Cours 1ère S (maths)

Yoann Pietri

20 octobre 2019

Table des matières

Introduction

Les références à d'autres chapitres sont symbolisés par le symbole $\leftrightarrows$. Les références au programme officiel sont symbolisés par les symboles ► et ◄. Toutes les activités algorithmique de l'année sont classées par chapitre dans le chapitre "Algorithmique" (page 135).

Ceci étant dit, il est important de préciser que l'année de première S est une année charnière du point de vue des mathématiques : elle est censée inculquer au élève les notions de bases nécessaires à la production de raisonnement scientifiques indispensables pour la terminale S et pour le bac. Elle introduit de plus des notions qui seront continuées en terminale : il faut connaître son cours et l'avoir appréhender de manière à être prêt pour la classe de terminale. Le programme de première se sépare en trois grandes parties : Analyse (étude de fonctions, de suites), Géométrie (en particulier la géométrie dans le plan) et Statistiques et Probabilités. Les nouvelles notions abordées en première année sont la dérivation (qui sera largement approfondie en terminale), les suites (de même seront approfondies en terminale, notamment sur la notion de limite), le produit scalaire (qui sera généralisé à l'espace en terminale), et les variables aléatoires (encore une fois, très largement approfondi en terminale). Le fait que beaucoup de notions de la première soient reprises en terminale impose un chose : il faut avoir acquis le cours de première à la fin de l'année.

L'auteur (moi), tient à préciser que quelques notions hors programme sont abordées dans ce cours : dans le chapitre sur les variables aléatoires : la factorielle et la formule du binôme (attention : les coefficients binomiaux eux, sont bien au programme) et parfois dans l'annexe (notamment l'annexe sur les limites).

Bonne chance.

Première partie

Analyse

Chapitre 1

Fonctions du second degré

1.1 Définition

Définition 1.0.1 : Trinômes du second degré

On appelle fonction trinôme du second degré une fonction f de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b, c réels et $a \neq 0$

Remarques :

- Le domaine de définition d'une fonction trinôme est $\mathbb{R}$
- a, b, c sont appelés les coefficients du trinôme
- a est appelée terme ou coefficient dominant
- c est appelé terme constant

$\boxtimes$

Exemples :
Les fonctions

$$x \mapsto x^2$$
$$x \mapsto x^2 + x + 1$$
$$x \mapsto x^2 - 1$$
$$x \mapsto 2x^2 - 3x$$

sont des trinômes du second degré.

Les fonctions

$$x \mapsto x^3$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$
$$x \mapsto x + 1$$

ne sont pas des trinômes du second degré.

■

Théorème 1.0.2 : Unicité des coefficients

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et $g : x \mapsto a'x^2 + b'x + c'$ deux trinômes du second degré ($a \neq 0; a' \neq 0$). On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$. Alors

$$\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$$

Preuve :
On a

$$f(0) = g(0)$$

or $f(0) = c$ et $g(0) = c'$, donc

$$c = c'$$

De plus $f(1) = g(1)$ et $f(-1) = g(-1)$

$$f(1) = a + b + c$$

$$f(-1) = a - b + c$$

$$g(1) = a + b' + c$$

$$g(-1) = a - b' + c$$

Ainsi

$$\begin{cases} a + b + c = a' + b' + c' \\ a - b + c = a' - b' + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = a' + b' \\ a - b = a' - b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

□

1.2 Forme canonique

Théorème 2.0.1 : forme canonique d'un trinôme

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Alors f se met sous la forme

$$f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$$

où

$$\alpha = \frac{b}{2a}$$

et

$$\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Preuve :
Analyse
Si $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$ alors

$$f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$$

$$f(x) = a(x^2 + 2\alpha x + \alpha^2) + \beta$$

$$f(x) = ax^2 + 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta$$

or $f(x) = ax^2 + bx + c$
Ainsi, d'après le théorème d'unicité des coefficients,

$$\begin{cases} a = a \\ 2a\alpha = b \\ a\alpha^2 + \beta = c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a \\ \alpha = \frac{b}{2a} \\ \beta = c - a\frac{b^2}{4a^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a \\ \alpha = \frac{b}{2a} \\ \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

Synthèse
On calcule

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$ax^2 + bx + c = f(x)$$

□

Remarque :
Cette forme est appelée forme canonique de f

⊠

Définition 2.0.2 : discriminant d'un trinôme

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré. On appelle discriminant de f et on note Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Remarque :
La forme canonique s'écrit alors

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

⊠

Exemples :

1. Mettre le trinôme $f : x \mapsto x^2 - x - 1$ sous sa forme canonique.

   On calcule Δ :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$$
   Ainsi
   $$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

2. Mettre le trinôme $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ sous sa forme canonique.

   On calcule Δ :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$
   Ainsi
   $$f(x) = (x - 1)^2$$

3. Mettre le trinôme $f : x \mapsto 3x^2 - \sqrt{3}x + 4$ sous sa forme canonique.

   On calcule Δ :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 3 - 4 \times 3 \times 4 = -45$$
   Ainsi
   $$f(x) = 3\left(x - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{45}{12}$$

■

Définition 2.0.3 : Equation du second degré

On appelle équation du second degré une équation de la forme
$$ax^2 + bx + c = d$$
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$

Exemples :

1. $x^2 - 2x = 0$ est une équation du second degré. On peut la résoudre :
$$x^2 - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$
2. $4x^2 - 8x = -4$ est une équation du second degré. On peut la résoudre avec les identités remarquables.
$$4x^2 - 8x = -4$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x-2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

■

Remarque :
Toute équation du second degré se ramène à une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est un trinôme bien choisi : c'est l'intérêt du prochain paragraphe.

⊠

1.3 Racines d'un trinômes du second degré

Définition 3.0.1 : racines d'un trinôme

Soit f un trinôme du second degré. Les racines de f sont les solutions de l'équation
$$f(x) = 0$$

Théorème 3.0.2 : racines réelles un trinôme

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). On note Δ son discriminant.
1er cas : $\Delta > 0$
Alors f admet 2 racines réelles

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2ème cas : $\Delta = 0$
Alors f admet une racine réelle dite double

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3ème cas : $\Delta < 0$
Alors f n'admet pas de racines réelles.

Preuve :
On écrit f sous sa forme canonique :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Ainsi

$$f(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

1er cas : $\Delta > 0$
Alors $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'équation admet deux solutions. En notant $y = x + \frac{b}{2a}$

$$y^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2ème cas : $\Delta = 0$
L'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

admet une solution réelle qui est

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3ème cas : $\Delta < 0$
L'équation

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

n'admet pas de solution réelle car $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$

□

Méthode pour calculer les racines d'un trinôme

1. Calculer Δ
2. Différencier selon les cas
   (a) $\Delta > 0$: Dire qu'il y a deux racines réelles et les calculer
   (b) $\Delta = 0$: Dire qu'il y a une unique racine réelle double et la calculer
   (c) $\Delta < 0$: Dire qu'il n'y a pas de racine réelle

Exemples :

1. Calculer les racines de $x \mapsto x^2 - x - 1$
   On calcule Δ
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 = 5$$
   $\Delta > 0$ donc ce trinôme admet 2 racines réelles :
   $$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
   N.B. : $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or
2. Résoudre l'équation
   $$x^2 - x + 2 = 8$$
   $$x^2 - x + 2 = 8$$
   $$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$
   On cherche donc les racines du trinôme $x \mapsto x^2 - x - 6$
   On calcule Δ :
   $$\Delta = 1 - 4 \times (-6) = 25$$
   $\Delta > 0$ donc l'équation admet 2 solutions réelles
   $$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$
3. Trouver (s'il(s) existe(ent)) le (ou les) point(s) d'intersection entre la courbe représentative de $x^2 - 2x + 1$ et l'axe des abscisses.
   Il faut en fait résoudre l'équation
   $$x^2 - 2x + 1 = 0$$
   On calcule Δ :
   $$\Delta = 4 - 4 = 0$$
   $\Delta = 0$ donc il y a une unique racine réelle :
   $$x_0 = 1$$
   Il y a donc un unique point d'intersection qui est $(1, 0)$
4. Combien de points d'intersections ont les courbes représentatives de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -\sqrt{3}x - 1$.
   Il faut résoudre
   $$x^2 = -\sqrt{3}x - 1$$
   Il faut donc trouver les racines de $x \mapsto x^2 + \sqrt{3}x + 1$. On calcule le déterminant Δ :
   $$\Delta = 3 - 4 = -1$$
   $\Delta < 0$ donc cette équation n'admet pas de solutions réelles : il y a 0 points d'intersection.

■

Théorème 3.0.3 : relations coefficients-racines

Soit $f : ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
On suppose $\Delta > 0$ et note x_1 et x_2 les racines de f. Alors

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Preuve :
On suppose $\Delta > 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ainsi

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

De plus

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

□

Théorème 3.0.4 : forme factorisée

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré.
1er cas : $\Delta > 0$:
Alors

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

2ème cas : $\Delta = 0$:
Alors

$$f(x) = a(x-x_0)^2$$

3ème cas : $\Delta < 0$:
Pas de forme factorisée pour f

Preuve :

1er cas : $\Delta > 0$:

$$a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2)$$

$$a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$$

On utilise alors les relations coefficients-racines :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - a\frac{-b}{a}x + a\frac{c}{a}$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c = f(x)$$

2ème cas : $\Delta = 0$:

$$a(x - x_0)^2 = ax^2 - 2ax_0x + ax_0^2$$

$$a(x - x_0)^2 = ax^2 - 2a\frac{-b}{2a} + a\frac{b^2}{4a^2}$$

$$a(x - x_0)^2 = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$$

or $\Delta = 0$ donc $b^2 = 4ac$ donc $\frac{b^2}{4a} = c$ d'où

$$a(x - x_0)^2 = ax^2 + bx + c = f(x)$$

□

Exemples :

1. Ecrire le trinôme $f : x \mapsto 2x^2 - 4x - 30$ sous forme factorisée. On calcule Δ :

$$\Delta = 16 + 260 = 256$$

$$\sqrt{\Delta} = 16$$

   $\Delta > 0$ donc f admet 2 racines réelles qui sont

$$x_1 = \frac{4 - 16}{4} = -3 \text{ et } x_2 = \frac{4 + 16}{4} = 5$$

   On déduit

$$f(x) = 2(x + 3)(x - 5)$$

2. Mettre le trinôme $f : x^2 + 2x + 1$ sous sa forme canonique. On calcule Δ :

$$\Delta = 4 - 4 = 0$$

   $\Delta = 0$ donc f admet une racine qui est

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -1$$

   Ainsi

$$f(x) = (x + 1)^2$$

■

Tableau récapitulatif des formes :

Forme développée	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Forme canonique	$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\Delta}{4a}$
Forme factorisée	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$ ou $f(x) = a(x - x_0)^2$ si $\Delta = 0$

1.4 Signe du trinôme

On souhaite établir le tableau de signe d'une fonction trinôme.

Proposition 4.0.1 : signe du trinôme

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).
1er cas : $\Delta > 0$:
On suppose $x_1 < x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f		$signe(a)$	0	$-signe(a)$	0	$signe(a)$	

FIGURE 1.1 : Tableau de signe pour $\Delta > 0$

2ème cas : $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f		$signe(a)$	0	$signe(a)$	

FIGURE 1.2 : Tableau de signe pour $\Delta = 0$

3ème cas : $\Delta < 0$:

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$signe(a)$	

FIGURE 1.3 : Tableau de signe pour $\Delta < 0$

Remarques :

- $signe(a)$ est $+$ si $a > 0$ et $signe(a)$ est $-$ si $a < 0$
- Attention : pour $\Delta = 0$, il n'a pas de changement de signe

⊠

Preuve :

<u>1er cas : $\Delta > 0$:</u>
On écrit f sous sa forme factorisée :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Pour $x < x_1 < x_2$:

$$x - x_1 < 0$$
$$x - x_2 < 0$$

donc $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ donc f est du signe de a.

Pour $x_1 < x < x_2$:

$$x - x_1 > 0$$
$$x - x_2 < 0$$

donc $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ donc f est du signe de $-a$.

Pour $x_1 < x_2 < x$:

$$x - x_1 > 0$$
$$x - x_2 > 0$$

donc $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ donc f est du signe de a.

<u>2ème cas : $\Delta = 0$:</u>
On écrit f sous sa forme factorisée

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

On a $(x - x_0)^2 \geq 0$ pour tout x donc f est du signe de a.

<u>3ème cas : $\Delta < 0$:</u>
f ne change pas de signe : le signe est constant car il ne passe jamais par 0.
Or $f(0) = c \neq 0$ donc f est du signe de c.

Montrons que a et c ont le même signe : on a

$$\Delta < 0$$
$$b^2 - 4ac < 0$$
$$b^2 < 4ac$$

or $b^2 \geq 0$ donc $4ac > 0$. On déduit que a et c ont le même signe.

□

<u>Exemples :</u>

1. Etablir le tableau de signe de $f : x \mapsto 3x^2 - 3x - 6$

   On calcule Δ :

   $$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 72 = 81$$

   $\Delta > 0$ donc ce trinôme admet deux racines réelles qui sont

   $$x_1 = \frac{3 - \sqrt{81}}{6} = -1$$

   $$x_1 = \frac{3 + \sqrt{81}}{6} = 2$$

On déduit

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f		$+$	0	$-$	0	$+$	

FIGURE 1.4 : Tableau de signe de $f : x \mapsto 3x^2 - 3x - 6$

2. Etablir le tableau de signe de $g : x \mapsto -2x^2 + 12x - 18$

   On calcule Δ :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 144 = 0$$
   $\Delta = 0$ donc ce trinôme admet une unique racine réelle double qui est
   $$x_0 = \frac{-12}{-4} = 3$$
   On déduit

x	$-\infty$		3		$+\infty$
g		$-$	0	$-$	

FIGURE 1.5 : Tableau de signe de la fonction $g : x \mapsto -2x^2 + 12x - 18$

3. Etablir le tableau de signe de $h : x \mapsto x^2 + x + 1$

   On calcule Δ :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$$
   $\Delta < 0$ donc ce trinôme n'admet aucune racines réelles. On déduit

x	$-\infty$		$+\infty$
h		$+$	

FIGURE 1.6 : Tableau de signe de la fonction $h : x \mapsto h : x^2 + x + 1$

■

Chapitre 2

Fonctions de références

2.1 Rappels

Définition 1.0.1 : fonction croissante, décroissante

Soit f une fonction et $I \subset \mathscr{D}_f$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que f est croissante sur I si pour tout x, y dans I

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

On dit que f est décroissante sur I si pour tout x, y dans I

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Exemple :
Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante
Soient f et g deux fonctions croissantes.
Soit $x \leq y$. On a

$$f(x) \leq f(y)$$
$$g(x) \leq g(y)$$

donc

$$f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$$

On déduit $f + g$ croissante.

■

Définition 1.0.2 : fonction strictement croissante, strictement décroissante

Soit f une fonction et $I \subset \mathscr{D}_f$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que f est strictement croissante sur I si pour tout x, y dans I

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

On dit que f est strictement décroissante sur I si pour tout x, y dans I

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Définition 1.0.3 : fonction monotone

Soit f une fonction et $I \subset \mathscr{D}_f$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est monotone sur I si son sens de variation ne change pas sur I

Définition 1.0.4 : fonction constante

Soit f une fonction et $I \subset \mathscr{D}_f$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec I non vide et $c \in I$. On dit que f est constante sur I si pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(c)$$

2.2 Fonctions affines

2.2.1 Définition

Définition 2.1.1 : fonction affine

On appelle fonction affine toute fonction de la forme

$$f(x) = ax + b$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$. a est appelé coefficient directeur de f.

Le domaine de définition d'une fonction affine est $\mathbb{R}$.
Remarques :

- Si $a = 0$, la fonction $x \mapsto f(x) = b$ est dite constante.
- Si $b = 0$, la fonction $x \mapsto ax$ est dite linéaire.

$\boxtimes$

2.2.2 Tableau de signe

On s'intéresse aux solutions de l'équation

$$f(x) = 0$$

Si $a \neq 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{a}$
Si $a = 0$, $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
Ainsi si $a = 0$, f est de signe constant : celui de b.
Si $a > 0$,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

Si $a < 0$,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

Ainsi le tableau de signe d'une fonction affine est, selon les cas :
1er cas : $a = 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
b	$signe(b)$

FIGURE 2.1 : Tableau de signe d'une fonction affine dans les $a = 0$

2ème cas : $a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	

FIGURE 2.2 : Tableau de signe d'une fonction affine dans le cas $a > 0$

3ème cas : $a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	0	$-$	

FIGURE 2.3 : Tableau de signe d'une fonction affine dans le cas $a < 0$

2.2.3 Tableau de variation

Proposition 2.3.1 : variation d'une fonction affine

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine :
1er cas : $a = 0$
Alors f est constante

2ème cas : $a > 0$
Alors f est strictement croissante

3ème cas : $a < 0$
Alors f est strictement décroissante

Preuve :
1er cas : $a = 0$
Il n'y a rien à prouver

2ème cas : $a > 0$
Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$.

$$x \leq y$$

$$ax \leq ay \quad (a > 0)$$

$$ax + b \leq ay + b$$

$$f(x) \leq f(y)$$

f est croissante

<u>3ème cas : $a < 0$</u>
Soit $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \leq y$.

$$\begin{gathered} x \leq y \\ ax \geq ay \quad (a < 0) \\ ax + b \geq ay + b \\ f(x) \geq f(y) \end{gathered}$$

f est décroissante

$\square$

On établit donc, selon les cas, le tableau de variation d'une fonction affine.
<u>1er cas : $a = 0$</u>

x	$-\infty$		$+\infty$
b	b	$\longrightarrow$	b

FIGURE 2.4 : Tableau de variation d'une fonction affine dans les cas $a = 0$

<u>2ème cas : $a > 0$</u>

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$	$\nearrow$	

FIGURE 2.5 : Tableau de variation d'une fonction affine dans le cas $a > 0$

<u>3ème cas : $a < 0$</u>

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax + b$	$\searrow$	

FIGURE 2.6 : Tableau de variation d'une fonction affine dans le cas $a < 0$

2.2.4 Courbe représentative

Proposition 2.4.1

La courbe représentative d'une fonction affine est une droite

Méthode pour tracer la courbe représentative d'un fonction affine $x \mapsto ax + b$

1. Placer le point $(b, 0)$ (NB si celui ne peut être placé, mettez en un autre)
2. Placer un autre point $((1, a + b)$ par exemple)
3. Relier les 2 points par une droite

Exemple :
On note $f : x \mapsto 3x + 2$.
Donner le tableau de signe et de variation de f puis tracer sa courbe représentative.

D'après ce qui précède :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	
$ax + b$			$\nearrow$		

FIGURE 2.7 : Tableau de signe et de variation de $f : 3x + 2$

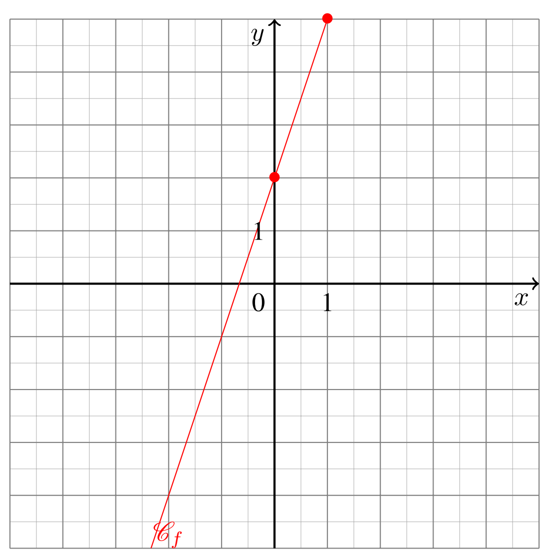


FIGURE 2.8 : Courbe représentative de $x \mapsto 3x + 2$

■

Méthode pour identifier les coefficients d'une fonction affine à partir de sa courbe représentative

1. b est l'ordonnée à l'origine
2. On calcule a à l'aide d'un autre point :
$$a = \frac{f(\alpha) - b}{\alpha - b}$$
avec $\alpha \neq b$

Exemple :
Trouver a et b tel que $\mathscr{C}_f$ soit la courbe représentative de $x \mapsto ax + b$

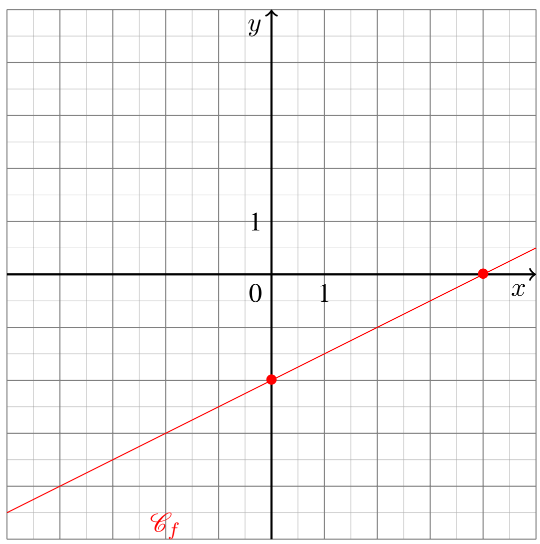


FIGURE 2.9 : Courbe représentative d'une certaine fonction affine

On sait directement (ordonnée à l'origine) que $b = -2$. De plus, on sait que $f(4) = 0$ donc $4 = -\frac{b}{a}$ d'où $a = \frac{1}{2}$.

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x - 2$$

■

2.3 Fonction carré

2.3.1 Définition

Définition 3.1.1 : fonction carrée

On appelle la fonction carrée la fonction qui à x associe x^2

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$

Remarque :
La fonction carrée est une fonction trinôme avec $a = 1$ et $b = c = 0$

☒

2.3.2 Tableau de signe

D'après le chapitre précédent

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

FIGURE 2.10 : Tableau de signe de la fonction carrée

2.3.3 Tableau de variation

Proposition 3.3.1 : variation de la fonction carrée

La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$

Preuve :
Sur $]-\infty, 0]$

Soit $0 \geq x \geq y$
On a $x - y \leq 0$ et $x = y + x - y$. On pose $\beta = x - y$.

$$x^2 = (y + \beta)^2 = y^2 + 2y\beta + \beta^2$$

Ainsi $x^2 \leq y^2$ et $x \mapsto x^2$ décroissante

Sur $[0, +\infty[$

Soit $0 \leq x \leq y$ On a $y - x \leq 0$ et $y = x + y - x$. On pose $\alpha = y - x$.

$$y^2 = (x + \alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$$

Ainsi $y^2 \leq x^2$ et $x \mapsto x^2$ croissante

□

On déduit alors le tableau de variation de la fonction carrée :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

FIGURE 2.11 : Tableau de variation de la fonction carée

2.3.4 Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ est

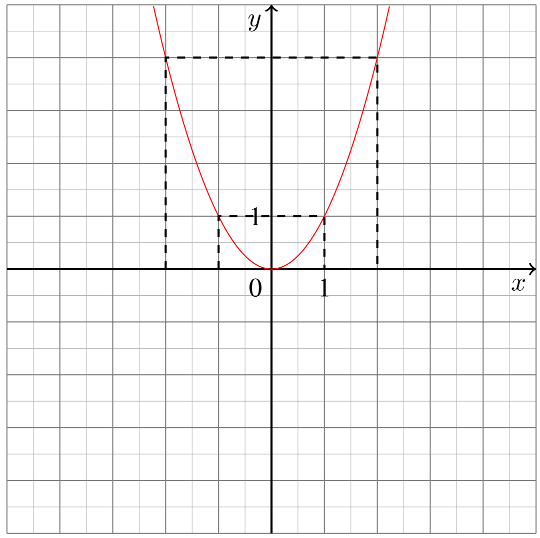


FIGURE 2.12 : Courbe représentative de $x \mapsto x^2$

2.4 Fonction inverse

2.4.1 Définition

Définition 4.1.1 : fonction inverse

On appelle la fonction inverse la fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$

Elle est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

2.4.2 Tableau de signe

Si $x < 0$ alors $\frac{1}{x} < 0$

Si $x > 0$ alors $\frac{1}{x} > 0$

Ainsi,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$-$	||	$+$

FIGURE 2.13 : Tableau de signe de la fonction inverse

La fonction inverse ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.
Remarque :
On rappelle que la double barre signifie que la fonction n'y est pas définie.

$\boxtimes$

2.4.3 Tableau de variation

Proposition 4.3.1 : variation de la fonction inverse

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et décroissante sur $]0, +\infty[$

Preuve :
Soit $0 < x \leq y$
On évalue le rapport

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}} = \frac{y}{x} \geq 1 \quad (y \geq x \Rightarrow \frac{y}{x} \geq 1)$$

Ainsi

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$

Soit $y \leq x < 0$
On évalue le rapport

$$\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{y} \leq 1$$

Ainsi

$$\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}} \leq 1$$

donc

$$\frac{1}{y} \geq \frac{1}{x} \quad (\frac{1}{x} < 0)$$

De même, $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$

□

On déduit le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		↘	‖	↘	

FIGURE 2.14 : Tableau de variation de la fonction inverse

2.4.4 Courbe représentative

La courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la suivante

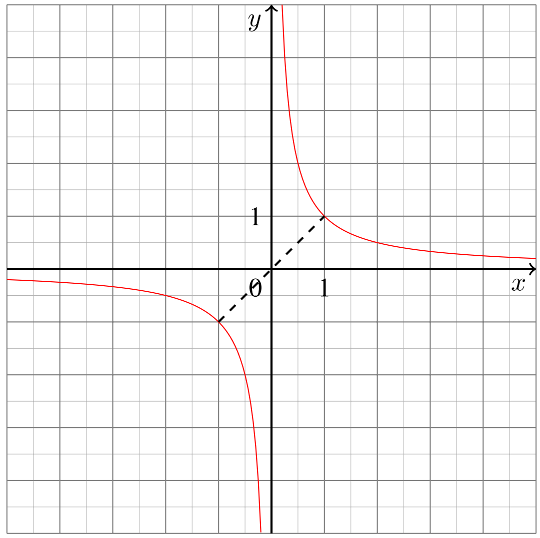


FIGURE 2.15 : Courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

2.5 Fonction racine carré

2.5.1 Définition

Définition 5.1.1 : fonction racine carrée

On appelle fonction racine carrée la fonction qui à un nombre positif x associe l'unique nombre positif y tel que $y^2 = x$.

