

音乐与数学

王杰 毕明辉

2平时作业：3小组研究题：5期末

课程邮箱：musicmaths@163.com

2.17

1. 音乐的三大要素：节奏、旋律、和声
2. 概念辨析：
 - **拍子**：周期，例如4/4
 - **节拍**是若干拍子按一定强弱规律组成的组合（强弱交替的脉动），例如 强弱次强弱
 - **节奏**是由音符的不同时值组合构成的模式
3. 极大均衡原则：起拍分布相对均衡
4. 固定节奏型（rhythmic ostinato），例：《哈巴涅拉》《古巴颂》
5. 节奏奇性：起拍的对径点都不是起拍
6. 引入度量……节奏型的距离序列[3 3 4 2 4]；
7. **轮廓**：用+-0来表明相邻两项相对变化[0 + - + -] **必考**
8. 轮廓同构：轮廓经过位移后相同
9. **影子**：对偶的节奏，即起拍间隔中点形成节奏

2.24 音乐专题

1. 舒伯特《魔王》……调性与情绪。Lieder Erlkoenig 调性和弦
2. 《卖报歌》……五声音阶
3. 1=bB：绝对音律
4. 大小调：停在6：小调；
5. 四大声腔：海盐腔、弋阳腔、余姚腔、昆山腔（四个戏曲剧种之合称）
6. 调对结构的作用
 - 主调：出现最多的
 - 例：贝多芬《第五钢琴协奏曲》第三乐章：bE-bB-bE-C-bA-E-e-bE
7. 属：上五度，下属：下五度
8. 《今夜无人入睡》男高音
9. 欣赏音乐四大能力：联觉 想象 通感 移情
 - 欣赏方法（过程）：泛听精听赏听鉴听
10. 京剧之前……秦腔
11. 世界音乐分类：古典、流行、民间
12. Enya
13. acappella VBB (voice, beating, bass line)
 - ex: Pentatonix "Daft Punk"
14. 欣赏音乐：（1）健脑化欣赏（2）科学化欣赏（3）（4）

3.3

1. 音乐会音高: 440Hz
2. 音高: 位置理论 (耳蜗不同部分), 时间理论 (每个神经元再振动的固定相位处放电, 锁相)
3. 声压: 听力下限阈值: $20\mu Pa = 20 \times 10^{-5} Pa$

$$L_p = 20 \log_{10} \frac{p}{p_0}$$

人耳对不同频率有不同的声音阈值

4. 波形 振幅包络: ADSR: 起音, 衰减, 持续, 释放

5. 音色 泛音列 频谱图

傅里叶分析: 复杂周期函数 \Leftrightarrow 若干简单的正弦余弦振动的叠加

振动函数随时间变化: 振动在时域上的特性; 振动在不同频率上的振幅描绘出来: 频域上的特征 (两个不同维度的视角)

6. 乐音体系: 音乐中使用的具有固定音高的全体乐音构成的集合。

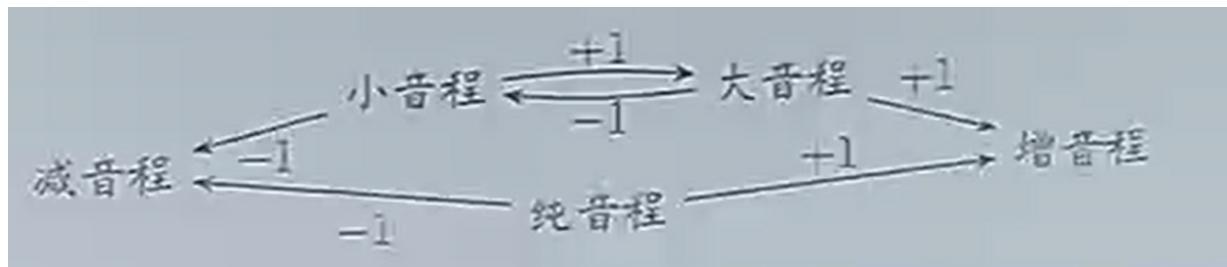
噪音例: 《卡门》西班牙响板

1. 其中元素称作音级, 其名字称为音名 (基本的音名: CDEFGAB) 。
2. 变音记号 \rightarrow 变化音级
3. 等音的/异名同音
4. 唱名法/阶名唱法
5. 最早的乐谱《碣石调 幽兰》
6. 全休止符黑框贴四线, 二分休止符黑框贴三线
7. 中音谱号 (C谱号) 中心位于三线--中央C
8. 变音记号: 调号--每一行开始处谱号后面的变音记号; 临时变音记号
9. 音程: 两个音级之间的距离

