Contrôle de cours

Suites

Durée du contrôle : 1h (il faudra compter un peu plus...)
Ce sujet comporte 2 pages
La calculatrice est autorisée

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

Rappeler les 3 modes de génération d'une suite et donner des exemples pour deux d'entre eux

Rappeler la définition d'une suite arithmétique, redémontrer la formule donnant le terme général d'une suite arithmétique et redémontrer le résultat sur les variations d'une suite arithmétique.

Exercice 2 (Etude d'une suite, temps conseillé : 20 min) :

Max met de l'eau, initialement à 20 degrés Celsius, à chauffer pour se faire des pâtes. On suppose que l'eau chauffe de 2 degrés Celsius toute les minutes après la mise en chauffe. On note u_n la température de l'eau, en degré Celsius, après n minutes de chauffe

1. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme
2. En déduire le terme général de la suite (u_n)
3. Montrer que (u_n) est croissante
4. Calculer les 10 premiers termes de (u_n) et les placer sur un graphe
5. Ecrire un algorithme qui renvoie le premier N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$ (A saisi par l'utilisateur)
6. Résoudre l'inéquation
$$u_n \geq 100$$
7. Au bout de combien de temps, Max peut-il mettre ses pâtes ?
8. Que pensez vous de cette modélisation ? *On pourra faire intervenir la notion de limite*

Exercice 3 (Limite d'une suite géométrique, temps conseillé : 20 min) :

On considère (v_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $v_0 > 0$

1. Rappeler la définition d'une suite géométrique. Donner aussi le terme général de (v_n)
2. Montrer que si $q = 1$, alors la suite (v_n) est constante égale à v_0
Deux questions difficiles arrivent ... Si le candidat a des difficultés à réussir les questions, il est invité à admettre le résultat encadré pour l'exercice 4

On admet l'existence d'une fonction définie sur $]0, +\infty[$ appelée logarithme népérien, notée $\ln$ qui vérifie :

- $\ln$ **est croissante**
- $\ln(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$
- **Pour tout $\mathbf{a} \in]\mathbf{0}, +\infty[$ et $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$,** $\ln(\mathbf{a^n}) = \mathbf{n}\ln(\mathbf{a})$
- $\mathbf{a} > \mathbf{1} \Leftrightarrow \ln(\mathbf{a}) > \mathbf{0}$
- $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{1} \Leftrightarrow \ln(\mathbf{a}) < \mathbf{0}$

3. On suppose $q > 1$. Soit $A > 0$. Résoudre l'inéquation
$$v_n \geq A$$
(Indication : On pourra (devra...) utiliser le logarithme népérien et donner la solution sous la forme $n \geq \frac{\ln(B)}{\ln(C)}$ *où* B *et* C *sont à exprimer en fonction de* A*,* v_0 *et* q*)*
Que dire de la limite de (v_n) dans ce cas ?

4. On suppose maintenant $q < 1$. Soit $\varepsilon > 0$. On veut savoir à partir de quel rang $[-\varepsilon, \varepsilon]$ contient toutes les valeurs de la suite. Résoudre l'inéquation
$$v_n \leq \varepsilon$$
(Indication : On pourra (devra...) utiliser le logarithme népérien et donner la solution sous la forme $n \geq \frac{\ln(B)}{\ln(C)}$ *où* B *et* C *sont à exprimer en fonction de* A*,* v_0 *et* q*)*

Quelque soient les réponses apportées aux questions précédentes, on admettra la résultat suivant

> Si (v_n) est une suite géométrique de raison $0 < q < 1$ avec $u_0 > 0$ alors
> $$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice 4 (Exercices classiques du bac (abordable en première), temps conseillé : 20 min) :

On considère la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 6 \end{cases}$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3

2. On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$v_n = u_n - 24$$
Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$ de d'un premier terme que l'on précisera

3. Etablir, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = 24 + 76 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

4. Montrer que (v_n) et (u_n) sont décroissantes

5. Montrer que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *(Indication : utiliser l'exercice 3)*. En déduire la limite de (u_n) lorsque n tend vers l'infini.

⋆ ⋆ ⋆

FIN DU SUJET

Ce genre de suite est très fréquent au bac : l'utilisation de suite intermédiaire et les $u_n = a + b \times q^n$ *tombent (au moins) une fois sur deux*