Cette fonction est définie sur $[0, +\infty[$

La racine carrée est notée $\sqrt{\cdot}$: la fonction est $x \mapsto \sqrt{x}$

2.5.2 Tableau de signe

Soit $x \geq 0$. Par définition, $\sqrt{x} \geq 0$. Le tableau de signe de $x \mapsto \sqrt{x}$ est :

x	0 $+\infty$
$\sqrt{x}$	$+$

FIGURE 2.16 : Tableau de signe de la fonction racine carrée

2.5.3 Tableau de variation

Proposition 5.3.1 : variation de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée est croissante sur $[0, +\infty[$

Preuve :
Soit $0 \leq x \leq y$

On suppose par l'absurde que $x \mapsto \sqrt{x}$ est décroissante :

$$\sqrt{x} > \sqrt{y}$$

or la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0, +\infty[$ donc

$$\sqrt{x}^2 > \sqrt{y}^2$$

$$x > y$$

Contradiction. On déduit que $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$

$\square$

On déduit le tableau de variation de $x \mapsto \sqrt{x}$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	$\nearrow$

FIGURE 2.17 : Tableau de variation de la fonction racine carrée

2.5.4 Courbe représentative

La courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$ est

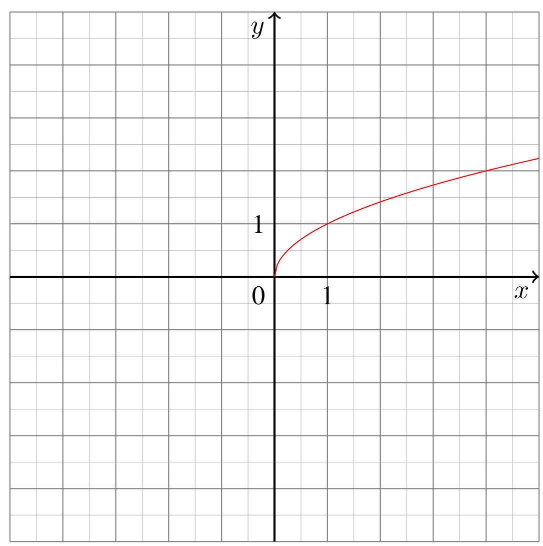


FIGURE 2.18 : Courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$

2.6 Fonction valeur absolue

2.6.1 Définition

Définition 6.1.1 : fonction valeur absolue

On appelle fonction valeur absolue et on note $x \mapsto |x|$ la fonction qui

- qui à x associe x si $x \geq 0$
- qui à x associe $-x$ si $x \leq 0$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$

Exemples :

- $|3| = 3$
- $|-5| = 5$
- $|0| = 0$
- $|-3| = 3$

■

2.6.2 Tableau de signe

Si $x \geq 0$, $|x| = x \geq 0$
Si $x \leq 0$, $|x| = -x \geq 0$

Ainsi

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$+$	0	$+$	

FIGURE 2.19 : Tableau de signe de la fonction valeur absolue

2.6.3 Tableau de variation

Proposition 6.3.1 : variation de la fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, \infty[$

Preuve :
Sur $]-\infty, 0]$

Soit $y \leq x \leq 0$

$$|y| = -y$$
$$|x| = -x$$

or

$$y \leq x$$

donc

$$-y \geq -x$$

$$|y| \geq |x|$$

$x \mapsto |x|$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$

Sur $]-\infty, 0]$

Soit $0 \leq x \leq y$

On a

$$|x| = x$$

$$|y| = y$$

or

$$x \leq y$$

donc

$$|x| \leq |y|$$

$x \mapsto |x|$ est croissante sur $[0, +\infty[$

$\square$

2.6.4 Courbe représentative

La courbe représentative de $x \mapsto |x|$ est

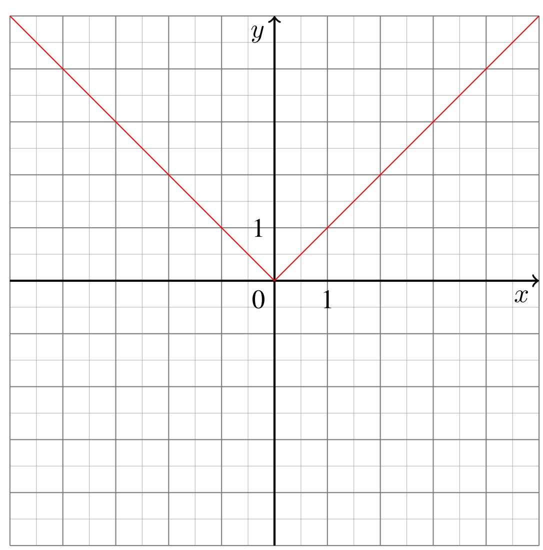


FIGURE 2.20 : Courbe représentative de $x \mapsto |x|$

Remarques :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}^2$ est définie sur $[0, +\infty[$ et vaut $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x}^2 = x$
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et vaut $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$

$\boxtimes$

2.6.5 Propriétés de la valeur absolue

Propriété 6.5.1

Soient x et y dans $\mathbb{R}$, on a

$$|xy| = |x||y|$$

Preuve :

$x \geq 0; y \geq 0$	$x \leq 0; y \geq 0$	$x \geq 0; y \leq 0$	$x \leq 0; y \leq 0$
Alors $$\|x\| = x$$ $$\|y\| = y$$ De plus $$xy \geq 0$$ donc $$\|xy\| = xy$$ OK	Alors $$\|x\| = -x$$ $$\|y\| = y$$ De plus $$xy \leq 0$$ donc $$\|xy\| = -xy$$ OK	Alors $$\|x\| = x$$ $$\|y\| = -y$$ De plus $$xy \leq 0$$ donc $$\|xy\| = -xy$$ OK	Alors $$\|x\| = -x$$ $$\|y\| = -y$$ De plus $$xy \geq 0$$ donc $$\|xy\| = xy$$ OK

□

Lemme 6.5.2

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|x|^2 = x^2$$

Preuve :

$$|x|^2 = |x||x| = |x \times x| = |x^2|$$

or $x^2 \geq 0$ donc

$$|x^2| = x^2$$
$$|x|^2 = x^2$$

□

Lemme 6.5.3

Soit $x \in \mathbb{R}$, on

$$x \leq |x|$$

Preuve :
Si $x \geq 0$, $|x| = x$ donc $x \leq |x|$
Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$; or $x \leq 0$ et $-x \geq 0$ donc $x \leq |x|$

□

Propriété 6.5.4 : inégalité triangulaire

Soient x et y dans $\mathbb{R}$, on a
$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Preuve :

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2$$
$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

or

$$x \leq |x|$$
$$y \leq |y|$$

donc $|x+y|^2 \geq (|x| + |y|)^2$ donc $|x+y| \geq |x| + |y|$

□

2.7 Position relative de $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

On étudie les positions relatives sur l'intervalle $[0, +\infty[$. On remarque
$$1^2 = \sqrt{1} = 1$$

2.7.1 Etude de $x \mapsto x^2 - x$

C'est une fonction trinôme avec $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ et donc $\Delta = 1$. $\Delta > 0$ donc ce trinôme admet deux racines :
$$x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 1$$

Le tableau de signe de ce trinôme est donc

x	0		1		$+\infty$
f	0	$-$	0	$+$	

FIGURE 2.21 : Tableau de signe de $f : x^2 - x$

Sur $[0, 1[$, $x > x^2$
Sur $]1, +\infty[$, $x^2 > x$

La courbe représentative de $x \mapsto x$ est au dessus de celle de $x \mapsto x^2$ sur $[0, 1]$. La courbe représentative de $x \mapsto x^2$ est au dessus de celle de $x \mapsto x$ sur $[1, +\infty[$.

2.7.2 Etude de $x \mapsto x^2 - \sqrt{x}$

Sur $[0, 1[$,
$$x > x^2$$
donc
$$\sqrt{x} > x$$

Sur $]1, +\infty[$,

$$x < x^2$$

donc

$$\sqrt{x} < x$$

La courbe représentative de $x \mapsto \sqrt{x}$ est au dessus de celle de $x \mapsto x$ sur $[0, 1]$. La courbe représentative de $x \mapsto x$ est au dessus de celle de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[1, +\infty[$.

2.7.3 Conclusion

On a représenté la courbe représentative de $x \mapsto x$ (rouge), de $x \mapsto x^2$ (bleu) et $x \mapsto \sqrt{x}$ (vert)

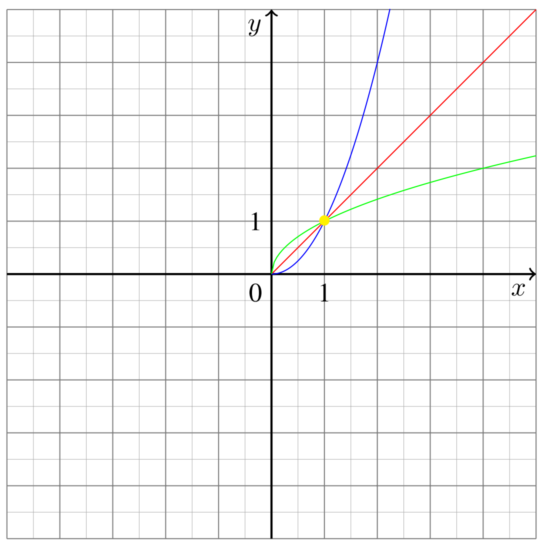


FIGURE 2.22 : Courbes représentatives de $x \mapsto x$ (rouge), $x \mapsto x^2$ (bleu) et $x \mapsto \sqrt{x}$ (vert)

2.8 Etude du sens de variation grâce aux fonctions de références

Le but de cette partie est de déterminer le sens de variation des fonctions $f + k$, λf, $\sqrt{f}$, et $\frac{1}{f}$ où f est une fonction connue.

2.8.1 $f + k$

Proposition 8.1.1

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$, I un intervalle de $\mathscr{D}_f$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto f(x) + k$ a le même sens de variation sur I que f sur I

Preuve :
Soit $x \leq y$

1er cas : f est croissante

$$x \leq y$$
$$f(x) \leq f(y)$$

$$f(x)+k \leq f(y)+k$$

donc $x \mapsto f(x)+k$ est croissante

<u>2eme cas : f est décroissante</u>

$$x \leq y$$
$$f(x) \geq f(y)$$
$$f(x)+k \geq f(y)+k$$

donc $x \mapsto f(x)+k$ est décroissante

□

Exemples :
Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{x}-3$ sur $[0,+\infty[$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x}+4$ sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

1. $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}-3$ est croissante sur $[0,+\infty[$
2. $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}+4$ est croissante sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

■

2.8.2 λf

Proposition 8.2.1

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$, I un intervalle de $\mathscr{D}_f$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- Si $\lambda > 0$, le sens de variation de $x \mapsto \lambda f(x)$ a le même sens de variation sur I que $x \mapsto f(x)$ sur I
- Si $\lambda < 0$, le sens de variation de $x \mapsto \lambda f(x)$ a le sens de variation sur I opposé à celui de $x \mapsto f(x)$ sur I
- Si $\lambda = 0$, $x \mapsto \lambda f(x)$ est constante

Preuve :
Soit $x \leq y$

$\lambda > 0; f \nearrow$	$\lambda > 0; f \searrow$	$\lambda < 0; f \nearrow$	$\lambda < 0; f \searrow$
$x \leq y$ $f(x) \leq f(y)$ $\lambda f(x) \leq \lambda f(y)$ $x \mapsto \lambda f(x)$ est croissante	$x \leq y$ $f(x) \geq f(y)$ $\lambda f(x) \geq \lambda f(y)$ $x \mapsto \lambda f(x)$ est décroissante	$x \leq y$ $f(x) \leq f(y)$ $\lambda f(x) \geq \lambda f(y)$ $x \mapsto \lambda f(x)$ est décroissante	$x \leq y$ $f(x) \geq f(y)$ $\lambda f(x) \leq \lambda f(y)$ $x \mapsto \lambda f(x)$ est croissante

□

Exemple :

Déterminer le sens de variation de $x \mapsto -\frac{2}{x}$ sur $]0,+\infty[$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et $-2 < 0$ donc $x \mapsto -\frac{2}{x}$ est croissante sur $]0,+\infty[$

■

2.8.3 $\sqrt{f}$

Proposition 8.3.1

Soit f une fonction, de domaine de définition $\mathscr{D}_f$, et I un intervalle de $\mathscr{D}_f$. On suppose f positive sur I. Alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est du même sens de variation sur I que f sur I

Preuve :
Soit $x \leq y$

1er cas : f est croissante

$$\begin{aligned} & x \leq y \\ \Rightarrow\ & f(x) \leq f(y) \\ \Rightarrow\ & \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{f(y)} \end{aligned}$$

$x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est croissante

2ème cas : f est décroissante

$$\begin{aligned} & x \leq y \\ \Rightarrow\ & f(x) \geq f(y) \\ \Rightarrow\ & \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{f(y)} \end{aligned}$$

$x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est décroissante

□

Exemple :
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-2x+4}$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f
2. Donner le sens de variation de f

1.
$$\begin{aligned} & -2x+4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2x \geq -4 \\ \Leftrightarrow\ & x \leq 2 \end{aligned}$$

   Ainsi
$$\mathscr{D}_f =]-\infty, 2]$$

2. $x \mapsto -2x+4$ est décroissante sur $]-\infty,2]$ donc f est décroissante sur $]-\infty,2]$

■

2.8.4 $\frac{1}{f}$

Proposition 8.4.1

Soit f une fonction, de domaine de définition $\mathscr{D}_f$, et I un intervalle de $\mathscr{D}_f$. On suppose f ne s'annule pas sur I. Alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est du sens de variation sur I opposé à celui de f sur I

Preuve :
Soit $x \leq y$

1er cas : f est croissante

$$\begin{aligned} & x \leq y \\ \Rightarrow\ & f(x) \leq f(y) \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{f(y)} \end{aligned}$$

$x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est décroissante

2ème cas : f est décroissante

$$\begin{aligned} & x \leq y \\ \Rightarrow\ & f(x) \geq f(y) \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{f(y)} \end{aligned}$$

$x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est croissante

□

Exemple :
Donner le sens de variation de

$$x \mapsto \frac{-3}{\sqrt{x^2+3}}$$

$x \mapsto x^2$ est croissante donc $x \mapsto x^2 + 3$ est croissante donc $x \mapsto \sqrt{x^2+3}$ est croissante donc $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$ est décroissante donc $x \mapsto \frac{-3}{\sqrt{x^2+3}}$ est croissante.

■

Attention : il n'a pas de théorème général concernant le sens de variation d'une somme ou d'un produit quelconque

Exemple :
Soit

$$f : x \mapsto 2x + 4$$
$$g : x \mapsto -3x - 5$$

f est croissante et g est décroissante. De plus

$$f + g : x \mapsto -x - 1$$

est décroissante

Mais

$$f : x \mapsto 3x + 2$$

$$g : x \mapsto -x - 3$$

f est croissante et g est décroissante. De plus

$$f + g : x \mapsto 2x - 1$$

est croissante

■

Chapitre 3

Dérivation

Il est préférable d'avoir lu le cours sur les suites pour appréhender la notion de limite

3.1 Général

3.1.1 Définition

Définition 1.1.1 : nombre dérivé en un point

Soit f une fonction et $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition.

Soit $a \in \mathscr{D}_f$. On dit que f est dérivable en a si

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

admet une limite lorsque $h \to 0$

Dans ce cas, le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$ est

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Exemple :
Soit $f : x \mapsto x^2$. Calculer $f'(2)$:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \frac{2^2+4h+h^2-2^2}{h} = 4+h$$

Ainsi

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} 4+h = 4+0 = 4$$

■

3.1.2 Notion géométrique

Le nombre dérivée f en a est le coefficient directeur de la tangente à f en a :

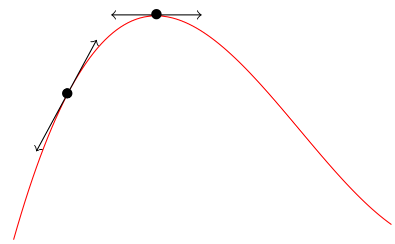


FIGURE 3.1 : Une courbe et 2 deux de ses tangentes

Remarque :
La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 :

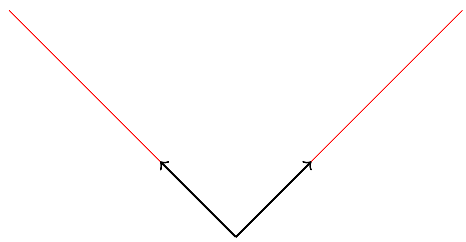


FIGURE 3.2 : La courbe représentative de la valeur absolu n'a pas de tangente en 0

⊠

Proposition 1.2.1 : Equation de la tangente

Soit f une fonction $a \in \mathscr{D}_f$. On suppose f dérivable en a. Alors l'équation de la tangente de f en a est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Méthode pour déterminer l'équation d'une tangente

1. Montrer que f est dérivable en a
2. Calculer $f'(a)$
3. Calculer $f(a)$
4. L'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exemple :
Déterminer l'équation de la tangente de la fonction carrée en $x = 2$

On note $f : x \mapsto x^2$. On sait que $f'(2) = 4$ d'après l'exemple précédent. De plus $f(2) = 2^2 = 4$ donc l'équation de la tangente est

$$y = 4(x-2) + 4$$

■

3.1.3 Fonction dérivée

Définition 1.3.1 : fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée

Soit f une fonction et I un intervalle avec $I \subset \mathscr{D}_f$

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I

Si c'est le cas, on définit la fonction f' sur I appelé fonction de dérivée de f sur I telle que

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Exemple :
Calcul de la dérivée de $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

Ainsi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

La fonction dérivée de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto 2x$

■

3.2 Dérivée des fonctions

3.2.1 Dérivée des fonctions usuelles

f	f'	$\mathscr{D}_f$	$\mathscr{D}_{f'}$
$f(x) = \lambda$ $\lambda \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$

3.2.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 2.2.1 : dérivée d'une somme

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions dérivables sur I. Soit $h = f + g$. Alors h est dérivable sur I et

$$h' = f' + g'$$

Preuve :
Pour tout $x \in I$,

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(x+p) - h(x)}{p}$$
$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+p) + g(x+p) - f(x) - g(x)}{p}$$
$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+p) - f(x)}{p} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+p) - g(x)}{p}$$
$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Ainsi $h' = f' + g'$

□

Exemple :
Soit f la fonction sur $]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto x^3 + \dfrac{1}{x}$

La dérivée de $x \mapsto x^3$ est $x \mapsto 3x^2$
La dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$

Ainsi la dérivée de f sur $]0, +\infty[$ est

$$f' : x \mapsto 3x^2 - \frac{1}{x^2}$$

■

Proposition 2.2.2 : dérivée d'un produit

Soit I un intervalle. On suppose f et g dérivable sur I. Alors $h = f \times g$ est dérivable sur I et

$$h' = f'g + fg'$$

Preuve :
Pour tout $x \in I$,

$$h'(x) = \lim_{p \to 0} \frac{h(x+p) - h(x)}{p} = \lim_{p \to 0} \frac{f(x+p)g(x+p) - f(x)g(x)}{p}$$

or

$$[f'g + fg'](x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \lim_{p \to 0} \frac{g(x)f(x+p) - 2g(x)f(x) + f(x)g(x+p)}{p}$$

Il suffit donc de prouver que

$$\lim_{p \to 0} \frac{g(x)f(x+p) - 2g(x)f(x) + f(x)g(x+p)}{p} = \lim_{p \to 0} \frac{f(x+p)g(x+p) - f(x)g(x)}{p}$$

soit

$$\lim_{p \to 0} \frac{g(x)f(x+p) + f(x)g(x+p) - f(x+p)g(x+p) - f(x)g(x)}{p} = 0$$

ce qui est vrai

□

Exemple :
Calculer la dérivée de $f : x \mapsto x\sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$

$g : x \mapsto x$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivable sur $]0, +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

$$f'(x) = \sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

■

Corollaire 2.2.3 : dérivée de λf

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $g = \lambda f$ est dérivable sur I et

$$g' = \lambda f'$$

Preuve :
On note $h : x \mapsto \lambda$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = h(x)f(x)$. Ainsi g est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = h'(x)f(x) + h(x)f'(x)$$

$$g'(x) = 0 + \lambda f'(x)$$

$$g' = \lambda f$$

□

Proposition 2.2.4 : dérivée d'un quotient

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I et g une fonction dérivable sur I ne s'annulant pas sur I. Alors $h = \dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$h' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Exemple :
Dériver la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$

- $x \mapsto x^4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto 4x^3$
- $x \mapsto \sqrt{x}$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Ainsi f est dérivable comme quotient d'une fonction dérivable et d'une fonction dérivable ne s'annulant pas. De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{4x^3\sqrt{x} - x^4\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = 4x^2\sqrt{x} - \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$$

$\blacksquare$

Corollaire 2.2.5 : dérivée de $\frac{1}{f}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f dérivable sur I ne s'annulant pas sur I. Alors $g = \frac{1}{f}$ est dérivable sur I et

$$g' = -\frac{f'}{f^2}$$

Preuve :
$g = \frac{h}{f}$ où $f : x \mapsto 1$. f est dérivable sur I, de dérivée nulle donc

$$g' = \frac{h'f - hf'}{f^2} = \frac{0 - f'}{f^2} = -\frac{f'}{f^2}$$

$\square$

Exemple :
La dérivée de $f : x\frac{1}{2\sqrt{x}}$ vérifie pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$\blacksquare$

3.3 Lien entre dérivée et variations

3.3.1 Lien entre signe de la dérivée et variation

Théorème 3.1.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur I.

- Si $f' > 0$ sur I alors f est croissante (strictement)
- Si $f' < 0$ sur I alors f est décroissante (strictement)
- Si $f' = 0$ sur I alors f est constante sur I

Exemple :
La fonction $x \mapsto x^4$ est croissante sur $[0, +\infty[$ car sa dérivée ($x \mapsto 4x^3$) est positive sur $[0, +\infty[$

$\blacksquare$

Méthode pour établir le tableau de variation sur I d'une fonction f dérivable sur I

1. Dériver f sur I
2. Etablir le tableau de signe de la dérivée f' sur I
3. Dans le même tableau, sur la ligne d'en dessous, pour un $+$ mettre un $\nearrow$, pour un $-$, mettre un $\searrow$; par exemple :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

FIGURE 3.3 : Exemple type d'un tableau de signe de la dérivée et variation de la fonction

Exemple :
Etablir le tableau de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 3$$

La dérivée de f est

$$f' : x \mapsto 3x^2 + 6x - 45$$

On calcule Δ :

$$\Delta = 36 + 540 = 576$$

$\Delta > 0$ donc ce trinôme admet 2 racines :

$$x_1 = \frac{-6-24}{6} = -5 \quad x_2 = \frac{-6+24}{6} = 3$$

On déduit ce tableau de signe / variation :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	178	$\searrow$	-78	$\nearrow$	

FIGURE 3.4 : Tableau de signe de $f' : x \mapsto 3x^2 + 6x - 45$ et de variation de $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 3$

■

Mais que représente les zéros de f' ? ?

3.3.2 Extremum d'une fonction

Définition 3.2.1 : maximum, minimum d'une fonction

Soit f une fonction. Soit $a \in \mathscr{D}_f$. On dit que $f(a)$ est le minimum (resp. le maximum) de f sur $\mathscr{D}_f$ si

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, f(x) \geq f(a) \quad \text{(resp. } f(x) \leq f(a))$$

Remarque :
Le minimum ou maximum d'une fonction n'existe(nt) pas toujours

⊠

Définition 3.2.2 : minimum, maximum local d'une fonction

Soit f une fonction. Soit $a \in \mathscr{D}_f$. On dit que $f(a)$ est un minimum (resp. maximum) local de f s'il existe un intervalle $I \subset \mathscr{D}_f$ tel que $f(a)$ soit un minimum (resp. maximum) de f sur I

Définition 3.2.3 : extremum (local)

Soit f une fonction et $a \in \mathscr{D}_f$. On dit que $f(a)$ est un extremum lorsque c'est un minimum ou un maximum de f. On dit que $f(a)$ est un extremum local lorsque c'est un minimum local ou un maximum local

3.3.3 Lien entre extrema d'une fonction et zeros de sa dérivée

Proposition 3.3.1

Soit f une fonction et $f(\alpha)$ un extremum sur I. On suppose que α n'est pas une borne de I. Alors

$$f'(\alpha) = 0$$

Attention en rouge clignotant : réciproque fausse :

Si on considère $f : x \mapsto x^3$ et sa dérivée $f' : x \mapsto 3x^2$. f' s'annule en $x = 0$, or ce n'est pas un extremum local de f :

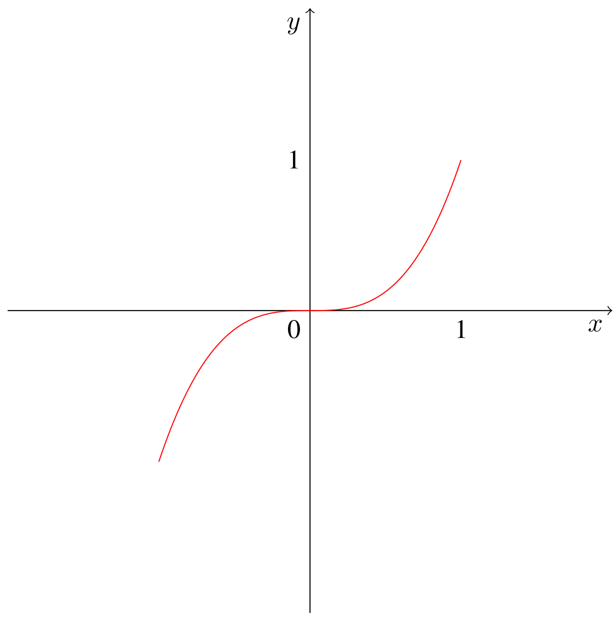


FIGURE 3.5 : Courbe représentative de $x \mapsto x^3$

Proposition 3.3.2

Soit f une fonction, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose

- f est dérivable sur I
- α n'est pas une borne de I
- f' s'annule en α **en changeant de signe**

Alors $f(\alpha)$ est un extremum local de f

Exemple :
On note $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. Montrer que 0 est un extremum local de f

On remarque que $0 = f(1)$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 2x - 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

De plus, si $x < 1$, $2x < 2$ puis $f(x) < 0$
et si $x > 1$, $2x > 2$ puis $f(x) > 0$

Il y a bien changement de signe donc f atteint un extremum en $x = 1$ et $f(1) = 0$

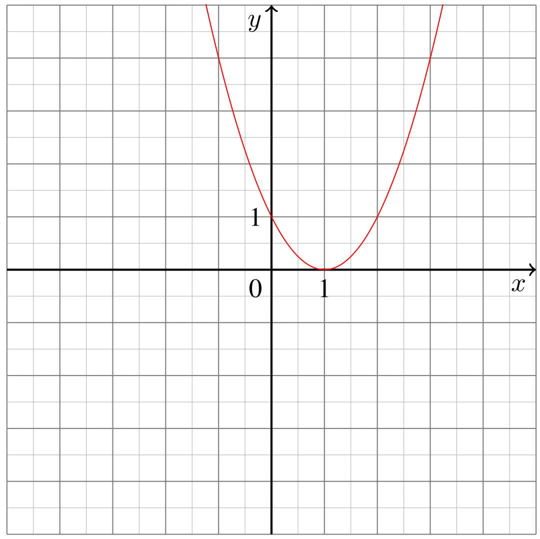


FIGURE 3.6 : Courbe représentative de $x \mapsto x^2 - 2x + 1$

■

Chapitre 4

Suites

4.1 Généralités

4.1.1 Définition

Définition 1.1.1 : suite numérique

On appelle suite numérique (ou juste suite) une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

Exemple :
La fonction u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u(n) = 3n + 2$ est une suite

■

Remarques :

- Une suite u est aussi notée (u_n)
- $u(n)$ est noté u_n (attention au parenthèsage)
- u_n est appelé terme de rang n
- si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3n + 2$, on dit que $3n + 2$ est le terme général de la suite

⊠

Il existe 3 méthodes pour définir une suite :

- explicitement : $u_n = f(n)$ où f est une fonction
- par récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$$

  f et a étant connu
- implicitement... (voir des exercices)

4.1.2 Suites arithmétiques

Définition 1.2.1 : suites arithmétiques

Soit $r \in \mathbb{R}$. On appelle suite arithmétique (u_n) une suite donnée par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

a étant un réel donné

r est appelé la **raison** de la suite

Remarque :
Entre un terme de la suite et le suivant, on doit rajouter r

⊠

Exemple :
La suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

est est une suite arithmétique de raison $r = 3$.
Ses premiers termes sont

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27

■

Proposition 1.2.2 : terme général d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + nr$$

Preuve :
Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + r \\ &= u_{n-2} + 2r \\ &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= u_{n-n} + nr \\ &= u_0 + nr \end{aligned}$$

□

Théorème 1.2.3 : $1 + 2 + \ldots + n$

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons

$$S = 1 + 2 + \ldots + n$$

$$n \text{ lignes} \left\{ \begin{array}{ccccc} n & + & 1 & = & n+1 \\ + & & + & & \\ n-1 & + & 2 & = & n+1 \\ + & & + & & \\ \vdots & & \vdots & = & n+1 \\ + & & + & & \\ 2 & + & n-1 & = & n+1 \\ + & & + & & \\ 1 & + & n & = & n+1 \\ || & & || & & \\ S & & S & & \end{array} \right.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} S + S &= n \times (n+1) \\ 2S &= n \times (n+1) \\ S &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Remarque :
Une autre écriture possible :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

⊠

Corollaire 1.2.4 : somme de termes en progresse arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Remarque :
Un autre formulation est, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

⊠

Preuve :
Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \ldots + u_n &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \ldots + (u_0 + nr) \\ &= (n+1)u_0 + r + 2r + \ldots + nr \\ &= n + 1(u_0) + r(1 + 2 + \ldots) \\ &= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2} \\ &= (n+1)(u_0 + r\frac{n}{2}) \\ &= \frac{n+1}{2}(2u_0 + nr) \\ &= \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} \end{aligned}$$

□

4.1.3 Suites géométriques

Définition 1.3.1 : suite géométrique

Une suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

où a et q sont des réels fixés.

q est appelé raison de la suite géométrique (v_n)

Proposition 1.3.2 : terme général d'une suite géométrique

Soient $q \in \mathbb{R}$ et (v_n) une suite géométrique de raison q. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = v_0 q^n$$

Preuve :
Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_n &= v_{n-1}q \\ &= v_{n-2}q^2 \\ &= \ldots \\ &= \ldots \\ &= v_{n-n}q^n \\ &= v_0 q^n \end{aligned}$$