旋律音程, 和声音程

度数 (包含音名数目) + 半音数确定音程

自然音程: 可以在白键上得到



音程的协和理论:

- 毕达哥拉斯: 长短成简单整数比
- 赫尔姆霍兹: 拍音理论: 频率为 ω_1, ω_2 的两个音好听呢叠加, 每秒产生拍音数 $\delta = |\omega_1 - \omega_2|$ 每秒少于6个或者多于120拍音的是和谐的

长征组歌 大二度

7. 音乐是关于量与量之间的关系 ("相对") (普罗克鲁斯, 希腊), 但也有绝对量 (tempo)

3.10

1. 大调和关系小调
2. 十二平均律。五度相生律，纯律。
3. 同音：音高一致（演奏）；等音-->度的唯一性（记谱，理论）（#C与bD是等音）
4. 巴赫
5. 卡农（环形）
6. 节奏，时值 1:2
7. 音乐基本要素：高度长度强度音色
8. 古典维也纳学派是以海顿、莫扎特、贝多芬为代表的作曲家群

先锋音乐

1. 彭德雷茨基
2. 捷尔吉·利盖蒂（匈牙利）《大气层》
3. 卢恰诺·贝利奥（意大利）（新人声音乐）
4. 乔治·克拉姆（美国）《大宇宙》

1. 古典主义：自然音系统；浪漫主义：自然音+半音系统

2.

The diagram shows two staves of musical notation. The top staff is in C major (one sharp) and the bottom staff is in G major (no sharps or flats). Both staves have a treble clef. The notes are represented by open circles. The top staff has notes C, D, E, F, G, A, B, C. The bottom staff has notes C, D, E, F, G, A, B, C. Brackets below the notes identify them by degree: 'Tonic' (C), 'Mediant' (E), 'Dominant' (G), 'Leading Tone' (B), 'Supertonic' (D), 'Subdominant' (A), and 'Submediant' (F#). Above the notes, a bracket labeled '5度' spans from D to G. Above G, a bracket labeled '全音' spans from G to A. The notes are connected by vertical dashed lines to their corresponding labels below.

3. 赏析音乐：旋律、节奏、和声、音色、织体 (texture)、曲式

清唱：单声织体
主调织体
复调织体

4. 人类音乐聆听认知基本顺序：体量（响度和密度的综合）、速度、拍子、音色、旋律、结构、调性

前三个组成音乐的情绪，后三个：音乐的情感

3.17 弦外之音 vibration equation and overtones

振动方程

1. 二阶偏微分方程 $u(t)$

- 方程
- 边值条件
- 初始形状
- 初始速度

解得无穷级数。

2. Mersenne 定律 $f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

f_1 (基音), f_2 (后面都叫泛音, overtones), f_3, \dots 称为弦的固有频率, 通常把序列称为泛音列

3. 建模: 拨弦的傅里叶级数 (了解)

只出现 f_1, f_3, \dots

几何解释: 当在 $L/2$ 处释放弦以后, 弦的振动应该始终保持关于 $L/2$ 对称。当 n 为奇数时, 振动波形都是关于 $L/2$ 对称的, 而当 n 为偶数时, 相应的波形都是关于 $L/2$ 反对称的, 因而是不可能出现的。

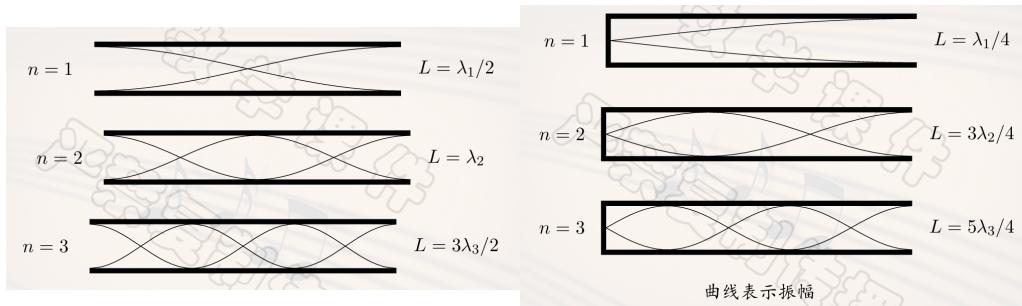
1. 赫尔姆霍兹 协和泛音列重合理论

2. 管乐器

两端固定的弦满足 $u(0, t) = u(L, t) = 0, \forall t \geq 0$. 而振动的空气

- 端口校正: 管会超出管的端口, 故须对其音高(频率)进行端口校正 (end correction).

