтернативы не требуется.

Аналогично сравниваются остальные альтернативы. Ни одна из них не исключается. Таким образом, во множество Парето вошли альтернативы СТ1, СТ2, СТ3, СТ4 и СТ6. Именно из них будет затем выбираться лучшая альтернатива.

## 2.2 Первый способ анализа альтернатив

**2.2.1 Методика экспресс-анализа альтернатив**

Методика предназначена для отбора перспективных альтернатив. При этом перспективными считаются альтернативы, не имеющие существенных недостатков ни по одному из критериев.

Методика рассчитана на применение в задачах, в которых большинство критериев являются числовыми. Методика может применяться и для решения задач, в которых имеются качественные (выраженные в словесной форме) критерии; в этом случае для перехода к числовым оценкам применяются следующие процедуры:

* оценки по качественным критериям выражаются по пятибалльной шкале (“отлично”, “хорошо”, “удовлетворительно”, “плохо”, “очень плохо”), а затем выполняется переход к числовым оценкам с использованием **шкалы Харрингтона**. При этом оценке "отлично" соответствуют числовые оценки от 0,8 до 1; "хорошо" - от 0,63 до 0,8; "удовлетворительно" - от 0,37 до 0,63; "плохо" - от 0,2 до 0,37; "очень плохо" - от 0 до 0,2. Числовая оценка выставляется человеком: экспертом или лицом, принимающим решения (ЛПР). Например, если по некоторому критерию две альтернативы имеют оценку “хорошо”, но одна из них очень хорошая, а другая - немного хуже, то первой из альтернатив (лучшей) можно назначить оценку 0,8, а второй, например - 0,7;
* для оценок, имеющих вид "да-нет" (т.е. выражающих наличие или отсутствие некоторого показателя), обычно используются следующие числовые оценки: "да" - 0,67, "нет" - 0,33 (здесь предполагается, что оценка “да” более желательна, чем ”нет”).

Принцип работы методики экспресс-анализа альтернатив следующий. Для каждой альтернативы находится худшая оценка (из всех оценок данной альтернативы по критериям, используемым в задаче). Выбираются альтернативы, худшая оценка которых *не ниже* некоторой пороговой величины.

Составим таблицу после выбора множества Парето (см. таблицу 2.1)

Таблица 2.1 – Множество Парето

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Площадка | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ6 |
| Производительность, изделий/ч | 25 | 25 | 30 | 15 | 35 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 140 | 100 | 200 | 100 | 200 |
| Надежность | достаточно высокая | средняя | очень высокая | достаточно высокая (немного ниже, чем у СТ1 и СТ6) | достаточно высокая |

Обозначим оценки альтернатив по критериям как *Xij*, *i*=1,...,*M*, *j*=1,...,*N*. Здесь *M* - количество критериев, *N* - количество альтернатив (в данной задаче *M*=3, *N*=5).

Выбор множества перспективных альтернатив на основе методики экспресс-анализа реализуется в следующем порядке.

**1** Оценки альтернатив по критериям приводятся к безразмерному виду. Безразмерные оценки альтернатив *Pij*, *i*=1,...,*M*, *j*=1,...,*N*, находятся следующим образом:

* для критериев, подлежащих максимизации, все оценки альтернатив по критерию делятся на максимальную из оценок по данному критерию:



* для критериев, подлежащих минимизации, из оценок по данному критерию выбирается минимальная, и она делится на все оценки альтернатив по данному критерию:



* для качественных (словесных) критериев выполняется переход к числовым оценкам по шкале Харрингтона.

Критерий «Производительность» подлежит максимизации. Поэтому для него находится максимальная оценка (в данном примере она равна 35) и все оценки по данному критерию делятся на ее значение.

Критерий «Стоимость станка» подлежит минимизации. Поэтому для него находится минимальная оценка (в данном примере она равна 100) и делится на все оценки по данному критерию.

Безразмерные оценки по критерию «Надежность» назначаются экспертом по шкале Харрингтона.

