Contrôle de cours (correction)

Trinômes du second degré

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

Soit f une fonction trinôme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a \neq 0$. On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

Alors, on a

$$f(0) = c$$

et

$$f(0) = c'$$

donc

$$c = c'$$

De plus

$$f(1) = a + b = a' + b'$$

$$f(-1) = a - b = a' - b'$$

Le système

$$\begin{cases} a + b = a' + b' \\ a - b = a' - b' \end{cases}$$

devient (en sommant les deux lignes par exemple)

$$\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Toute fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ s'écrit

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$

L'équation

$$f(x) = 0$$

est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

d'après le résultat sur les formes canoniques. Ainsi, si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines qui vérifient

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

d'ou

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$, le trinôme a une unique racine :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racines réelles

Exercice 2 (Etude d'une fonction trinôme, temps conseillé : 15 min) :

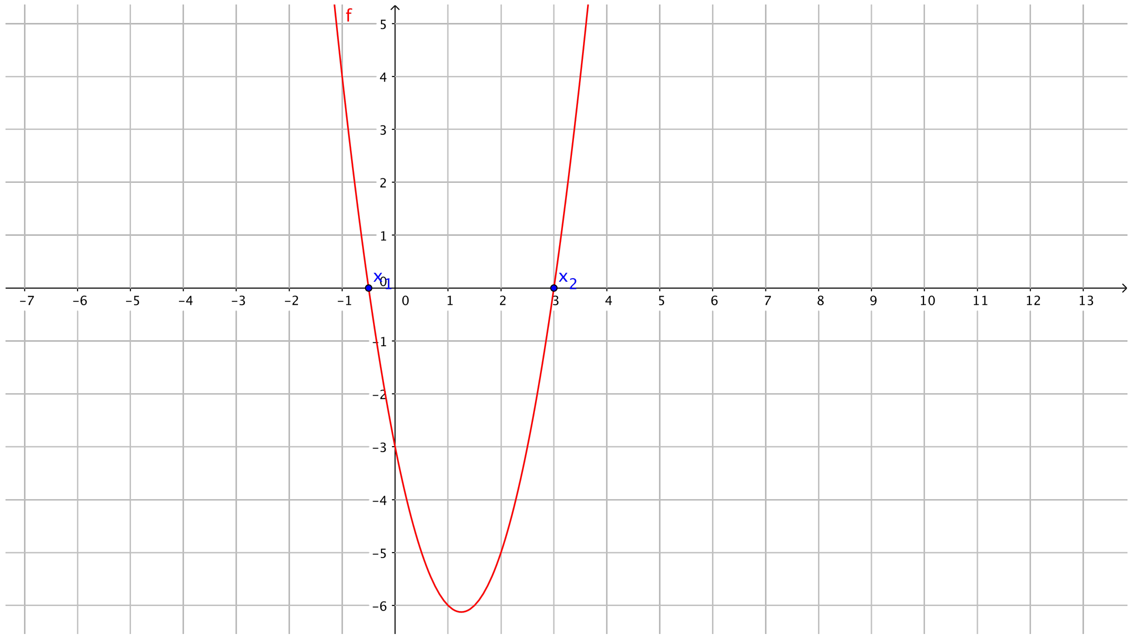
On considère la fonction f définie pour tout x par

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 3$$

1. f, comme toutes les fonctions trinômes, est définie sur $\mathbb{R}$
2. $$f(1) = 2 \times (1)^2 - 5 \times 1 - 3 = -6$$
   $$\boxed{f(1) = -6}$$
   $$f(4) = 2 \times 16 - 5 \times 4 - 3 = 9$$
   $$\boxed{f(4) = 9}$$
   et
   $$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 5 - 3 = 4$$
   $$\boxed{f(-1) = 4}$$
3. On utilise le résultat sur les formes canoniques avec $a = 2$, $b = -5$ et $c = -3$. On calcule tout d'abord le discriminant :
   $$\delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49$$
   Ainsi
   $$f(x) = 2\left(x + \frac{-5}{2 \times 2}\right)^2 - \frac{49}{4 \times 2}$$
   $$\boxed{f(x) = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}}$$
4. D'après la question précédente
   $$\delta = 49 > 0$$
   donc ce trinôme admet 2 racines réelles distinctes qui sont
   $$x_1 = \frac{5 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5 - 7}{4}$$
   $$\boxed{x_1 = -\frac{1}{2}}$$
   $$x_2 = \frac{5 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5 + 7}{4}$$
   $$\boxed{x_2 = 3}$$
5. On a
   $$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
   $$\boxed{f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)}$$
6. Le coefficient dominant de f est positif donc f est négatif entre ses racines. Ainsi

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

7. Voici la représentation graphique de f :



Exercice 3 (Equation et inéquation du second degré, temps conseillé : 15 min) :

1. On a

$$2x^2 + 7x - 1 = 1 - x^2 + 2x$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

On calcule le discriminant de ce trinôme :

$$\Delta = 5^2 + 4 \times 3 \times 2 = 49$$

On a $\Delta > 0$ donc ce trinôme admet deux racines distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{-5 - 7}{6} = -2$$
$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{-2; \frac{1}{3}\right\}}$$