- 开管 两端是波腹 $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ ($f, 2f, 3f, \dots$) 例子: 长笛
- 闭管 一端是波节 $\frac{4L}{2n-1}$ 只有偶次泛音 ($f, 3f, 5f, 7f, \dots$) 例子: 单簧管
- 计算基频: $f_1 = v/\lambda_1$



overblow超吹: 吹第一泛音。

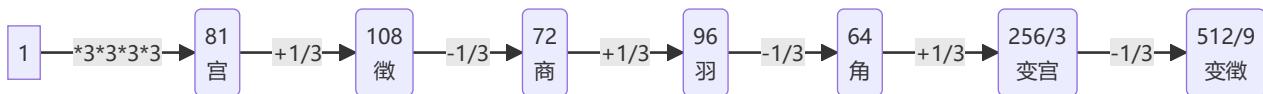
3.24 音乐

无

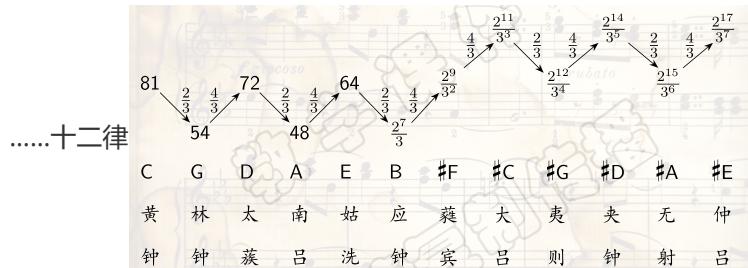
3.31 律学

很多要求掌握的知识！

1. 三分损益 (管仲) 纯四 纯五

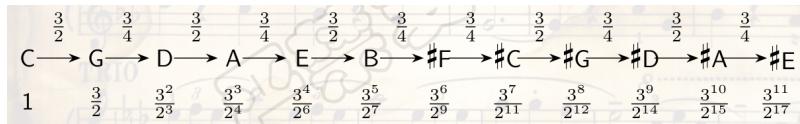


徵羽除以2



- 旋宫不归: #E三分损一得到的频率是C的 $1.01(2^{19}/3^{12})$ 倍

2. 五度相生 (毕达哥拉斯) 3: 2为生律元素, 每次乘3/2, 超过8度就除以2

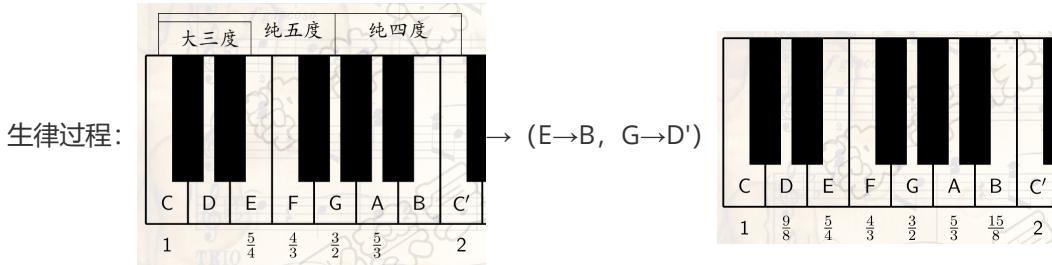


- 毕达哥拉斯音差: 12次上纯五度, 7次下八度 $2^{19}/3^{12}$

3. 单声音乐: 单一曲调构成的音乐, 包括独唱独奏, 齐唱齐奏 (包括八度重叠)

4. 主调音乐 (舒伯特《军队进行曲》) 与复调音乐

5. 纯律: 在五度相生 (生律元素3: 2) 中添加生律元素: 大三度 (5: 4)



问题: 五度音程DA不协和, $\frac{5}{3} : \frac{9}{8} = \frac{40}{54} = \frac{80}{108}$; 有两种不同的大二度。转调问题。

