Sujet : Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Si au cours du sujet, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur énoncé, il l'indique sur sa copie et continue sa composition.

Il est demandé au candidat une clarté dans les raisonnements qu'il mettra en place.

L'usage de la calculatrice est interdit.

⋆

Notations :
Dans tous le problème Ω désigne un univers et P une probabilité sur Ω (sauf dans la partie IV où Ω et P sont particularisés).
Si X est une variable aléatoire sur (Ω, P), on note $E(X)$ l''espérance de X et $V(X)$ la variance de X.

$[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et n (1 et n compris)

⋆

L'objectif de ce problème est de prouver les inégalités suivantes :

Pour X une variable aléatoire sur (Ω, P) avec $X \geq 0$, on a pour tout $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Le sujet est composé de 4 parties qui peuvent être traitées indépendamment **en admettant les résultats encadrés**

I - Quelques résultats sur les sommes

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels. On note

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k \in [\![1,n]\!]} a_k$$

Si A est un ensemble, on peut aussi écrire

$$\sum_{x \in A} x$$

qui est la somme de tous les éléments de l'ensemble A

1. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

2. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   On rappelle ici que si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.

   On en déduit que si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k \leq b_k$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$$

3. En déduire que

$$\boxed{(\forall k \in [\![1, n]\!], a_k \geq 0) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \geq 0}$$

(si tous les a_k sont positifs alors la somme est positive)

4. Montrer que si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!], a_k = 0$

5. On peut ajouter des conditions à des sommes : par exemple

$$\sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ a_k \geq 3}} a_k$$

est la somme de tous les a_k plus grand que 3

Calculer par exemple

$$\sum_{\substack{k \in [\![1,8]\!] \\ a_k \geq 3}} a_k$$

où les a_k sont définis par

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
-1	2	4	6	7	2,5	4	2

II - Inégalité de Markov

1. Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Ecrire $E(X)$ sous la forme d'une somme (on utilisera $\sum_{k=1}^{n}$ plutôt que $\sum_{x \in X(\Omega)}$)

2. On dit que $X \geq 0$ si pour tout $x \in X(\Omega)$, $x \geq 0$.

Montrer que

$$\boxed{X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0}$$

A l'aide d'un contre exemple, montrer que l'on peut avoir $E(X) \geq 0$ sans avoir $X \geq 0$

3. Soit $X \geq 0$ et $a > 0$. Montrer que

$$\boxed{\frac{E(X)}{a} = \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ x_k \geq a}} \frac{x_k}{a} P(X = x_k) + \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ x_k \leq a}} \frac{x_k}{a} P(X = x_k)}$$

(*On ira étape par étape en explicitant bien les opérations effectuées*)

4. Le terme

$$\sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ x_k \leq a}} \frac{x_k}{a} P(X = x_k)$$

est-il positif ? négatif ? nul ? En déduire que

$$\boxed{\frac{E(X)}{a} \geq \sum_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ x_k \geq a}} \frac{x_k}{a} P(X = x_k)}$$

5. Prouver que

$$\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\x_k\geq a}} \frac{x_k}{a} P(X=x_k) \geq \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\x_k\geq a}} P(X=x_k)$$

(*On attend ici UN argument mais un vrai, pas des justifications fumeuses*) On déduit ainsi

$$\boxed{\frac{E(X)}{a} \geq \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\x_k\geq a}} P(X=x_k)}$$

6. Ecrire $P(X \geq a)$ sous la forme d'une somme dont les termes sont de la forme $P(X = x_k)$
7. En déduire l'inégalité de Markov

$$\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

III - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit Y une variable aléatoire et soit $b \in \mathbb{R}$. On dit que $Y \geq b$ si pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a $y \geq b$

1. Soit $b > 0$. Montrer que

$$\boxed{Y^2 \geq b^2 \Leftrightarrow |Y| \geq b}$$

   En déduire que

$$P(Y^2 \geq b^2) = P(|Y| \geq b)$$

2. Rappeler la définition de $V(X)$
3. Montrer que

$$V(X) = E(X^2) - E(X)$$

4. Soit $a > 0$. Appliquer l'inégalité de Markov à $(X - E(X))^2$ et a^2
5. Déduire de la question précédente et de la question III.1 l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\boxed{P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}}$$

IV - 2 applications

1. On considère le jeu suivant : *On lance deux dés équilibrés et on gagne, en euros, la somme des deux dés* (par exemple, si on tire un 3 et un 6, on gagne 9 euros). On note X la variable aléatoire qui donne le gain en euros
   (a) Donner Ω, $X(\Omega)$, la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$. Vérifier aussi que $X \geq 0$
   (b) Ecrire l'inégalité de Markov pour l'évènement, le gain est plus grand que 8 euros ($P(X \geq 8)$)
   (c) Calculer $P(X \geq 8)$ et conclure
2. Pourquoi peut-on dire que la variance caractérise l'écart entre les valeurs d'une variable aléatoire Y (c'est à dire l'écart à l'espérance). On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev