Contrôle de cours

Probabilités

Durée du contrôle : 1h
Ce sujet comporte 2 pages
La calculatrice est autorisée

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

Prouver la formule donnant $P(A \cup B)$. Que devient la formule si A et B sont disjoints ? Déduire de ce qui précède la formule donnant $P(\overline{A})$

Exercice 2 (Petits exos OKLM, temps conseillé : 15 min) :

1. On lance 3 fois une pièce de monnaie 3 fois (on notera par exemple FPP si on a obtenu Face Pile Pile). La pièce est truquée : elle a une probabilité $\dfrac{1}{3}$ de tomber sur pile
   (a) Représenter la situation par un arbre pondéré
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 1 face dans l'expérience
2. On considère une urne contenant 9 boules rouges et 7 boules noires. On tire une boule. Si la boule est noire, on rajoute une boule rouge (et on ne remet pas la boule noire dans l'urne). Si la boule est rouge on ajoute deux boules noires (et on ne remet pas la boule rouge). On retire alors une boule et on refait les même opérations que précédemment. On tire enfin une dernière boule. Après avoir représenté la situation par un arbre pondéré, calculer la probabilité qu'il y ait exactement une boule noire tirée. Calculer ensuite la probabilité qu'il y ait au moins 2 boules rouges tirées.

Exercice 3 (Probabilité conditionnelle et indépendance, temps conseillé : 35 min) :

Soit Ω un univers et P une probabilité. Soient A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. On définit la **probabilité de** A **sachant** B et on note $P_B(A)$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1. Etablir que dans le cas d'une probabilité uniforme,

$$P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$$

A partir de maintenant, sauf contre indication, on ne fait plus l'hypothèse d'une probabilité uniforme

2. Montrer que

$$0 \leq P_B(A) \leq 1$$

(Indication : on utilisera le fait que si $C \subset D$ alors $P(C) \leq P(D)$)

3. Montrer que

$$P_B(\Omega) = 1$$

4. Montrer que si A_1 et A_2 sont incompatibles, alors

$$P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

5. Montrer que

$$P_B(\varnothing) = 0$$

6. Montrer que

$$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$$

7. Montrer que si A et B sont de probabilités non nulle, alors

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

(formule de BAYES)

On dit que deux évènements A **et** B **sont indépendants si** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

8. Soit A tel que $0 < P(A) < 1$. Montrer alors que A et $\overline{A}$ ne sont pas indépendants
9. Montrer que si A et B sont des évènements de probabilités non nulles incompatibles, alors ils ne sont pas indépendants
10. Soit A et B deux évènements avec $P(B) > 0$. Montrer que

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$$

Interpréter le terme indépendant

11. On veut montrer le résultat suivant : si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B le sont aussi
   (a) Traduire l'hypothèse A et B indépendants (on n'utilisera pas la probabilité P_B mais plutôt la définition)
   (b) Montrer que
   $$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$
   (c) Les évènements $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles. Pourquoi ?
   (d) En déduire que
   $$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
   (e) Montrer alors que $\overline{A}$ et B sont indépendants (utiliser la définition)

⋆⋆⋆

FIN DU SUJET