□

Théorème 1.3.3 : somme de termes en progression géométrique

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q avec $q \neq 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_0 + v_1 + \ldots + \ldots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons

$$S = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$$

$$S = v_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$$

alors

$$qS = v_0(q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1})$$

Ainsi

$$qS - S = v_0(q^{n+1} - 1)$$

$$S(q - 1) = v_0 q^{n+1} - 1$$

Donc si $q \neq 1$,

$$S = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

Exemples :

1. Calculer $1 + 2 + \ldots + \ldots + 100$
2. Calculer $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \ldots + \frac{1}{6561}$

1.
$$1 + 2 + \ldots + \ldots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

2.
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \ldots + \frac{1}{6561} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9841}{6561}$$

■

4.2 Représentation graphique et sens de variation

4.2.1 Représentation graphique

Il est possible de représenter graphiquement une suite à l'aide d'un nuage de points (n en abscisse et u_n en ordonnée)

Exemple :
Représentation graphique de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2

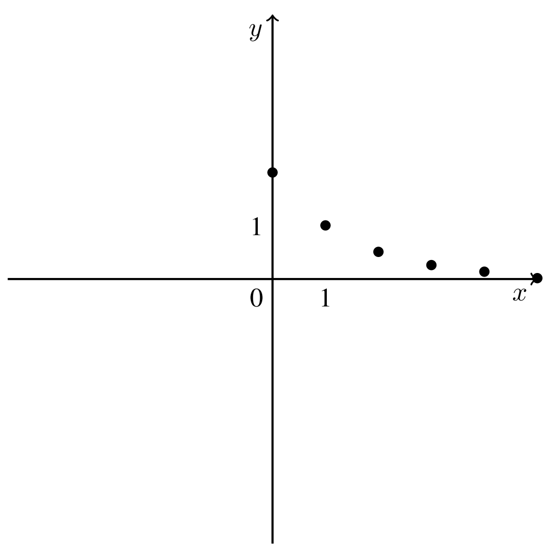


FIGURE 4.1 : Les 6 premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2

■

4.2.2 Sens de variation

Définition 2.2.1 : suites croissantes, décroissantes

Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) est croissante (resp. décroissante) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} \geq u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} \leq u_n)$$

Définition 2.2.2 : suites croissantes, décroissantes à partir d'un certain rang

Soit (u_n) une suite et $N \in \mathbb{N}$. On dit que (u_n) est croissante (resp. décroissante) à partir du rang N si, pour tout $n \geq N$,

$$u_{n+1} \geq u_n \quad (\text{resp. } u_{n+1} \leq u_n)$$

Méthode pour étudier le sens de variation

Deux méthodes assez classiques

- évaluer la différence $u_{n+1} - u_n$
- si (u_n) ne s'annule pas et reste de même signe, on peut évaluer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Exemples :

1. Montrer que la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = 3n + 2$$

est croissante

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) + 2 - (3n+2) \\ &= 3n - 3n + 2 - 2 + 3 \\ &= 3 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > u_n$ donc la suite (u_n) est (strictement) croissante

2. Montrer que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = 2^n$$

est croissante

(v_n) ne s'annule pas et garde un signe constant.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 > 1$$

Ainsi $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ donc $v_{n+1} > v_n$ et (v_n) est croissante

■

Remarque :
Pour $u_{n+1} - u_n$ on regarde la position par rapport à 0, alors que pour $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, on regarde la position par rapport à 1

⊠

4.2.3 Sens de variation des suites arithmétiques et géométriques

Proposition 2.3.1 : sens de variation d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r, $r \in \mathbb{R}$

- si $r = 0$, la suite est constante
- si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante
- si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante

Preuve :
Si $r = 0$
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+1} = u_n$$
donc (u_n) est constante

Si $r > 0$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = u_n + r$$
donc
$$u_{n+1} - u_n = r > 0$$
$$u_{n+1} > u_n$$
(u_n) est strictement croissante

Si $r < 0$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = u_n + r$$
donc
$$u_{n+1} - u_n = r < 0$$
$$u_{n+1} < u_n$$
(u_n) est strictement décroissante

□

Proposition 2.3.2 : sens de variation d'une suite géométrique

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q, $q > 0$. On suppose de plus $v_0 \neq 0$

- Si $q = 1$, la suite (v_n) est constante
- Si $q > 1$, alors la suite (v_n) est strictement croissante
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (v_n) est strictement décroissante

Preuve :
$q > 0$ et $v_0 \neq 0$ donc (v_n) ne s'annule pas et garde un signe constant

Si $q = 1$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = 1 \times v_n$$
donc (v_n) est constante

Si $q > 1$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q > 1$$
donc la suite est strictement croissante

Si $q < 1$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = q < 1$$
donc la suite est strictement décroissante

□

4.3 Notion de limite

On s'intéresse au comportement de la suite lorsque n devient (très) grand, en fait lorsqu'il **tend vers l'infini**. Il y a trois cas possible :

- La suite prend des valeurs aussi grandes (positivement ou négativement) que l'on veut à mesure que n devient grand **(cas 1)**
- Les valeurs de la suite semble se stabiliser vers une valeur finie **(cas 2)**
- Aucun des des deux cas précédent **(cas 3)**

Exemples :
Cas 1

On représente ici la suite définie par son terme général : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}}{2}$

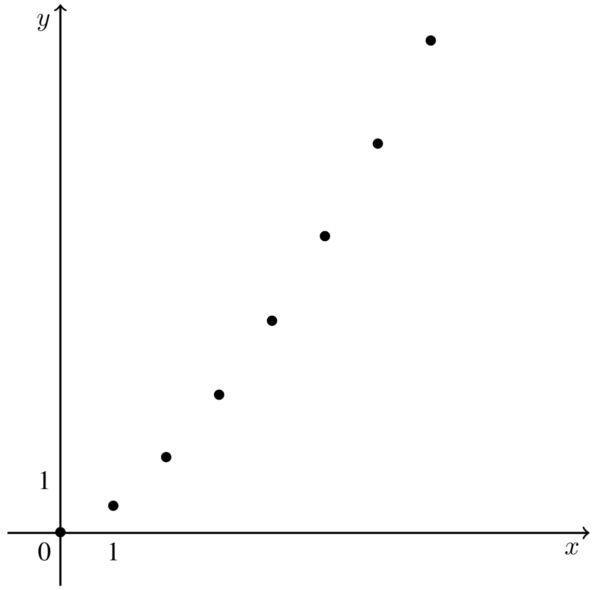


FIGURE 4.2 : Les 8 premiers termes de la suite définie par $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}}{2}$

Cas 2

On représente ici la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \dfrac{2}{n}$

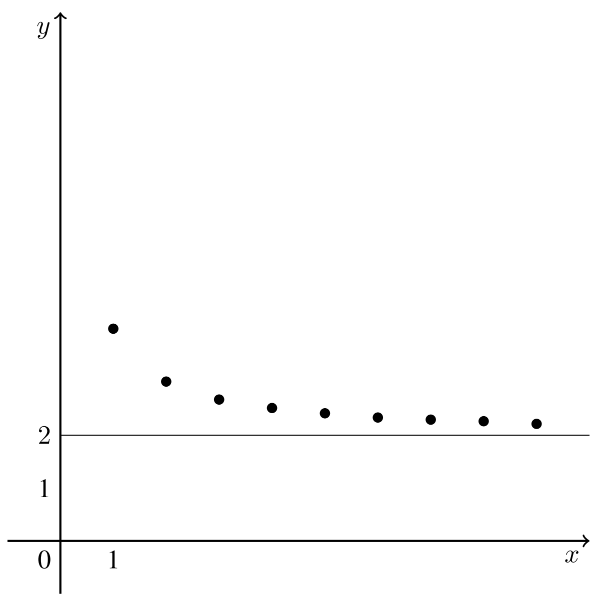


FIGURE 4.3 : Les 9 premiers termes de la suite définie par $u_n = 2 + \dfrac{2}{n}$

Cette suite semble se stabiliser vers 2

Cas 3

On représente ici la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$

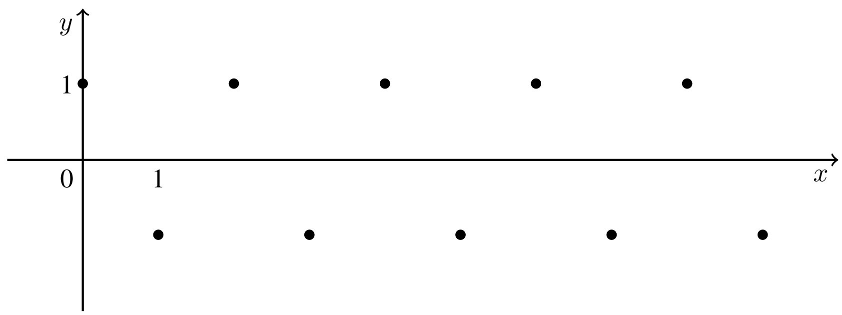


FIGURE 4.4 : Les 10 premiers termes de la suite définie par $u_n = (-1)^n$

La suite ne se stabilise pas et ne devient pas aussi grande que l'on veut.

■

4.3.1 Cas 1 : limite infinie

Définition 3.1.1 : suite qui tend vers $+\infty$

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini si pour tout $A > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$u_n \geq A$$

On note alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

ou encore

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Remarque :
On retrouve l'idée que la suite peut être aussi grande qu'on veut : dès que l'on fixe un réel A, on peut trouver un terme à partir duquel la suite est au dessus

⊠

Définition 3.1.2 : suite qui tend vers $-\infty$

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini si pour tout $B < 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$u_n \leq B$$

On note alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ou encore

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Exemple :
Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n}$ tend vers $+\infty$

Soit $A > 0$. On considère n_0 l'entier immédiatement au dessus de A^2. La croissance de la suite (u_n) (qui est due à la croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$) assure que, pour $n \geq n_0$,

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{n_0} \geq \sqrt{A^2} = A$$

■

4.3.2 Cas 2 : limite finie

Définition 3.2.1 : limite finie

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}$. On dit que ℓ est limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang

On note alors

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

ou encore

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

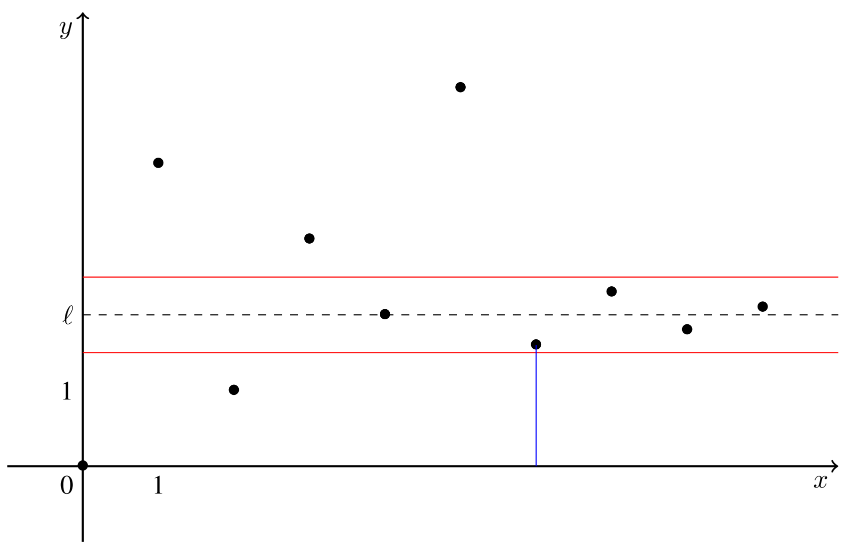


FIGURE 4.5 : Exemple d'une suite convergente vers ℓ

Théorème 3.2.2 : unicité de la limite

Soit (u_n) une suite et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. On suppose $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Alors

$$\ell = \ell'$$

Preuve :
Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$
On considère les intervalles ouvert $\left]\ell' - \frac{|\ell' - \ell|}{3}, \ell' + \frac{|\ell' - \ell|}{3}\right[$ et $\left]\ell - \frac{|\ell' - \ell|}{3}, \ell + \frac{|\ell' - \ell|}{3}\right[$

A partir d'un certain rang, toutes les termes de la suite sont dans ces intervalles en même temps, qui sont disjoins.... (aucun point en commun). Contradiction

□

4.3.3 Vocabulaire

Si la suite tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou si elle n'admet pas de limite, on dit qu'elle **diverge**
Si la suite admet une limite finie, on dit qu'elle **converge**

Remarque :
Attention de ne pas utiliser la notation $\lim$ si on la suite n'admet pas de limite...

⊠

4.3.4 Limites des suites arithmétiques et géométrique

Proposition 3.4.1 : limite d'un suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$

- Si $r = 0$, la suite est constante et
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$$
- Si $r > 0$
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
- Si $r < 0$
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Preuve :
Pour le cas $r = 0$, il n' a rien à montrer.
1er cas : $r > 0$
Soit $A > 0$. On considère l'entier n_0 immédiatement au dessus de

$$\frac{A - u0}{r}$$
$$n_0 \geq \frac{A - u0}{r}$$
$$n_0 r \geq A - u_0$$
$$u_0 + n_0 r \geq A$$
$$u_{n_0} \geq A$$

2eme cas : $r < 0$
Soit $B < 0$. On considère l'entier n_0 immédiatement au dessus de

$$\frac{B - u0}{r}$$
$$n_0 \geq \frac{B - u0}{r}$$
$$n_0 r \leq B - u_0$$
$$u_0 + n_0 r \leq B$$
$$u_{n_0} \leq B$$

□

Proposition 3.4.2 : limite d'un suite géométrique

Soit (v_n) une suite géométrique de raison $q > 0$. On suppose de plus $v_0 \neq 0$

- Si $q = 1$, la suite est constante et
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} v_0$$
- Si $q > 1$
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
- Si $0 < q < 1$
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

4.3.5 Opérations sur les limites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$$
avec
$$\ell, \ell' \in \mathbb{R}$$
alors
$$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$$
Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$$
avec
$$\ell, \ell' \in \mathbb{R}$$
alors
$$u_n \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \times \ell'$$
Ces résultats sont vraies pour des limites finies. Des résultats plus généraux seront vus en terminale

Deuxième partie

Géométrie

Chapitre 5

Géométrie plane

5.1 Vecteurs

5.1.1 Rappels

Définition 1.1.1 : vecteurs du plan

Un vecteur $\vec{u}$ du plan est défini par 2 coordonnées réelles x et y. On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Définition 1.1.2 : addition de vecteurs

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On définit la somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$$

Définition 1.1.3 : produit par un scalaire

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur du plan et $\lambda\in\mathbb{R}$. On définit le vecteur $\lambda\vec{u}$ par

$$\lambda\vec{u}=\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$ est le seul vecteur vérifiant, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$

et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\lambda\vec{0}=\vec{0}$$

Définition 1.1.4 : vecteur d'un translation de A vers B

Soient $A(x_A, x_B)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, représentant la translation de A vers B, est défini par

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Exemples :

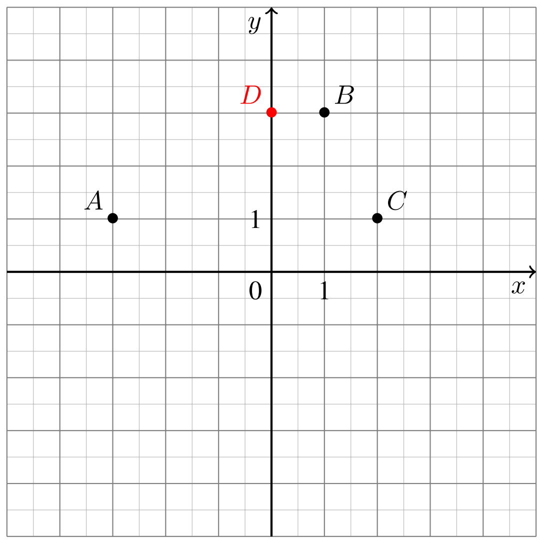


FIGURE 5.1 : Représentation du plans avec les points A, B, C et D

1. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$
2. Représenter le point D tel que D soit l'image de C par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\overrightarrow{CD} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_D - 2 \\ y_D - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 3 \end{cases}$$

Donc $D(0, 3)$

■

Proposition 1.1.5 : relation de Chasles

Soit A, B, C trois points du plan. On a

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Preuve :
On note
$$A(x_A, y_A); B(x_B, y_B); C(x_C, y_C)$$
alors
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$$
Ainsi
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_B - x_A + x_C - x_B \\ y_B - y_A + y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC}$$

□

Définition 1.1.6 : norme d'un vecteur

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. On appelle norme de $\overrightarrow{u}$ et on note $||\overrightarrow{u}||$
$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Remarque :
La norme représente la "longueur" d'un vecteur :

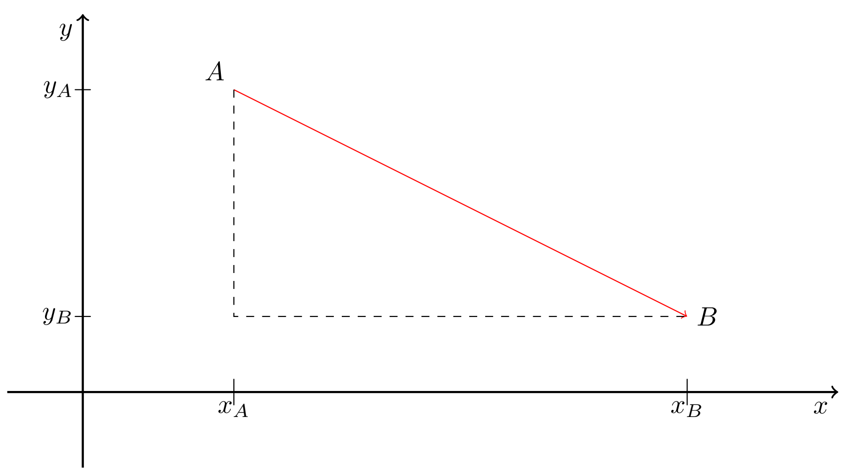


FIGURE 5.2 : Lien entre norme et "longueur" d'une vecteur

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$
$$||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
or d'après le théorème de Pythagore,
$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
donc
$$||\overrightarrow{AB}|| = AB \ldots$$

⊠

Tout vecteur non nul est caractérisé par la donnée

- d'une norme

- d'une direction
- et d'un sens

Proposition 1.1.7

Soit $\vec{u}$ un vecteur. On a
$$||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

Preuve :
On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors
$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ et } y^2 = 0 \quad (x^2 \geq 0; y^2 \geq 0)$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$$
$$\Leftrightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

□

Propriété 1.1.8

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Alors
$$||\vec{u}|| = ||-\vec{u}||$$

Preuve :
On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$$\begin{aligned} ||-\vec{u}|| &= \sqrt{(-x)^2+(-y)^2} \\ &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= ||\vec{u}|| \end{aligned}$$

□

Théorème 1.1.9 : théorème du parallélogramme

Soit A, B, C, D quatre points du plan. Alors
$$ABCD \text{ est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

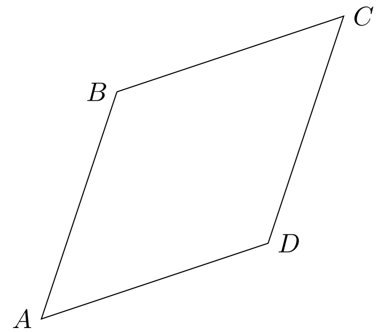


FIGURE 5.3 : Représentation d'un parallélogramme $ABCD$

Preuve :
On suppose que $ABCD$ est un parallélogramme, alors

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

d'où

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Réciproquement, on suppose

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

d'où $ABCD$ est un parallélogramme

□

5.1.2 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 1.2.1 : vecteurs colinéaires

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$$

Exemple :
Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ des vecteurs tels que

$$\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{v} + 9\overrightarrow{w}$$

$$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{v} + 6\overrightarrow{w}$$

Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires

$$\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{v} + 6\overrightarrow{w} \Rightarrow -\overrightarrow{v} = 6\overrightarrow{w} \Rightarrow \overrightarrow{w} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{v}$$

$$\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{v} - \frac{1}{6}\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{v} - \frac{3}{2}\overrightarrow{v} = \frac{3}{2}\overrightarrow{v}$$

■

Théorème 1.2.2 : condition de colinéarité

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Alors

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

Preuve :

On suppose $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ (dans ces cas là, la preuve est immédiate)

Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires. Alors, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Alors

$$x = kx'$$

$$y = ky'$$

Alors

$$xy' - x'y = kx'y' - x'ky' = 0$$

Réciproquement, supposons que

$$xy' - x'y = 0$$

$\vec{u} \neq \vec{0}$ donc au moins une de ses coordonnées est non nulle. On suppose $x \neq 0$ (la démonstration est la même si c'est $y \neq 0$)

Alors

$$y' = \frac{x'}{x}y$$

On pose alors $k = \dfrac{x'}{x}$

$$kx = k\frac{x'}{x} = x'$$

$$ky = \frac{x'}{x}y = y'$$

donc

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

donc les vecteurs sont colinéaires

□

Exemples :

Dire si les vecteurs suivants sont colinéaires :

1. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

1. $1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 \neq 0$ donc non colinéaires
2. $5 \times 6 - 6 \times 5 = 0$ donc colinéaires
3. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{4} = 0$ donc colinéaires
4. $6 \times 4 - 3 \times 8 = 0$ donc colinéaires

■

5.2 Droites du plan

5.2.1 Vecteur directeur

Définition 2.1.1 : vecteur directeur d'une droite

Soit (d) une droite. Soit $\vec{u}$ un vecteur. On dit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d) s'il existe A et B deux points de (d) tels que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

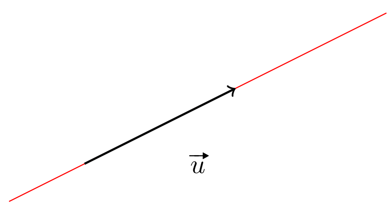


FIGURE 5.4 : Représentation d'une droite et d'un vecteur directeur

Remarque :
Une droite admet toujours plusieurs vecteurs directeurs, ainsi il ne faut pas parler **du** vecteur directeur mais **d'un** vecteur directeur d'une droite

⊠

Méthode pour calculer un vecteur directeur d'une droite (d) connaissant deux points de cette droite

Si on connait deux points A et B d'une droite (d), $\overrightarrow{AB}$ est est vecteur directeur de (d)

Proposition 2.1.2

Soit (d) une droite. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de (d), alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Preuve :
On peut trouver A, B, C, D quatre points de (d) tels que

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{v} = \overrightarrow{CD}$$

Or les points A, B, C, D sont alignés (car ils appartiennent à la même droite) donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. On déduit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

□

5.2.2 Equation cartésienne de droite

Définition 2.2.1 : équation cartésienne de droite

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. une équation cartésienne de droite est une équation de la forme

$$ax + by = c$$

Remarque :
On peut aussi rencontrer la forme

$$ax + by + c = 0$$

qui lui est tout à fait équivalente

$\boxtimes$

Soit (d) une droite d'équation cartésienne

$$ax + by = c$$

et $A(x_A, y_A)$ un point. Alors

$$A \text{ appartient à } (d) \Leftrightarrow ax_A + by_A = c$$

Exemples :

- On considère la droite (d) d'équation cartésienne

  $$(d) : 3x + 2y = 4$$

  Montrer que le point $A(1, \frac{1}{2})$ appartient à (d) mais que le point $B(\frac{5}{3}, 0)$ n'appartient pas à (d)

  $$3 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 3 + 1 = 4$$

  donc A appartient à (d)

  $$3 \times \frac{5}{3} + 2 \times 0 = 5 \neq 4$$

  donc B n'appartient pas à (d)

- Soit (d) une droite et $A(3, 2)$,$B(8, 0)$ deux points de (d). Etablir une équation cartésienne de (d)

  Notons $ax + by = c$ une équation cartésienne de (d). Alors, on a les relations

  $$\begin{cases} 3a + 2y = c \\ 8a = c \end{cases}$$

  $$\begin{cases} 3a + 2y = 8a \\ 8a = c \end{cases}$$

  $$\begin{cases} 2y = 5a \\ 8a = c \end{cases}$$

  On peut alors choisir une des trois constantes : on prend $c = 8$. Alors $a = 1$ et $y = \frac{5}{2}$

  $$x + \frac{5}{2}y = 8$$

est une équation cartésienne de (d)

En multipliant le tout par 2, on peut obtenir une équation avec des coefficients entiers :

$$2x + 5y = 16$$

est une autre équation cartésienne de (d)

■

Définition 2.2.2 : équation réduite cartésienne de droite

Une équation réduite est une équation de la forme

$$y = ax + b$$

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnée admet une équation réduite

Remarque :
Soit (d) une droite. (d) admet une infinité d'équation cartésienne mais une seule (si elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnée) équation réduite

⊠

Méthode pour trouver une équation cartésienne de droite à l'aide de deux points

Soit (d) une droite et $A(x_A, y_A)$,$B(x_B, y_B)$ deux points de (d)

1. Dire que (d) admet comme équation cartésienne

$$(d) : ax + by = c$$

   avec a et b inconnus

2. Etablir le système

$$\begin{cases} ax_A + by_A = c \\ ax_b + by_b = c \end{cases}$$

3. Fixer c

4. Résoudre le système pour trouver a et b

Méthode pour trouver l'équation réduite

Soit (d) une droite

1. Etablir une équation cartésienne grâce à la méthode précédente

$$(d) : ax + by = c$$

2. Vérifier que (d) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnée (ce qui se traduit par $b \neq 0$)

3. L'équation réduite est alors

$$(d) : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Attention : l'hypothèse $b \neq 0$ est primordiale

Remarque :
il faut évidemment faire le lien entre équation cartésienne de droite et fonction affine notamment entre équation réduite et fonction affine

$\boxtimes$

5.2.3 Lien entre équation cartésienne et vecteur directeur

Proposition 2.3.1

Soit (d) une droite
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d) et $A(x_A, y_A)$ un point de (d). Alors

$$u_y x - u_x y = c$$

où $c = u_y x_A - u_x y_A$ est une équation cartésienne de (d)

Preuve :
Il suffit de montrer que pour tout $B(x_B, y_B)$ dans (d)

$$u_y x_B - u_x y_B = c$$

Soit $B(x_B, y_B)$ dans (d). $\vec{u}$ étant un vecteur directeur de (D), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Ainsi, on dispose de k tel que

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = k\vec{u}$$

Ainsi

$$\begin{cases} x_B - x_A = ku_x \\ y_B - y_A = ku_y \end{cases}$$

Alors

$$u_y x_B - u_x y_B - (u_y x_A - u_y y_A) = u_y(x_B - x_A) - u_x(y_B - y_A) = u_y ka - u_x ku_y = 0$$

$\square$

Attention à la place des coefficients et au signe (!!)

