Contrôle de cours (correction)

Fonctions de référence

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

On définit la fonction inverse comme $x \mapsto \frac{1}{x}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}^*$. On montre que la fonction est décroissante $]0, +\infty[$: soit $0 \leq a \leq b$ On a

$$a \leq b$$

donc

$$\frac{a}{b} \leq 1$$

$$\frac{1}{a}\frac{a}{b} \leq \frac{1}{a}$$

finalement

$$\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

On montre maintenant que la fonction est croissante $] - \infty, 0[$: soit $b \leq a \leq 0$ On a

$$b \leq a$$

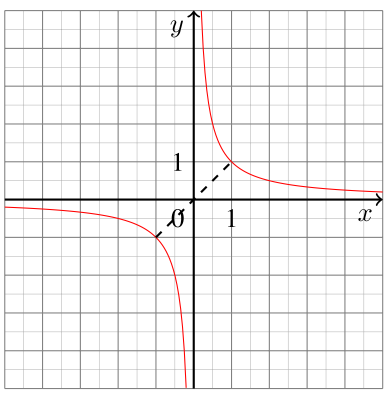
donc

$$\frac{b}{a} \geq 1$$

$$\frac{1}{b}\frac{b}{a} \leq \frac{1}{b}$$

finalement

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$$



Exercice 2 (Etude d'une fonction, temps conseillé : 15-18 min) :

1. On calcule le discriminant

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 2 \times 16 = 16$$

$\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{16}}{2 \times 2} = \frac{12 - 4}{2 \times 2} = 2$$

$$\boxed{x_1 = 2}$$

$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{16}}{2 \times 2} = \frac{12 + 4}{2 \times 2} = 4$$

$$\boxed{x_2 = 4}$$

2. Le coefficient dominant étant positif

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On déduit le domaine de définition de $x \mapsto \sqrt{g(x)}$ est $]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$ qui s'annule en $x = 2$ et $x = 4$ donc le domaine de définition de f est $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$

4. La racine garde le sens de variation donc $x \mapsto \sqrt{g(x)}$ est décroissante sur $]-\infty, 2]$ et croissante sur $[4, +\infty[$

5. La fonction inverse inverse le sens de variation (lol). Ainsi f est croissante sur $]-\infty, 2[$ et décroissante sur $]4, +\infty[$

6. On a

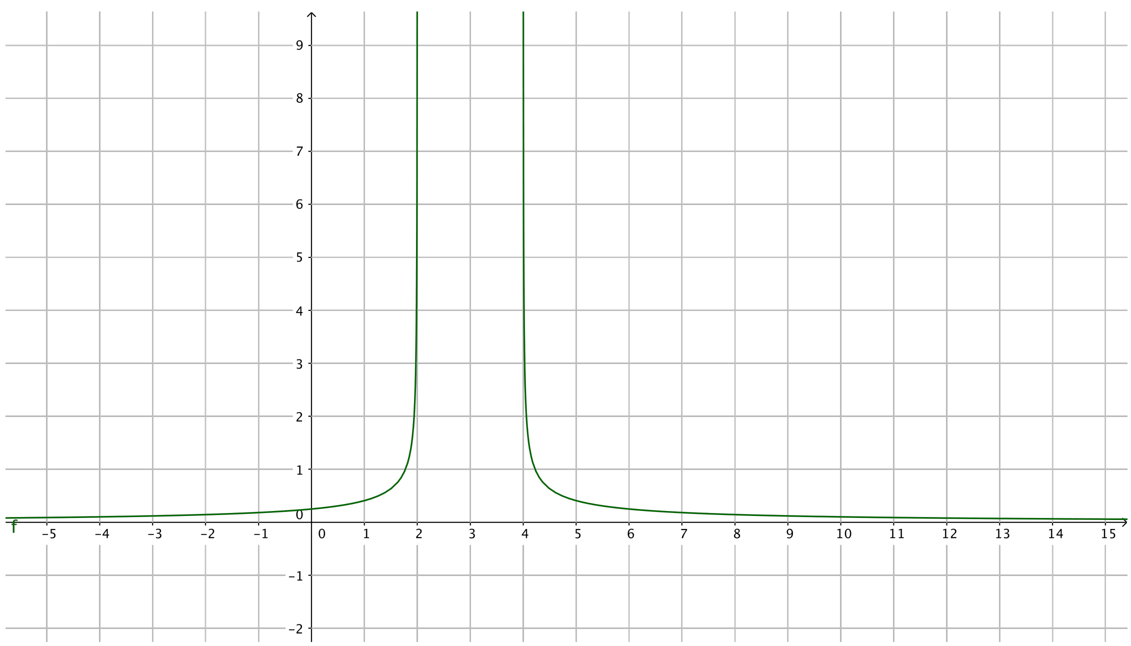
$$f(-1) = \frac{1}{\sqrt{2(-1)^2 + 12 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