Для данной задачи безразмерные оценки приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 — Безмерные оценки альтернатив

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Площадка | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ6 |
| Производительность, изделий/ч | 0,714 | 0,714 | 0,857 | 0,429 | 1 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 0,714 | 1 | 0,5 | 1 | 0,5 |
| Надежность | 0,7 | 0,5 | 0,9 | 0,6 | 0,7 |

В результате перехода к безразмерным оценкам устранены различия исходных оценок, затруднявшие сравнение альтернатив. Безразмерные величины не измеряются в каких-либо единицах, поэтому их можно сравнивать друг с другом, складывать и т.д.

Безразмерные оценки не различаются по диапазону значений: все они имеют значения в пределах от 0 до 1. Они не различаются также по направленности: чем больше безразмерная оценка, тем лучше (по любому критерию), и лучшее значение равно 1.

**2** Для каждой альтернативы находится минимальная оценка, т.е. худшая из оценок данной альтернативы по всем критериям:



Минимальные оценки приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 — Минимальные оценки альтернатив

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Альтернатива | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ6 |
| *Pj* | 0,700 | 0,500 | 0,500 | 0,429 | 0,500 |

**3** Выбирается пороговое значение минимальной оценки *P*0. Эта величина назначается ЛПР или экспертом из субъективных соображений, например, в зависимости от количества альтернатив, которые требуется отобрать для дальнейшего анализа.

Пусть в данной задаче назначено *P*0 = 0.45

**4** Выбирается множество альтернатив, для которых *Pj* > *P*0. Таким образом, для дальнейшего анализа отбираются альтернативы, у которых все оценки (в том числе худшая) не ниже предельной величины *P*0.

В данной задаче отбираются альтернативы СТ1, СТ2, СТ3, СТ6. Окончательный выбор производится на основе одного из методов, рассматриваемых ниже.

**2.2.2 Методика скаляризации векторных оценок**

Методика предназначена для выбора рациональной альтернативы из множества альтернатив, оцениваемых по нескольким критериям.

Как и методика экспресс-анализа альтернатив, данная методика рассчитана на решение задач, в которых решение принимается на основе числовых критериев (или может быть выполнен переход к таким критериям).

Основное преимущество этой методики – минимальный объем информации, которую требуется получить от ЛПР или эксперта для выбора решения, что позволяет практически полностью автоматизировать решение задачи. В то же время недостаточный учет субъективных суждений ЛПР является недостатком этой методики.

Методика основана на вычислении обобщенной оценки каждой альтернативы (с учетом оценок по всем критериям) и сопоставлении этих оценок.

В таблице 2.4 приведены оценки альтернатив, отобранных на основе выбора множества Парето и методики экспресс-анализа альтернатив.

Таблица 2.4 — Исходные данные

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Площадка | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ6 |
| Производительность, изделий/ч | 25 | 25 | 30 | 35 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 140 | 100 | 200 | 200 |
| Надежность | достаточно высокая | средняя | очень высокая | достаточно высокая |

Методика реализуется в следующем порядке.

**1** Оценки альтернатив приводятся к безразмерному виду, как и в методике экспресс-анализа альтернатив. Безразмерные оценки альтернатив для данной задачи приведены в таблице 2.5.

Таблица 2.5 – Безмерные оценки альтернатив

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Площадка | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ6 |
| Производительность, изделий/ч | 0,714 | 0,714 | 0,857 | 1 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 0,714 | 1 | 0,5 | 0,5 |
| Надежность | 0,7 | 0,5 | 0,9 | 0,7 |

**2** Определяются веса (оценки важности) критериев. В рассматриваемой методике веса находятся *на основе разброса оценок*. Веса определяются в следующем порядке:

* определяются средние оценки по каждому критерию:

            *i*=1,...,*M*,

где *M* - количество критериев; *N* - количество альтернатив; *Pij* - безразмерные оценки.

Для данного примера:  0,821; = 0,679;  = 0,7.

* находятся величины разброса по каждому критерию:

           *i*=1,...,*M*.

Для данного примера:

* находится сумма величин разброса:

.