Méthode pour obtenir une équation cartésienne d'une droite à l'aide d'un vecteur directeur et d'un point

Soit (d) une droite avec $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d) et $A(x_A, y_A)$ un point de (d)

- Calculer $u_y x_A - u_x y_A$
- Etablir l'équation cartésienne

$$u_y x - u_x y = u_y x_A - u_x y_A$$

Méthode pour obtenir un vecteur directeur à partir d'une équation cartésienne

Soit $(d) : ax + by = c$

Alors $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

Exemples :

1. Soit (d) une droite. On suppose $A(3,2)$ est un point de (d) et que $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d). trouver une équation cartésienne de (d)

$$0 \times 3 - 1 \times 2 = -2$$
$$(d) : 0 \times x - 1y = -2$$
$$(d) : y = 2$$

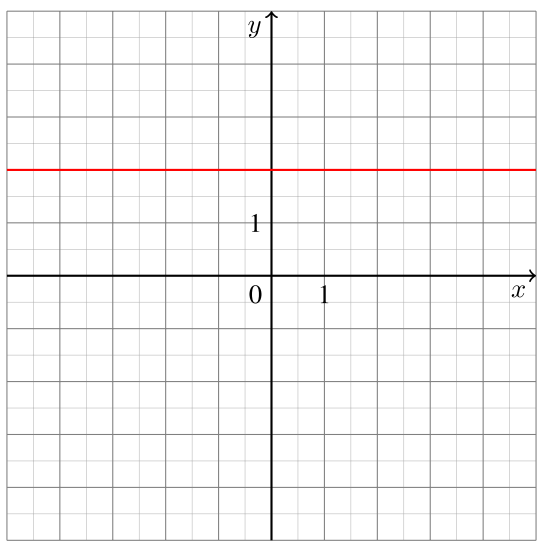


FIGURE 5.5 : Représentation de la droite définie par $y = 2$

2. Soit (d) la droite définie par l'équation cartésienne

$$(d) : 3x + 24y = 4$$

Déterminer un vecteur directeur de (d)

$\vec{u}\begin{pmatrix} -24 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

■

5.2.4 Droites parallèles

Proposition 2.4.1 : conditions de parallélisme

Soit (d) et (d') deux droites et $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs directeurs associés. Alors (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires

Exemple :
On prend les droites (d) et (d') définie par

$$(d) : 4y = 12x + 16$$

$$(d') : y = 3x - 2$$

sont parallèles

On peut montrer (assez facilement) que ces deux droites ont le même coefficient directeur mais on peut aussi considérer $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (d) et (d') et se rendre compte que

$$4 \times 3 - 1 \times 12 = 0$$

■

5.2.5 Intersection de deux droites

Soit

$$(d) : ax + by = c$$

$$(d') : a'x + b' = c'$$

Pour trouver un point d'intersection (s'il existe), il faut résoudre le système

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Exemple :
Trouver le point d'intersection (s'il existe) des droites définies

$$(d) : 3x + 2y = 1$$

$$(d') : x + 4y = 3$$

On résout

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 'x + 4'y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10y = 1 - 9 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{5} \\ x = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Ainsi les droites se croisent au point

$$\left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

■

5.3 Expression d'un vecteur en fonction de 2 vecteurs non colinéaires

Théorème 3.0.1

Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs non colinéaires. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur. Alors il existe un unique couple de réels (λ, μ) tel que

$$\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}$$

<u>Preuve :</u>
<u>Existence</u>

<u>Analyse</u>

Si

$$\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}$$

alors, en notant $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 x = \lambda y_1 x_1 + \mu y_1 x_2 \\ x_1 y = \lambda x_1 y_1 + \mu x_1 y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 x - x_1 y = \mu(y_1 x_2 - y_2 x_1) \\ x_1 y = \lambda x_1 y_1 + \mu x_1 y_2 \end{cases}$$

or $x_2 y1 - y_2 x_1 \neq 0$ car les vecteurs sont non colinéaires donc

$$\mu = \frac{y_1 x - x_1 y}{x_2 y_1 - y_2 x_1}$$

et

$$\lambda = x_1 y - \frac{y_1 x - x_1 y}{x_2 y_1 - y_2 x_1} y_2 x_1$$

$$\lambda = \frac{y x_2 - x y_2}{x_2 y_1 - y_2 x_1}$$

<u>Synthèse</u>

On pose

$$\lambda = \frac{y x_2 - x y_2}{x_2 y_1 - y_2 x_1}$$

$$\mu = \frac{y_1 x - x_1 y}{x_2 y_1 - y_2 x_1}$$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \mu x_2 &= \frac{y x_2 - x y_2}{x_2 y_1 - y_2 x_1} x_1 + \frac{y_1 x - x_1 y}{x_2 y_1 - y_2 x_1} x_2 \\ &= \frac{y x_2 x_1 - x y_2 x_1 + y_1 x_2 x - x_1 x_2 y}{x_2 y_1 - y_2 x_1} \\ &= x \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{y_1 x_2 - y_2 x_1} = x \end{aligned}$$

De même
$$\lambda y_1 + \mu y_2 = y$$

Unicité

On suppose
$$\vec{v} = \lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2}$$
$$\vec{v} = \lambda'\vec{u_1} + \mu'\vec{u_2}$$

Alors, on a
$$\lambda\vec{u_1} + \mu\vec{u_2} = \lambda'\vec{u_1} + \mu'\vec{u_2}$$
$$(\lambda - \lambda')\vec{u_1} = (\mu' - \mu)\vec{u_2}$$

si $\lambda \neq \lambda'$ ou si $\mu \neq \mu'$ alors $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont colinéaires

Donc $\lambda = \lambda'$ et $\mu = \mu'$

□

On appelle décomposition canonique la décomposition selon les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (parfois appelé vecteur $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$).

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, alors
$$\vec{u} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Remarque :
Les formules donnant explicitement λ et μ ne sont pas à connaitre

⊠

Exemple :
On note $\vec{u} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix}22\\27\end{pmatrix}$

1. Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires
2. Trouver la décomposition de $\vec{w}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

1. $4 \times 6 - 2 \times 4 = 16 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires
2. On sait qu'il existe λ et μ tels que

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$
$$\begin{cases} 22 = 4\lambda + 4\mu \\ 27 = 2\lambda + 6\mu \end{cases}$$
$$\begin{cases} 22 - 2 \times 27 = 4\lambda - 4\lambda + 4\mu - 12\mu \\ 27 = 2\lambda + 6\mu \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mu = 4 \\ 27 - 24 = 2\lambda \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mu = 4 \\ \lambda = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$
$$\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{u} + 4\vec{v}$$

■

Chapitre 6

Trigonométrie

6.1 Radians

"Avant, on mesurait les angles en degrés mais ça c'était avant"

On définit les mesures d'angles en radian tel que

$$0 \text{ rad} = 0°$$

$$\pi \text{ rad} = 90°$$

$$2\pi \text{ rad} = 360°$$

Méthode pour faire les changements d'unités dans les angles

Soit α un angle

- Si α est en degré, l'angle en radian est $\dfrac{2\pi}{360}\alpha$
- Si α est en radian, l'angle en degré est $\dfrac{360}{2\pi}\alpha$

Exemple :
Exprimer les angles suivants en radian : $45°$, $60°$

$$45° \equiv \frac{2\pi}{360}45 \equiv \frac{\pi}{4}$$

$$60° \equiv \frac{2\pi}{360}60 \equiv \frac{\pi}{3}$$

■

6.2 Angle orienté

Pour donner un sens à un angle orienté, on procède à un orientation du plan, c'est-à-dire qu'on définit un sens de rotation positif et un sens de rotation négatif. On prend souvent le sens anti-horaire comme étant le sens positif :

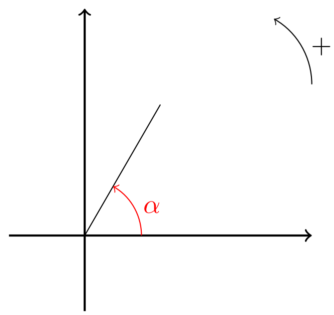


FIGURE 6.1 : Orientation dans le sens anti-horaire

Dans cette figure et en raison de l'orientation, on a $\alpha > 0$. Par contre, dans la figure ci dessous, $\alpha < 0$

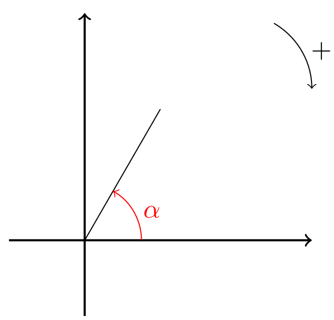


FIGURE 6.2 : Orientation dans le sens antihoraire

Ainsi dans la figure

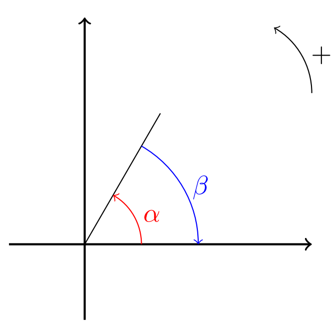


FIGURE 6.3 : Illustration de l'orientation des angles

on a $\beta = -\alpha$

Relations de Chasles pour les angle orienté (relation admise) :

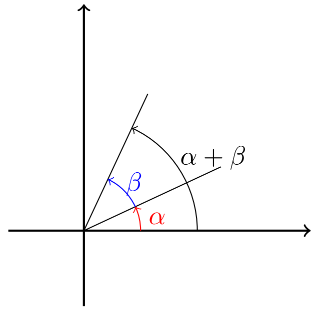


FIGURE 6.4 : Relation de Chasles sur les angles orientés

6.3 Cercle trigonométrique

On définit les cosinus et sinus d'un angle θ par

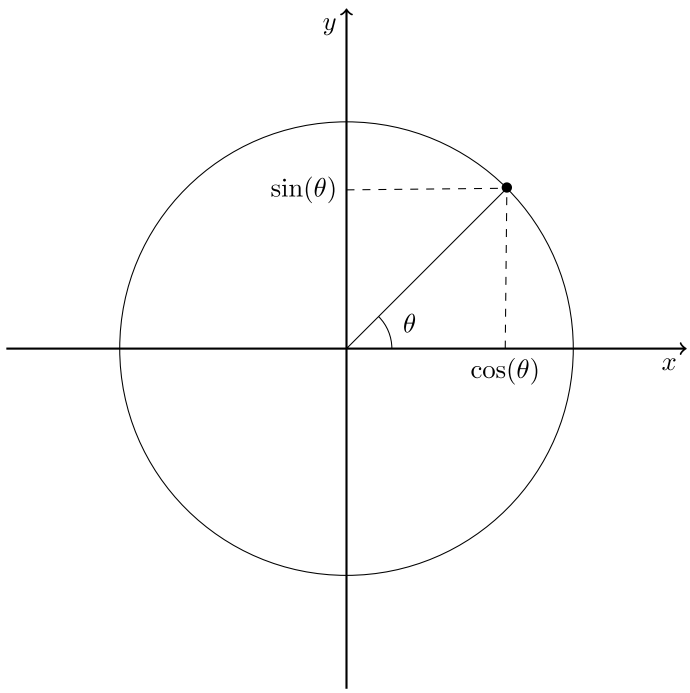


FIGURE 6.5 : Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1

On peut alors trouver quelques formules :

$a)$

$$\boxed{cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)}$$

$$\boxed{sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)}$$

en fait ajouter 2π à un angle revient à faire un tour complet et se retrouver dans la même position donc pas de changement des valeurs de cosinus et sinus

$b)$

$$\boxed{\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)}$$

$$\boxed{\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)}$$

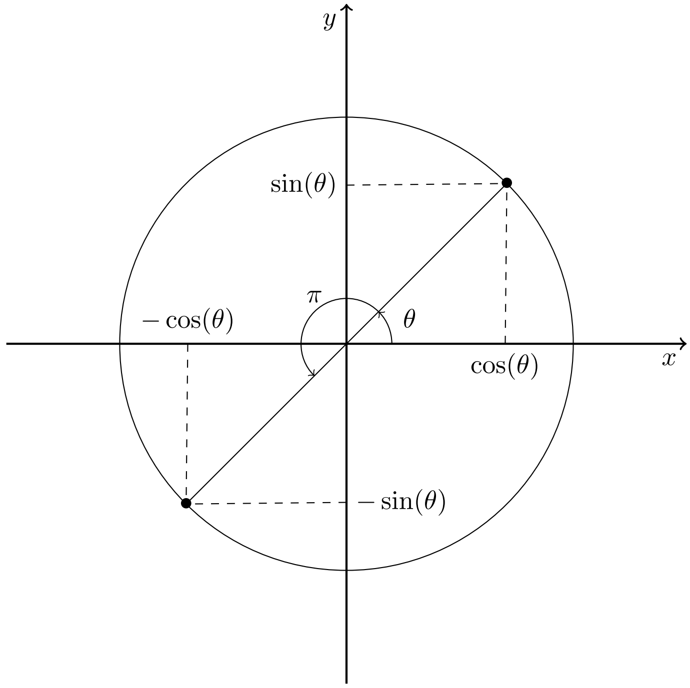


FIGURE 6.6 : "Preuve" de $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$

$c)$

$$\boxed{\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)}$$

$$\boxed{\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)}$$

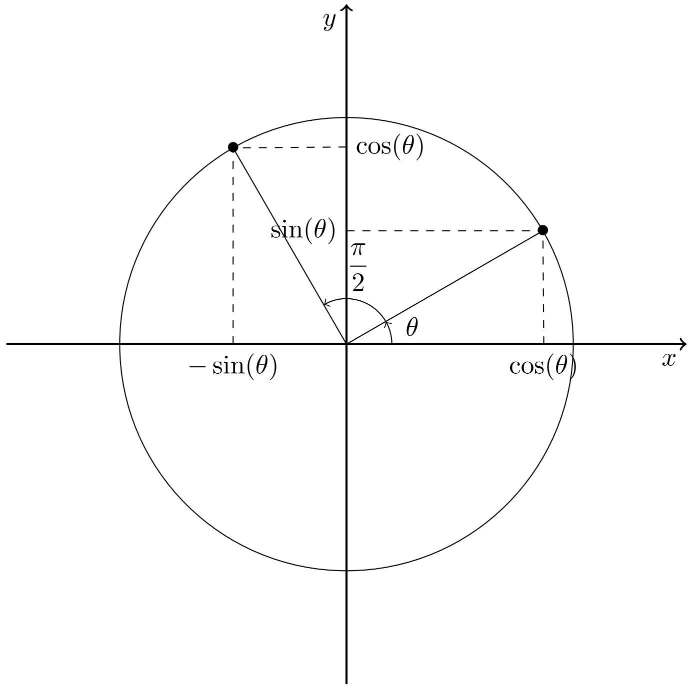


FIGURE 6.7 : "Preuve" de $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$

De même

$$\boxed{\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin(\theta)}$$

$$\boxed{\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\theta)}$$

$d)$

$$\boxed{\cos(-\theta) = \cos(\theta)}$$

$$\boxed{\sin(-\theta) = -\sin(\theta)}$$

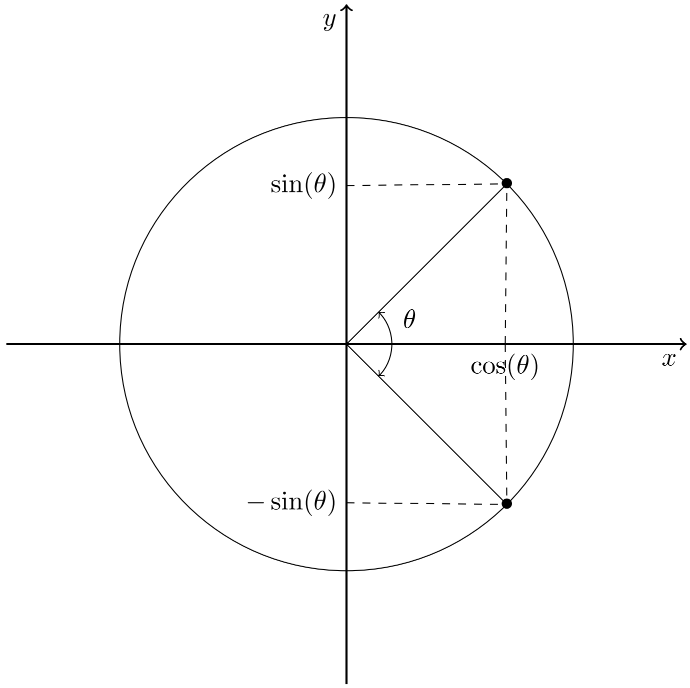


FIGURE 6.8 : "Preuve" de $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

Quelques valeurs remarquables

Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

FIGURE 6.9 : Table de cosinus et sinus

6.4 Une petite égalité sympa

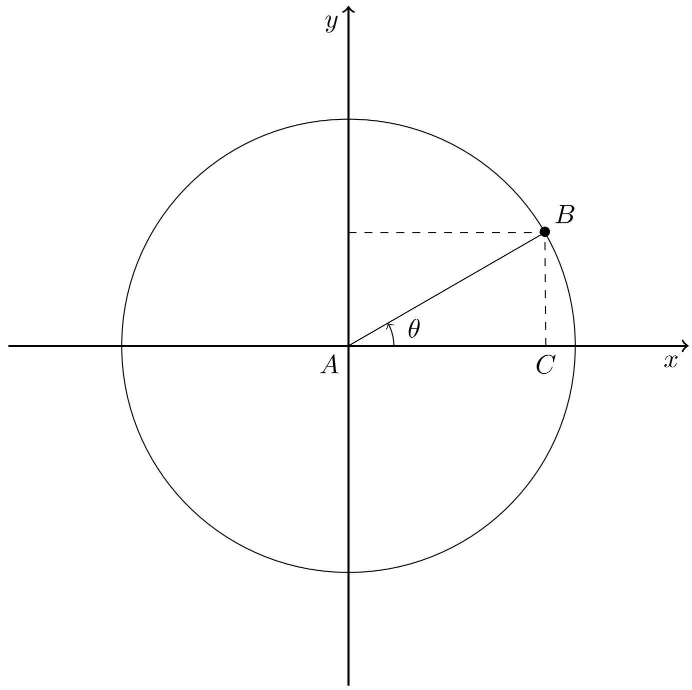


FIGURE 6.10 : Cercle trigonométrique

Le triangle ABC est rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

or $AB = 1$, $AC = \cos(\theta)$ et $BC = \sin(\theta)$ donc

$$\boxed{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1}$$

Chapitre 7

Produit scalaire

7.1 Généralités

7.1.1 Définition

Définition 1.1.1 : produit scalaire dans le plan

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Exemple :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + 2 \times 5 = 12 + 10 = 22$$

■

7.1.2 Propriétés

Propriété 1.2.1 : commutativité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Preuve :

On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

□

Propriété 1.2.2 : linéarité

Soient $\vec{u}$,$\vec{v}$,$\vec{w}$ trois vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Preuve :

1)

On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} \quad &= (x+x')x'' + (y+y')y'' \\ &= xx" + x'x'' + yy'' + y'y'' \\ &= (xx'' + yy'') + (x'x'' + y'y'') \\ &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}\end{aligned}$$

2)

$$\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} \quad &= (\lambda x)x' + (\lambda y)y' \\ &= \lambda(xx' + yy') \\ &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.2.3 : double distributivité

Soient $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, $\vec{u_3}$ et $\vec{u_4}$ 4 vecteurs. On a

$$(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \cdot (\vec{u_3} + \vec{u_4}) = \vec{u_1} \cdot \vec{u_3} + \vec{u_1} \cdot \vec{u_4} + \vec{u_2} \cdot \vec{u_3} + \vec{u_2} \cdot \vec{u_4}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \cdot (\vec{u_3} + \vec{u_4}) \quad &= \vec{u_1} \cdot (\vec{u_3} + \vec{u_4}) + \vec{u_2} \cdot (\vec{u_3} + \vec{u_4}) \\ &= (\vec{u_3} + \vec{u_4}) \cdot \vec{u_1} + (\vec{u_3} + \vec{u_4}) \cdot \vec{u_2} \\ &= \vec{u_3} \cdot \vec{u_1} + \vec{u_4} \cdot \vec{u_1} + \vec{u_3} \cdot \vec{u_2} + \vec{u_4} \cdot \vec{u_2} \\ &= \vec{u_1} \cdot \vec{u_3} + \vec{u_1} \cdot \vec{u_4} + \vec{u_2} \cdot \vec{u_3} + \vec{u_2} \cdot \vec{u_4}\end{aligned}$$

□

Propriété 1.2.4 : lien avec la norme

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On a

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$$

Preuve :
On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x \times x + y \times y = x^2 + y^2$$

$$||\vec{u}||^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = x^2 + y^2$$

□

Soit $\vec{u}$ un vecteur, on définit

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

Propriété 1.2.5 : identité remarquable

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$$

Preuve :

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2 \end{aligned}$$

□

7.1.3 Expression avec les normes

Proposition 1.3.1

Soit $\vec{u}$,$\vec{v}$ deux vecteurs du plan

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2)$$

Preuve :
On note

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 &= x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2 \\ &= x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x^2 - 2xx' + x'^2) - (y^2 - 2yy + y'^2) \\ &= x^2 - x^2 + y^2 - y^2 + y'^2 - y'^2 + 2xx' + 2yy' \\ &= 2(xx' + yy') \\ &= 2\vec{u} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

□

7.1.4 Lien avec le projeté orthogonal

Définition 1.4.1 : projeté orthogonal

Soit (d) une droite et A un point. On appelle projeté orthogonal de A sur (d) l'intersection entre (d) et la droite perpendiculaire à (d) passant par A

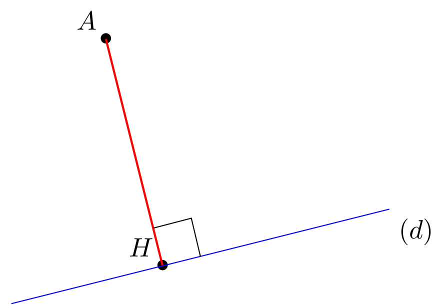


FIGURE 7.1 : Projeté orthogonal

H est le projeté orthogonal de A sur (d)

Proposition 1.4.2 : lien avec le produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On note $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ deux points du plan. On note H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA). Alors

- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ ont le même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\overrightarrow{OA}|| \times ||\overrightarrow{OH}||$
- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens opposé alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\overrightarrow{OA}|| \times ||\overrightarrow{OH}||$

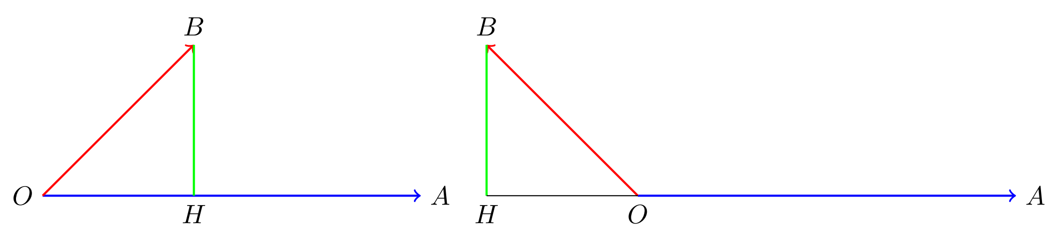


FIGURE 7.2 : Projetés orthogonaux et produit scalaire

7.1.5 Expression du produit scalaire à l'aide des normes et d'un angle

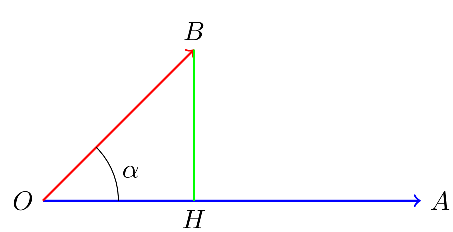


FIGURE 7.3 : Projeté orthogonal (angle aigus)

On a

$$||\overrightarrow{OH}|| = \cos(\alpha)||\overrightarrow{OB}||$$

donc

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= ||\overrightarrow{OH}|| \times ||\overrightarrow{OA}|| \\ &= ||\overrightarrow{OA}|| \times ||\overrightarrow{OB}|| \times \cos(\alpha) \\ &= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\alpha) \end{aligned}$$

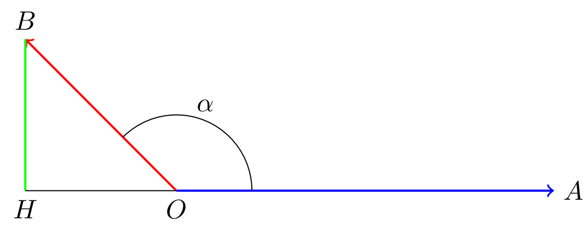


FIGURE 7.4 : Projeté orthogonal (angle obtus)

On a

$$||\overrightarrow{OH}|| = -\cos(\alpha)||\overrightarrow{OB}||$$

donc

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= -||\overrightarrow{OH}|| \times ||\overrightarrow{OA}|| \\ &= ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Théorème 1.5.1

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et α l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\alpha)$$

Preuve :
Voir ce qui précède

□

Définition 1.5.2 : vecteur orthogonaux

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$

Remarques :

- Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs (et c'est le seul)
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm 90°$: on retrouve bien la définition de vecteurs "perpendiculaires"

⊠

7.1.6 Récapitulatif des méthodes

Méthode	Conditions d'applications	Formules
Analytiquement	Si l'on connait les coordonnées	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$
Avec les normes	Si l'on connait $\|\|\vec{u}\|\|$, $\|\|\vec{v}\|\|$, $\|\|\vec{u} - \vec{v}\|\|$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\|\vec{u}\|\|^2 + \|\|\vec{v}\|\|^2 - \|\|\vec{u} - \vec{v}\|\|^2)$
Projection orthogonale	Si l'on connait le projeté orthogonal	$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\|\overrightarrow{OH}\|\| \times \|\|\overrightarrow{OA}\|\|$ où H est le projeté de B sur (OA)
Normes et angle	Si on connait l'angle entre les vecteurs et la norme des vecteurs	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\|\vec{u}\|\| \times \|\|\vec{v}\|\| \times \cos(\alpha)$

Exemples :

1. Calculer le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$
$$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 6 = 24$$

2. Calculer le produit scalaire entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$
$$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
et $\vec{v}$ tel que $||\vec{v}|| = 2; ||\vec{u} - \vec{v}|| = -3$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2) = \frac{1}{2}((1^2 + (-3)^2) + 2^2 - (-3)^2) = \frac{5}{2}$$

3. Calculer l'angle entre $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. On va calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $||\vec{u}||$, $||\vec{v}||$. Ainsi on connaitra $\cos(\alpha)$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 3 \times 5 = -2 + 15 = 13$$
$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$
Ainsi
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||} = \frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}}$$
On trouve alors
$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$
(en radian)

■

Remarque :
N'hésitez pas à manipuler les formules en fonction des données pour trouver les informations demandées par l'énoncé...