2. On a

$$x\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) < 2$$
$$\Leftrightarrow x\,(x+3) < 4 \quad \text{(Multiplication par 2 des deux cotés de l'inégalité)}$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 < 0$$

On établit le tableau de signe de ce trinôme : on commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = 3^2 + 4 \times 4 = 9 + 16 = 25$$

$\Delta > 0$ donc ce trinôme admet 2 solutions réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$x_2 = \frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

Le coefficient dominant de ce trinôme est positif donc le trinôme est négatif entre les racines. Ainsi l'intervalle solution est

$$\boxed{\mathcal{S} =]-4, 1[}$$

Si des difficultés, regarder le tableau de signe :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 4 (Symétries, temps conseillé : 15-20 min) :

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec $a \neq 0$

1. On a

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} - 2\frac{b^2}{4a} + c$$

$$\boxed{f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + c}$$

Si l'on inclut le c dans la fraction,

$$\boxed{f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}}$$

On vit alors le lien avec la forme canonique

2.

$$f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \left(a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right) - \frac{-\Delta}{4a}$$

$$f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} + \frac{\Delta}{4a}$$

$$\boxed{f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$$

3. Le terme $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ est tout le temps positif. Ainsi si $a>0$, on a pour tout x,

$$f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right)\geq 0$$

donc

$$\boxed{f(x)\geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)}$$

d'où l'on déduit que c'est un minimum et si $a<0$, on a pour tout x

$$f(x)-f\left(-\frac{b}{2a}\right)\leq 0$$

donc

$$\boxed{f(x)\leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)}$$

d'où l'on déduit que c'est un maximum

4.

$$f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)=a\left(-\frac{b}{2a}-x\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}+x\right)+c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)=a\left(\frac{b}{2a}+x\right)^2-b\left(\frac{b}{2a}+x\right)+c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)=a\left(\frac{b^2}{4a^2}+2\frac{b}{2a}x+x^2\right)-\frac{b^2}{2a}-bx+c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)=\frac{b^2}{4a}+bx+ax^2-\frac{b^2}{2a}-bx+c$$

$$\boxed{f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)=-\frac{b^2}{4a}+ax^2+c}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)=a\left(-\frac{b}{2a}-+x\right)^2+b\left(-\frac{b}{2a}+x\right)+c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)=a\left(\frac{b^2}{4a^2}-2\frac{b}{2a}x+x^2\right)-\frac{b^2}{2a}+bx+c$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)=\frac{b^2}{4a}-bx+ax^2-\frac{b^2}{2a}+bx+c$$

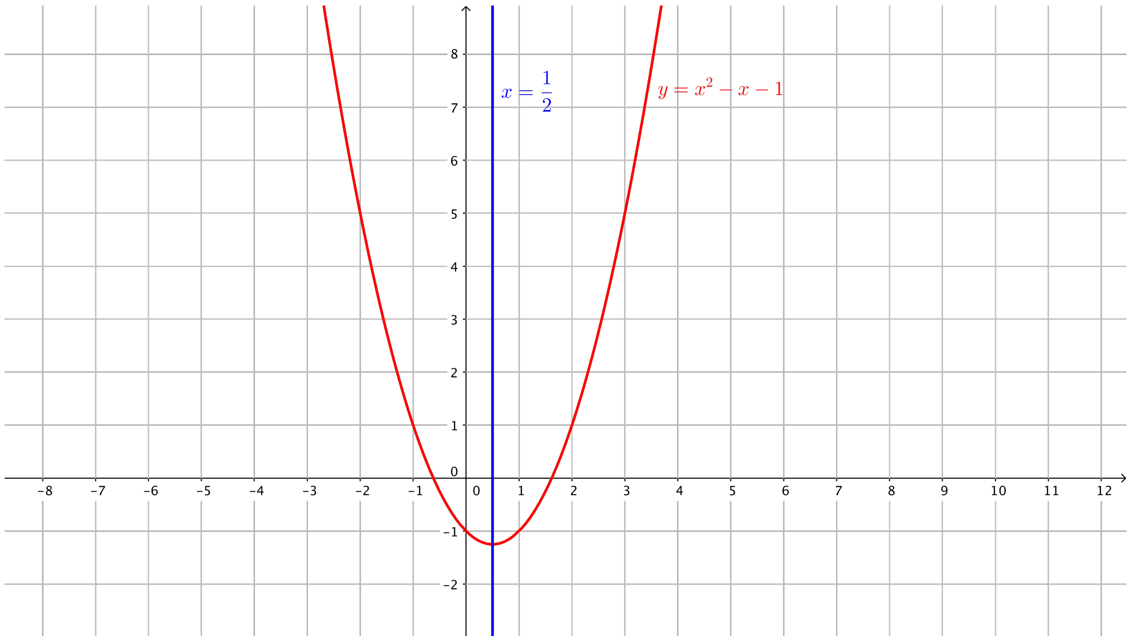
$$\boxed{f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)=-\frac{b^2}{4a}+ax^2+c}$$

On déduit

$$\boxed{f\left(-\frac{b}{2a}-x\right)=f\left(-\frac{b}{2a}+x\right)}$$

La conséquence est que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=-\frac{b}{2a}$

5. On a tracé la courbe représentative de $x\mapsto x^2-x-1$ et la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$.



On remarque bien la symétrie

⋆⋆⋆

FIN DU SUJET