Для данного примера *R* = 0,536.

* находятся веса критериев, отражающие разброс оценок:

*Wi* = *Ri*/*R*,           *i*=1,...,*M*.

Для данного примера *W*1 = 0,243; *W*2 = 0,491; *W*3 = 0,266.

Чем больше разброс (различие) в оценках альтернатив по критерию, тем больше вес этого критерия. Таким образом, критерии, по которым оценки альтернатив существенно различаются, считаются более важными. Если оценки альтернатив по какому-либо критерию очень близки, то его вес будет небольшим, так как сравнение альтернатив при близких оценках не имеет смысла.

**3** Находятся взвешенные оценки альтернатив (путем деления весов критериев на оценки по соответствующим критериям):

*Eij* = *Wi*/ *Pij*,           *i*=1,...,*M*, *j*=1,...,*N*.

Взвешенные оценки для данного примера приведены в таблице 2.6.

Таблица 2.6 – Взвешенные безмерные оценки альтернатив

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Площадка | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ6 |
| Производительность, изделий/ч | 0,340 | 0,340 | 0,284 | 0,243 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 0,687 | 0,491 | 0,981 | 0,981 |
| Надежность | 0,380 | 0,533 | 0,296 | 0,380 |

Чем большие значения принимают безразмерные оценки *Pij*, тем меньше значения взвешенных оценок. Таким образом, чем *меньше* взвешенные оценки, тем *лучше* альтернатива.

**4** Определяются комплексные оценки альтернатив (суммы взвешенных оценок):

           *j*=1,...,*N*.

Для данного примера *E*1 = 1,408 (комплексная оценка альтернативы СТ1); *E*2 = 1,364 (СТ2); *E*3 = 1,561 (СТ3); *E*4 = 1,605 (СТ6).

Чем меньше комплексная оценка, тем лучше альтернатива. Таким образом, в данном примере лучшей моделью является СТ2; немного хуже вариант СТ1, еще немного хуже СТ3, самый худший – СТ6.

**2.2.3 Методика сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования**

Методика предназначена для решения задач, в которых требуется выбрать лучшую из двух альтернатив. Такие задачи часто возникают, например, при проектировании технических систем, когда требуется выбрать лучший из двух вариантов системы: базовый (имеющийся) или новый (предлагаемый). Однако применение данной методики не ограничивается задачами проектирования.

Для применения данной методики все оценки альтернатив должны быть выражены в числовой форме.

Принцип работы методики следующий. Для каждой из двух сравниваемых альтернатив находится обобщенная оценка по всем критериям, по которым она превосходит другую альтернативу; при этом учитывается степень превосходства, а также важность критериев.

Полученные обобщенные оценки сравниваются; выбирается альтернатива, имеющая большую оценку.

В таблице 2.7 приведены оценки альтернатив, отобранных на основе выбора множества Парето, методики экспресс-анализа альтернатив и методики скаляризации векторных оценок.

Таблица 2.7 – Исходные данные

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Площадка | СТ1 | СТ2 |
| Производительность, изделий/ч | 25 | 25 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 140 | 100 |
| Надежность | достаточно высокая | средняя |

По критерию «Надежность» требуется перейти к числовым оценкам. Для этого воспользуемся шкалой Харрингтона. Пусть для СТ1 по данному критерию назначена числовая оценка 0,8, а для СТ2 – оценка 0,5.

Если при сравнении альтернатив по какому-либо критерию они имеют одинаковые оценки, то такой критерий не учитывается. В данной задаче таким критерием является производительность.

Методика реализуется в следующем порядке.

**1** Выполняется ранжирование критериев по важности: наиболее важный критерий получает ранг 1, следующий по важности - 2, и т.д. Если какие-либо критерии близки по важности, им рекомендуется назначать одинаковые ранги. Обозначим ранги как *Ri*, *i*=1,...,*M*, где *M* - количество критериев.

Пусть в данной задаче критериям назначены следующие ранги: *R*1 = 1, *R*2 = 1. Ранги *R*1 и *R*2 равны, так как (по мнению ЛПР) критерии «стоимость» и «надежность» примерно одинаковы по важности.