⊠

7.2 Applications du produit scalaire

7.2.1 Inégalité triangulaire

Théorème 2.1.1 : inégalité triangulaire

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

avec cas d'égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Preuve :

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2$$
$$(||\vec{u}|| + ||\vec{v}||)^2 = ||\vec{u}||^2 + 2||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| + ||\vec{v}||^2$$

Or

$$2\vec{u} \cdot \vec{v} = 2||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\alpha) \leq 2||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

(car le cosinus est inférieur à 1) d'où l'inégalité

De plus il y a égalité si et seulement si le cosinus vaut si et seulement si les vecteurs l'angle vaut 0° ou 90° c'est-à-dire si les vecteurs ont la même direction en étant de même sens ou de sens opposé c'est-à-dire s'ils sont colinéaires

□

7.2.2 Théorème d'Apollonius

Théorème 2.2.1 : théorème d'Apollonius

Soit ABC un triangle et I le milieu du segment BC. Alors

$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$$

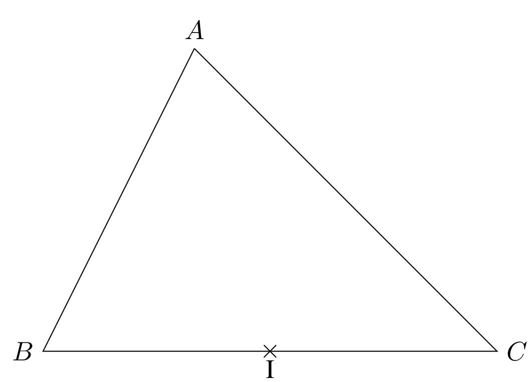


FIGURE 7.5 : Représentation d'un triangle ABC et de I milieu de $[BC]$

Preuve :

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 \\ &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{IC}^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} \end{aligned}$$

or
$$\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC}$$
donc
$$\overrightarrow{IB}^2 = \overrightarrow{IC}^2$$
Ainsi
$$AB^2 + AC^2 = 2\overrightarrow{AI}^2 + 2\overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{=\vec{0}})$$
$$AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$$

□

Remarque :
Ce théorème s'appelle aussi théorème de la médiane

⊠

7.2.3 Vecteur normal à une droite

Définition 2.3.1 : vecteur normal à une droite

Soit (d) une droite et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d). Soit $\vec{v}$ un vecteur. On dit que $\vec{v}$ est normal à (d) si
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Exemple :
Soit
$$(d) : 3x + 2y = 4$$
Montrer que $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est normal à (d)

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ or
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{3} \times 3 = 0$$

■

Propriété 2.3.2

Soit (d) une droite et $\vec{u}$ un vecteur normal à (d). Les droites ayant pour vecteur directeur $\vec{v}$ sont perpendiculaires à (d)

Propriété 2.3.3

Soit (d) et (d') deux droites et $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ des vecteurs normaux respectivement à (d) et (d'). Alors (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires

Proposition 2.3.4

Soit
$$(d) : ax + by = c$$
une droite. Alors
$$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
est un vecteur normal à (d)

Preuve :
Il suffit de montrer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ avec $\vec{v}$ un vecteur directeur de (d)

or $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) et
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ba - ab = 0$$

$\square$

Méthode pour déterminer un vecteur normal à partir d'une équation cartésienne

On utilise le résultat précédent : si $(d) : ax + by = c$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d)

Méthode pour déterminer une équation cartésienne à partir d'un vecteur normal et d'un point

Soit (d) une droite, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal à(d) et $A(x_A, y_A)$ un point de (d). Alors
$$(d) : ax + by = c$$
où $c = ax_A + by_A$

7.2.4 Formule de trigonométrie

Ces formules sont à rapprocher du cours précédent (page 76)
Soit $a, b \in \mathbb{R}$

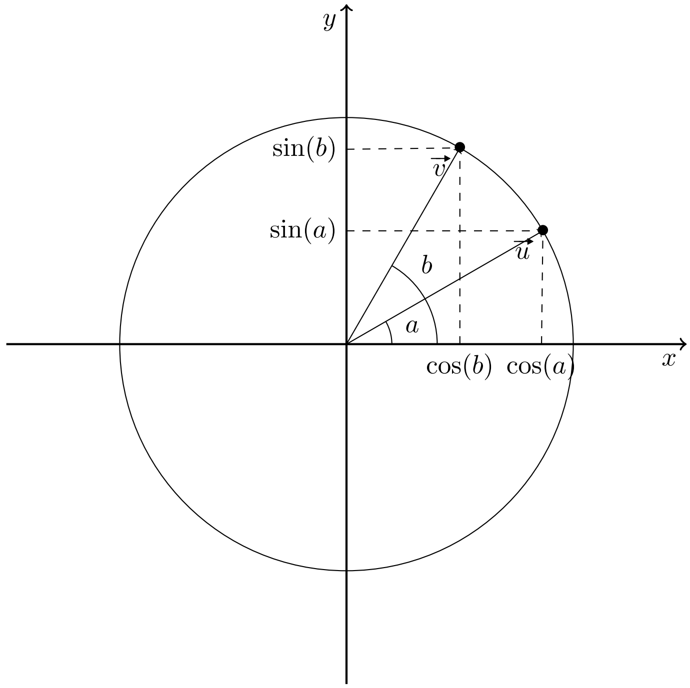


FIGURE 7.6 : Cercle trigonométrique

On rappelle que le cercle trigonométrique a un rayon de 1 donc

$$||\vec{u}|| = 1$$

$$||\vec{v}|| = 1$$

De plus, on peut exprimer les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

or

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(b-a) = \cos(b-a)$$

On déduit la relation suivante

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)}$$

En appliquant la relation à a et $-b$, on trouve

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b)$$

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

En appliquant la formule précédente à a et a

$$\boxed{\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 1 - 2\sin(a)^2 = 2\cos(a)^2 - 1}$$

On utilise la deuxième formule avec a et $b - \frac{\pi}{2}$

$$\cos(a+b-\frac{\pi}{2}) = \cos(a)\cos(b-\frac{\pi}{2}) - \sin(a)\sin(b-\frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)}$$

puis en appliquant à a et $-b$

$$\boxed{\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)}$$

De plus

$$\boxed{\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)}$$

Remarque :
N'hésitez pas à revoir le chapitre précédent pour revoir les formules du type

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x) \ldots$$

⊠

7.2.5 Equation de cercle

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon $r > 0$. Par définition, un cercle est l'ensemble des points équidistants (à même distance) à Ω. Or la distance d entre deux points A et B du plan est donnée par

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

(norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Ainsi soit $M(x, y)$ un point de $\mathscr{C}$. Par définition

$$\sqrt{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2} = r$$

d'où, en élevant au carré

$$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$$

Définition 2.5.1 : équation de cercle

Une équation de cercle est un équation de la forme

$$\mathscr{C} : (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$$

Le point (x_Ω, y_Ω) est appelé centre du cercle $\mathscr{C}$ et r son rayon

Exemples :

1. Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $(0, 0)$ et de rayon 2
2. Identifier le centre et le rayon du cercle définie par l'équation cartésienne de cercle suivante

$$\mathscr{C} : (y - 3)^2 + (x + 2)^2 = 2$$

1. $$\mathscr{C} : (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$
$$\mathscr{C} : x^2 + y^2 = 4$$

2. $\mathscr{C} : (y - 3)^2 + (x + 2)^2 = 2$ défini le cercle de centre $(-2, 3)$ et de rayon $\sqrt{2}$

■

Troisième partie

Statistiques et probabilités

Chapitre 8

Statistiques

Une chaine YouTube sympa : La statistique expliquée à mon chat

8.1 Rappels de seconde

8.1.1 Généralités

Définition 1.1.1 : vocabulaire

On appelle **population** un ensemble composé **d'individus**. **L'effectif total** est le nombre d'individus dans la population (cardinal de l'ensemble). Enfin le **caractère** est la propriété étudié : il peut être **discret** dans le cas où la caractère peut prendre un nombre fini de valeurs (notes à devoirs,...) ou **continu** dans le cas où le caractère prend ses valeurs dans des intervalles (temps entre deux instants,...)

Définition 1.1.2 : série statistique

On appelle série statistique des valeurs x_i du caractère étudié et des effectifs n_i associés

On se donne souvent une série statistique sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_p
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_p

L'effectif total est alors $n = n_1 + n_2 + \dots + n_p = \sum_{i=1}^{p} n_i$

Exemple :
On donne le nombre de restaurants en fonction de leur nombre d'étoiles au guide Michelin (parmi ceux référencés au guide Michelin)

Nombre d'étoiles	0 $\star$	1 $\star$	2 $\star$	3 $\star$
Nombre de restaurants	6675	500	85	26

L'effectif total des restaurants référencés au guide Michelin est $6675 + 500 + 85 + 26 = 7286$

■

Définition 1.1.3 : fréquence

On appelle fréquence f_i associée à la valeur de caractère x_i le nombre, compris entre 0 et 1,

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

Se donner les x_i et les n_i, ou se donner les x_i, les f_i et n revient au même

Propriété 1.1.4

Pour toute série statistique

$$\sum_{i=1}^{p} f_i = 1$$

Autrement dit

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_p = 1$$

Preuve :

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_p = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_p}{n} = \frac{1}{n}(n_1 + n_2 + \ldots + n_p) = \frac{n}{n} = 1$$

ou

$$\sum_{i=1}^{p} f_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i = \frac{n}{n} = 1$$

□

8.1.2 Outils d'étude

Définition 1.2.1 : moyenne d'une série statistique

On appelle moyenne de la série statistique et on note

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p}{n}$$

Autrement dit

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i}$$

Proposition 1.2.2

On a

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$$

Preuve :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i = \sum_{i=1}^{p}\frac{n_i}{n}x_i = \sum_{i=1}^{p} f_i x_i$$

□

Exemple :
En moyenne, combien d'étoiles a un restaurant référencé au guide Michelin :

$$\overline{x} = \frac{0\times 6675 + 1\times 500 + 2\times 85 + 3\times 26}{7286} \simeq 0,083859$$

En moyenne, un restaurant a 0,08 étoile

■

Définition 1.2.3 : médiane

On appelle médiane d'une série statistique rangée par ordre croissant toute valeur qui partage la série en deux séries de même effectif

Méthode pour calculer la médiane d'une série statistique

1. Ranger la série par ordre croissant
2. (a) Si n est pair, alors la médiane est la moyenne de la $\frac{n}{2}$ième valeur de la $(\frac{n}{2}+1)$ième valeur
   (b) Si n est impair, la médiane est la $\frac{n+1}{2}$ième valeur

Exemple :
A un contrôle de cours sur 10, dans une classe de MPSI, les élèves ont obtenu les résultats suivants :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	1	2	4	6	7	3	9	5	3	1	2

1. Calculer l'effectif total de cette série statistique
2. Calculer la moyenne de cette série statistique
3. Calculer la médiane de cette série statistique. Quelle interprétation lui donnez vous ?

1. $$1+2+4+6+7+3+9+5+3+1+2 = 43$$
   (cohérent avec une classe de MSPI lol)
2. $$\frac{1\times 0+2\times 1+4\times 2+6\times 3+7\times 4+3\times 5+9\times 6+5\times 7+3\times 8+1\times 9+2\times 10}{43} \simeq 4,9535$$
   La note moyenne est environ 4,95
3. 43 est impair. On prend donc la note du 22ième élève. Sa note est 5, donc la médiane est 5. Il y a autant d'élèves qui ont une note inférieure ou égale à 5 que d'élèves qui ont une note supérieure ou égale à 5

■

Définition 1.2.4 : quartiles

Les quartile sont les trois valeurs qui divisent une série statistique triée en quatre parts égales, de sorte que chaque partie représente 1/4 de l'échantillon de population

Le deuxième quartile est la médiane

Définition 1.2.5 : écart inter-quartiles

On notant Q_1 et Q_3 les premier et troisième quartiles, on appelle écart inter-quartiles le nombre

$$Q_3 - Q_1$$

L'écart inter-quartiles est un critère de dispersion de la série, on en verra d'autres plus tard dans ce chapitre

Méthode pour calculer le premier et troisième quartile

1. Calculer $\frac{n}{4}$. On note p l'entier directement supérieur à $\frac{n}{4}$
2. Calculer $\frac{3n}{4}$. On note q l'entier directement supérieur à $\frac{3n}{4}$
3. Le premier quartile est la valeur pour le p-ième effectif et le troisième pour le q-ième effectif

Exemple :
Calculer l'écart inter-quartiles de la série de l'exemple précédent

$\frac{43}{4} = 10,75$ donc l'entier immédiatement supérieur est 11. La note du 11ième élève est 3 : le premier quartile est 3

$\frac{3 \times 43}{4} = 32,25$ donc l'entier immédiatement supérieur est 33. La note du 33ième élève est 7 : le troisième quartile est 7

L'écart inter-quartiles est donc de $7 - 3 = 4$

■

Définition 1.2.6 : étendue

On appelle étendue d'une série statistique la différence et le maximum des x_i et le minimum des x_i

8.1.3 Histogramme

On peut représenter une série statistique sous la forme d'un histogramme (diagramme en bâton). Pour chaque valeur de x_i, on met un bâton qui s'élève à l'effectif. Pour bien comprendre, un petit exemple : on représente l'histogramme de la série des notes du contrôle

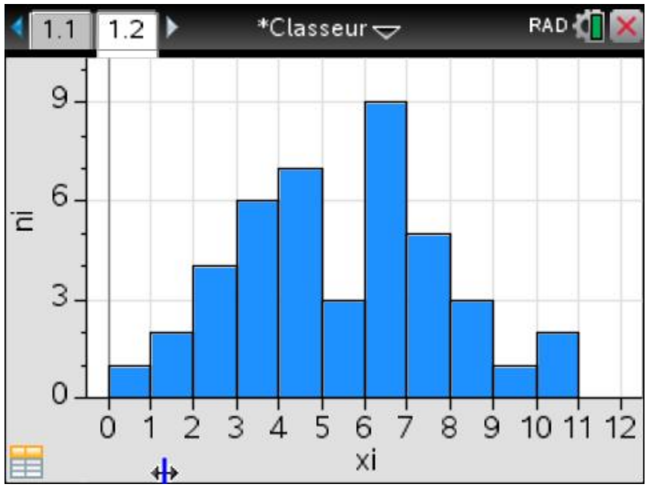


FIGURE 8.1 : Histogramme de la série statistique

Je crois que c'est assez explicite. Il faut néanmoins faire attention à une chose : le bâton qui se trouve entre 0 et 1 représente bien le nombre de personnes qui ont eu la note 0 et ainsi de suite

8.2 Trois nouveaux outils : variance, écart-type et diagramme en boîte

8.2.1 Variance

Définition 2.1.1 : variance d'une série statistique

On appelle variance de la série statistique et on note $V(x)$ (ou parfois Var(x)) le nombre

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2$$

Autrement dit

$$V(x) = \frac{1}{n}\left(n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \ldots + n_p(x_p-\overline{x})^2\right)$$

Propriété 2.1.2

On a toujours $V(x) \geq 0$

Preuve :
Somme de termes positifs

□

Proposition 2.1.3

$$V(x) = \sum_{i=0}^{p} f_i(x_i - \overline{x})^2$$

Preuve :

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{p}(x_i - \overline{x})^2 n_i = \sum_{i=0}^{p}(x_i - \overline{x})^2 \frac{n_i}{n} = \sum_{i=1}^{p}(x_i - \overline{x})^2 f_i$$

□

Exemple :
Calculer la variance de l'exemple sur le contrôle

$$\begin{aligned}V(x) = \ & \frac{1}{43}(1\times(0-4,95)^2 + 2\times(1-4,95)^2 + 4\times(2-4,95)^2 + 6\times(3-4,95)^2 + 7\times(4-4,95)^2 + 3\times(5-4,95)^2 \\ & +9\times(6-4,95)^2 + 5\times(7-4,95)^2 + 3\times(8-4,95)^2 + 1\times(9-4,95)^2 + 2\times(10-4,95)^2) \simeq 5,72\end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.4 : formule de König-Huygens

On a

$$V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Preuve :
L'idée est de développer le $(x_i - \overline{x})^2$:

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)$$

$$V(x) = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{p} 2n_i x_i\overline{x} + \sum_{i=1}^{p} n_i\overline{x}^2$$

$$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i + \overline{x}^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i$$

(on peut sortir les constantes des sommes).
Or $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2 = \overline{x^2}$, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i = \overline{x}$ et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i = 1$ donc

$$V(x) = \overline{x^2} - 2\overline{x}\times\overline{x} + \overline{x}^2$$

$$V(x) = \overline{x^2} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2$$

$$V(x) = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

□

La variance sert à mesurer la dispersion des données dans une série statistique : les effectifs dont la valeur est proche de la moyenne n'ont pas beaucoup d'importance dans la variance car $(x_i - \overline{x})^2$ est alors petit. Les effectifs dont la valeur est éloignée de la moyenne, eux, ont une grande importance dans la variance car $(x_i - \overline{x})^2$ est alors grand. Ainsi, plus il y a d'effectifs éloignés de la moyenne, plus la variance est grande avec une évolution linéaire en fonction de l'effectif, quadratique (de manière carrée) en fonction de l'écart à la moyenne

8.2.2 Ecart-type

Définition 2.2.1 : écart-type

On appelle écart-type d'une série statistique et on note $\sigma(x)$ le nombre

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

Proposition 2.2.2 : formules donnant l'écart-type

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} f_i(x_i - \overline{x})^2}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

L'écart type sert lui à mesurer les dispersions dans des données

Exemple :
Dans le cas du contrôle, on a

$$\sigma = 2,391$$

■

8.2.3 Diagramme en boîte

Aussi appelé diagramme de boîte à moustache, il permet de rassembler sur un diagramme : $x_{min}, x_{max}, Q_1, Q_2, Q_3$. Voilà à quoi il ressemble et comment le construire :

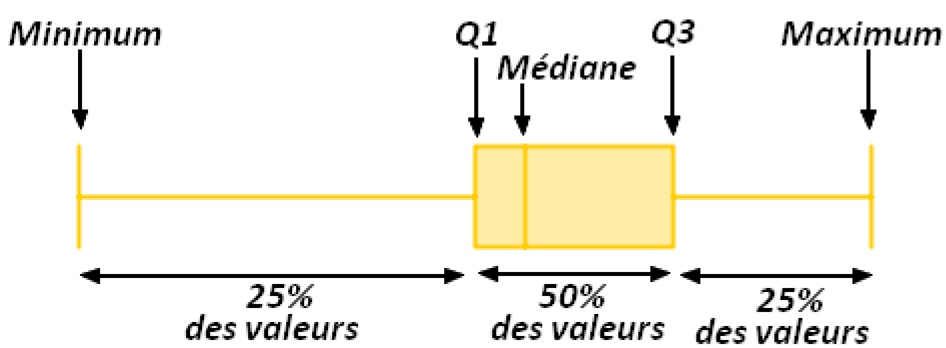


FIGURE 8.2 : Allure d'un diagramme en boîte

Méthode pour tracer un diagramme en boîte

1. Tracer une droite graduée qui couvre au moins l'intervalle $[x_{min}, x_{max}]$
2. Placer sur cette droite graduée x_{min}, x_{max} ,Q_1, Q_2 (médiane) et Q_3
3. Placer le rectangle et les moustaches(les moustaches sont les segments de x_{min} vers Q_1 et de Q_3 vers x_{max}

Exemple :
Le diagramme en boîte de l'interro est

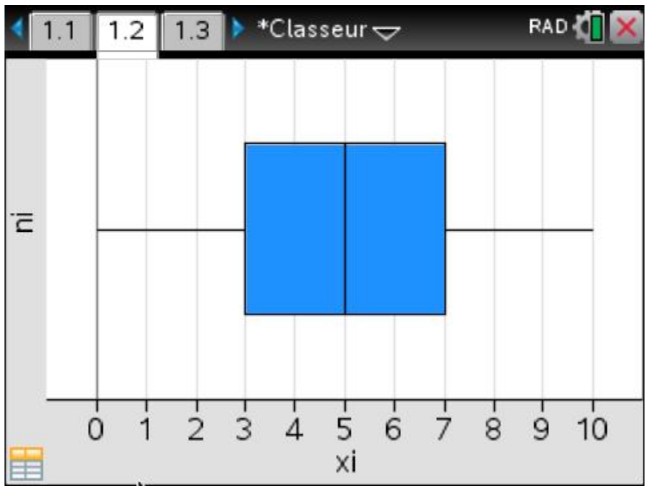


FIGURE 8.3 : Diagramme en boite de la série statistique de l'interro

■

8.3 Etudier une série statistique

Normalement vous serez guidés lorsqu'on vous demandra d'étudier une série statistique. Il faut retenir néanmoins que la moyenne va bien avec l'écart type et la médiane va bien avec l'écart inter-quartiles.

Ne pas oublier que la calculatrice fait très bien les calculs de stats aussi...

Exemple :
On a réuni les tailles des élèves d'un classe :

Tailles (cm)	150	155	160	165	170	175	180
Effectif	3	7	5	5	2	1	1

Donner la moyenne, la médiane, les quartiles, l'écart inter-quartiles, l'écart-type, l'histogramme et le diagramme en boite.

Sans justification :

$$\overline{x} = 163,94$$

$$\sigma = 9,11$$

$$Q_1 = 155$$

$$Q_3 = 170$$

$$M = 165$$

$$Q_3 - Q_1 = 15$$

puis

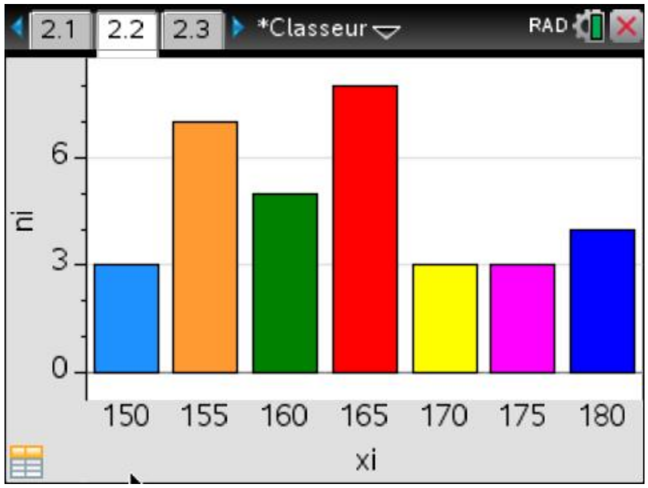


FIGURE 8.4 : Histogramme

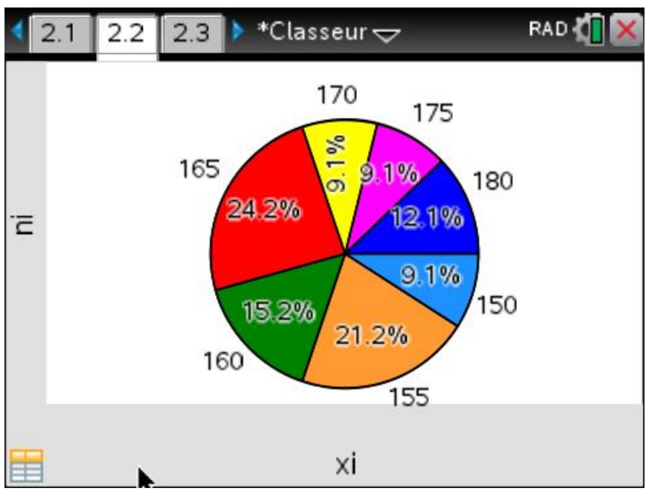


FIGURE 8.5 : Diagramme circulaire

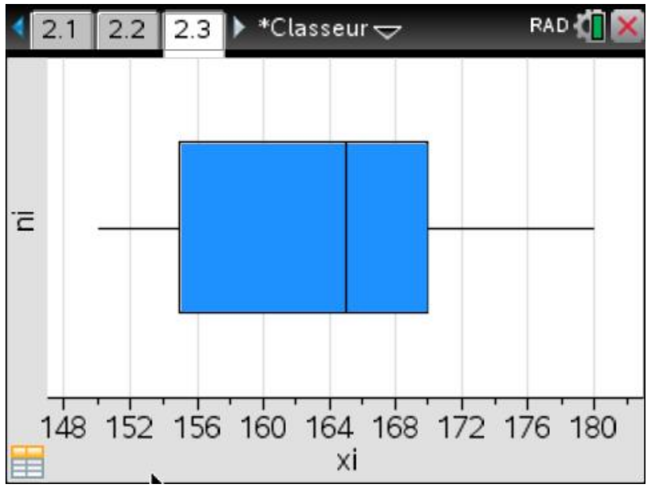


FIGURE 8.6 : Diagramme en boites

■

Remarques :

- Si la série est donnée sous la forme

x_i	$[a_1, b_1[$	$[a_2, b_2[$	$\dots$	$[a_p, b_p[$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_p

alors on applique les résultats précédents (sauf pour l'histogramme) à

x_i	$x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$	$x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$	$\dots$	$x_p = \dfrac{a_p + b_p}{2}$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_p

- On demande souvent de calculer l'intervalle $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$ car il contient pas mal d'effectifs... (à méditer)

⊠

Chapitre 9

Probabilités

9.1 Langage des évènements

Définition 1.0.1 : univers

On réalise une expérience. Une issue est un résultat possible de l'expérience. On appelle univers de cette expérience et on note Ω l'ensembles des issues possibles

Exemples :

- On s'intéresse au lancé d'un dé à six faces. Les résultats possibles sont $1, 2, 3, 4, 5, 6$ donc

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- On s'intéresse au lancé d'une pièce. les résultats possibles sont "pile" (P) et "face" (F), ainsi

$$\Omega = \{P, F\}$$

- Lors d'un oral d'anglais au bac, le candidat tire au sort un sujet parmi les 4 suivants : Mythes et Héros (H), Environnement (E), Vie en société (S), Mondialisation (M). On a alors

$$\Omega = \{H, E, S, M\}$$

■

Définition 1.0.2 : évènement

Soit Ω un univers. On appelle évènement une partie de Ω (c'est-à-dire un ensemble inclus dans Ω)

On a toujours

$$\varnothing \subset \Omega$$
$$\Omega \subset \Omega$$

donc $\varnothing$ et Ω sont toujours des évènements

$\varnothing$ est appelé évènement impossible. Ω est appelé évènement certain.

Exemple :
On reprend l'exemple de l'oral d'anglais

A : "Tirer le sujet sur l'environnement" est un évènement : c'est l'évènement : $A = \{E\} \subset \Omega = \{H, E, S, M\}$

B : "Tirer un sujet qui n'est pas la mondialisation" est un évènement : $B = \{H, E, S\} \subset \Omega$

C : "Tirer un sujet de géographie" est un évènement : c'est l'évènement impossible $\varnothing$

D : "Tirer un sujet qui n'est pas du français" est un évènement : c'est l'évènement certain Ω

■

Propriété 1.0.3

Soit Ω un univers et A, B deux évènements. Alors

- $A \cap B$ est un évènement qui correspond à l'évènement A ET B
- $A \cup B$ est un évènement qui correspond à l'évènement A OU B (OU non exclusif)
- $\overline{A} = \Omega \backslash A$ est un évènement qui correspond à l'évènement $non(A)$

Preuve :
Si $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$ alors $A \cap B \subset \Omega$ et $A \cup B \subset \Omega$

De plus si $A \subset \Omega$ alors $\Omega \backslash A \subset \Omega$

(pour plus de détails : ⇆ raisonnements ensemblistes page 151)

□

Définition 1.0.4 : évènements incompatibles

Soit A et B deux évènements. On dit que A et B sont incompatible si

$$A \cap B = \varnothing$$

Remarques :

- l'évènement impossible $\varnothing$ est incompatible avec tout évènement
- A et $\overline{A}$ sont incompatibles car $A \cap (\Omega \backslash A) = \varnothing$

⊠

Exemple :
On lance un dé à six faces

1. Donner l'univers Ω
2. On considère les évènements
   - A : "Obtenir le nombre 4"
   - B : "Obtenir un nombre impair"
   - C : "Obtenir un nombre différent de 6"

   Exprimer A, B, C sous forme d'ensembles

3. Exprimer $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ sous forme d'ensemble et en phrase. En déduire deux évènements incompatibles

1. $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. $$A = \{4\}$$
$$B = \{1, 3, 5\}$$
$$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

3. $A \cup B$: "Obtenir 4 ou un nombre impair"
$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$$
$A \cap B$: "Obtenir le nombre 4 et un nombre impair
$$A \cap B = \varnothing$$
A et B sont incompatibles

$A \cap C$: "Obtenir le nombre 4 et un nombre différent de 6"
$$A \cap C = \{4\}$$
$B \cap C$: "Obtenir un nombre impair différent de 6"
$$B \cap C = \{1, 3, 5\}$$

■

9.2 Probabilités

On considère
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$
un univers
Les ω_i sont appelés évènement élémentaire

Définition 2.0.1 : probabilité

On définit une probabilité P sur Ω en associant à chaque ω_i un nombre $p_i \in [0, 1]$ tel que $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$. On a alors
$$P(\{\omega_i\}) = p_i$$
De plus pour tout $A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \dots, \omega_{a_k}\} = \{\omega_{a_1}\} \cup \{\omega_{a_2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{a_k}\}$ composé d'évènements élémentaires, on a
$$P(A) = P(\{\omega_{a_1}\}) + P(\{\omega_{a_2}\}) + \dots + P(\{\omega_{a_k}\}) = p_{a_1} + p_{a_2} + \dots + p_{a_k}$$

Exemple :
On considère un dé truqué dont les probabilités associées sont

1	2	3	4	5	6
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

On a bien $0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,5 = 1$. L'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Calculons les probabilités des évènements suivants :

1. $A = \{5\}$
2. B = "Obtenir un nombre pair"
3. C :"Obtenir un nombre impair"
4. D :"Obtenir un multiple de 3"
5. $E = B \cap D$

1. $P(A) = P(\{5\}) = 0,1$
2. Les nombres pairs entre 1 et 6 sont $2, 4, 6$ donc $B = \{2, 4, 6\}$. Ainsi
$$P(B) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 0,1 + 0,1 + 0,5 = 0,7$$
3. Les nombres impairs entre 1 et 6 sont $1, 3, 5$ donc $C = \{1, 3, 5\}$. Ainsi
$$P(C) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,3$$
4. Les multiples de 3 entre 1 et 6 sont 3 et 6 donc $D = \{3, 6\}$. Ainsi
$$P(D) = P(\{3\}) + P(\{6\}) = 0,1 + 0,5 = 0,6$$
5. $B \cap D = \{6\}$ donc $P(D) = 0,5$

■

Propriété 2.0.2

Soit Ω un univers et P une probabilité etA, B deux évènements. Alors, on a
$$P(\Omega) = 1$$
$$P(\varnothing) = 0$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve :

- On a
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$
donc
$$P(\Omega) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + \ldots + P(\{\omega_n\})$$
$$P(\Omega) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$
- $\varnothing$ est la réunion d'aucun évènement élémentaire donc $P(\varnothing) = 0$
- On note
$$A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots, \omega_{a_p}, \omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \ldots, \omega_{c_k}\}$$
$$B = \{\omega_{b_1}, \omega_{b_2}, \ldots, \omega_{b_{p'}}, \omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \ldots, \omega_{c_k}\}$$
où $\omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \ldots, \omega_{c_k}$ sont les seuls éléments communs à A et B. Ainsi
$$A \cup B = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots, \omega_{a_p}, \omega_{b_1}, \omega_{b_2}, \ldots, \omega_{b_{p'}}, \omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \ldots, \omega_{c_k}\}$$
$$A \cap B = \{\omega_{c_1}, \omega_{c_2}, \ldots, \omega_{c_k}\}$$

Ainsi

$$P(A) = p_{a_1} + p_{a_2} + \ldots + p_{a_p} + p_{c_1} + p_{c_2} + \ldots + p_{c_k}$$
$$P(B) = p_{b_1} + p_{b_2} + \ldots + p_{b_{p'}} + p_{a_p} + p_{c_1} + p_{c_2} + \ldots + p_{c_k}$$
$$P(A \cup B) = p_{a_1} + p_{a_2} + \ldots + p_{a_p} + p_{b_1} + p_{b_2} + \ldots + p_{b_{p'}} + p_{c_1} + p_{c_2} + \ldots + p_{c_k}$$
$$P(A \cap B) = p_{c_1} + p_{c_2} + \ldots + p_{c_k}$$

d'où la formule

□

Corollaire 2.0.3

Soient Ω un univers et P une probabilité sur Ω. Si A et B sont incompatibles alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Preuve :
Si A et B sont disjoints alors on a

$$A \cap B = \varnothing$$

Ainsi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\varnothing) = P(A) + P(B) - 0 = P(A) + P(B)$$

□

Corollaire 2.0.4 : probabilité du complémentaire

Soient Ω un univers, P une probabilité sur Ω et A un évènement. Alors

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Preuve :
A et $\overline{A}$ étant incompatibles, on a, d'après le corollaire précédent

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

or $A \cup \overline{A} = A \cup (\Omega \backslash A) = \Omega$ donc

$$1 = P(A) + P(\overline{A})$$

d'ou finalement

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

□

Exemple :
On considère un dé à 20 faces, truqué, dont les probabilités sont données par

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,01	0,05	0	0,04	0,2	0,03	0,04	0,07	0,006	0,004	0,05	0,03	0,06	0,09	0,01	0,06	0,1	0,07	0,07	0,01

Calculer la probabilité de l'évènement

A : "Un nombre inférieur ou égal à 17 est tiré"

Pour $\alpha \in [\![1, 20]\!]$, on note A_α l'évènement : "le nombre α sort". Ainsi

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{20}$$

On pourrait calculer
$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_{17})$$
mais ça serait long, du coup on peut calculer
$$P(\overline{A}) = P(A_{18}) + P(A_{19}) + P(A_{20}) = 0,07 + 0,07 + 0,01 = 0,15$$
Ainsi
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0,85$$
■

9.3 Probabilité uniforme

Soit
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$
un univers $(n \geq 1)$

Définition 3.0.1 : probabilité uniforme

On défini la probabilité uniforme par :
$$P(\omega_i) = \frac{1}{n}$$
pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

Preuve :
On vérifie que c'est bien une probabilité :
$$n \geq 1$$
donc
$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$
Ainsi
$$p_i = P(\omega_i) \in [0, 1]$$
De plus
$$\sum_{i=0}^{n} P(\omega_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$$
□

Ainsi si
$$A = \{\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \ldots, \omega_{a_p}\}$$
alors
$$P(A) = \frac{p}{n}$$
$(p \leq n)$

ou autrement dit
$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}}$$
Lorsqu'on utilise la probabilité uniforme, on parle de situation équiprobable

Exemple :
On considère un dé équilibré (donc munit de la probabilité uniforme)

Calculer la probabilité des évènements suivants :

1. A : "Le nombre tiré est 4"
2. B : "Le nombre obtenu est pair"
3. C : "Le nombre obtenu est divisible par 5 ou 2"

1. $P(A) = \frac{1}{6}$
2. $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
3. $P(C) = \frac{3+1}{6} = \frac{2}{3}$

$\blacksquare$

Chapitre 10

Variables aléatoires

Le cours sur les probabilités (⇆ page : 105) est nécessaire pour le cours sur les variables aléatoires.

