Sujet : la suite de Fibonacci (correction)

I - Etude d'une fonction

Dans la suite du sujet, on note f la fonction définie pour tout x par

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

1. Comme toutes les fonctions trinômes, f est définie sur $\mathbb{R}$
2. On a

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$$

Ainsi f possède deux racines réelles

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

et

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

3. Le coefficient dominant de f est positif donc le trinôme est négatif entre les racines

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

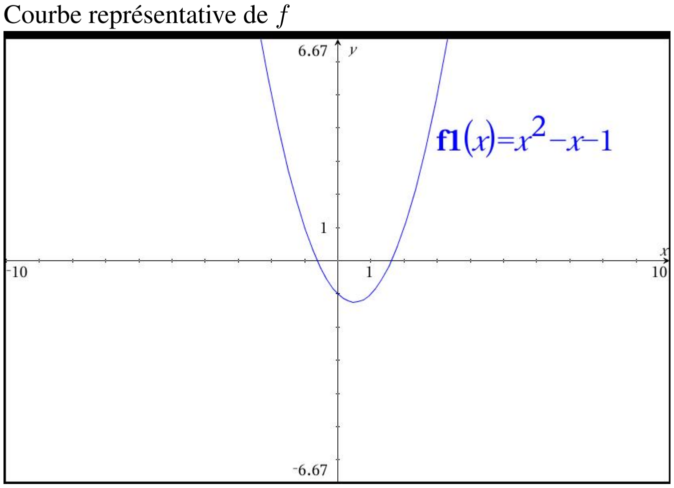
4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x - 1$$

Ainsi on peut dresser le tableau de signe de f' puis le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	

5. Courbe représentative de f



6. La première manière est la manière calculatoire (et chiante)

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

or

$$\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

La deuxième méthode constiste à dire que φ est racine de f donc

$$f(\varphi) = 0$$

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1}$$

7. On a

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

et $\varphi \neq 0$ donc par division par φ,

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\boxed{\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1}$$

8. La limite de (u_{n+1}) est la même que celle de (u_n)

9. Par passage à la limite dans

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

on obtient

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell}$$

d'où

$$\ell^2 = \ell + 1$$

d'où $\ell = \varphi$ ou $\ell = \psi$
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ donc $\ell \geq 0$ donc

$$\boxed{\ell = \varphi}$$

10. On a

$$u_{50} = \frac{2036501174}{12586269025} \simeq 1,6180339887499$$

or

$$\varphi \simeq 1,6180339887499$$

soit une correspondance totale sur tous les chiffres après la virgule que peut afficher ma calculatrice

II - Quelques résultats sur les rationnels et les irrationnels

1. Soient $x = \dfrac{p}{q}$ et $y = \dfrac{p'}{q'}$ avec $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$xy = \frac{pp'}{qq'}$$

et $pp' \in \mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{N}^*$ donc $xy \in \mathbb{Q}$

2. Soient $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$ avec $p, p' \in \mathbb{Z}$ et $q, q' \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$x + y = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

et $pq' + p'q \in \mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{N}^*$ donc $x + y \in \mathbb{Q}$

3. Soit $x = \frac{p}{q} \neq 0$ un rationnel ($p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in N^*$

$$\frac{1}{x} = \frac{q}{p}$$

Si $p > 0$ c'est gagné, sinon si $p < 0$, on remarque juste que

$$\frac{q}{p} = \frac{-q}{-p}$$

et les signes sont rétablis

4. Supposons par l'absurde que $a \times b$ soit rationnel. Alors il le resterait par multiplication par $\frac{1}{b}$ d'après la question précédente et la question 1. Alors $a \times b \times \frac{1}{b}$ serait rationnel donc a serait rationnel. Contradiction : $a \times b$ est irrationnel

5. Supposons par l'absurde que $a + b$ soit rationnel. Alors il le resterait quand on lui ajoute $-b$ ($-b$ est bien rationnel donc c'est bon d'après la question 2) du coup $a + b - b$ est rationnel d'où a rationnel : contradiction : $a + b$ est irrationnel

6. Pas forcément : si a ets irrationnel, $-a$ l'est aussi et donc $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$

7. Toujours pas forcément : on le montre à la question d'après, $\sqrt{2}$ est irrationnel et $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$

8. Soit n un nombre impair. Il s'écrit $n = 2k + 1$. Or

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

avec $k' \in \mathbb{N}$ d'où n^2 impair. Le raisonnement s'appelle le raisonnement par contraposée

9. On va montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel et donc on suppose l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

avec p et q premiers entre eux

(a) On sait que $\sqrt{2} \simeq 1,414 > 0$ ce qui donne $p > 0$

(b) Il suffit d'élever la relation précédente au carré :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \sqrt{2}^2$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$p^2 = 2q^2$$

