# Contrôle de cours

# Probabilités

Durée du contrôle : 1h
Ce sujet comporte 2 pages
La calculatrice est autorisée

## Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

On note

$$A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \dots, \omega_{a_p}, \omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \dots, \omega_{a_l}\}$$
$$B = \{\omega_{b_1}, \omega_{b_2}, \dots, \omega_{b_{p'}}, \omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \dots, \omega_{a_l}\}$$
$$A \cup B = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \dots, \omega_{a_p}, \omega_{b_1}, \omega_{b_2}, \dots, \omega_{b_{p'}}, \omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \dots, \omega_{a_l}\}$$
$$A \cap B = \{\omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \dots, \omega_{a_l}\}$$

Alors

$$P(A) = P(\omega_{a_1}) + P(\omega_{a_2}) + \dots + P(\omega_{a_p}) + P(\omega_{c_1}) + P(\omega_{c_2}) + \dots + P(\omega_{c_l})$$
$$P(B) = P(\omega_{b_1}) + P(\omega_{b_2}) + \dots + P(\omega_{b_{p'}}) + P(\omega_{c_1}) + P(\omega_{c_2}) + \dots + P(\omega_{c_l})$$
$$P(A \cup B) = P(\omega_{a_1}) + P(\omega_{a_2}) + \dots + P(\omega_{a_p}) + P(\omega_{b_1}) + P(\omega_{b_2}) + \dots + P(\omega_{b_{p'}}) + P(\omega_{c_1}) + P(\omega_{c_2}) + \dots + P(\omega_{c_l})$$
$$P(A \cap B) = P(\omega_{c_1}) + P(\omega_{c_2}) + \dots + P(\omega_{c_l})$$

D'où la formule

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Si $A$ et $B$ sont disjoints alors

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$

d'où

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Soit $A$ un évènement. $A$ et $\overline{A}$ étant disjoints

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

or

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

donc

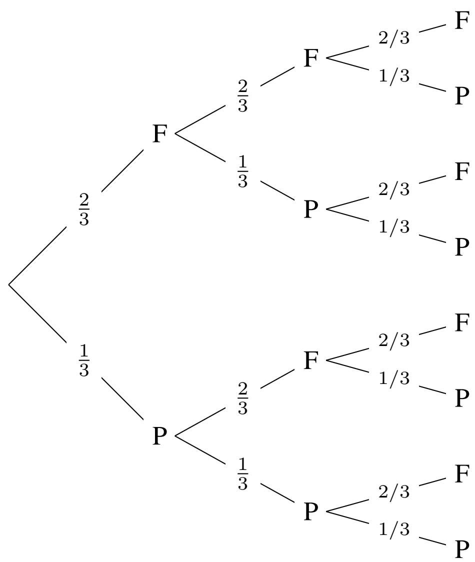
$$1 = P(A) + P(\overline{A})$$

d'où la formule

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

## Exercice 2 (Petits exos OKLM, temps conseillé : 15 min) :

1. Ici rien de bien compliqué, il suffit de suivre l'exercice et de faire attention au fait que le dé soit truqué




(a)

(b) On note $A$ l'évènement : A:"il y a exactement 1 face tirée dans l'expérience". On peut écrire $A$ sous la forme

$$A = \{FPP, PFP, PPF\}$$

Les 3 séquences qui composent $A$ ont chacune une probabilité

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$$

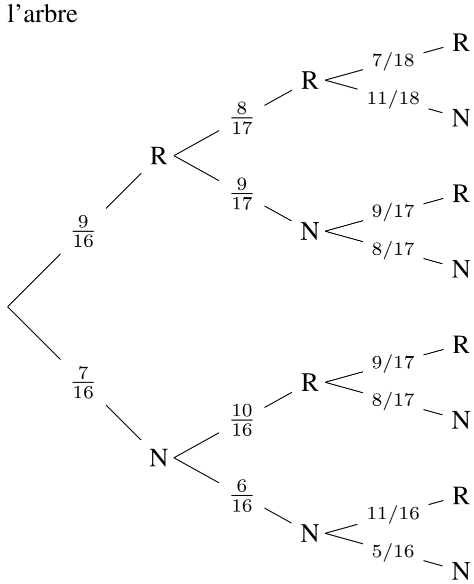
de sortir donc

$$P(A) = 3 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right)$$

$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{2}{9}}$$

2. Il fait faire attention ici car les probabilités (et même le nombre total de boule parfois) change entre les niveaux de l'arbre