**2** Выполняется переход от рангов к весам критериев. Веса находятся следующим образом: из всех рангов выбирается максимальный (в данном примере он равен 1), к нему прибавляется единица, и из полученного числа вычитаются ранги:

 *i*=1,…,*M*.

Таким образом, чем важнее критерий, тем больше его вес.

Для данной задачи веса критериев следующие: *V*1 = 1; *V*2 = 1.

**3** Находятся отношения оценок альтернатив (степени доминирования) путем деления большей оценки по каждому критерию на меньшую:

*Si* = max(*Xi*1,*Xi*2) / min(*Xi*1,*Xi*2), *i*=1,...,*M*,

где *Xi*1, *Xi*2 - оценки двух сравниваемых альтернатив по *i*-му критерию.

Для данной задачи *S*1 = 140 / 100 = 1,4; *S*2 = 0,8 / 0,5 = 1,6.

**4** Находятся скорректированные степени доминирования альтернатив путем возведения степеней доминирования в степени, равные весам критериев:

 *i*=1,…,*M*.

Таким образом учитывается важность критериев: чем больше вес критерия, тем больше соответствующая степень доминирования будет влиять на окончательную оценку.

Для данной задачи *C*1 = 1,41 = 1,4; *C*2 = 1,61 = 1,6.

**5** Для каждой из сравниваемых альтернатив находится оценка ее доминирования над другой альтернативой. Эта оценка вычисляется как произведение скорректированных степеней доминирования по всем критериям, по которым данная альтернатива лучше другой.

В данном примере СТ1 лучше СТ2 по критерию «надежность». Оценка доминирования проекта СТ1 над СТ2 находится следующим образом: *D*1 = 1,6.

СТ2 лучше СТ1 по критерию «стоимость». Оценка доминирования проекта СТ2 над СТ1 равна *D*2 = 1,4.

**6** Находится обобщенная оценка доминирования:

*D* = *D*1 / *D*2.

Если *D* > 1, то первая альтернатива (оценка которой указана в числителе) лучше второй; если *D* < 1, то вторая альтернатива превосходит первую. В данном примере *D* = 1,6 / 1,4 = 1,14. Таким образом, вариант СТ1 лучше, чем СТ2.

## 2.3 Второй способ анализа альтернатив

**2.3.1 Метод предпочтений**

Метод основан на ранжировании альтернатив, выполняемом группой экспертов. Каждый из экспертов (независимо от других) выполняет ранжирование альтернатив, т.е. указывает, какая из альтернатив, по его мнению, является лучшей, какая - следующей за ней, и т.д.

**1** Каждому эксперту предлагается выполнить ранжирование альтернатив по предпочтению. В данном примере каждый эксперт присваивает номер 1 фактору, который (по его мнению) оказывает наибольшее влияние на рост производительности труда; 2 - следующему по важности фактору, и т.д. Оценки, указанные экспертами, сводятся в таблицу (матрицу) размером *M*x*N*, где *M* - количество экспертов, *N*- количество альтернатив (в данном примере – характеристики станков). Обозначим эти оценки как *Xij*, *i*=1,...,*M*, *j*=1,...,*N*.

Ранжирование альтернатив по предпочтению представлено в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Исходные данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Эксперты | Альтернативы (характеристики) | | |
| А1 | А2 | А3 |
| 1 | 1 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 3 |

**2** Затем производится преобразование матрицы оценок по формуле:

*Bij* = *N* - *Xij*, *i*=1,...,*M*, *j*=1,...,*N*.

Это означает, что каждая экспертная оценка вычитается из количества альтернатив.

Для данного примера получена матрица, приведенная в таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Преобразованная матрица экспертных оценок для метода предпочтений

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Эксперты | Альтернативы (характеристики) | | |
| А1 | А2 | А3 |
| 1 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

**3** После этого находятся суммы преобразованных оценок по каждой из альтернатив:

 *j*=1,...,*N*.