谐调音差: 升高四个纯五度, 降低两个八度和一个大三度, 得到81/80

6. 造成以上问题的根本原因: 数域

7. 平均律 公比 $r = \sqrt[12]{2} \approx 1.05493$ 朱载堉第一个计算

8. 音分: 十二平均律一个半音一百分

- 频率比r, 音分为c。换算: $r = 2^{\frac{c}{1200}}$, $c = 1200 \log_2 r$

4.7&4.14 音乐专题

贝多芬 Fate Symphony 1804-1808

4.21 音乐与随机

1. 随机舞曲：有限集合中选取旋律演奏

- “音乐骰子游戏”：扔骰子决定演奏哪段旋律。
- 小步舞曲通常采用A, B (两支双簧管和一只大管，名为三声中部，两个部分组成，每部分8小节)， A曲式

2. 动机：构成旋律的最小结构单位。最短且清晰又能独立。

3. 《变形》 Metastasis 滑奏：乐谱构成直纹面

4. 气体分子运动理论...设计音云

5. 马尔科夫链： ξ_{n+1} 只与 ξ_n 有关——无记忆性。

音乐看作**随机过程**：随机变量的序列

音高的**状态空间** $\Omega = \{\text{音级 (即 } C, D \dots\}\}$

6. 转移概率，转移概率矩阵

7. 有色彩的噪音。分析功率谱。

维纳辛钦定理

分形

1. 白噪音：功率谱=常数，
2. 粉噪音： $\frac{1}{f}$
3. 棕噪音：上下音位移 ± 3 ，功率谱 $\frac{1}{f^2}$

音乐基础

1. 调式：

- 若干音级围绕某一个有稳定感的**中心音级**，按照一定的音程关系组织在一起
- **调式音阶**从主音开始
- **自然大调**
- **自然小调**
- **和声小调**：VII音（导音）升高半音
- 旋律小调：（上行）VI VII都升高半音（后四个音=大调，有大调色彩），下行同自然小调。例子：莫斯科郊外的晚上

近关系调：每个调式有五个：属音大调、下属音大调及三个关系小调

2. 和弦

和声学是主调音乐的基础

1. 三和弦：大小增减
2. 七和弦：七种（都是大三度则=三和弦）

命名：下方三和弦+七度：各取一字

- 小小小|减三 减七|减（减） 七和弦
- 小小大|减三 小七|减小七和弦/半减七和弦
- 大小小|大三 小七|大小七和弦/属七和弦 (sol ti re fa)

注：传统和弦根据**三度叠置原则**构建，因此有时写重升重降号

3. 转位

- 第一转位（六和弦），第二转位（四六合弦）

- 第一（五六和弦），第二（三四），第三（二）

4. 和弦的调性功能：

主和弦：I、VI、V

- 主和弦I：稳定感：开头结尾
- 属和弦V：不稳定性（常用属七和弦（GBDF）），想要回到**主音**
- 下属和弦IV：连接和过渡，从主和弦出发/连接到属和弦

7. 不协和和弦回到协和的：解决

8. 特里斯坦和弦 47#2#5：悲剧气氛色彩，强调和弦本身音乐效果

9. 蓝调 和弦连接特色

4.28 旋律与重复

- 理解 **群 (groups)** 的定义，了解循环群、二面体群、对称群和置换群等群的具体例子；
- 十二音技术：
 - 掌握初始音列中 12 个音类与 \mathbb{Z}_{12} 中元素的对应关系；
 - 掌握移调音列 P_k , 倒影音列 I_k , 逆行音列 R_k 和 逆行倒影音列 RI_k 的计算，掌握音列矩阵的概念及其计算；
 - 了解勋伯格十二音技术背后的音乐创作思想.