On note $B$ et $C$ les évènements

$$B : \text{"Exactement 1 boule noire est tirée"}$$

$$C : \text{"Au moins 2 boules rouges sont tirées"}$$

Alors

$$B = \{RRN, RNR, NRR\}$$

donc

$$P(B) = \left(\frac{9}{16} \times \frac{8}{17} \times \frac{11}{18}\right) + \left(\frac{9}{16} \times \frac{9}{17} \times \frac{9}{17}\right) + \left(\frac{7}{16} \times \frac{10}{16} \times \frac{9}{17}\right)$$

$$\boxed{P(B) = \frac{17171}{36992} \simeq 0,46}$$

De plus

$$C = \{RRN, RNR, NRR, RRR\}$$

donc

$$P(C) = P(B) + P(RRR)$$

$$P(C) = \frac{17171}{36992} + \left(\frac{9}{16} \times \frac{8}{17} \times \frac{7}{18}\right)$$

$$\boxed{P(C) = \frac{20979}{36992} \simeq 0,56}$$

## Exercice 3 (Probabilité conditionnelle et indépendance, temps conseillé : 35 min) :

1. Dans le cas d'une probabilité uniforme,

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$$

donc

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)}}{\frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}}$$

puis en simplifiant par Card($\Omega$),

$$\boxed{P_B(A) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}}$$

2. On a

$$A \cup B \subset B$$

donc

$$P(A \cup B) \leq P(B)$$

d'où

$$\frac{P(A \cup B)}{P(B)} \leq 1$$

On a $P(A \cup B) \geq 0$ et $P(B) > 0$ donc

$$0 \leq \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$$

Finalement

$$\boxed{0 \leq P_B(A) \leq 1}$$

3. On a
$$B \subset \Omega$$
donc
$$\Omega \cap B = B$$
Ainsi
$$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

4. On suppose $A_1$ et $A_2$ sont incompatibles, alors $B \cap A_1$ et $B \cap A_2$ sont incompatibles $((B \cap A_1) \cap (B \cap A_2) = B \cap A_1 \cap A_2 \cap B = B \cap \varnothing \cap \varnothing = \varnothing)$ On a alors
$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P(B \cap (A_1 \cup A_2))}{P(B)}$$
$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2))}{P(B)}$$
$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P((B \cap A_1)) + P((B \cap A_2))}{P(B)} \quad \text{(Car incompatibles)}$$
$$P_B(A_1 \cup A_2) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(B)} + \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)}$$
$$\boxed{P_B(A_1 \cup A_2) = P_B(A_1) + P_B(A_2)}$$

5. On a
$$P_B(\varnothing) = \frac{P(B \cap \varnothing)}{P(B)}$$
or $B \cap \varnothing = \varnothing$ et $P(\varnothing) = 0$ donc
$$\boxed{P_B(\varnothing) = 0}$$

6. Conséquence des questions 3 et 4 ($A \cup \overline{A} = \Omega$, $A$ et $\overline{A}$ disjoints)

7. On a
$$P_B(A) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$$
et
$$\frac{P_A(B)P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cup B)}{P(A)} \times P(A) \times \frac{1}{P(B)} = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$$
d'où
$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

8. On a
$$P(A \cap \overline{A}) = P(\varnothing) = 0$$
or
$$P(A) \neq 0$$
$$P(\overline{A} \neq 0$$
(car $0 < P(A) < 1$) donc
$$P(A) \times P(\overline{A}) \neq 0$$
$$\boxed{P(A) \times P(\overline{A}) \neq P(A \cap \overline{A})}$$
Les évènements ne sont donc pas indépendants

9. On a
$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$$
et
$$P(A) \neq 0$$
$$P(B) \neq 0$$
donc
$$\boxed{P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)}$$

10.
$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P_B(A) = P(A)$$
*"Si A et B sont indépendants, alors la probabilité de A sachant B est la probabilité de A : savoir si B est réalisé ne change donc rien : c'est en cela qu'ils sont indépendants"*

11. On veut montrer le résultat suivant : si $A$ et $B$ sont indépendants alors $\overline{A}$ et $B$ le sont aussi

   (a) $A$ et $B$ sont indépendants donc
   $$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

   (b) Montrer que
   $$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = ((A \cap B) \cup \overline{A}) \cap ((A \cap B) \cup B)$$
   $$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = ((A \cup \overline{A}) \cap (B \cup \overline{A})) \cap ((A \cup B) \cap (B \cup B))$$
   $$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (\Omega \cap (B \cup \overline{A})) \cap ((A \cup B) \cap B)$$
   $$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = (B \cup \overline{A}) \cap B$$
   $$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$$

   (c) On a
   $$\boxed{(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = A \cap B \cap \overline{A} \cap B = \varnothing \cap B = \varnothing}$$

   (d) On a
   $$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$$
   et $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ disjoints donc
   $$\boxed{P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}$$

   (e) On a
   $$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
   donc
   $$P(B) = P(A) \times P(B) + P(\overline{A} \cap B)$$
   donc
   $$P(B) - P(A) \times P(B) = P(\overline{A} \cap B)$$
   donc
   $$P(B)(1 - P(A)) = P(\overline{A} \cap B)$$
   or $1 - P(A) = P(\overline{A})$ donc
   $$\boxed{P(B) \times P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B)}$$
   Ainsi $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants

⋆ ⋆ ⋆

FIN DU SUJET