В данном примере *С*1 = 2 + 2 = 4; *C*2 = 1 + 0 = 1; *C*3 = 1 + 0 = 1.

**4** Находится сумма всех оценок:



В данном примере *C* = 4 + 1 + 1 = 6

**5** Затем находятся веса альтернатив:

*Vj* = *Cj*/*C*, *j*=1,...,*N*.

В данном примере *V*1 = 4/6 = 0,667; *V*2 = 0,167; *V*3 = 0,167.

Чем больше вес, тем более предпочтительной является альтернатива (по мнению экспертов).

В данном примере самая предпочтительная альтернатива – «производительность», менее предпочтительны «стоимость» и «надежность».

**2.3.2 Модифицированный алгоритм Кемени-Снелла**

Рассматриваемый алгоритм предназначен для ранжирования альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям.

Основное преимущество алгоритма – возможность анализа и выбора альтернатив, оцениваемых по критериям различных видов: числовым, качественным, “да-нет” и т.д.

Алгоритм также позволяет учитывать суждения ЛПР о важности критериев.

Алгоритм основан на ранжировании и попарном сравнении альтернатив по каждому критерию.

Составим таблицу после выбора множества Парето (см. таблицу 3.3)

Выбор альтернативы на основе модифицированного алгоритма Кемени–Снелла реализуется в следующем порядке.

**1** С помощью одного из методов экспертных оценок находятся веса критериев, представляющие собой числовые оценки их важности.

В данном примере использовался метод приоритетов (см. подраздел 3.1)

Таблица 3.3 – Множество Парето

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Площадка | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ6 |
| Производительность, изделий/ч | 25 | 25 | 30 | 15 | 35 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 140 | 100 | 200 | 100 | 200 |
| Надежность | достаточно высокая | средняя | очень высокая | достаточно высокая (немного ниже, чем у СТ1 и СТ6) | достаточно высокая |

**2** Выполняется ранжирование альтернатив по каждому из критериев. При этом лучшая альтернатива по данному критерию получает оценку (ранг) 1, следующая за ней – оценку 2, и т.д. Если альтернативы по данному критерию одинаковы, то они получают *одинаковые* оценки. Результаты ранжирования сводятся в матрицу. Для данной задачи матрица ранжирований приведена в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Матрица ранжирований

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ6 |
| К1 | 3 | 3 | 2 | 4 | 1 |
| К2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| К3 | 2 | 4 | 1 | 3 | 2 |

**3** На основе ранжирования альтернатив по каждому из критериев составляется матрица парных сравнений. Всего составляется *M* таких матриц, где *M* - количество критериев. Матрицы заполняются по правилам, приведенным в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Правила заполнения матриц парных сравнений в модифицированном алгоритме Кемени-Снелла

|  |  |
| --- | --- |
|  | Значение |
| 1 | По *i*-му критерию *j*-я альтернатива лучше *k*-й |
| -1 | По *i*-му критерию *j*-я альтернатива хуже *k*-й |
| 0 | По *i*-му критерию *j*-я и *k*-я альтернативы одинаковы |

Здесь *i* - номер матрицы (номер критерия).

Для рассматриваемой задачи матрицы парных сравнений по критериям К1-К3 приведены в таблицах 3.6 – 3.8.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 3.6 — Парные  сравнения по критерию К1 | | | | | | | |  |  |  | Таблица 3.7 — Парные  сравнения по критерию К2 | | | | | | |
|  | | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ6 |  |  | | |  |  | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ6 |
| СТ1 | | — | 0 | -1 | 1 | -1 |  |  | | |  | СТ1 | — | 1 | -1 | 1 | -1 |
| СТ2 | | 0 | — | -1 | 1 | -1 |  |  | | |  | СТ2 | -1 | — | -1 | 0 | -1 |
| СТ3 | | 1 | 1 | — | 1 | -1 |  |  | | |  | СТ3 | 1 | 1 | — | 1 | 0 |
| СТ4 | | -1 | -1 | -1 | — | -1 |  |  | | |  | СТ4 | -1 | 0 | -1 | — | -1 |
| СТ6 | | 1 | 1 | 1 | 1 | — |  |  | | |  | СТ6 | 1 | 1 | 0 | 1 | — |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 3.8 — Парные  сравнения по критерию К3 | | | | | | |
|  | | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ6 |
| СТ1 | | — | 1 | -1 | 1 | 0 |
| СТ2 | | -1 | — | -1 | -1 | -1 |
| СТ3 | | 1 | 1 | — | 1 | -1 |
| СТ4 | | -1 | 1 | -1 | — | -1 |
| СТ6 | | 0 | 1 | -1 | 1 | — |