1. 莫扎特 小星星变奏曲

2. 旋律的变化

移调

- 严格移调：半音关系不变
- 调性移调：移后仍在原调性音阶内

逆行

对称 勃拉姆斯，帕格尼尼---拉赫曼尼诺夫

3. 哥德堡变奏曲与14首卡农

4. 调性音乐总有一个**主音**.....限制移调

5. 勋伯格 十二音技术 群论进行音乐创作

6. 变换：升高n个半音的变换 $T_n(x) = x + n \ n=0$ 恒等变换

7. 八度关系是等价关系，等价类称为音类（等音的音级属于同一个音类）。音类空间。

助教tips:

自然小调旋律小调等的升降号都是临时升降号！例如C大调、a自然小调、a和声小调调号一致。

看总谱。

看和声：主调音乐中先区分**旋律**和**和声**

如何看和弦。

0512

音类空间 $\mathcal{P}\mathcal{C}$

移调变换

1. 音类空间范畴里 $T_m = T - n \iff m \equiv n \pmod{12}$

2. 复合 $T_m * T_n$ 先用 T_n 作用再用 T_m 作用

3. $(T_i, *)$ 是群:

- 结合律
- 单位元
- 逆元

满足交换律，是交换群

是循环群 $\mathcal{T} = L(T_1)$

同构于 $\mathbb{Z}_{12}, +$

倒影变换

1. 用 I 表示保持 C_4 不变的倒影变换（也保持 $\#F$ 不变）

2. $I(\bar{x}) = \overline{-x}$

3. 在音类圆周上是轴对称

4. $T^k * I = I * T^{-k}$

5. $\mathcal{D} = L(T, I)$ 同构于 D_{24}

置换来表示上述变换

1. 轮换表达式

2. n 阶兑换群 S_n

逆行

1. 记为 R

2. $\mathcal{M} = L(T, I, R)$ 音乐变换群，是一个直积，同构于 $D_{24} \times \mathbb{Z}_2$

1. 李斯特 匈牙利狂想曲 #2

十二音技术

1. 出发点：12音序列

2. I_n ：保持音列第一个音不变，倒影音列

3. 音列矩阵：勋伯格

	I_0	I_7	I_{11}	I_2	I_1	I_9	I_3	I_5	I_{10}	I_6	I_8	I_4	
P_0	0	7	11	2	1	9	3	5	10	6	8	4	R_0
P_5	5	0	4	7	6	2	8	10	3	11	1	9	R_5
P_1	1	8	0	3	2	10	4	6	11	7	9	5	R_1
P_{10}	10	5	9	0	11	7	1	3	8	4	6	2	R_{10}
P_{11}	11	6	10	1	0	8	2	4	9	5	7	3	R_{11}
P_3	3	10	2	5	4	0	6	8	1	9	11	7	R_3
P_9	9	4	8	11	10	6	0	2	7	3	5	1	R_9
P_7	7	2	6	9	8	4	10	0	5	1	3	11	R_7
P_2	2	9	1	4	3	11	5	7	0	8	10	6	R_2
P_6	6	1	5	8	7	3	9	11	4	0	2	10	R_6
P_4	4	11	3	6	5	1	7	9	2	10	0	8	R_4
P_8	8	3	7	10	9	5	11	1	6	2	4	0	R_8
	RI_0	RI_7	RI_{11}	RI_2	RI_1	RI_9	RI_3	RI_5	RI_{10}	RI_6	RI_8	RI_4	

第一行：给定音列，第一个是0。

第一列：与第一行加起来是12

其他行：根据第一个音的关系进行移调

4. 例子：《涉江采芙蓉》

5. 轨道：

轨道

设 Ω 是一个有限集合， G 是由 Ω 到自身的若干可逆变换构成的群。对于 $\alpha \in \Omega$ ，定义 Ω 的子集合

$$\text{Orb}(\alpha) = \{\beta \in \Omega \mid \text{存在 } g \in G, g(\alpha) = \beta\},$$

称为群 G 的包含 α 的 **轨道 (orbit)**。

从某个初始音列 P_0 出发得到的 48 个音列就是音乐变换群 \mathcal{M} 的包含 P_0 的轨道。

对于 $\alpha \in \Omega$ ，记群 G 的子集合 $G_\alpha = \{g \in G \mid g(\alpha) = \alpha\}$ ，称为 α 的 **稳定化子 (stabilizer)**。

$$|Orb(\alpha)| = |G : G_\alpha| / |G_\alpha|$$

从初始音列 P_0 出发得到的 48 个音列就是在 48 阶群 \mathcal{M} 作用下的一条轨道. 如果其中有相同的 (等价于轨道长度 < 48), 说明某个音列 α 的稳定化子 $\mathcal{M}_\alpha \neq 1$. 事实上, 这时必有 $|\mathcal{M}_\alpha| = 2$, 推出轨道长度等于

$$|\mathcal{M}|/|\mathcal{M}_\alpha| = 48/2 = 24.$$

$\mathcal{M}_\alpha \neq 1$ 说明该音列有内部的对称性

定理 A

给定音列

$$P_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_{11}.$$

存在 $k: 1 \leq k \leq 11$, 使得 $I_k = R_0$ 的充要条件是

$$0 + a_{11} = a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = \dots = a_5 + a_6 = k \pmod{12},$$

其中的 k 为奇数.

