Sujets : les complexes

Si au cours du sujet, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur énoncé, il l'indique sur sa copie et continue sa composition.

Il est demandé au candidat une clarté dans les raisonnements qu'il mettra en place.

L'usage de la calculatrice est interdit.

1 Préliminaires

1. Par définition, on a
$$e \otimes e' = e' \otimes e = e'$$
or de même, par définition
$$e' \otimes e = e$$
donc
$$\boxed{e = e'}$$

2. On a
$$x \otimes y = e$$
et
$$x \otimes z = e$$
donc
$$x \otimes y = x \otimes z$$
donc
$$y \otimes (x \otimes y) = y \otimes (x \otimes z)$$
donc
$$e \otimes y = e \otimes z$$
donc
$$\boxed{y = z}$$

2 Propriétés de $\mathbb{R}^2$

1. On a
$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$$
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$ donc $(0, 0)$ est un neutre pour $+$

2.
$$(x, y) \times (1, 0) = (x \times 1 - y \times 0, x \times 0 + y \times 1) = (x, y)$$
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \times (1, 0) = (x, y)$ donc $(1, 0)$ est un neutre pour $\times$

3. On a
$$(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$$

4. On a
$$(x, y) \times (0, 0) = (x \times 0 - y \times 0, y \times 0 + x \ \times 0) = (0, 0)$$
Vu que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x, y) \times (0, 0) = (0, 0)$ on ne peut pas trouver (a, b) tel que $(0, 0) \times (a, b) = (1, 0)$ donc $(0, 0)$ n'est pas inversible pour $\times$

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$. On essaie de résoudre l'équation en z,t

$$(x, y) \times (z, t) = (1, 0)$$

$$(xz - ty, xt + yz) = (1, 0)$$

$$\begin{cases} xz - ty = 1 \\ xt + yz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2z + y^2z = x \\ t = -\frac{yz}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{x}{x^2+y^2} \\ t = -\frac{yz}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{x}{x^2+y^2} \\ t = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Donc (x, y) est inversible d'inverse

$$\boxed{(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2})}$$

6. $$(0, 1)^2 = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0)$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

7. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe λ et μ tels que

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

8. $$1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 \neq 0$$

donc les vecteurs ne sont pas colinéaires

9. $$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy$$

10. $Re(3 + 2i) = 3$; $Im(3 + 2i) = 2$;

$$(3 + 2i)^2 = (3 + 2i) \times (3 + 2i) = 9 + 12i - 4$$

11. $$(x + iy)^2 = (x + iy) \times (x + iy) = x \times (x + iy) + iy \times (x + iy) = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 + 2ixy - y^2$$

On obtient bien l'équation demandée

3 Conjugué

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe

$$\overline{z} = a - ib$$

1. $\overline{3 + i} = 3 - i$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$
   (a) On a $z = Re(z) = Re(z) + 0 \times i$ donc $\overline{z} = Re(z) - 0 \times i = Re(z) = z$
   (b) On a $\overline{z} = z$ donc $Re(z) + iIm(z) = Re(z) - iIm(z)$ donc $Im(z) = -Im(z)$ donc $Im(z) = 0$
3. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{Re(z) + iIm(z)}} = \overline{Re(z) - iIm(z)} = Re(z) + iIm(z) = z$

4.
$$\begin{aligned} z \times \overline{z} &= (Re(z) + iIm(z))(Re(z) - iIm(z)) \\ &= Re(z)^2 + iRe(z)Im(z) - iRe(z)Im(z) - i^2 Im(z) \\ &= Re(z)^2 + Im(z)^2 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \overline{Re(z) + iIm(z) + Re(z') + iIm(z')} \\ &= \overline{Re(z) + Re(z') + i(Im(z) + Im(z'))} \\ &= Re(z) + Re(z') - i(Im(z) + Im(z')) \\ &= Re(z) - iIm(z) + Re(z') - iIm(z') \\ &= \overline{z} + \overline{z'} \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} \overline{z \times z'} &= \overline{(Re(z) + iIm(z)) \times (Re(z') + iIm(z'))} \\ &= \overline{Re(z)Re(z') - Im(z)Im(z') + i(Re(z)Im(z') + Re(z')Im(z))} \\ &= Re(z)Re(z') - Im(z)Im(z') - i(Re(z)Im(z') + Re(z')Im(z)) \\ &= \overline{z} \times \overline{z'} \end{aligned}$$

7.
$$z \times \frac{1}{z} = 1$$

donc
$$\overline{z \times \frac{1}{z}} = 1$$
$$\overline{z} \times \overline{\frac{1}{z}} = 1$$
$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$$

($\overline{z} \neq 0$ car $z \neq 0$)

4 Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle module de z et on note

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

1.
$$|-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

2.
$$|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = z \times \overline{z}$$

(question 3.4)

3. Montrer l'équivalence
$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow Re(z)^2 + Im(z)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Re(z)^2 = 0 \\ Im(z)^2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = 0 \\ Im(z) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow z = 0$$

(on raisonnera par double équivalence en montrant $(z = 0) \Rightarrow (|z| = 0)$ puis $(|z| = 0) \Rightarrow (z = 0)$)

4. Soit z et z' deux nombres complexes. Montrer que
$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

5. Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que
$$|z^n| = |z|^n$$

6. Soit $z \neq 0$. Montrer que
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$
En déduire que si z et z' sont deux nombres complexes avec $z' \neq 0$, on a
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{z}{|z'|}$$

7. En vous inspirant d'une démonstration vue en cours, montrer que
$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

5 Retour sur les trinômes du second degré

1. Montrer que i est solution de l'équation
$$x^2 + 1 = 0$$
Calculer le discriminant du trinôme $x \mapsto x^2 + 1$. Que remarquez vous ?

2. Soit a réel avec $a < 0$. Montrer que
$$i\sqrt{-a}$$
est d'une part bien défini et d'autre part solution de
$$x^2 = a$$

3. R.O.C. Rappelez, sans le démontrer, la forme canonique d'un trinôme $f : ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) en fonction de ses coefficients et de son discriminant. Vous démontrerez ensuite le résultat sur les racines d'un trinôme lorsque $\Delta > 0$ et lorsque $\Delta = 0$

4. On s'intéresse au cas $\Delta < 0$. Montrer que, dans ce cas, le trinôme f admet 2 racines complexes x_1 et x_2 que l'on explicitera en fonction des coefficients. On montrera de plus que
$$\overline{x_1} = x_2$$

5. Trouver les racines (éventuellement complexes) du trinôme $f : x \mapsto 2x^2 - 6x + 13$

6 Racine carrée d'un nombre complexe

1. Soit $z_1 = a + ib$. On s'intéresse aux solutions de l'équation
$$z^2 = a + ib$$
. On note $z = x + iy$. En déduire un système de deux équations à deux inconnues, puis que pour tout nombre complexe z_1, l'équation $z^2 = a + ib$ a des solutions. On donnera notamment des relations entre x,y,a et b

2. Trouver une solution de l'équation
$$z^2 = 7 + 2i$$