$$\boxed{f(-1) = \frac{1}{\sqrt{30}}}$$

$$f(5) = \frac{1}{\sqrt{2(5)^2 - 12 \times 5 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{f(5) = \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

7. Voici la représentation graphique de f



Exercice 3 (Valeur absolue, temps conseillé : 10 min) :

1. On appelle valeur absolue la fonction définie par

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

2. On étudie tous les cas

$a \geq 0; b \geq 0$	$a \leq 0; b \geq 0$	$a \geq 0; b \leq 0$	$a \leq 0; b \leq 0$
Alors $$\|a\| = a$$ $$\|b\| = b$$ De plus $$ab \geq 0$$ donc $$\|ab\| = ab$$ OK	Alors $$\|a\| = -a$$ $$\|b\| = b$$ De plus $$ab \leq 0$$ donc $$\|ab\| = -ab$$ OK	Alors $$\|a\| = a$$ $$\|b\| = -b$$ De plus $$ab \leq 0$$ donc $$\|ab\| = -ab$$ OK	Alors $$\|a\| = -a$$ $$\|b\| = -b$$ De plus $$ab \geq 0$$ donc $$\|ab\| = ab$$ OK

3. On remarque une identité remarquable : $h(x) = (x-2)^2$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geq 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| = h(x)$

Exercice 4 (Intersection de deux droites, temps conseillé : 17-20 min) :

1. Pas de point en commun : droite parallèle non confondue (exemple : $d_1 : x = 1$ et $d_2 : x = 2$), un point en commun : droites non parallèles (exemple : $d_1 : x = 0$, $d_2 : y = 0$) et infinité de points en commun : droites confondues (exemple :$d_1 : x + y = 1$, $d_2 : x + y = 1$)

2. Si (x, y) est un point d'intersection, alors
$$y = ax + b$$
et
$$y = cx + d$$
donc
$$y - y = ax + b - (cx + d)$$
donc
$$0 = ax - cx + b - d$$
donc
$$\boxed{(a-c)x = d - b}$$

3. On suppose tout d'abord $a - c = 0$. L'équation devient alors $d - b = 0$
Si $d = b$ alors $f = g$ et il y a une infinité de point en commun puisque les droites sont confondues
Si $d \neq b$ alors il ne peut y avoir de point en commun donc les droites sont parallèles non confondues

4. On revient à l'équation
$$(a-c)x = d - b$$
vu que $a - c \neq 0$, on divise par $a - c$ et on trouve
$$\boxed{x = \frac{d-b}{a-c}}$$
On réinjecte x dans $y = ax + b$ pour trouver y :
$$y = a\frac{d-b}{a-c} + b$$
$$y = \frac{ad - ba + ba - bc}{a-c}$$

$$\boxed{y = \frac{ad - bc}{a - c}}$$

On déduit que bien que le point d'intersection est

$$\left(\frac{d - b}{a - c}, \frac{ad - bc}{a - c}\right)$$

⋆ ⋆ ⋆

FIN DU SUJET