定理 B

给定音列

$$P_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_{10}, a_{11}.$$

存在 $k: 1 \leq k \leq 11$, 使得 $P_0 = R_k$ 的充分必要条件是 $k = 6$, 且有

$$\left\{ \begin{array}{l} a_6 = a_5 + 6 \\ a_7 = a_4 + 6 \\ \dots \dots \\ a_{10} = a_1 + 6 \\ a_{11} = 6 \end{array} \right. \pmod{12}.$$

音类集合

(掌握概念, 理解与传统和弦之间的本质区别)

- 由若干音类构成的集合称为**音类集合**,简称**pc集**(pc set).
- 包含 n 个音类的pc集称作是一个 n -元pc集.因为**音类空间** \mathcal{PC} 由12个音类构成的集合,故总有 $0 \leq n \leq 12$.特别地,任意一个pc集都可以看作是 \mathcal{PC} 的一个**子集合**.

1. pc集的标准形/标准序

集合类的代表的标准序称为原型 编号 k (元素数目) $\rightarrow x$ (序号)

2. 可以表示为音类圆周中的一个内接n多边形

由此可知,任意给定两个大三和弦 and/or 小三和弦 \mathcal{X}, \mathcal{Y} , 必存在群 \mathcal{D} 中变换 g ,使得 $g(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$.

3. 音级→音类→音类集合→集合类 多→少→多→少

集合类:群 \mathcal{D} 中的轨道

4. 音类间的距离:从X出发到Y经过的最少音类,取值范围[1, 6]

5. 距离向量

两个音类. 定义这个pc集的**距离向量**

$$\delta = (d_1, d_2, \dots, d_6),$$

其中 d_i 等于距离为 i 的顶点对的数目.

- 给出的是所有音类对之间的距离,描述了所有音程含量,很大程度上刻画了声音效果
- 移调不改变距离向量
- 属七、半减;大三、小三在同一集合类

6. 子集合:

- 字面上的:直接就是
- 抽象的:需要变换

和声进行与黎曼理论

1. 协和三和弦 大写小写字母表示

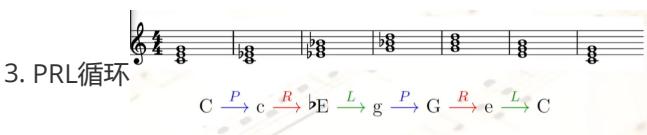
2. 集合类3-11(大小三和弦)上的变换 (掌握)

- 平行变换P:根音冠音不变,三音变半音。大三 \longleftrightarrow 小三。保持纯五度不动
- 关系变换R:三和弦变为关系三和弦,如C \rightarrow A。保持大三度不变
- 导音变换L:大三:根音降低半音;小三:冠音升高半音。保持小三度不变