10.1 Définition et premières propriétés

Définition 1.0.1 : variable aléatoire

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un univers muni d'une probabilité P. On définit une variable aléatoire X sur Ω en associant à chaque évènement élémentaire ω_i un nombre réel x_i ($i \in [\![1, n]\!]$). On note alors $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des nombres réels ainsi obtenus

$(X = x_i)$ est un évènement. On peut alors définir $P(X = x_i)$

Définition 1.0.2 : loi d'une variable aléatoire

Soit X un variable aléatoire sur Ω. On appelle loi de probabilité de X la donnée de $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$

On peut alors donner la loi de X à l'aide d'un tableau

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\dots$	$P(X = x_n)$

Exemples :

1. On considère le jeu suivant : on lance un dé équilibré à six faces. Si le résultat est impair, on perd, en euros, le résultat indiqué et si le résultat est pair on le gagne. On note X le gain (c'est-à-dire la variable aléatoire qui compte combien on gagne)

   (a) Donner l'univers Ω

   (b) Donner $X(\Omega)$

   (c) Donner la loi de X

   (a) L'univers étant l'ensemble des résultats possibles, on a

   $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   (b) $X(\Omega)$ représente l'ensemble des valeurs que peut prendre X ainsi

   $$X(\Omega) = \{-1, +2, -3, +4, -5, +6\} = \{-5, -3, -1, 2, 4, 6\}$$

(c) Il faut se demander pour chaque $x \in X(\Omega)$ quelle est la probabilité d'obtenir x. Par exemple, quelle est la probabilité de perdre 1 euros. Pour perdre 1 euros, il faut tomber sur 1. Ainsi

$$P(X = -1) = \frac{1}{6}$$

En fait, on a même, pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$P(X = x) = \frac{1}{6}$$

x	-5	-3	-1	2	4	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. On considère ici, que pour une naissance, la probabilité d'avoir un garçon est de $0,6$ et celle d'avoir une fille est de $0,4$. On considère une famille de 3 enfants et note Y le nombre de fille

(a) Quels sont les valeurs que peut prendre Y

(b) Donner la loi de Y

(a) Y peut prendre les valeurs 0,1,2 et 3

(b) On réalise un arbre de probabilité

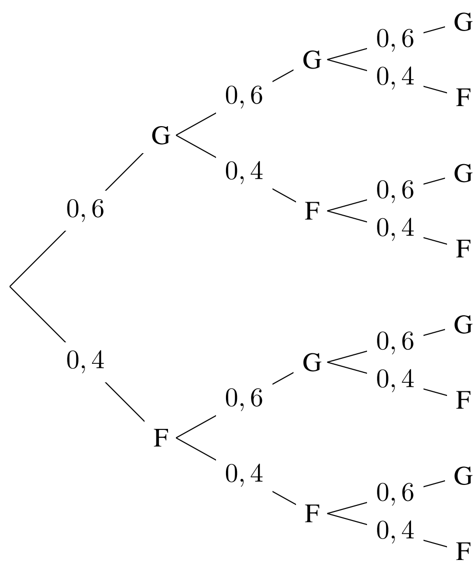


FIGURE 10.1 : Arbre de probabilité modélisation la situation ci-dessus

Le cas 0 fille se produit dans le cas GGG ainsi $P(Y = 0) = 0,6 \times 0,6 \times 0,6 = 0,216$

Le cas 1 fille se produit dans les cas GGF, GFG, et FGG, ainsi $P(Y = 1) = (0,6 \times 0,6 \times 0,4) + (0,6 \times 0,4 \times 0,6) + (0,4 \times 0,6 \times 0,6) = 0,432$

Le cas 2 filles se produit dans les cas GFF, FGF et FFG ainsi $P(Y = 2) = (0,6 \times 0,4 \times 0,4) + (0,4 \times 0,6 \times 0,4) + (0,4 \times 0,4 \times 0,6) = 0,288$

Le cas 3 filles se produit dans le cas FFF, ainsi $P(Y = 3) = 0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,064$

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	$0,216$	$0,432$	$0,288$	$0,064$

Le cas le plus probable est d'avoir une fille

■

Propriété 1.0.3

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P), alors

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_n) = 1$$

Autrement dit

$$\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$$

ou encore

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$$

Propriété 1.0.4

Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, P) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

- $X + Y$ est une variable aléatoire sur (Ω, P)
- λX est une variable aléatoire sur (Ω, P)

Propriété 1.0.5

Plus généralement si X est une variable aléatoire sur (Ω, P) et f une fonction telle que $X(\Omega) \subset \mathscr{D}_f$ alors $f(X)$ est une variable aléatoire sur (Ω, P)

Par exemple si X est une variable aléatoire, alors X^2 aussi

10.2 Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire

10.2.1 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 2.1.1 : espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On appelle espérance de X et on note $E(X)$ le nombre

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \ldots x_n P(X = x_n)$$

Autrement dit

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$$

ou encore

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

Exemples :
On reprend les exemples précédent :

1.
$$E(X) = -5\times P(X=-5)+(-3)\times P(X=-3)+(-1)\times P(X=-1)+2\times P(X=2)+4\times P(X=4)+6\times P(X=6)$$
$$E(X) = -5\times\frac{1}{6}+(-3)\times\frac{1}{6}+(-1)\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$$
$$E(X)=\frac{1}{2}$$

2.
$$E(Y) = 0\times 0,216+1\times 0,432+2\times 0,288+3\times 0,064$$
$$E(Y)=1,136$$

■

L'espérance peut s'interpréter comme une moyenne, ou dans le cas de gains, ce que l'on peut espérer gagner. Par exemple, en jouant au jeu des des dés, on peut espérer gagner 50 centimes. Ce n'est en fait pas possible de gagner 50 centimes sur 1 tour, mais si on joue un grand nombre N de fois, alors le gain total divisé par N sera proche de 50 centimes : en moyenne, par tour, on aura gagné 50 centimes.

De même pour la situation des enfants : en moyenne un couple qui a 3 enfants aura 1,136 fille (et c'est bien une moyenne, à part si ce sont des gros psychopathes qui découpent des enfants...)

Dans les casino, les jeu ont une espérance négative assez proche de 0 (pour le joueur), de manière à ce qu'en moyenne il perde de l'argent, mais pas trop d'un coup pour qu'il revienne jouer

Exemple :
On considère un jeu : on lance deux dés, si la somme est 2 ou 12, on gagne 30 euros, sinon on perd 2 euros. La probabilité d'obtenir un 12 (ou un 2) est de $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$. Ainsi $P(X=30)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36}$ et $P(X=-2)=P(X\neq 30)=1-\frac{2}{36}=\frac{34}{36}$. Ainsi
$$E(X)=30\times\frac{2}{36}-2\times\frac{34}{36}=\frac{-8}{36}\simeq -0,22$$
Conclusion : il ne faut pas jouer à ce jeu, même si on a l'impression qu'on peut gagner beaucoup d'un coup

■

Méthode pour déterminer s'il faut jouer à un jeu

1. Considérer la variable aléatoire X qui compte l'argent gagné (gain)
2. Etablir la loi de X
3. Calculer $E(X)$
4. (a) Si $E(X)>0$ on peut y aller car on va gagner du fric
   (b) Si $E(X)=0$, c'est un jeu entre potes, on peut y aller aussi
   (c) Si $E(X)<0$, on y va pas, on va perdre du fric

Propriété 2.1.2

Soit X une variable aléatoire sur (Ω,P) et a,b deux réels. Alors
$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

Preuve :
On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,
$Y = aX + b$,
$Y(\Omega) = \{ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $X = x_k \Leftrightarrow aX = ax_k \Leftrightarrow aX + b = ax_k + b$ ainsi

$$P(X = x_k) = P(Y = y_k)$$

Ainsi

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} y_k P(Y = y_k)$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} (ay_k + b)P(X = x_k)$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} ax_k P(X = x_k) + \sum_{k=1}^{n} bP(X = x_k)$$

$$E(Y) = a\sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k) + b\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k)$$

or

$$\sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k) = E(X)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = 1$$

donc

$$E(Y) = aX + b$$

Preuve sans le signe somme Σ :

$$E(Y) = y_1 P(Y = y_1) + y_2 P(Y = y_2) + \dots + y_n P(Y = y_n)$$

$$E(Y) = (ax_1 + b)P(X = x_1) + (ax_2 + b)P(X = x_2) + \dots + (ax_n + b)P(X = x_n)$$

$$E(Y) = ax_1 P(X = x_1) + bP(X = x_1) + ax_2 P(X = x_2) + bP(X = x_2) + \dots + ax_n P(X = x_n) + bP(X = x_n)$$

$$E(Y) = a(x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots + x_n P(X = x_n)) + b(P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n)$$

$$E(Y) = aE(X) + b$$

□

10.2.2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition 2.2.1 : variance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). On note $\mu = E(X)$. On appelle variance de X et on note $V(X)$ le nombre

$$V(X) = E((X - \mu)^2)$$

Autrement dit,

$$V(X) = E((X - E(X)^2)$$

ou encore

$$\boxed{V(X) = (x_1 - \mu)^2 P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 P(X = x_2) + \dots + (x_n - \mu)^2 P(X = x_n)}$$

Cette dernière formule nécessite de montrer que $P(X = x_k) = P(Y = y_k)$ où $Y = (X - \mu)^2$, ce qui n'est pas très difficile...

Exemples :
On reprend les exemples du jeu à 2 dés et des enfants

1. On sait que $E(X) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi

$$V(X) = \left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(-3 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(-5 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(6 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{179}{12}$$

2. On sait que $E(Y) = 1,136$. Ainsi

$$V(Y) = (0 - 1,136)^2 \times 0,216 + (1 - 1,136)^2 \times 0,432 + (2 - 1,136)^2 \times 0,288 + (3 - 1,136)^2 \times 0,064 \simeq 0,724$$

■

Propriété 2.2.2

Si X est une variable aléatoire, alors
$$V(X) \geq 0$$

Preuve :
Y a-t-il vraiment besoin d'une preuve ?! (somme de nombres positifs)

□

Définition 2.2.3 : écart-type d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). On appelle écart-type de X et on note $\sigma(X)$ le nombre
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

C'est bien défini car $V(X) \geq 0$

Propriété 2.2.4

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) et $a \in \mathbb{R}$. Alors
$$V(aX) = a^2 V(X)$$
$$\sigma(aX) = a\sigma(X)$$

Preuve :

$$V(aX) = E((aX - E(aX))^2) = E((aX - aE(X))^2) = E(a^2(X - E(X))^2) = a^2 E((X - E(X)^2) = a^2 V(X)$$
$$\sigma(aX) = \sqrt{V(aX)} = \sqrt{a^2 V(X)} = a\sqrt{V(X)} = a\sigma(X)$$

□

La variance et l'écart-type sont deux outils pour mesurer l'écartement des valeurs de X par rapport à son espérance (à sa moyenne). Ainsi une variance (ou écart-type) proche de 0 est synonyme de valeurs très proches de l'espérance et une grande variance (ou un grand écart-type) est synonyme d'un écartement des valeurs de X

10.3 Lois usuelles

10.3.1 Loi uniforme

Définition 3.1.1 : loi uniforme

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) avec $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. On dit que X suit la loi uniforme si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

Exemple :
L'exemple des deux dés qu'on se trimbale depuis le début du chapitre suit la loi uniforme

■

Si X suit la loi uniforme, on note parfois $X \sim \mathscr{U}$

Si $X \sim \mathscr{U}$, alors

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

(c'est la moyenne des x_k)

10.3.2 Loi de Bernoulli

Définition 3.2.1 : épreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire qui possède deux issues : un succès et un échec

Exemple :

1. Le lancer d'une pièce peut être considérer comme une épreuve de Bernoulli si on considère que FACE est un succès et PILE un échec (ou inversement d'ailleurs)
2. On lance un dé à six faces. On dit qu'on a réussi si on tire un 6 et qu'on a échoué si on tire autre chose. C'est une épreuve de Bernoulli

■

Définition 3.2.2Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) et $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si

$$\begin{cases} X \text{ vaut 0 avec une probabilité } (1-p) \\ X \text{ vaut 1 avec une probabilité } p \end{cases}$$

Autrement dit

$$X(\Omega) = \{0, 1\}$$

et

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$P(X = 1) = p$$

Si X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, on note

$$X \sim \mathscr{B}(p)$$

Proposition 3.2.3 : espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) telle que $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors

$$E(X) = p$$

Preuve :
Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors

$$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = p$$

□

Proposition 3.2.4 : variance d'une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) telle que $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors

$$V(X) = p(1 - p)$$

Preuve :
Si $X \sim \mathscr{B}(p)$,

$$V(X) = (0 - p)^2 \times (1 - p) + (1 - p)^2 \times p = p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p = p(1 - p)[p + 1 - p] = p(1 - p)$$

□

Proposition 3.2.5 : lien entre épreuve de Bernoulli et loi de Bernoulli

Soit une épreuve de Bernoulli, dont le succès a une probabilité $p \in [0, 1]$ d'arriver (l'échec a donc une probabilité 1-p d'arriver). Alors la variable aléatoire qui vaut 1 dans la cas du succès et 0 dans le cas de l'échec suit la loi de Bernoulli de paramètre p

Exemple :
Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X qui associe 1 lorsqu'on tire un as dans un jeu de 52 cartes et 0 sinon.

X suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Donc $E(X) = \frac{1}{13}$ et $V(X) = \frac{1}{13} \times \frac{12}{13} = \frac{12}{169}$

■

10.3.3 Loi Binomiale

En fait, on va consacrer une partie entière à la loi binomiale car y'a pas mal de chose à dire

10.4 Loi binomiale

10.4.1 A la découverte du triangle de Pascal

Définition 4.1.1 : factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle factorielle de n (ou factorielle n ou n factorielle) et on note $n!$ le nombre

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

On pose de plus $0! = 1$

Propriété 4.1.2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n! \times (n+1) = (n+1)!$$

Preuve :

$$n! \times (n+1) = (1 \times 2 \times \ldots \times n) \times (n+1) = 1 \times 2 \times \ldots \times n \times (n+1) = (n+1)!$$

□

Ainsi

$$\frac{(n+1)!}{n+1} = n!$$

Définition 4.1.3 : coefficients binomiaux

Soientt k et n dans $\mathbb{N}$. On définit le nombre $\binom{n}{k}$ (se lit "k parmi n") le nombre

$$\begin{cases} \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } k \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi si $k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Propriété 4.1.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a toujours

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Preuve :

$$\frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$
$$\frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$\square$

Propriété 4.1.5

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \leq n$. On a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Preuve :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\square$

Propriété 4.1.6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Preuve :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

On réduit ensuite les fractions au même dénominateur

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = (k+1)\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} + (n-k)\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = [(k+1)+(n-k)] \times \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = (n+1) \times \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$$

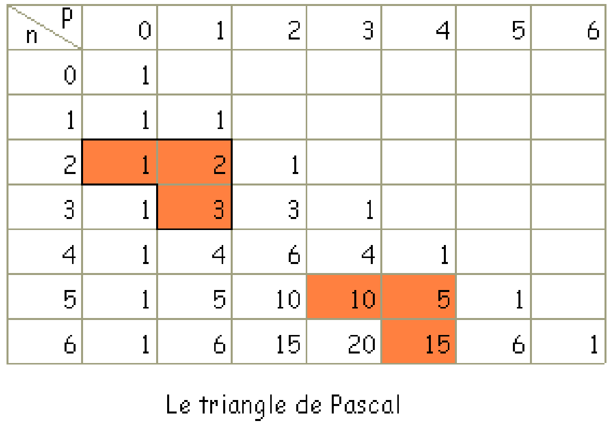
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$\square$

Cette formule nous conduit au triangle de Pascal :



n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Le triangle de Pascal

FIGURE 10.2 : Le triangle de Pascal

Le coefficient de la ligne n et de la colonne p est $\binom{n}{p}$. D'après la formule, si l'on somme deux nombres en orange d'une ligne, on obtient le nombre en orange de la ligne d'en dessous
(*Source : http ://www.bibmath.net/dico/p/images/pascal4.gif*)

Une autre représentation du triangle de Pascal est

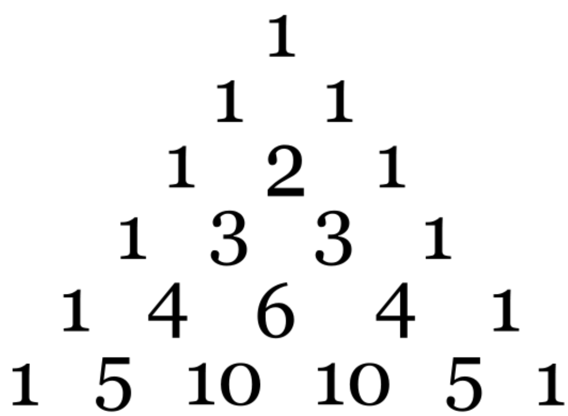


FIGURE 10.3 : Une autre représentation du triangle de Pascal

(*Source : wikipédia*)

10.4.2 Formule du binôme (Hors-programme)

Bon déjà que la factorielle est à la limite du programme, la formule du binôme de Newton, elle, est complètement hors programme mais intéressante et nous servira pour une preuve plus tard.

Soit a et b deux réels

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \times a + 1 \times b$$

$$(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3$$

Ne serait-ce pas les coefficients binomiaux ? ?
Hé bah non, pour 4 ça marche pas......

Non je déconne, évidemment que c'est les coefficients binomiaux

$$(a+b)^4 = 1 \times a^4 + 4 \times a^3 b + 6 \times a^2 b^2 + 4 \times ab^3 + 1 \times b^4$$

Théorème 4.2.1 : formule du binôme

Soit a et b deux réels et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve :
On fait une preuve par récurrence

Initialisation

$$(a+b)^0 = 1$$

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{n-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

Ok

Héridité
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

On montre alors que c'est vrai pour $n+1$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} (a+b)$$

$$(a+b)^{n+1} = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

En posant $k+1 = i$ dans la première somme, on obtient

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-(i-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

puis en reposant $i = k$ dans la première somme (les indices sont muets...)

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

puis en rassemblant les sommes

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n+1-k} [\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}]$$

or $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ d'où

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

puis en remettant les a^{n+1} et b^{n+1} dans la somme respectivement comme terme de rang $n+1$ et de rang 0, on obtient finalement

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

□

Exemple :
Calculer $(a+b)^5$

On regarde les coefficients de la 5-ième ligne du triangle de Pascal : 1 5 10 10 5 1

Ainsi

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

■

Les corollaires suivants sont plus pour la culture générale :

Corollaire 4.2.2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Autrement dit, la somme des coefficients binomiaux sur une ligne est égale à 2 puissance le numéro de la ligne

Preuve :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

□

Corollaire 4.2.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Preuve :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0$$

□

10.4.3 Loi binomiale

Définition 4.3.1 : loi binomiale

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P), $p \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètre n et p si $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Lorsque X suit la loi binomiale de paramètre n et p, on note

$$X \sim \mathscr{B}(n, p)$$

Remarque :

$$\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (1 + (1-p))^n = 1$$

⊠

Proposition 4.3.2 : espérance de la loi binomiale

Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors

$$E(X) = np$$

Preuve :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k)$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$E(X) = np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)}$$

$$E(X) = np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^{k}(1-p)^{n-1-(k)}$$

$$E(X) = np(p+(1-p))^{n-1}$$

$$E(X) = np$$

□

Cette preuve n'est pas exigible

Proposition 4.3.3 : variance de la loi binomiale

Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors

$$V(X) = np(1-p)$$

10.4.4 Lien entre loi binomiale et épreuve de Bernoulli

On réalise $n \in \mathbb{N}^*$ expérience de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On note X le nombre de succès. Alors X suit la loi binomiale de paramètre n et p

Comment s'en rendre compte : bah on fait un arbre

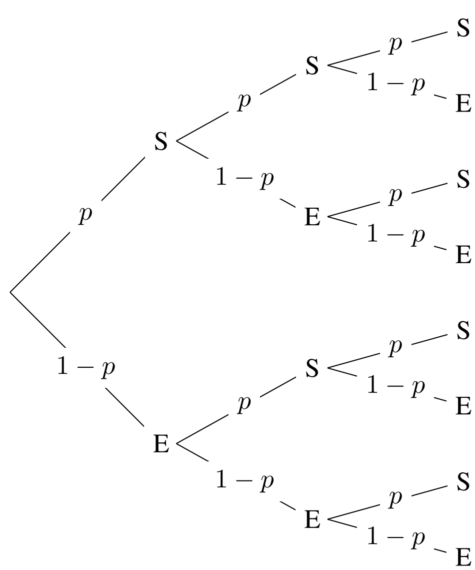


FIGURE 10.4 : Arbre de probabilité représentant la répétition d'une épreuve de Bernoulli

(S : Succès ; E : Echec)

Sur un chemin où il y k succès, il y a k branches à p et $n-k$ branches à $n-p$ donc la probabilité d'avoir CE chemin est $p^k(1-p)^{n-k}$. Or il y a $\binom{n}{k}$ chemin avec k succès dont

$$P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Ce résultat permet de comprendre l'espérance et la variance de la loi binomiale en admettant que $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$. En effet si l'on note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires associées à chacune des expériences de Bernoulli. Alors la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès lors de la répétition des n épreuves s'écrit comme

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

donc

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$
$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)$$
$$E(X) = p + p + \ldots + p$$
$$E(X) = np$$

et

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$
$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \ldots + V(X_n)$$
$$V(X) = p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p)$$
$$V(X) = np(1-p)$$

Exemple :
On tire une carte dans un jeu de 52 cartes, puis on la remet dans le paquet, et on recommence cette opération 25 fois. Calculer la probabilité de tirer exactement 3 fois l'as de coeur

On interprète l'évènement "on tire l'as de coeur" comme un succès de probabilité $\frac{1}{52}$. Ainsi la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois que l'on tire l'as de coeur suit la loi binomiale de paramètre 25 et $\frac{1}{52}$. On déduit

$$P(X = 3) = \binom{25}{3}\left(\frac{1}{52}\right)^3\left(\frac{51}{52}\right)^{22} =$$

■

10.4.5 Représentation de la loi binomiale

Regardons tout d'abord l'effet du changement de n à p constant. On a pris $p = 0.5$ et $n \in \{10, 15, 20, 40\}$

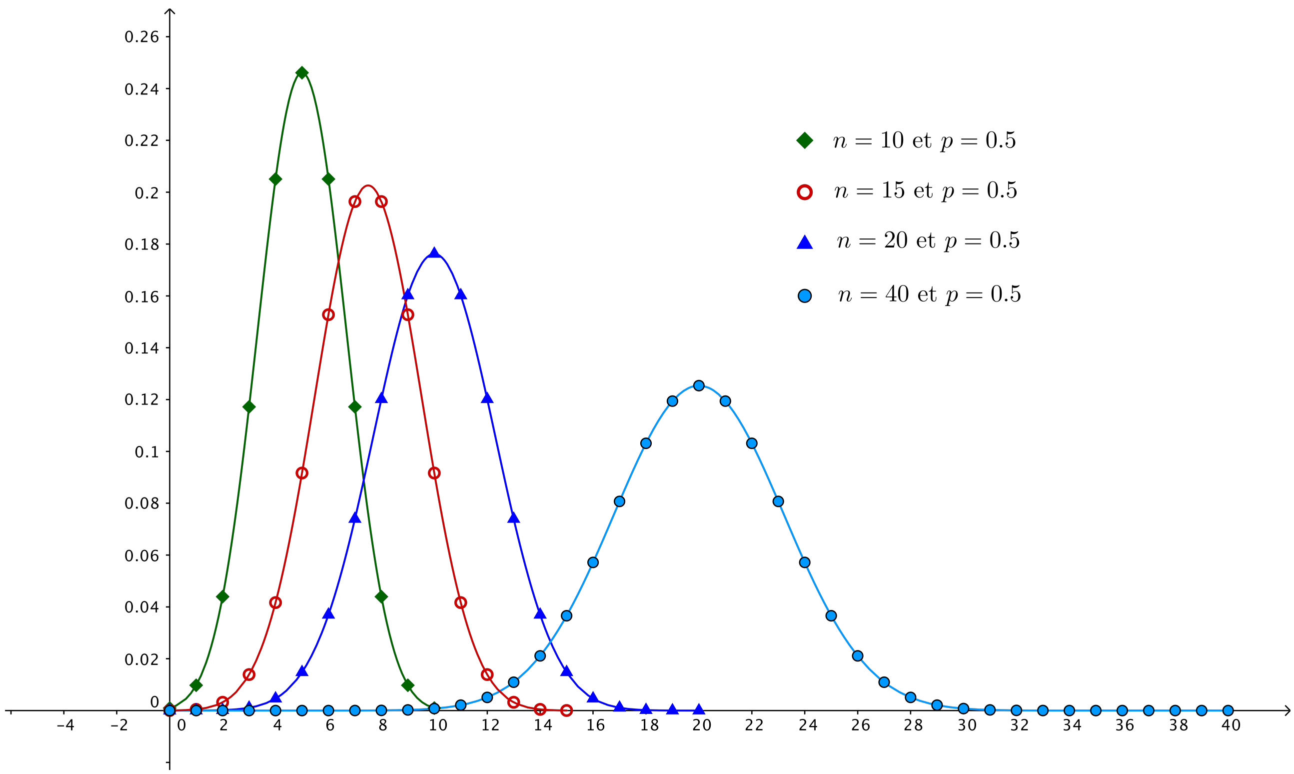


FIGURE 10.5 : Représentation de la loi binomiale pour $p = 0.5$ et $n \in \{10, 15, 20, 40\}$

