Sujet : Etude d'une fonction particulière : la fonction exponentielle

Si au cours du sujet, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur énoncé, il l'indique sur sa copie et continue sa composition.

Il est demandé au candidat une clarté dans les raisonnements qu'il mettra en place.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

⋆

<u>Notations :</u>
Pour une fonction f quelconque, on note $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition. On note $Im(f) = \{f(x)/x \in \mathscr{D}_f\}$ l'ensemble des images de f (le "/" veut dire "tel que" : c'est l'ensemble des $f(x)$ tel que x soit dans l'ensemble de définition de f).

Pour une fonction f on note f' sa dérivée

⋆

I - Dérivée d'une composée

1. R.O.C : Soit u une fonction et $a \in \mathscr{D}_u$, donner la définition de la dérivabilité de u et en a et le cas échéant la formule donnant $u'(a)$
2. On considère deux fonctions f et g telles que $Im(f) \subset \mathscr{D}_f$. On note $h = f(g)$

   On va établir le résultat suivant : si g est dérivable sur I et si f est dérivable sur $g(I) = \{g(x)/x \in I\}$, alors h et dérivable sur I et pour tout $x \in I$,
   $$h'(x) = g'(x)f'(g(x))$$
   Soit $a \in I$. On admet que
   $$\lim_{p\to 0}\frac{u(a+p)-u(a)}{p} = \lim_{x\to a}\frac{u(x)-u(a)}{x-a}$$
   Pour simplifier la démonstration (même si ce théorème reste vrai dans le cas général), on suppose f non constante.

   En faisant apparaitre $\frac{1}{g(x)-g(a)} \times (g(x) - g(a))$ dans
   $$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a}$$
   montrer que
   $$\lim_{x\to a}\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = g'(a)f'(g(a))$$
   En déduire le résultat

   On retiendra, pour la suite, le résultat : si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $h : x \mapsto f(g(x))$, alors, pour tout x
   $$\boxed{h'(x) = g'(x) \times f'(g(x))}$$
3. Calculer la dérivée de $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $]-1, +\infty[$
4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que
   $$\boxed{(f(-x))' = -f'(-x)}$$
   (Plus formellement, la dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $x \mapsto -f'(-x)$)

II - Etude d'une équation

On s'intéresse à l'équation

$$y' = y$$

où y est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (l'équation s'écrit aussi $f' = f$) On s'intéresse plus particulièrement au système

$$(S) : \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(On cherche une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 0 et dont la dérivée est elle même)

On va montrer que si une solution de (S) existe, alors celle-ci est unique

Soit f_0 dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose f solution de (S). Ainsi $f' = f$ et $f(0) = 1$

On montre tout d'abord que f_0 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pour cela, on pose g la fonction $g : x \mapsto f(x)f(-x)$

1. Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}$ (*On pourra utiliser une dérivée et la question I.4)*
2. Donner la valeur de g sur $\mathbb{R}$
3. Conclure que f ne peut s'annuler

   On suppose maintenant que f et h sont deux solutions de (S). On considère la fonction ψ sur $\mathbb{R}$ définie par

   $$\psi(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$$

   (cette fonction est bien définie car h ne s'annule pas)

4. Montrer que ψ est constante sur $\mathbb{R}$ (*On pourra utiliser une dérivée*)
5. Donner la valeur de ψ sur $\mathbb{R}$
6. En déduire que pour tout x, $f(x) = h(x)$

   On admet que le système (S) admet une solution que l'on note $x \mapsto \exp(x)$, appelée fonction exponentielle. Cette fonction est l'unique solution du système (S)

   On a

   $$\forall x \in \mathbb{R} \exp'(x) = \exp(x)$$

   $$\exp(0) = 1$$

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On considère le système

   $$(S_\alpha) : \begin{cases} y' = y \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

7. Monter que si f est solution de (S_α) alors $\frac{1}{\alpha}f$ est solution de (S)
8. Montrer que $x \mapsto \alpha \times \exp(x)$ est solution de (S_α). Déduire de la question précédente que c'est la seule solution

III - Une autre équation

1. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Montrer que la dérivée de $x \mapsto \exp(\beta x)$ est $x \mapsto \beta \exp(\beta x)$ (*On utilisera la formule de dérivée d'une composée*)
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que $x \mapsto \exp(ax)$ est solution de l'équation
$$(E) \quad y' = ay$$
3. Soit f et g deux solutions de (E). On suppose que g ne s'annule pas et on considère
$$h = \frac{f}{g}$$
Montrer que h est constante (*On pourra considérer une dérivée*)
4. Déduire que les solutions de (E) sont de la forme
$$x \mapsto A \exp(ax)$$
où est A est une constante réelle

IV - Logarithme népérien

On admet l'existence d'une fonction, appelée logarithme népérien, notée $x \mapsto \ln(x)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\ln(\exp(x)) = \exp(\ln(x)) = x}$$

1. Montrer que $x \mapsto \ln(\exp(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée (en fonction de $\exp$ et $\ln'$. En déduire que
$$\exp(x)\ln'(\exp(x)) = 1$$
2. En posant $y = \exp(x)$, montrer que $\ln'(y) = \frac{1}{\exp(y)}$

   Ainsi la dérivée de $\ln$ est la fonction inverse

V - Propriétés de l'exponentielle

1. On rappelle que $\exp$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Montrer alors que $\exp$ est croissante
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à la fonction
$$\gamma : x \mapsto \exp(a + x)$$
Montrer que γ est dérivable et calculer sa dérivée
3. Calculer $\gamma(0)$
4. En déduire que γ est solution de $(E_{\exp(a)})$
5. Déduire finalement, que pour tout x réel
$$\exp(a + x) = \exp(a)\exp(x)$$
Ainsi pour tout a, b réels
$$\boxed{\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)}$$

6. Montrer que
$$\exp(a)\exp(-a) = 1$$
En déduire que
$$\boxed{\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}}$$
et
$$\boxed{\exp(a) = \frac{1}{\exp(-a)}}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\boxed{\exp(nx) = \exp(x)^n}$$
On admet que pour tout x et y réels,
$$\exp(xy) = \exp(x)^y$$

8. Montrer les propriétés suivants sur le logarithme népérien : pour tout a et b réels
$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln(a^b) = b\ln(a)$$

9. Montrer que pour tout x et y réels,
$$x^y = \exp(y\ln(x))$$

VI - Mise sous forme de puissance

1. R.O.C. Que valent $(ab)^c$? a^{b+c} ? $(a^b)^c$? Trouver des analogies avec l'exponentielle
2. On pose $e = \exp(1)$. Montrer que $\ln(e) = 1$
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\boxed{e^x = \exp(x)}$$
(*On pourra utiliser la question V.9*)

VII - Approximation de e et représentation graphique

1. On considère la suite u_n définie par
$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
Exprimer u_n sous la forme $e^{\cdots}$ (*utiliser la question V.9*)
2. On admet que
$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$
. Montrer alors que
$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$$
3. Calculer u_{1000} à l'aide de la calculatrice. Comparer à la valeur de $\exp(1)$ donner à la calculatrice. Tracer sur la copie les graphes de $x \mapsto \exp(x)$ et $x \mapsto (u_{1000})^x$. La suite u_n converge-t-elle rapidement ou lentement vers e

FIN DU SUJET

⋆ ⋆ ⋆

La fonction exponentielle est surement l'une des fonctions les plus importantes des mathématiques puisqu'on la retrouve un peu partout, tout comme e qui est irrationnel