**4** Составляется матрица потерь. Размерность матрицы - *N*x*N*, где *N* - количество альтернатив. Элементы матрицы потерь рассчитываются по следующей формуле:

,            *j*=1,...,*N*, *k*=1,...,*N*.

Матрица потерь для рассматриваемой задачи приведена в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Матрица потерь

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 | СТ6 |
| СТ1 | — | 0,667 | 2,002 | 0 | 1,835 |
| СТ2 | 1,335 | — | 2,002 | 0,501 | 2,002 |
| СТ3 | 0 | 0 | — | 0 | 1,835 |
| СТ4 | 2,002 | 1,501 | 2,002 | — | 2,002 |
| СТ6 | 0,167 | 0 | 0,501 | 0 | — |

Смысл элементов матрицы потерь следующий: чем больше элемент *Rjk*, тем больше отставание *j*-й альтернативы от *k*-й (тем хуже *j*-я альтернатива по сравнению с *k*-й).

**5** Выполняется предварительное ранжирование альтернатив. Для этого находятся суммы строк матрицы потерь. Смысл этих сумм следующий: сумма *j*-й строки представляет собой оценку *отставания* *j*-й альтернативы от *всех остальных* альтернатив.

Альтернатива, которой соответствует *минимальная* сумма, предварительно считается *лучшей*. Строка и столбец этой альтернативы исключаются из матрицы потерь.

Суммирование строк матрицы потерь и исключение альтернатив выполняются до тех пор, пока не будет исключена вся матрица. Чем раньше исключена альтернатива, тем она лучше.

Выполним предварительное ранжирование для рассматриваемой задачи. Суммы строк матрицы потерь:

*P*1 = 4,504; *P*2 = 5,84; *P*3 = 1,835; *P*4 = 7,507; *P*6 = 0,668.

Предварительно лучшей считается альтернатива СТ6. Она исключается из матрицы потерь. Сокращенная матрица потерь приведена в таблице 3.10.

Таблица 3.10 – Первая сокращенная матрица потерь

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | СТ1 | СТ2 | СТ3 | СТ4 |
| СТ1 | — | 0,667 | 2,002 | 0 |
| СТ2 | 1,335 | — | 2,002 | 0,501 |
| СТ3 | 0 | 0 | — | 0 |
| СТ4 | 2,002 | 1,501 | 2,002 | — |

Суммы строк этой матрицы: *P*1 = 2,669; *P*2 = 3,838; *P*3 = 0; *P*4 = 5,505. Исключается альтернатива СТ3. Вторая сокращенная матрица потерь приведена в таблице 3.11.

Таблица 3.11 – Вторая сокращенная матрица потерь

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | СТ1 | СТ2 | СТ4 |
| СТ1 | — | 0,667 | 0 |
| СТ2 | 1,335 | — | 0,501 |
| СТ4 | 2,002 | 1,501 | — |

Суммы строк этой матрицы: *P*1 = 0,667; *P*2 = 1,836; *P*4 = 3,503. Исключается альтернатива СТ1. Третья сокращенная матрица потерь приведена в таблице 3.12.

Таблица 3.12 – Третья сокращенная матрица потерь

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | СТ2 | СТ4 |
| СТ2 | — | 0,501 |
| СТ4 | 1,501 | — |

Суммы строк этой матрицы: *P*2 = 0,501; *P*4 = 1,501. Лучшая альтернатива (из двух оставшихся) – СТ2.

