Sujets : les matrices

Si au cours du sujet, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur énoncé, il l'indique sur sa copie et continue sa composition.

Il est demandé au candidat une clarté dans les raisonnements qu'il mettra en place.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Soit A un ensemble. On définit une loi sur cette ensemble comme une fonction qui à 2 éléments de A associe un élément de A (exemple : $+$ est une loi sur $\mathbb{R}$ car à a et b, elle associe $a+b \in \mathbb{R}$)

On considère une loi $\otimes$ sur un ensemble A.

- Soit $e \in A$. On dit que e est un neutre pour $\otimes$ si pour tout $x \in A$, on a

$$e \otimes x = x \otimes e = x$$

(par exemple 0 est un neutre pour la loi $+$ sur $\mathbb{R}$ car $a + 0 = 0 + a = a$ pour tout a réel)

- On dit que $\otimes$ est commutative sir pout tout x et y dans A, on a

$$x \otimes y = y \otimes x$$

(exemple, la loi $+$ est commutative car $a + b = b + a$ pour tout a et b réel)

- On suppose que $\otimes$ admet un élément neutre e. Soit $x \in A$. On dit que A est inversible pour $\otimes$ s'il existe y tel que

$$x \otimes y = y \otimes x = e$$

(exemple : si $a \in \mathbb{R}$, a est inversible pour la loi $+$ car $a + (-a) = 0$)

Si $\oplus$ et $\otimes$ sont deux lois sur $\mathbb{R}$ on dit que $\otimes$ est distributive sur $\oplus$ si pour tout $x, y, z \in A$, on a

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

⋆

On appelle matrice carrée de taille 2 la donnée de 4 coefficients $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. On note alors la matrice

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ représente la 1ère ligne et $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ la deuxième.
$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ représente la 1ère colonne et $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ la deuxième.
En fait a_{ij} est le coefficient de la i-ème ligne et j-ième colonne.

Si M est une matrice carrée de taille 2, on note $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ($\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels)

Soit M et M' dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$M' = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

Alors

$$M + M' = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$\lambda M = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$$

et

$$M \times M' = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

1.

$$\begin{array}{cc} & \times \quad \begin{vmatrix} \boxed{e} & f \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \boxed{a} & b \\ c & d \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ae & \\ & \end{vmatrix} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{cc} & \times \quad \begin{vmatrix} e & f \\ \boxed{g} & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & \boxed{b} \\ c & d \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ae \boxed{+} bg & \\ & \end{vmatrix} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{cc} & \times \quad \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} \end{array}$$

On admet aussi que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \\ b = f \\ c = g \\ d = h \end{cases}$$

On note

$$A \times A = A^2$$

pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1 Préliminaires

1. On note

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

   Calculer $A + B$
   Calculer ensuite $A \times B$ et $B \times A$. Que remarquez-vous ?

   On dit que le produit matriciel n'est pas commutatif

2. On note

$$O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Montrer que

$$M + O_2 = M$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lambda O_2 = O_2$$

4. Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Montrer que
$$M \times O_2 = O_2$$
$$O_2 \times M = O_2$$
O_2 est l'élément neutre pour l'addition matricielle

5. On note
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
Calculer $A \times B$

On notera que l'on peut avoir $M \times M' = O_2$ avec $M \neq O_2$ et $M' \neq O_2$

6. On note
$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Soit $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Montrer que
$$M \times I_2 = M$$
et
$$I_2 \times M = M$$
I_2 est l'élément neutre pour la multiplication matricielle

On admettra les résultats suivants : pour tout $A, B, C \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{A \times (B + C) = A \times B + A \times C}$$

$$\boxed{(A \times B) \times C = A \times (B \times C)}$$

$$\boxed{A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B)}$$

2 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

On dit que $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A \times B = B \times A = I_2$$

B est alors appelée inverse de A

1. Montrer que O_2 n'est pas inversible. *(Indication : on pourra utiliser le résultat de la question 1.4)*

2. Montrer que si
$$A \times B = B \times A = I_2$$
$$A \times C = C \times A = I_2$$
alors
$$B = C$$
(on parle d'unicité de l'inverse). Ainsi si A est inversible, on note A^{-1} l'unique matrice telle que
$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_2$$

