Contrôle de cours (correction)

Variables aléatoires

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. On définit l'espérance par

$$E(X) = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + \ldots + x_pP(X = x_p) = \sum_{i=1}^{p} x_iP(X = x_i)$$

La variance est définie par

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

c'est à dire, en note $\mu = E(X)$

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2P(X = x_2) + \ldots + (x_p - \mu)^2P(X = x_p)$$

Finalement l'écart type de X est donné par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

(qui existe bien car $V(X) \geq 0$). On note $Y = aX + b$, alors

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{p} y_iP(Y = y_i)$$

où pour tout i, $y_i = ax_i + b$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{p}(ax_i + b)P(aX + b = ax_i + b)$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{p}(ax_i + b)P(X = x_i)$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{p} ax_iP(X = x_i) + \sum_{i=1}^{p} bP(X = x_i)$$

$$E(Y) = a\sum_{i=1}^{p} x_iP(X = x_i) + b\sum_{i=1}^{p} P(X = x_i)$$

or $\sum_{i=1}^{p} x_iP(X = x_i) = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{p} P(X = x_i) = 1$ donc

$$\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b}$$

De plus on a

$$V(aX) = E((aX - E(aX))^2) = E(a^2(X - E(X))^2) = a^2E((X - E(X))^2) = a^2V(X)$$

Exercice 2 (Un jeu de casino, temps conseillé : 20 min) :

Gros attention : la mise de départ doit être comptabilisé dans les gains : quand "le joueur ne gagne rien", il perd en fait sa mise de départ soit 2 euros

1. L'idée la plus simple ici est de faire un diagramme de Venn et d'en déduire les probabilités
   Il a une seule carte qui a la bonne couleur et la bonne valeur soit

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{52}}$$

Il a 13 cartes qui ont la couleur que le joueur a donné, et 12 qui ont la même couleur sans avoir la bonne valeur soit

$$\boxed{P(B) = \frac{12}{52}}$$

Il y 4 cartes qui ont la même valeur que celle donnée par le joueur dont 3 qui n'ont pas la même couleur donc

$$\boxed{P(C) = \frac{3}{52}}$$

Finalement, il a $52 - 1 - 12 - 3 = 36$ cartes qui n'ont rien en commun donc

$$\boxed{P(D) = \frac{36}{52}}$$

2. $$\boxed{X(\Omega) = \{-2, 0, 20\}}$$

3. La probabilité d'obtenir 20 euros est la même que celle d'obtenir la bonne carte soit

$$\frac{1}{52}$$

La probabilité de ne rien gagner est celle d'avoir la bonne couleur uniquement additionnée à celle d'avoir la bonne valeur uniquement soit

$$\frac{12}{52} + \frac{3}{52} = \frac{15}{52}$$

Finalement la probabilité de perdre 2 euros est

$$\frac{36}{52}$$

Ainsi, on peut donner la loi de X dans un tableau

x	-2	0	20
$P(X = x)$	$\frac{36}{52}$	$\frac{15}{52}$	$\frac{1}{52}$

4. On a

$$E(X) = -2 \times \frac{36}{52} + 0 \times \frac{15}{52} + 20 \times \frac{1}{52}$$

$$\boxed{E(X) = -1}$$

Sur un grand nombre de partie, on aura perdu, en moyenne, 1 euros par partie don non très peu pour moi.

5. En moyenne il aura perdu 1 euro par partie soit une perte de 100 euros

6. On a

$$V(X) = (-2 - (-1))^2 \times \frac{36}{52} + (0 - (-1))^2 \times \frac{15}{52} + (20 - (-1))^2 \times \frac{1}{52} = \frac{36}{52} + \frac{15}{52} + 21^2 \times \frac{1}{52}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{123}{13} \simeq 9,46}$$

Un grand écart-type qui se traduit pa run éloignement des gains extrêmes.

7. En considérant "avoir la bonne combinaison" comme un succès, on trouve que Y suit la loi binomiale de paramètre n et $\frac{1}{52}$:

$$\boxed{Y \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{52}\right)}$$

8. On a
$$P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$$
On utilisant le fait que
$$P(X = k) = \binom{50}{k} \frac{1}{52}^k \frac{51}{52}^{50-k}$$
(et en demandant gentiment à la calculatrice de fournir la réponse),
$$\boxed{P(Y \leq 2) = 0,928}$$
Cela veut aussi dire que $P(Y > 2) = 0,072$ ce qui veut dire que la probabilité d'obtenir 3 succès ou plus su 50 essais est extrêmement faible...

9. La formule du cours donne
$$\boxed{E(Y) = \frac{n}{52}}$$
On veut
$$E(Y) \geq 2$$
($E(Y) = 2$ si on veut)
$$E(Y) \geq 2$$
$$\frac{n}{52} \geq 2$$
$$n \geq 104$$
Pour $n = 104$, $E(Y) = 2$. Ainsi, à partir de $n = 104$, le joueur peut espérer avoir 2 succès. En calculant la variance, on trouve une variance d'environ $1,96$ pour $n = 104$ donc des valeurs pas très éloignés de 2.