Les traits continus sont les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \binom{n}{x}0.5^x 0.5^{n-x}$ (après généralisation des puissances non entières et des factorielles non entières que l'on ne fait pas ici) et les points correspondent au $(k, \binom{n}{k}0.5^k 0.5^{n-k})$ $(k \in [\![0, n]\!])$

Regardons maintenant l'effet du changement de p à n constant. On a pris $n = 20$ et $p \in \{0.1, 0.4, 0.7, 0.8\}$

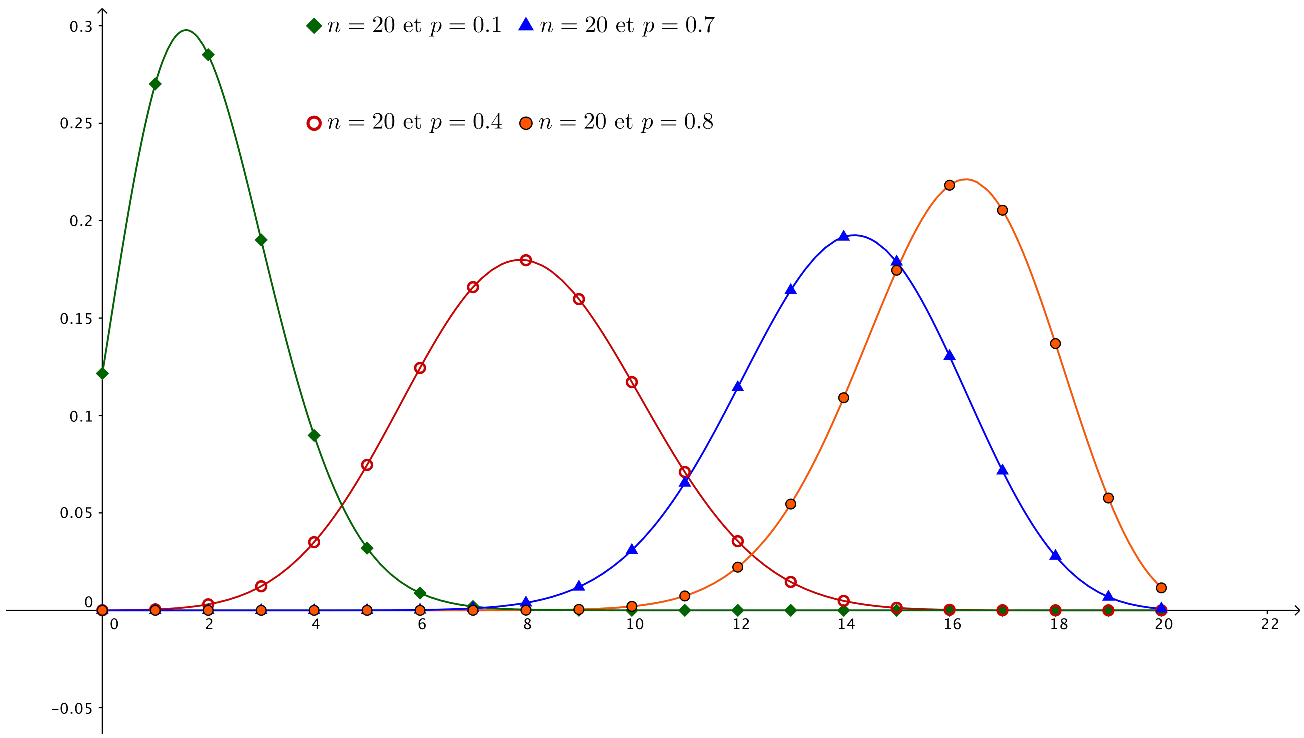


FIGURE 10.6 : Représentation de la loi binomiale pour $n = 20$ et $p \in \{0.1, 0.4, 0.7, 0.8\}$

Les traits continus sont les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \binom{20}{x} p^x (1-p)^{20-x}$ (après généralisation des puissances non entières et des factorielles non entières que l'on ne fait pas ici) et les points correspondent au $(k, \binom{20}{k} p^k (1-p)^{n-k})(k \in [\![0, 20]\!])$

Il est important de faire le lien entre probabilités et statistiques sans pour autant mélanger les notions : la notion de fréquence est analogue à la notion de probabilité, la notion de moyenne est analogue à la notion d'espérance, les notions de variances et écart-type en statistiques sont analogues aux notions de variance et écart-type en probabilités.

Chapitre 11

Echantillonage

11.1 Contextualisation

On considère une population P, composées d'individus et on s'intéresse à l'apparition d'un caractère C dans cette population (⥃ cours sur les statistiques pour le vocabulaire : p. 95). On sait que le caractère C apparait avec une proportion p dans cette population.

On tire au hasard un échantillon de n dans la population P. On note alors f la fréquence d'apparition de C dans l'échantillon. Comment savoir si cet échantillon est représentatif de la population ?

Exemple :
En France, au 4ème trimestre de 2016, il y avait 10% de chômeurs (source : Insee). On tire au hasard 10000 français et on compte le nombre de chômeurs. Il y a en a 987. Cet échantillon est-il représentatif ?

■

11.2 Rappels de seconde

Théorème 2.0.1

Soit C un caractère présent dans une proportion p dans une population P. On considère un échantillon de taille n de cette population et on note f la fréquence de C dans cet échantillon. On suppose $0,2 \leq p \leq 0,8$ et $n \geq 25$. Alors la probabilité que f soit dans l'intervalle

$$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

est supérieure ou égale à $0,95$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq f \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$$

Vocabulaire :

Si on a tiré un échantillon de taille $n \geq 25$, pour étudier un caractère C de proportion p, et que la fréquence de C dans l'échantillon se trouver dans l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, on dit que **l'échantillon est représentatif de la population au seuil de confiance de 95%**

Exemples :

1. En 2015, en France, 72% des hommes qui passaient le bac l'ont obtenu (source : Insee). On considère un échantillon de 3000 élèves (de sexe masculin) qui viennent de passer le bac. Parmi eux, 2184 élèves l'ont obtenu

   (a) Quel caractère étudie-t-on ?

   (b) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % pour ce caractère et cet échantillon

   (c) Cet échantillon est-il représentatif de la population ?

   (a) On étudie le caractère "avoir obtenu la baccalauréat en 2015"

   (b) On a bien $3000 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,72 \leq 0,8$. Ainsi l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% est

   $$\left[0,72 - \frac{1}{\sqrt{3000}} ; 0,72 + \frac{1}{\sqrt{3000}}\right]$$

   $$[0,7; 0,73]$$

   (c) Calculons la fréquence f d'apparition du caractère dans cet échantillon :

   $$f = \frac{2184}{3000} = 0,728$$

   $0,728 \in [0,7; 0,73]$ donc cet échantillon est représentatif au seuil de confiance de 95%

2. En 2016, 48,9% des femmes ont fait une déclaration à la police après un vol (source : Insee). On considère un échantillon de 500 femmes qui ont été victimes de vols. Parmi elles, 275 l'ont déclaré à la police. Cet échantillon est-il représentatif ?

   On étudie le caractère : "avoir déclaré le vol"

   On a $500 \geq 25$ et $0,2 \leq 0,489 \leq 0,8$ donc un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est

   $$\left[0,489 - \frac{1}{\sqrt{500}} ; 0,489 + \frac{1}{\sqrt{500}}\right]$$

   $$[0,444; 0,533]$$

   Calculons la fréquence f d'apparition du caractère C dans cet échantillon :

   $$f = \frac{275}{500} = 0,55$$

   $0,55 \notin [0,444; 0,533]$ donc cet échantillon n'est pas représentatif au seuil de confiance de 95%.

■

Méthode pour montrer qu'un échantillon est ou n'est pas représentatif

1. Rappeler le caractère étudié
2. Vérifier que $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$
3. Etablir l'intervalle de fluctuation
   $$\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$
4. Calculer la fréquence f d'apparition du caractère dans l'échantillon
5. Si $f \in [p - \frac{1}{\sqrt{n}}, p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ alors l'échantillon est représentatif au seuil de confiance de 95%. Sinon il ne l'est pas

Remarques :

- Plus n est grand, moins l'intervalle est large
- Si $n \geq 25$ alors $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,2$. Ainsi, on est sur que

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$$

$$p + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$$

$\boxtimes$

11.3 Lien avec la loi binomiale

Soit C un caractère de proportion p. On note S le succès "l'individu possède la caractère S". Alors, lorsqu'on tire un individu au hasard, on réalise une expérience de Bernoulli de paramètre p. Ainsi en notant X le nombre d'individus possédant le caractère C dans un échantillon de taille n, on remarque que X suit la loi binomial de paramètre n et p. On s'intéresse alors à la variable aléatoire $F = \dfrac{X}{n}$ qui représente la fréquence aléatoire.

D'après le résultat précédent

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95$$

Définition 3.0.1 : intervalle de fluctuation

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ et $F = \dfrac{X}{n}$. Un intervalle de fluctuation de F au seuil de 95 % est un intervalle

- de la forme $[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}]$ avec a et b deux entiers entre 0 et n
- tel que $P\left(\dfrac{a}{n} \leq F \leq \dfrac{b}{n}\right) \geq 0,95$ ce qui équivaut à $P\left(a \leq X \leq b\right) \geq 0,95$

Proposition 3.0.2

Soit a le plus grand entier tel que $P(X \leq a) < 2.5\%$. Soit b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 97.5\%$. Alors $[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}]$ est l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%

Méthode pour établir l'intervalle de fluctuation

On calcule grâce à un tableau les valeurs de $P(X \leq k)$ ($k \in \mathbb{N}$). On recherche alors les a et b grâce au résultat précédent

Prise de décision

On fait l'hypothèse que le caractère C apparait avec une proportion p. On considère un échantillon de taille n où C a une fréquence f. Soit $[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}]$ l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

Si $f \notin [\frac{a}{n}, \frac{b}{n}]$, on rejette l'hypothèse (avec un risque de 5%)
Si $f \in [\frac{a}{n}, \frac{b}{n}]$, on ne rejette pas l'hypothèse

Exemple :
On admet que la proportion de garçon qui naisse par rapport au total de naissance est de $0,516$. On observe sur un échantillon de taille 50, une fréquence de garçon 0,4

Avec un tableur, on obtient $a = 19$ et $b = 33$, on en déduit alors l'intervalle de fluctuation à 95% est

$$\left[\frac{19}{50}, \frac{33}{50}\right] = [0,36; 0,66]$$

$f \in [0,36; 0,66]$ alors on ne rejette pas l'hypothèse

■

Quatrième partie

Algorithmique et raisonnements ensemblistes

Chapitre 12

Algorithmique

► *"L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (analyse, géométrie, statistiques et probabilités, logique), mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets. À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle."*

"De même, les activités de type algorithmique sont signalées par le symbole ◊"◄

Remarque :
Il n'y aucune notation officielle concernant la mise en page des algorithmes. Néanmoins on retrouve souvent la présentation

Algorithme 1 Image par une fonction

Variables :
  x, y : nombres réels
Entrée :
  Saisir x
Traitement :
  y reçoit $3x^2 - 2x + 1$
Sortie :
  Afficher y

FIGURE 12.1 : Une représentation algorithmique

(variables, entrée, traitement, sortie) et il faut la connaitre. Néanmoins, j'ai ici pris le partit d'utiliser algobox, un logiciel d'initiation à la programmation au lycée. (voir algobox sur internet)

⊠

12.1 Cours

12.1.1 Instructions élémentaires

Variables
Sans revenir fondamentalement sur la notion de variable, une variable, c'est quelque chose qui varie (merci captain obvious) et qui est voué à varier pendant l'exécution de l'algorithme. Chaque variable possède un nom et dans le cas d'algorithme elle possède souvent un type : dans algobox il y a trois types : nombre, liste et chaine. Les nombres on sait ce que sait mais en fait pour algobox, les nombres décimaux. Les listes bah c'est des listes. Les chaine se sont des chaines de caractères (par exemple "salut les amis" est une chaine de caractère). Dans d'autres langages de programmation, on trouve d'autre types comme int (entier), float (nombre décimal), string (chaine caractère), array (tableau, liste), none (aucun type), voire d'autres. La notion de type n'est pas forcément importante mais permet d'appréhender les concepts de programmation.

On pointe l'attention qu'il n'y a pas de type réel ou rationnel : il ne peut pas garder en mémoire des nombres avec une infinité de chiffres après la virgule : il y a une précision.

Calculs
On peut faire des calculs dans un algorithme (merci captain obvious $\times 2$). Dans tous les langages de programmation on retrouve 4 opérations de base : $+$ (somme), $-$ (soustraction), $*$(multiplication), $/$ (division par un nombre non nul) et $\%$ ($a\%b$ renvoie le reste la division euclidienne de a par b). Après on trouve différentes notation pour autres opérations selon les langages.
Affectation
On a des variables et logiquement, on peut leur donner une valeur : on parle d'**affectation**.

```
DEBUT_ALGORITHME
  variable PREND_LA_VALEUR valeur
FIN_ALGORITHME
```

Commentaire
Il est possible de commenter son code. C'est parfois (mais souvent très peu utilisé dans les algorithmes). Dans quasiment tous les langages de programmation on utilise le // (mais pas tous, par exemple dans celui qui a été utilisé pour écrire ce cours, on utilise le $\%$)
Ainsi on peut écrire

```
DEBUT_ALGORITHME
  Traitement
  // ceci est un commentaire
  Traitement
FIN_ALGORITHME
```

Tout l'intérêt d'un commentaire est de ne pas être exécuté par la machine : le code qui se trouve après // ne sera pas interprété. Par exemple si l'on écrit

```
VARIABLES
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  SAISIR x
  y PREND_LA_VALEUR 3*x+2
  // y PREND_LA_VALEUR 8
  AFFICHER y
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Applications de l'algorithme
>
> x = 2
> y = 8
>
> x = 1
> y = 5
```

12.1.2 Instruction conditionnelle

Regardons d'abord les instructions conditionnelles : Si... Alors... Sinon... (If... Then... Else). Elle s'écrit

```
SI (condition) ALORS
  DEBUT_SI
  Traitement 1
  FIN_SI
SINON
  DEBUT_SINON
  Traitement 2
  FIN_SINON
```

Lorsque l'algorithme arrive au SI, il n'exécute le traitement 1 que si la condition est respectée ; dans ce cas il n'exécute pas le traitement 2. Si la condition n'est pas respectée, alors il n'exécute pas le traitement 1 et exécute le traitement 2

Exemple :
Dans une famille nombreuse (de 47 enfants), le père en a marre de devoir féliciter ou réprimander ses enfants lorsqu'ils ont une bonne ou mauvaise note. Il écrit alors un programme tel que : l'enfant rentre sa note N dans l'ordinateur : si la note est supérieure (ou égale) à 10, le programme félicite l'enfant, sinon il le réprimande.

La condition est ici $N \geq 10$ (qui s'écrit dans algobox N >= 10). Le traitement 1 correspondra à féliciter l'enfant et le traitement 2 à le réprimander.

```
VARIABLES
N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  SAISIR N
  SI (N >= 10) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "Félicitations"
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    AFFICHER "C'est pas bien"
    FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Applications de l'algorithme
>
> N = 12
> "Félicitations"
>
> N = 3
> "C'est pas bien"
```

■

On peut affiner ces structures avec Si (condition 1) Alors Traitement 1 Sinon Si (condition 2) Alors Traitement 2 Sinon Traitement 3 (If ... Then ... Else if ... Then ... Else ...). Ces structures ne sont pas vraiment au programme mais on peut les créer en emboitant des structures Si ... Alors ... Sinon ... :

```
DEBUT_ALGORITHME
  SI (condition 1) ALORS
    DEBUT_SI
    Traitement 1
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    SI (condition 2) ALORS
      DEBUT_SI
      Traitement 2
      FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      Traitement 3
      FIN_SINON
    FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Exemple :
On reprend notre père de famille nombreuse, qui veut que son programme affiche

- Très bien si $N \in [15, 20]$
- Bien si $N \in [10, 15[$
- Mauvais si $N \in [5, 10[$
- Très mauvais si $N \in [0, 5[$

Pour cela, il nous faut trois structures Si... Alors ... Sinon emboités

```
VARIABLES
N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  SAISIR N
  SI (N < 5) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "Très mauvais"
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    SI (N < 10) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "Mauvais"
      FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (N < 15) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "Bien"
        FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        AFFICHER "Très bien"
        FIN_SINON
      FIN_SINON
    FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Applications de l'algorithme
>
> N = 3
> "Très mauvais"
>
> N = 6
> "Mauvais"
>
> N = 14
> "Bien"
>
> N = 17
> "Très bien"
>
>// Il accepte même les notes à virgule
>
> N = 14.5
> "Bien"
```

■

12.1.3 Boucles

On étudie deux sortes de boucle : la boucle Tant que (condition) Faire Traitement (While... Do) et la boucle Pour ... Allant De ... A ... (For ...)

Boucle Tant Que

```
DEBUT_ALGORITHME
  TANT_QUE (condition) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    Traitement
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Lorsque l'algorithme arrive à cette boucle, il commence par vérifier si la condition est vérifiée. Si elle l'est, on dit qu'il entre dans la boucle et effectue une première fois le traitement. A la fin de l'exécution du traitement, l'algorithme regarde si la condition est toujours vérifiée, si c'est le cas, il recommence le traitement du départ, sinon il sort de la boucle. Ainsi l'algorithme va effectuer le traitement TANT QUE la condition reste vrai. L'image de boucle vient du fait qu'une fois arrivé à la fin, il recommence au début.

Exemple :
On lâche une balle d'une hauteur initiale 300cm et suppose qu'a chaque rebonds, la balle perd 10% de sa hauteur (elle remonte jusqu'a 90% de la hauteur qu'elle avait avant le rebond) et on aimerait savoir au bout de combien de rebond, la balle a une hauteur inférieure ou égale à 10cm. On écrit alors l'algorithme suivant

```
1: VARIABLES
2: hauteur EST_DU_TYPE NOMBRE
3: nb_rebonds EST_DU_TYPE NOMBRE
4: DEBUT_ALGORITHME
5:   hauteur PREND_LA_VALEUR 300
6:   nb_rebonds PREND_LA_VALEUR 0
7:   TANT_QUE (hauteur > 10) FAIRE
8:     DEBUT_TANT_QUE
9:     nb_rebonds PREND_LA_VALEUR nb_rebonds + 1
10:    hauteur PREND_LA_VALEUR hauteur * 0.9
11:    FIN_TANT_QUE
12:  AFFICHER nb_rebonds
13: FIN_ALGORITHME
```

Ainsi, tant que la hauteur de la balle est strictement supérieure à 10 cm, il va continuer de la faire rebondir.

```
> // Application de l'algorithme
>
>
> 33
```

Ainsi, il faudra 33 rebonds avant que la hauteur de la balle soit inférieure ou égale à 10 cm. Il est possible d'activer sur Algobox le mode "pas à pas" qui montre toutes les entrées de la boucle

```
> // Application de l'algorithme
>
> Mode Pas à Pas activé
>
>
> #1 Nombres/chaines (ligne 5) -> hauteur:300 | nb_rebonds:0
> #2 Nombres/chaines (ligne 6) -> hauteur:300 | nb_rebonds:0
> Entrée dans le bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE : condition vérifiée (ligne 8)
> #3 Nombres/chaines (ligne 9) -> hauteur:300 | nb_rebonds:1
> #4 Nombres/chaines (ligne 10) -> hauteur:270 | nb_rebonds:1
> Sortie du bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE (ligne 11)
> Entrée dans le bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE : condition vérifiée (ligne 8)
> #5 Nombres/chaines (ligne 9) -> hauteur:270 | nb_rebonds:2
> #5 Nombres/chaines (ligne 9) -> hauteur:243 | nb_rebonds:2
> ...
> Entrée dans le bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE : condition vérifiée (ligne 8)
> #65 Nombres/chaines (ligne 9) -> hauteur:11.445613 | nb_rebonds:32
> #66 Nombres/chaines (ligne 10) -> hauteur:10.301051 | nb_rebonds:32
> Sortie du bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE (ligne 11)
> Entrée dans le bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE : condition vérifiée (ligne 8)
> #67 Nombres/chaines (ligne 9) -> hauteur:10.301051 | nb_rebonds:33
> #68 Nombres/chaines (ligne 10) -> hauteur:9.2709463 | nb_rebonds:33
> Sortie du bloc DEBUT_TANT_QUE/FIN_TANT_QUE (ligne 11) // à ce moment là, l'algorithme
> // va aller tester la condition et va remarquer que la condition n'est pas vérifiée
> // et va donc exécuter la code qui se trouver après la boucle while
> 33
```

Une amélioration de l'algorithme serait de laisser à l'utilisateur le choix de la hauteur initiale, du facteur de perte et de la limite à dépasser

```
VARIABLES
hauteur EST_DU_TYPE NOMBRE
nb_rebonds EST_DU_TYPE NOMBRE
hauteur_ini EST_DU_TYPE NOMBRE
facteur_perte EST_DU_TYPE NOMBRE
limite EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    SAISIR hauteur_ini
    SAISIR facteur_perte
    SAISIR limite
    nb_rebonds PREND_LA_VALEUR 0
    hauteur PREND_LA_VALEUR hauteur_ini
    TANT_QUE (hauteur > limite) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        nb_rebonds PREND_LA_VALEUR nb_rebonds + 1
        hauteur PREND_LA_VALEUR hauteur*(1-facteur_perte)
        FIN_TANT_QUE
    AFFICHER nb_rebonds
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Applications de l'algorithme
>
> hauteur_ini = 300; facteur_perte = 0.1; limite = 10
> 33 // On retrouve bien le même résultat
>
> hauteur_ini = 1000; facteur_perte = 0.5; limite = 20
> 6
>
> hauteur_ini = 1000; facteur_perte = 0.05; limite = 0.5
> 149
```

■

Pour la culture, cette boucle s'appelle la boucle while (litt. tant que) en anglais.

Attention néanmoins à la condition : si la condition ne peut pas changé de statut dans la boucle TANT QUE (et donc qu'elle reste tout le temps vérifiée), l'algorithme va tourner en boucle (lol, non mais vraiment en fait) et du coup soit la langage va dire : "j'ai dépassé le nombre d'itérations maximale", soit va tourner sans s'arrêter : dans les deux cas c'est pas bon... On écrit cet algorithme

```
1: VARIABLES
2: k EST_DU_TYPE NOMBRE
3: DEBUT_ALGORITHME
4:     k PREND_LA_VALEUR 1
5:     TANT_QUE (k > 0) FAIRE
6:         DEBUT_TANT_QUE
7:         k PREND_LA_VALEUR k+1
8:         FIN_TANT_QUE
9:     AFFICHER k
10: FIN_ALGORITHME
```

Il est clair que la condition de la boucle sera toujours vérifiée et ainsi quand on teste l'algorithme

```
> // Applications de l'algorithme
>
>
> ***Algorithme interrompu ligne 8 : dépassement de la capacité autorisée pour les boucles***
```

Cette boucle va nous permettre de créer un jeu : l'ordinateur tire un nombre au hasard entre 1 et 1000. Le joueur doit alors deviner le nombre sachant que l'ordinateur lui : "c'est plus" ou "c'est moins" (on utilisera RANDINT(a,b) pour renvoyer un nombre entier entre a et b)

```
VARIABLES
a_deviner EST_DU_TYPE NOMBRE
reponse EST_DU_TYPE NOMBRE
nb_coups EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a_deviner PREND_LA_VALEUR RAND(1,1000)
  nb_coups PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (reponse != a_deviner) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SAISIR reponse
    SI (reponse > a_deviner) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "c'est moins"
      FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      SI (reponse < a_deviner) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "c'est plus"
        FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        AFFICHER "c'est gagné"
        FIN_SINON
      FIN_SINON
    nb_coups PREND_LA_VALEUR nb_coups + 1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER nb_coups
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Applications de l'algorithme
>
> // Début algorithme
> Entrer reponse : 500
> c'est moins
> Entrer reponse : 250
> c'est plus
> Entrer reponse : 375
> c'est plus
> Entrer reponse : 425
> c'est moins
> Entrer reponse : 400
> c'est moins
> Entrer reponse : 387
> c'est moins
> Entrer reponse : 380
> c'est gagné
> 7
```

Non je n'ai pas tricher, je l'ai vraiment fait en 7 coups

Boucle : Pour... Allant De ... A ... On considère n et m deux entiers tel que $n \leq m$

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR k ALLANT_DE n A m
    DEBUT_POUR
    Traitement
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Cet algorithme va effectuer le traitement avec $k = n$ puis le traitement avec $k = n + 1$ puis ... puis le traitement avec $k = m$. k va ainsi prendre toutes les valeurs entières entre n et m et à chaque fois le traitement va être effectué.