3. Soient
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$
(a, b, c, d sont connues et x, y, z, t sont les inconnues)

Calculer
$$A \times X$$

4. On veut résoudre $A \times X = I_2$. Montrer que cette équation est équivalente au système
$$(S_1) : \begin{cases} ax + zb = 1 & (1) \\ ay + bt = 0 & (2) \\ cx + dz = 0 & (3) \\ cy + dt = 1 & (4) \end{cases}$$
Montrer alors que $a \times (4) - c \times (2)$ permet d'obtenir l'équation
$$(ad - bc)t = a$$
Montrer alors qu'en faisant $b \times (4) - d \times (2)$ puis $c \times (1) - a \times (3)$ et $d \times (1) - b \times (3)$, on obtient le système
$$(S_2) : \begin{cases} (ad - bc)t = a & (5) \\ (bc - ad)y = b & (6) \\ (bc - ad)z = c & (7) \\ (ad - bc)x = d & (8) \end{cases}$$
On suppose, pour l'instant, que $ad - bc \neq 0$. Montrer alors que A est inversible et exprimer A^{-1}

On suppose maintenant que $ad - bc = 0$. Déduire du système (S_2) que $AX = I_2$ implique $A = O_2$. En déduire que A n'est alors pas inversible.

Ainsi
$$\boxed{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ inversible} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0}$$
Pour $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on appelle déterminant de A et on note $\det(M)$ le nombre
$$\det(M) = ad - bc$$
$$\boxed{M \text{ inversible} \Leftrightarrow \det(M) \neq 0}$$

5. A l'aide de la question précédente, exprimer A^{-1} sous la forme
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} B$$
où $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ (on exprimera B)

6. On note
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}

3 Quelques propriétés du déterminant

1. Soit
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$
Après avoir calculé $A \times B$ et $B \times A$ montrer que
$$\det(A \times B) = \det(B \times A) = \det(A) \times \det(B)$$

2. En déduire que si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible alors
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$
(Indication : on pourra commencer par montrer que $\det(I_2) = 1$*)*

3. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A)$$

4. Soient $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible. On suppose
$$A = PBP^{-1}$$
Montrer alors que $\det(A) = \det(B)$

4 Trace d'une matrice

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on appelle trace de A et on note $Tr(A)$ le nombre
$$Tr(A) = a + d$$

1. Soit A et B dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$$
et
$$Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$$

2. Soit A et B dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que
$$Tr(AB) = Tr(BA)$$
(Indication : on pourra écrire les matrices avec les coefficients et développer comme des bourrins)

3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible. On suppose
$$A = PBP^{-1}$$
Montrer alors que $Tr(A) = Tr(B)$

5 Transposée d'une matrice

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On appelle transposée de A et on note ${}^tA$ la matrice

$$ {}^tA = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} $$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que
$$Tr({}^tA) = Tr(A)$$
2. Montrer que
$$\det({}^tA) = \det(A)$$
3. Soit $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que
$${}^t(A \times B) = {}^t B \times {}^t A$$
4. On suppose A inversible. Montrer alors que
$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$
(il faut montrer que la transposée de l'inverse, bah c'est l'inverse de la transposée)
5. Calculer ${}^tA \times A$ (en fonction des coefficients de A)

6 Représentation de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

On note alors

$$\text{Mat}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1. Exprimer ${}^t\text{Mat}(\vec{u}, \vec{v}) \times \text{Mat}(\vec{u}, \vec{v})$ en fonction de $||\vec{u}||$, $||\vec{v}||$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$
2. R.O.C. Après avoir rappeler la définition de colinéarité entre deux vecteurs, démontrer la condition de colinéarité en fonction des coefficients
3. Que dire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\text{Mat}(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas inversible

FIN DU SUJET

Les matrices se généralisent à des tailles n, voire même à des matrices à n lignes et p colonnes. De plus, la plupart des résultats prouvés ici se généralisent.