Предварительное ранжирование альтернатив: СТ6, СТ3, СТ1, СТ2, СТ4.

**6** Выполняется окончательное ранжирование альтернатив. Для этого альтернативы сравниваются попарно, начиная с конца предварительного ранжирования. Если сравниваются *j*-я и *k*-я альтернативы (при этом *j*-я альтернатива в предварительном ранжировании находится выше *k*-й) и выполняется условие *Rjk* ≤ *Rkj* (где *Rjk* и *Rkj* - элементы матрицы потерь), то альтернативы остаются в ранжировании на прежних местах (*j*-я альтернатива лучше *k*-й). Если *Rjk* > *Rkj*, то альтернативы меняются местами (*j*-я альтернатива хуже *k*-й).

Выполним окончательное ранжирование для данной задачи.

Сравниваем СТ2 и СТ4. *R*24 = 0,501; *R*42 = 1,501. Так как *R*24 < *R*42, альтернативы остаются на своих местах (СТ2 выше, чем СТ4).

Сравниваем СТ1 и СТ2. *R*12 = 0,667; *R*21 = 1,335. Так как *R*12 < *R*21, альтернативы остаются на своих местах (СТ1 выше, чем СТ2).

Сравниваем СТ3 и СТ1. *R*31 = 0; *R*13 = 2,002. Так как *R*31 < *R*13, альтернативы остаются на своих местах (СТ3 выше, чем СТ1).

Сравниваем СТ6 и СТ3. *R*63 = 0,501; *R*36 = 1,835. Так как *R*63 < *R*36, альтернативы остаются на своих местах (СТ6 выше, чем СТ3).

Таким образом, окончательное ранжирование альтернатив следующее: СТ6, СТ3, СТ1, СТ2, СТ4. Лучший вариант станка – СТ6.

**2.3.2 Метод ЭЛЕКТРА**

Метод предназначен для решения задач, в которых из имеющегося множества альтернатив требуется выбрать заданное количество лучших альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям, а также важности этих критериев.

В таблице 3.13 приведены оценки альтернатив, отобранных на основе выбора множества Парето.

Таблица 3.13 – Множество Парето

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Площадка | СТ1 | СТ3 | СТ6 |
| Производительность, изделий/ч | 25 | 30 | 35 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 140 | 200 | 200 |
| Надежность | достаточно высокая | очень высокая | достаточно высокая |

Принцип работы метода следующий. Для каждой пары альтернатив (A*j* и A*k*) выдвигается предположение (гипотеза) о том, что альтернатива A*j* лучше, чем A*k*. Затем для каждой пары альтернатив находятся два индекса: индекс согласия (величина, подтверждающая предположение о превосходстве A*j* над A*k*) и индекс несогласия (величина, опровергающая это предположение). На основе анализа этих индексов выбирается одна или несколько лучших альтернатив ("ядро" альтернатив).

Выбор лучших альтернатив по методу ЭЛЕКТРА реализуется в следующем порядке.

**1** Оценки альтернатив приводятся к безразмерному виду. В данной задаче использована методика экспресс-анализа альтернатив. Безразмерные оценки приведены в таблице 3.14.

Таблица 3.14 — Безмерные оценки альтернатив

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Площадка | СТ1 | СТ3 | СТ6 |
| Производительность, изделий/ч | 0,714 | 0,857 | 1 |
| Стоимость станка, тыс. ден.ед. | 0,714 | 0,5 | 0,5 |
| Надежность | 0,7 | 0,9 | 0,7 |

С помощью одного из методов экспертных оценок находятся веса критериев, представляющие собой числовые оценки их важности. В данном примере использовался метод предпочтений (см. пункт 2.3.1). Получены веса критериев: *V*1 = 0,667; *V*2 = 0,167; *V*3 = 0,167 для критериев «производительность», «стоимость» и «надежность» соответственно.