PRL统称**黎曼变换**

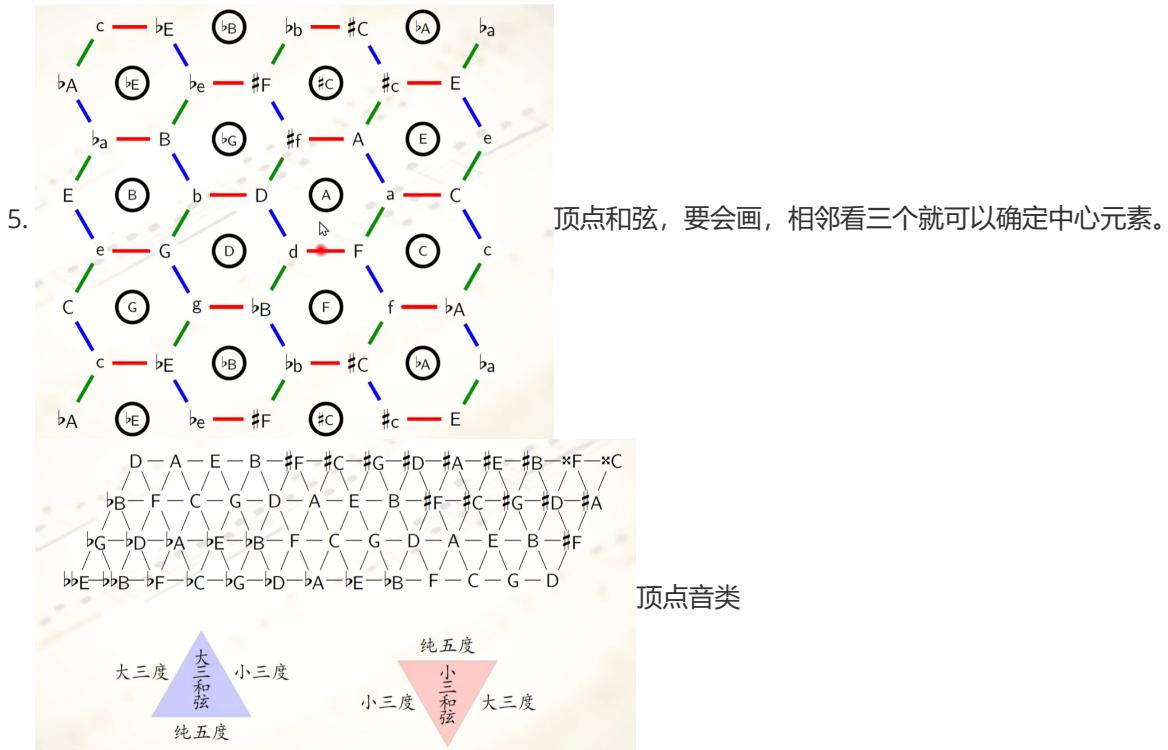
几何解释:沿某个边的垂直平分线对称。只变一个顶点。

变换前后共享一个音程



上述唯一共同音类是G

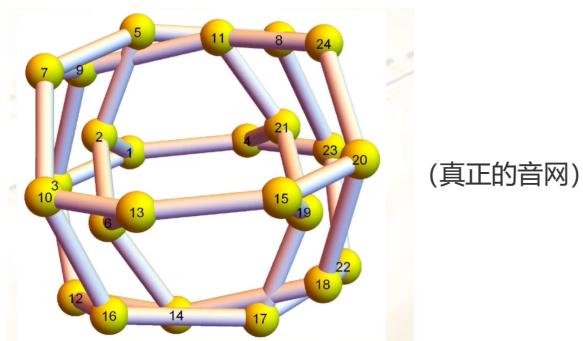
4. 音网：通过PRL循环构造



十二平均律体系中是环面

新黎曼理论

1. 脱离了调性音乐的框架
2. 新黎曼群 $\mathcal{N} = L(P, R, L)$ 同构于24阶二面体群
3. 群中的字：S是群G的子群，字是生成元串
4. 新黎曼群中的字、和弦序列、音网上的路径：和弦变换三位一体
5. 音网上的哈密尔顿圈：恰经过图中每个顶点一次回到同一个顶点。说明可以“平滑”地遍历24个和弦。



掌握音阶在音类圆周和五度圆周上的表示方法。

数学的节奏与节奏的数学

1. 时值序列，增值变换

时值等全部序列化，（有机结合）……整体序列主义

0526

1. 相位差 clapping music.....一共多少种可能呢？.....8有+4空，空不能连续出现，循环.....一共10个等价类。

项链的计数

对于群中的元素 $g \in G$, 记 g 的 不动点集合 (the set of fixed points) 为

$$\text{fix}(g) = \{ \alpha \in \Omega \mid g(\alpha) = \alpha \}.$$

Burnside 引理

设 G 是集合 Ω 上的一个置换群，共有 t 条轨道，则有

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|.$$

2. 简约主义：用最少的音乐材料达到尽可能大的效果，采用简单的和声语言重复短小的音乐动机。（重复，冗余，持续不断，有侵略性）

考试相关提示

1. bmh部分是第二部分选择题的前五道（10分）
2. 最后一节课讲的形而上学部分不考。群的轨道和稳定化子不考。
3. 6.2 星期一考试 18: 40-20: 40 120分钟
4. 一 简单单选 简单知识；二 知识；三 读谱
5. ppt最后的小结 掌握理解了解：分重点，对照复习。
6. 作业题有原题。