On déduit alors que p^2 est pair puis p pair grâce à la question 8

(c) p est pair donc s'écrit $p = 2k$. Ainsi

$$p^2 = 2q^2$$

$$4k^2 = 2q^2$$

puis par division par 2

$$2k^2 = q^2$$

On déduit alors que q^2 est pair puis q pair toujours grâce à la question 8

(d) On avait supposer que p et q étaient premiers entre eux (pgcd$(p,q) = 1$) or on vient de montrer qu'il admettait deux comme diviseur commun (ou encore que pgcd$(p,q) geq 2$)

10.
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

donc c'est la somme d'un rationnel $\left(\frac{1}{2}\right)$ et d'un irrationnel $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ d'où φ est irrationnel

III - Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Soit a et b deux réels. On s'interesse aux suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = u_0 \quad \text{(donné)} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

1. Dans le cas $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique de raison b. Le terme général est alors

$$u_n = u_0 + nb$$

et la limite est $+\infty$ si $b > 0$, $-\infty$ si $b < 0$ et u_0 si $b = 0$

2. On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{au_n + b - \frac{b}{1-a}}{u_n - \frac{b}{1-a}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = a\frac{u_n + \frac{b}{a} - \frac{b}{1-a}}{u_n - \frac{b}{a(1-a)}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = a\frac{u_n + b\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{1-a}\right)}{u_n - \frac{b}{a(1-a)}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = a\frac{u_n + b\left(\frac{1-a}{a(1-a)} - \frac{1}{a(1-a)}\right)}{u_n - \frac{b}{1-a}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = a\frac{u_n + b\left(\frac{-a}{a(1-a)}\right)}{u_n - \frac{b}{1-a}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = a\frac{u_n + \frac{-b}{1-a}}{u_n - \frac{b}{1-a}}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = a$$

On déduit que (v_n) est géométrique de raison a et de premier terme

$$v_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}$$

3. On a ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_n = v_0 a^n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n}$$

Puis

$$u_n = v_n + \frac{b}{1-a}$$
$$\boxed{u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n + \frac{b}{1-a}}$$

4. On a $0 < a < 1$ donc

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'ou

$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{1-a}}$$

IV - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit a et b dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite u_n vérifie $E_{(a,b)}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

De plus on note

$$g_{(a,b)} : x \mapsto x^2 - ax - b$$

et on note $\Delta_{(a,b)}$ son discriminant

1. Avec le résultat admis,

$$u_0 = \lambda r_1^0 + \mu r_2^0$$
$$\boxed{u_0 = \lambda + \mu}$$

De plus

$$u_1 = \lambda r_1^1 + \mu r_2^1$$
$$\boxed{u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2}$$

On résout alors le système

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \quad (1) \\ u_1 = \lambda r_1 + \mu r_2 \quad (2) \end{cases}$$

En faisant $(2) - r_2(1)$, on obtient

$$u_1 - r_2 u_0 = \lambda(r_1 - r_2)$$
$$\boxed{\lambda = \frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2}}$$

($r_1 - r_2 \neq 0$ car les racines sont distinctes)

De même, en faisant $(2) - r_1(1)$, on obtient

$$\boxed{\mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1}}$$

2. Avec le résultat admis,

$$u_0 = (\lambda + \mu \times 0) r_0^0$$
$$\boxed{u_0 = \lambda}$$

De plus

$$u_1 = (\lambda + \mu \times 1) r_0^1$$
$$u_1 = (u_0 + \mu) r_0$$

d'ou finalement

$$\boxed{\mu = \frac{u_1}{r_0} - u_0}$$

V - Suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(\mathcal{F}_n)$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \end{cases}$$

1. Les 11 premiers termes de la suite de Fibonacci

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathcal{F}_n$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. En fait on se retrouve avec une suite linéaire récurrence d'ordre 2, avec $a = 1$ et $b = 1$. Il faut trouver les racines de $g_{(1,1)}$. Or $g_{(1,1)} = f$ (comme les sujets sont bien faits...) et a deux racines distintces : φ et ψ. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}_n = \lambda\varphi^n + \mu\psi^n$$

avec

$$\lambda = \frac{1 - \psi \times 0}{\varphi - \psi}$$

or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$d'où $\varphi - \psi = \sqrt{5}$ donc

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

On a aussi

$$\mu = \frac{1 - r_1 \times 0}{\psi - \varphi}$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

On déduit la formule de Binet,

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right)$$

3. On a

$$\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$$

or $\psi^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $|\psi| < 1$ d'où

$$\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$$

4. $\dfrac{\mathcal{F}_{10}}{\mathcal{F}_9} \simeq 1,61765$. On peut aussi avoir une valeur approché de φ : $\varphi \simeq 1,61803$. On a une convergence assez rapide (2 décimales après la virgule pour seulement 11 termes à calculer, c'est pas mal)