**2** Определяются индексы согласия *Cjk*, *j*=1,...,*N*, *k*=1,...,*N* (где *N* - количество альтернатив). Индекс согласия отражает степень согласия с предположением о том, что *j*-я альтернатива лучше *k*-й. В рассматриваемой реализации метода ЭЛЕКТРА индексы согласия находятся по формуле

 *j*=1,…,*N*, *k*=1,…,*N*,

где *Vi* - веса критериев;

*K*+ - подмножество критериев, по которым *j*-я альтернатива не хуже *k*-й.

Таким образом, индекс согласия *Cjk* находится как сумма весов критериев, по которым *j*-я альтернатива *не хуже* *k*-й. Чем больше индекс согласия, тем более выражено превосходство *j*-й альтернативы над *k*-й.

Индексы согласия для данной задачи приведены в таблице 3.15.

Таблица 3.15 – Матрица индексов согласия

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | СТ1 | СТ3 | СТ6 |
| СТ1 | — | 0,167 | 0,333 |
| СТ3 | 0,833 | — | 0,333 |
| СТ6 | 0,833 | 0,833 | — |

**3** Определяются индексы несогласия *Djk*, *j*=1,...,*N*, *k*=1,...,*N*. Индекс несогласия отражает степень несогласия с предположением о том, что *j*-я альтернатива лучше *k*-й. Индексы *Djk* находятся по формуле:

 *j*=1,...,*N*, *k*=1,...,*N*,

где *Pik*, *Pij* - безразмерные оценки альтернатив (для данного примера они приведены в таблице 3.3.2);

*K*— - подмножество критериев, по которым *j*-я альтернатива не превосходит *k*-ю.

Таким образом, индекс несогласия *Djk* находится как максимальная из разностей оценок по критериям, по которым *j*-я альтернатива *не лучше* *k*-й. Чем больше индекс несогласия, тем менее выражено превосходство *j*-й альтернативы над *k*-й.

Индексы несогласия для данной задачи приведены в таблице 3.16.

Таблица 3.16 – Матрица индексов несогласия

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | СТ1 | СТ3 | СТ6 |
| СТ1 | — | 0,343 | 0,286 |
| СТ3 | 0,214 | — | 0,143 |
| СТ6 | 0,214 | 0,200 | — |

**4** Для каждой альтернативы находится предельное значение индекса согласия:

 *j*=1,...,*N*.

Таким образом, предельное значение индекса согласия для *j*-й альтернативы находится как *минимальный* элемент *j*-й строки матрицы индексов согласия. Эта величина отражает степень согласия с предположением о том, что *j*-я альтернатива имеет превосходство над всеми другими альтернативами.

Для рассматриваемого примера С1 = 0,167; С3 = 0,333; С6 = 0,833.

**5** Для каждой альтернативы находится предельное значение индекса несогласия:

 *j*=1,...,*N*.

Таким образом, предельное значение индекса несогласия для *j*-й альтернативы находится как *максимальный* элемент *j*-й строки матрицы индексов несогласия. Эта величина отражает степень несогласия с предположением о превосходстве *j*-й альтернативы над другими альтернативами.

Для рассматриваемого примера *D*1 = 0,343; *D*3 = 0,214; *D*6 = 0,214.

**6** Выделяются лучшие альтернативы (“ядро” альтернатив), удовлетворяющие условиям:

С*j* > *C*\*,

*Dj* < *D*\*,

где *C*\*, *D*\* - пороговые значения индексов согласия и несогласия. Эти величины назначаются в зависимости от того, какое количество альтернатив требуется выбрать. Обычно сначала принимаются пороговые значения С\* = 0.5, *D*\* = 0.5; затем они изменяются в соответствии с количеством отбираемых альтернатив. Выбираются альтернативы, удовлетворяющие *обоим* условиям.

В рассматриваемом примере требуется выбрать *один* вид станков. Назначим пороговые значения С\* = 0,5, *D*\* = 0,2. Условию С*j* > *C*\* удовлетворяет альтернатива СТ6, условию *Dj* < *D*\* - альтернативы СТ1, СТ3 и СТ6. Таким образом, выбирается альтернатива СТ6.