Exercice 3 (Un peu de loi binomiale, temps conseillé : 15 min) :

1. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre n et p si
$$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$$
et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ alors
$$E(X) = np$$
et
$$V(X) = np(1-p)$$

2. On a
$$\boxed{X \sim \mathscr{B}(20, 0.7)}$$

3. On calcule
$$P(X = 13) = \binom{20}{13} \times 0.7^{13} \times 0.3^7$$
$$\boxed{P(X = 13) = 0,164262}$$

4. On calcule
$$\sum_{k=0}^{7} P(X = k)$$
et en demandant gentiment à la calculatrice de nous fournir la réponse
$$\boxed{P(X = 7) = 0,001279}$$

5. On calcule l'espérance de X :
$$E(X) = 20 \times 0,7$$
$$\boxed{E(X) = 14}$$
En moyenne, il mettra 14 fléchettes par soir

6. On a
$$V(X) = 20 \times 0.7 \times 0.3$$
$$\boxed{V(X) = 4.2}$$

7. Algorithme de la factorielle

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
res EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   SAISIR n
   res PREND_LA_VALEUR 1
   POUR k ALLANT_DE 2 A n
      DEBUT_POUR
      res PREND_LA_VALEUR res * k
      FIN_POUR
   AFFICHER res
FIN_ALGORITHME
```

8. Algorithme des nombres binomiaux

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
res EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   SAISIR n
   SAISIR k
   res PREND_LA_VALEUR factorielle(n)/(factorielle(k)*factorielle(n-k))
   AFFICHER res
FIN_ALGORITHME
```

9. Algorithme de $P(X = k)$

```
VARIABLES
p EST_DU_TYPE NOMBRE
n EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
res EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   SAISIR n
   SAISIR p
   SAISIR k
   res PREND_LA_VALEUR binom(k,n)*pow(p,k)*pow(1-p,n-k)
   AFFICHER res
FIN_ALGORITHME
```

Exercice 4 (Loi géométrique, temps conseillé : 30-40 min) :

1. La flemme de faire l'arbre, mais en gros pour que le premier succès arrive en k, il faut que les $(k-1)$ premières branches soient E (échec) et la dernière S (succès) soit une probabilité
$$\underbrace{(1-p) \times (1-p) \times \ldots \times (1-p)}_{n-1 \text{ fois}} \times p = (1-p)^{n-1} p$$

2. On a
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$
où q est un réel différent de 1

3. Comparer, avec des petits points
$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$$
et
$$\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} = a_{1-1} + a_{2-1} + \ldots + a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$$
Ainsi
$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}}$$
Ainsi
$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

4. On a
$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1}$$
or d'après la question précédente et celle d'avant
$$\sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k = \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \frac{1-(1-p)^2}{p}$$
Ainsi
$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = p \sum_{k=1}^{n} (1-p)^{k-1} = p \frac{1-(1-p)^n}{p}$$
Finalement
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1-(1-p)^n}$$

5. On a $0 < 1-p < 1$ car $0 < p < 1$ donc
$$(1-p)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
donc
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1 - \lim_{n\to\infty} (1-p)^n$$
d'où
$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = 1}$$
Oui c'est rassurant

6. On veut ici établir le résultat suivant :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$
pour tout $x \in]0,1[$

(a) On note

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

f_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in]0,1[$,

$$\boxed{f'_n(x) = \sum_{k=0} kx^{k-1} = \sum_{k=1} kx^{k-1}}$$

(b) On a

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

f_n est dérivable comme quotient d'une fonction dérivable et d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas. On a de plus

$$\boxed{f'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}}$$

(c) On déduit des deux questions précédentes

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}}$$

(d) On a

$$x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$x^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc

$$-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

7. On suppose $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k)$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p$$

$$E(X) = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$E(X) = p\frac{1}{(1-(1-p))^2}$$

$$E(X) = p\frac{1}{p^2}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

8. On suppose $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p - \frac{1}{p^2}$$

$$V(X) = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2}$$

$$V(X) = p\left(\frac{2}{(1-(1-p))^3} - \frac{1}{(1-(1-p))^2}\right) - \frac{1}{p^2}$$

$$V(X) = p\left(\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2}\right) - \frac{1}{p^2}$$

$$V(X) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$

$$V(X) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1}{p^2} - \frac{p}{p^2}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$

9. (a) La probabilité de tirer l'as de coeur $\frac{1}{4}$ donc la loi qui donne le nombre de tirage est celle du premier succès sur une expérience où le succès est à $\frac{1}{4}$.

   (b) On a

$$\boxed{P(X=3) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}}$$

   (c) On a

$$P(X \geq 7) = \sum_{k=1}^{7} P(X=k)$$

   puis en demandant gentiment à la calculatrice fournir la réponse

$$\boxed{P(X \geq 7) = 0,866516}$$

   (d) On

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

   et

$$V(X) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = 12$$

   En moyenne, il faut tirer 4 fois avant d'obtenir l'as de coeur

   (e) Un peu mais ça va

⋆ ⋆ ⋆

FIN DU SUJET