Exemple :
On aimerait tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 3x+2$. En mathématiques, c'est continu, "il n'a pas d'espace entre les points de cette courbe", mais dans la vraie vie de la vérité véritable, on peut pas faire ça, du coup on va dire que l'on veut trace la courbe sur l'intervalle $[x_{min}, x_{max}]$ et que l'on veut un nombre nb_points de points pour tracer la courbe. (On utilisera la fonction TRACER_POINT(x,y))

```
VARIABLES
xmin EST_DU_TYPE NOMBRE
xmax EST_DU_TYPE NOMBRE
nb_points EST_DU_TYPE NOMBRE
pas EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  SAISIR xmin
  SAISIR xmax
  SAISIR nb_points
  pas PREND_LA_VALEUR (xmax-xmin)/nb_points
  POUR k ALLANT_DE 0 A nb_points
    DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR xmin + k*pas
    TRACER_POINT (x,3*x+2)
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

On teste avec $x_{min} = -10$, $x_{max} = 10$ et avec nb_points = 100 puis nb_points = 1000 et on obtient

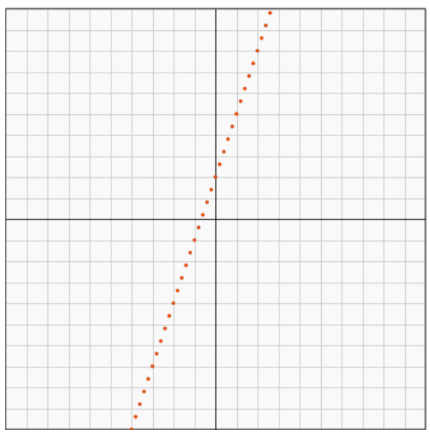


FIGURE 12.2 : Graphique affiché avec nb_points = 100

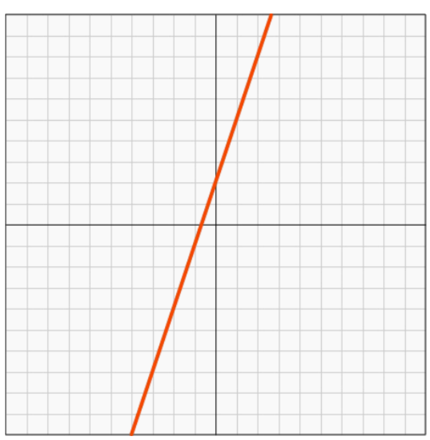


FIGURE 12.3 : Graphique affiché avec nb_points = 100

■

12.2 Algorithmes simples

On cherche tout d'abord à calculer l'image par une fonction f donnée d'un réel x donné. Le code à écrire est alors

```
VARIABLES
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    SAISIR x
    y PREND_LA_VALEUR f(x)
    AFFICHER y
FIN_ALGORITHME
```

Par exemple si $f : x \mapsto 3x + 2$, on écrit le code

```
VARIABLES
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    SAISIR x
    y PREND_LA_VALEUR 3*x+2
    AFFICHER y
FIN_ALGORITHME
```

12.3 Activités algorithmique

Toutes les activités algorithmiques du cours de 1ère S sont regroupés ici.

12.3.1 Trinôme du second degré

On aimerait calculer l'image par un trinôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, d'un réel x. Le code est alors

```
VARIABLES
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    SAISIR a
    SAISIR b
    SAISIR c
    //Le trinome est maintenant défini
    SAISIR x
    y PREND_LA_VALEUR a*x*x + b*x + c
    AFFICHER y
FIN_ALGORITHME
```

Par exemple, $a = 1$, $b = 3$ et $c = -4$ ainsi que $x = 2$, l'algorithme affiche 6

On veut maintenant calculer les racines d'un trinôme. On va avoir besoin d'une structure en Si....Alors pour différencier les cas avec le discriminant. La première étape de l'algorithme (après que l'on ait rentré les coefficients a, b, c du trinôme) est de calculer le discriminant. Ensuite on utilise deux Si...Alors... Sinon :

```
VARIABLES
x EST_DU_TYPE NOMBRE
y EST_DU_TYPE NOMBRE
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
Delta EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    SAISIR a
    SAISIR b
    SAISIR c
    //Le trinome est maintenant défini
```

```
    Delta PREND_LA_VALEUR b*b - 4*a*c
    SI (Delta > 0) ALORS
        DEBUT_SI
        x PREND_LA_VALEUR (-b + sqrt(Delta))/(2*a)
        y PREND_LA_VALEUR (-b-sqrt(Delta))/(2*a)
        AFFICHER x
        AFFICHER y
        FIN_SI
    SINON
        DEBUT_SINON
        SI (Delta = 0) ALORS
            DEBUT_SI
            x PREND_LA_VALEUR -b/(2*a)
            AFFICHER x
            FIN_SI
        SINON
            DEBUT_SINON
            AFFICHER "Le trinôme n'a pas de racines réelles"
            FIN_SINON
        FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

On peut aussi écrire un algorithme qui va permettre de tracer la courbe représentative d'un trinôme en s'inspirant du travail sur la boucle POUR DE A

```
VARIABLES
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
c EST_DU_TYPE NOMBRE
xmin EST_DU_TYPE NOMBRE
xmax EST_DU_TYPE NOMBRE
nb_points EST_DU_TYPE NOMBRE
pas EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    SAISIR a
    SAISIR b
    SAISIR c
    //le trinôme est défini
    SAISIR xmin
    SAISIR xmax
    SAISIR nb_points
    pas PREND_LA_VALEUR (xmax-xmin)/nb_points
    POUR k ALLANT_DE 0 A nb_points
        DEBUT_POUR
        x PREND_LA_VALEUR xmin + k*pas
        TRACER_POINT (x,a*x*x+b*x+c)
        FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Par exemple

```
> // Application de l'algorithme
>
> // Début algorithme
> a = 1
> b = -1
> c = -1
> xmin = -10
> xmax = 10
> nb\_points = 1000
```

on obtient, sur le graphique

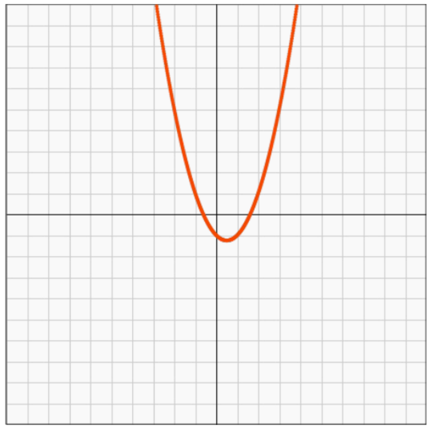


FIGURE 12.4 : Graphique affiché

12.3.2 Fonctions de références

Pas de demande particulière du programme. On peut utiliser l'algorithme de trace de fonction pour représenter les fonctions de références

12.3.3 Dérivation

Pas de demande particulière du programme.

12.3.4 Suites

On peut écrire un algorithme pour calculer (et afficher) les N premiers termes d'une suite u_n définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction connue :

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   SAISIR N
   POUR k ALLANT_DE 0 A N-1
      DEBUT_POUR
      AFFICHERCALCUL f(k)
      TRACER_POINT (k,f(k))
      FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

On peut aussi écrire un algorithme qui permet de calculer (et d'afficher) les N premiers termes d'une suite u_n définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction connue

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
u0 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   SAISIR N
   SAISIR u0
   u PREND_LA_VALEUR u0
   POUR k ALLANT_DE 0 A N-1
      DEBUT_POUR
      u u PREND_LA_VALEUR f(u)
      AFFICHER u
      TRACER_POINT (k,f(k))
      FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Par exemple, on peut particulariser cet algorithme dans le cas où u est la suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 :

```
VARIABLES
k EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
u0 EST_DU_TYPE NOMBRE
q EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   SAISIR N
   SAISIR u0
   SAISIR q
   u PREND_LA_VALEUR u0
   POUR k ALLANT_DE 0 A N-1
      DEBUT_POUR
      u u PREND_LA_VALEUR q*u
      AFFICHER u
      TRACER_POINT (k,f(k))
      FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

On se donne maintenant une suite croissante non majorée (qui tend donc vers l'infini) et on aimerait connaitre le rang N à parti duquel $\forall n \geq N$, $u_n \geq A$, A étant donné

```
VARIABLES
N EST_DU_TYPE NOMBRE
u EST_DU_TYPE NOMBRE
A EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   SAISIR A
   N PREND_LA_VALEUR 0
   u PREND_LA_VALEUR f(N)
   TANT_QUE (u < A) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      N PREND_LA_VALEUR N+1
      u PREND_LA_VALEUR f(N)
      FIN_TANT_QUE
   AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Application de l'algorithme
> On prend $f(n) = 3*\sqrt{n}+2$
>
> // Début de l'algorithme
> A = 100
> 1068
```

On remarque que $3 \times \sqrt{1067} + 2 \simeq 99,99489$ et $3 \times \sqrt{1068} + 2 \simeq 100,0408$
On peut évidemment adapter l'algorithme précédent pour des suites définies par récurrence.

12.3.5 Géométrie plane

Quelques algorithmes sur la géométrie plane

Déterminer si deux vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

```
VARIABLES
x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
y1 EST_DU_TYPE NOMBRE
x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
y2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   SAISIR x1
   SAISIR y1
   SAISIR x2
   SAISIR y2
   SI (x1*y2-x2*y1 = 0) ALORS
      DEBUT_SI
```

```
    |   |   AFFICHER "Les vecteurs sont colinéaires"
    |   |   FIN_SI
    |   SINON
    |   |   DEBUT_SINON
    |   |   AFFICHER "Les vecteurs ne sont pas colinéaires"
    |   |   FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Application de l'algorithme
>
> // Début de l'algorithme
> x1 = 1
> y1 = 0
> x2 = 0
> y2 = 1
> "Les vecteurs ne sont pas colinéaires"
>
> // Début de l'algorithme
> x1 = 2
> y1 = 3
> x2 = 4
> y2 = 6
> "Les vecteurs ne sont colinéaires"
```

On aimerait connaitre une équation cartésienne de droite passant par les points $A(xA, yA)$ et $B(xB, yB)$ (A et B distincts). On détermine (sauf si la droite est parallèle à l'axe ds ordonnées) l'équation réduite de la droite.

```
VARIABLES
xA EST_DU_TYPE NOMBRE
yA EST_DU_TYPE NOMBRE
xB EST_DU_TYPE NOMBRE
coeff_dir EST_DU_TYPE NOMBRE
ord_org EST_DU_TYPE NOMBRE
res EST_DU_TYPE CHAINE
yB EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    |   SAISIR xA
    |   SAISIR yA
    |   SAISIR xB
    |   SAISIR yB
    |   SI (xA = xB) ALORS
    |   |   DEBUT_SI
    |   |   //Cas où la droite est parallèle à l'axe des ordonnées
    |   |   res PREND_LA_VALEUR "L'équation cartésienne de droite est y = " + xA.toString()
    |   |   AFFICHER res
    |   |   FIN_SI
    |   SINON
    |   |   DEBUT_SINON
    |   |   coeff_dir PREND_LA_VALEUR (yB-yA)/(xB-xA)
    |   |   ord_org PREND_LA_VALEUR yA-xA*coeff_dir
    |   |   res PREND_LA_VALEUR "L'équation cartésienne de la droite est y = " + coeff_dir.toString() + "x+" +
ord_org.toString()
    |   |   AFFICHER res
    |   |   FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Application de l'algorithme
>
> // Début de l'algorithme
> xA = 1
> yA = 0
> xB = 1
> yB = 2
```

```
> "L'équation cartésienne de droite est y = 1"
>
> xA = 0
> yA = 1
> xB = 1
> yB = 3
> "L'équation cartésienne de la droite est y = 2x+1"
```

Petite précision sur l'instruction toSring : si x est une variable de type nombre alors x.toString est la variable de type chaine qui représente le nombre x.

12.3.6 Trigonométrie

On va tracer les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ grâce à l'algorithme de trace

```
VARIABLES
xmin EST_DU_TYPE NOMBRE
xmax EST_DU_TYPE NOMBRE
nb_points EST_DU_TYPE NOMBRE
pas EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    SAISIR xmin
    SAISIR xmax
    SAISIR nb_points
    pas PREND_LA_VALEUR (xmax-xmin)/nb_points
    POUR k ALLANT_DE 0 A nb_points
        DEBUT_POUR
        x PREND_LA_VALEUR xmin + k*pas
        TRACER_POINT [rouge] (x,cos(x))
        TRACER_POINT [bleu] (x,sin(x))
        FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

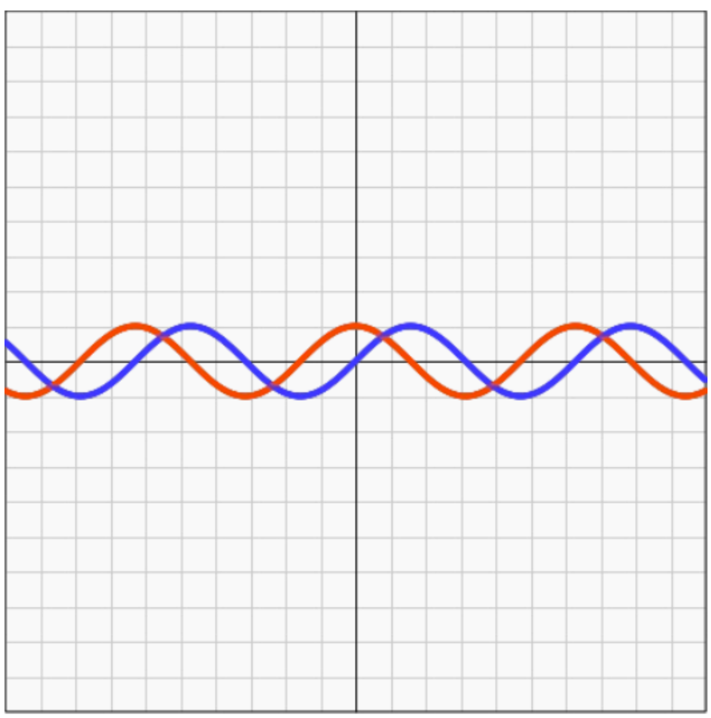


FIGURE 12.5 : Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus tracées grâce à l'algorithme

Tracer maintenant le cercle trigonométrique à l'aide des fonctions cosinus et sinus :

```
VARIABLES
xmin EST_DU_TYPE NOMBRE
xmax EST_DU_TYPE NOMBRE
nb_points EST_DU_TYPE NOMBRE
pas EST_DU_TYPE NOMBRE
k EST_DU_TYPE NOMBRE
x EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  SAISIR xmin
  SAISIR xmax
  SAISIR nb_points
  pas PREND_LA_VALEUR (xmax-xmin)/nb_points
  POUR k ALLANT_DE 0 A nb_points
    DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR xmin + k*pas
    TRACER_POINT (cos(x),sin(x))
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Ainsi en appelant la fonction avec pour paramètre xmin = 0, xmax = 7 (en fait, xmax = 2π suffit) et nb_points = 500, on obtient,

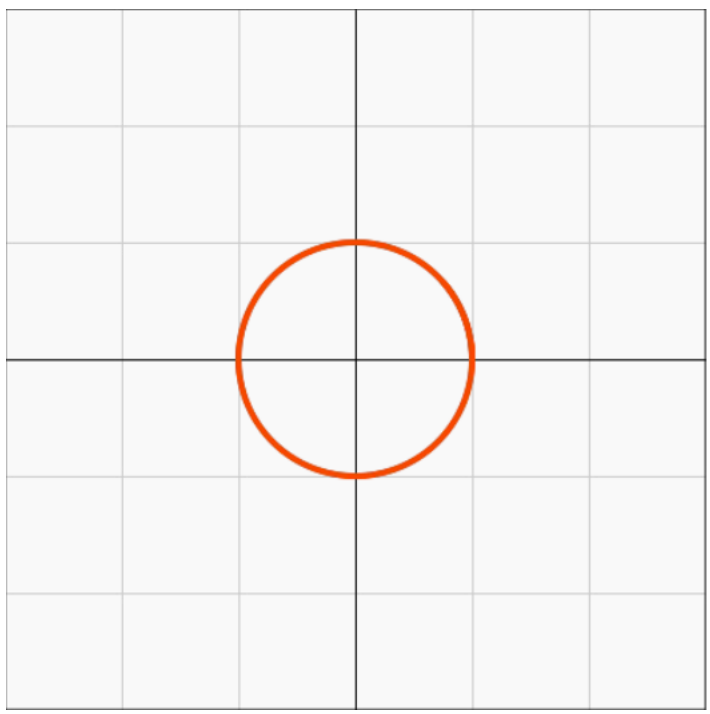


FIGURE 12.6 : Cercle de centre 0 et de rayon 1 tracé à l'aide de l'algorithme

12.3.7 Produit scalaire

On peut écrire un algorithme tout simple qui calcule le produit scalaire

```
VARIABLES
xA EST_DU_TYPE NOMBRE
yA EST_DU_TYPE NOMBRE
xB EST_DU_TYPE NOMBRE
yB EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  SAISIR xA
  SAISIR yA
  SAISIR xB
  SAISIR yB
  AFFICHERCALCUL xA*xB+yA*yB
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Application de l'algorithme
>
> xA = 2; yA = -1; xB = 1; yB = 3
> -1
```

Ecrivons maintenant un algorithme qui nous dit si deux vecteurs sont orthogonaux

```
VARIABLES
xA EST_DU_TYPE NOMBRE
yA EST_DU_TYPE NOMBRE
xB EST_DU_TYPE NOMBRE
yB EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  SAISIR xA
  SAISIR yA
  SAISIR xB
  SAISIR yB
  SI (xA*xB+yA*yB == 0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "Les vecteurs sont orthogonaux"
    FIN_SI
  SINON
    DEBUT_SINON
    AFFICHER "Les vecteurs ne sont pas orthogonaux"
    FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

```
> // Application de l'algorithme
>
> xA = 1; yA = 0; xB = 0; yB = 1
> "Les vecteurs sont orthogonaux"
>
> xA = 2; yA = -1; xB = 1; yB = 3
> "Les vecteurs ne sont pas orthogonaux"
```

12.3.8 Statistiques et probabilités

Certains algorithmes seront à réaliser dans les sujets : pour les découvrir, regarder la correction

Chapitre 13

Raisonnements ensemblistes

13.1 Ensembles

Définition 1.0.1 : ensemble

Un ensemble est une collection d'objets mathématiques. Les objets sont appelés les éléments de l'ensemble

Exemple :

$$A = \{\pi, 4, \sqrt{2}\}$$

est un ensemble. On peut aussi avoir des ensembles de fonctions :

$$B = \left\{x \mapsto x^2, x \mapsto \sin(x), x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$$

voire des ensembles qui mixent les deux

$$C = \{3, x \mapsto x\}$$

■

Définition 1.0.2 : ensembles égaux

On dit que 2 ensembles A et B sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. On note alors $A = B$

Définition 1.0.3 : ensembles usuels

Les ensembles suivants sont souvent utilisés :

- L'ensemble vide $\varnothing$
$$\varnothing = \{\}$$
- L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
- L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$
- L'ensemble des entiers décimaux $\mathbb{D}$, c'est à dire l'ensembles des nombres qui s'écrivent $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$
- L'ensembles des rationnels $\mathbb{Q}$, c'est à dire des nombres qui s'écrivent $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $pgcd(p, q) = 1$
- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$

Définition 1.0.4 : signleton

On appelle singleton un ensemble composé d'un seul élément

Définition 1.0.5 : quelques notations

Soit $A \subset \mathbb{R}$. On note
$$A_+ = \{x \in A / x \geq 0\}$$
$$A_- = \{x \in A / x \leq 0\}$$
$$A^* = \{x \in A / x \neq 0\} = A \backslash \{0\}$$

13.2 Appartenance

Définition 2.0.1 : appartenance

Soit A un ensemble et a un objet mathématique. Si a est un élément de A on dit que a appartient à A et on note $a \in A$

Exemple :
On a
$$3 \in \mathbb{Z}$$
$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$$
$$\pi \notin \mathbb{Q}$$

■

13.3 Inclusion

Définition 3.0.1 : inclusion

Soient A et B deux ensembles. Si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B, alors ont dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$

Autrement dit

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$$

ou encore

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Exemple :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

■

Méthode pour montrer que $A \subset B$

1. Considérer un élément x de A
2. Montrer que $x \in B$ (pour cela utiliser des propriétés relatives à A)

Exemple :
On note

$$A = \{4 \times k / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{2 \times k / k \in \mathbb{Z}\}$$

(A ensemble des multiples de 4 et B ensemble des multiples de 2)
Montrer $A \subset B$

Soit $x \in A$
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 4 \times k$. Alors $x = 2 \times (2k)$ et $2k \in \mathbb{Z}$ donc $x \in B$. On déduit $A \subset B$

■

Définition 3.0.2 : inclusion stricte

Si on a $A \subset B$ et $A \neq B$, alors on dit qu'il ya inclusion stricte de A dans B et on note parfois $A \subsetneq B$

Propriété 3.0.3

Pour tout ensemble A,

$$\varnothing \subset A$$

et

$$A \subset A$$

Preuve :
Y a-t-il vraiment quelque chose à prouver ?

□

Proposition 3.0.4 : double inclusion

Soient A et B deux ensembles. Si $A \subset B$ et si $B \subset A$ alors $A = B$

Preuve :
1ère preuve
Tout élément de A est aussi un élément de B
Tout élément de B est aussi un élément de A
A et B ont donc les mêmes éléments et sont par conséquents égaux

2ème preuve
Supposons par l'absurde $A \neq B$ 1er cas : il existe un élément x de A tel que $x \notin B$: contradiction avec $A \subset B$
2ème cas : il existe un élément x de B tel que $x \notin A$: contradiction avec $B \subset A$
On obtient une contradiction dans les deux cas donc on a bien $A = B$

□

Méthode pour prouver que deux ensembles A et B sont égaux à l'aide de la double inclusion

1. Montrer que $A \subset B$
2. Montrer que $B \subset A$
3. En déduire $A = B$

13.4 Différence

Définition 4.0.1 : différence de 2 ensembles

Soient A et B deux ensembles. On note $A \backslash B$ l'ensemble constitué des éléments de A qui ne sont pas dans B

Exemple :

$$\{3, 2, 0\} \backslash \{2\} = \{3, 0\}$$

■

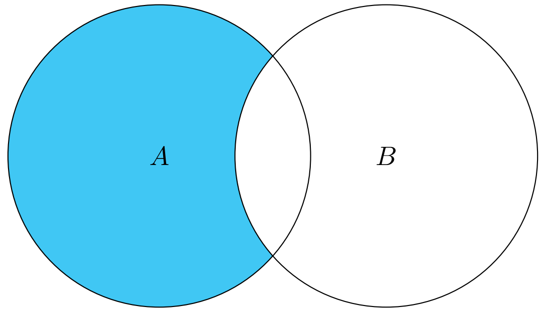


FIGURE 13.1 : Diagramme représentant $A \backslash B$ en bleu

13.5 Réunion

Définition 5.0.1 : réunion de deux ensembles

Soit A et B deux ensembles. On appelle réunion de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble constitué des éléments de A et des éléments de B réunis

Exemple :
Si

$$A = \{2, 8, -3, 4\}$$

et

$$B = \{1, 0, 4\}$$

alors

$$A \cup B = \{2, 8, -3, 4, 1, 0\}$$

■

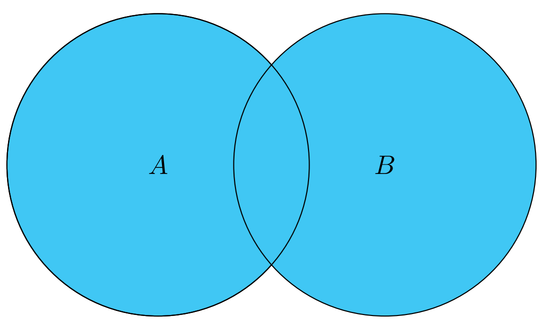


FIGURE 13.2 : Diagramme représentant $A \cup B$ en bleu

On a

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

Définition 5.0.2 : réunion de plusieurs ensembles

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n ensembles. On appelle réunion de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et on note $\bigcup_{k=0}^{n} A_k$

$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Propriété 5.0.3

Soient A et B deux ensembles. Alors

$$A \subset A \cup B$$

$$B \subset A \cup B$$

Preuve :
Par définition, les éléments de A sont dans $A \cup B$ et de même pour les éléments de B

□

Propriété 5.0.4

Soit A, B, C trois ensembles. On suppose $B \subset A$ et $C \subset A$. Alors

$$B \cup C \subset A$$

Preuve :
Tous les éléments de B et C étant aussi des éléments de A, quand on les réunit, bah ça reste tous des éléments de A...

□

Propriété 5.0.5

Soient A et B deux ensembles tels que $A \subset B$. Alors

$$A \cup B = B$$

13.6 Intersection

Définition 6.0.1 : intersection de deux ensembles

Soit A et B deux ensembles. On appelle intersection de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble constitué des éléments communs à A et à B

Exemple :
Si

$$A = \{2, 8, -3, 4\}$$

et

$$B = \{1, 0, 4\}$$

alors

$$A \cap B = \{4\}$$

■

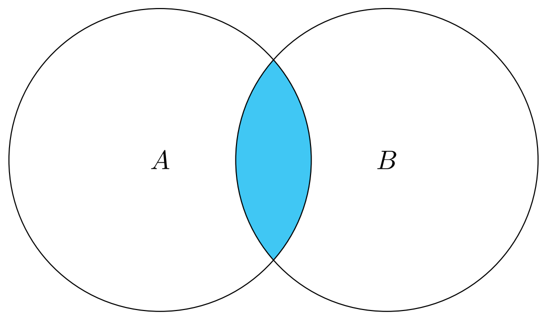


FIGURE 13.3 : Diagramme représentant $A \cap B$ en bleu

On a

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

Définition 6.0.2 : intersection de plusieurs ensembles

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n ensembles. On appelle réunion de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et on note $\bigcap_{k=0}^{n} A_k$

$$\bigcap_{k=0}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

Propriété 6.0.3

Soient A et B deux ensembles. Alors

$$A \cap B \subset A$$

$$A \cap B \subset B$$

Preuve :
Par définition, les éléments de $A \cap B$ sont à la fois dans A et dans B d'où le résultat

□

Propriété 6.0.4

Soit A, B, C trois ensembles. On suppose $A \subset B$ et $A \subset C$. Alors

$$A \subset B \cap C$$

Preuve :
Soit $x \in A$

$A \subset B$ donc $x \in B$
$A \subset C$ donc $x \in C$
$x \in B$ et $x \in C$ donc $x \in A \cap B$

Ainsi

$$A \subset B \cap C$$

□

Propriété 6.0.5

Soient A et B deux ensembles tels que $A \subset B$. Alors

$$A \cap B = A$$

Définition 6.0.6 : ensembles disjoints

Ont dit que 2 ensembles A et B sont disjoints lorsque

$$A \cap B = \varnothing$$

13.7 Distributivité

Propriété 7.0.1

Soient A, B, C trois ensembles, alors

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Preuve :
On peut faire une preuve "à voix haute" mais on va ici raisonner par double inclusion :

$\underline{A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
Soit $x \in A \cap (B \cup C)$. On a alors $x \in A$. On a de plus $x \in B$ ou (non exclusif) $x \in C$. Ainsi on a ($x \in A$ et $x \in B$) ou (non exclusif) ($x \in A$ et $x \in C$) donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\underline{(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)}$
Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. On a ($x \in A$ et $x \in B$) ou (non exclusif) ($x \in A$ et $x \in C$). Ainsi $x \in A$ et ($x \in B$ ou (non exclusif) $x \in C$) donc $x \in A \cap (B \cup C)$

Ainsi

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

□

Propriété 7.0.2

Soient A, B, C trois ensembles, alors

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Preuve :
La preuve est la même (presque !) que précédemment

□

13.8 Complémentaire

Définition 8.0.1 : complémentaire par rapport à un ensemble

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On appelle complémentaire de A par rapport à E (ou dans E) et on note $\complement_E A$ (ou s'il n'a pas ambiguïté $\overline{A}$) l'ensemble

$$\overline{A} = E \backslash A$$

On rencontre parfois d'autres notations, comme

$$\complement_E^A, {}^{\complement}A, A^{\complement}$$

Exemple :
Le complémentaire de $\{\pi, \sqrt{2}, 6, 18, 3\}$ par rapport à $\{14, \pi, 5\sqrt{2}, 6, 18, \sqrt{5}, 3\}$ est $\{14, 5, \sqrt{5}\}$

■

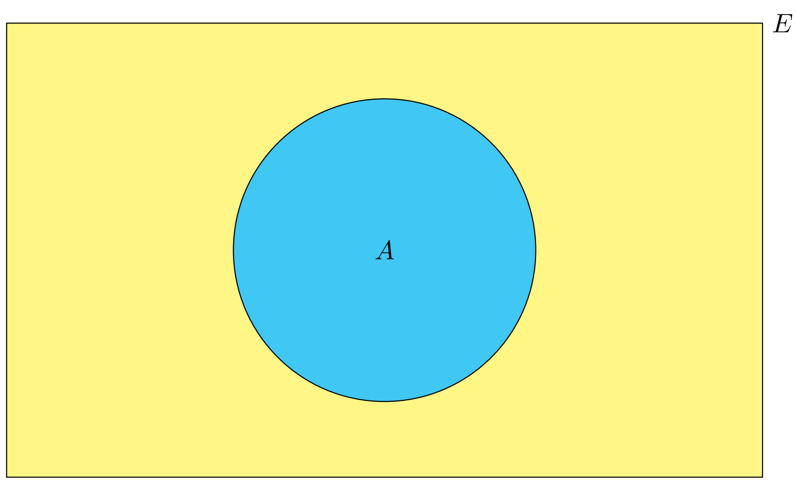


FIGURE 13.4 : Diagramme représentant A en bleu et son complémentaire $\overline{A}$ en jaune

Dans la suite de cette partie, on considère E un ensemble, et on fait les complémentaires par rapport à cet ensemble.

Propriété 8.0.2

On a

$$\overline{E} = \varnothing$$

$$\overline{\varnothing} = E$$

On a même équivalence :

$$\overline{A} = \varnothing \Leftrightarrow A = E$$

$$\overline{A} = E \Leftrightarrow A = \varnothing$$

Propriété 8.0.3 : caractérisation

Soit $A \subset E$. Alors
$$x \in A \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$$
$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

Propriété 8.0.4

Soit $A \subset E$. Alors $\overline{A} \subset E$

Preuve :
Par définition, $\overline{A}$ es l'ensemble des éléments de E privés de ceux de A donc $\overline{A} \subset E$

□

Propriété 8.0.5

Soit $A \subset E$. Alors les ensembles A et $\overline{A}$ sont disjoints ($A \cap \overline{A} = \varnothing$)

Preuve :
En effet, appartenir à $A \cap \overline{A}$ revient à appartenir à A et ne pas appartenir à A : cet ensemble ne peut être que vide

□

Propriété 8.0.6

Soit $A \subset E$. Alors
$$A \cup \overline{A} = E$$

Preuve :
On a $A \subset E$ et $\overline{A} \subset E$ donc $A \cup \overline{A} \subset E$

Soit $x \in E$. Si $x \in A$ bah $x \in A$ et si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A}$ donc $E \subset A \cup \overline{A}$

Finalement
$$E = A \cup \overline{A}$$

□

Propriété 8.0.7

Soit $A \subset E$. Alors
$$\overline{\overline{A}} = A$$

Preuve :

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow x \in \overline{\overline{A}}$$

(d'après la caractérisation), d'où l'égalité

□

13.9 Lois de Morgan

On considère un ensemble E pour les complémentaires

Théorème 9.0.1 : lois de Morgan

Soient $A \subset E$ et $B \subset E$. Alors

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Preuve :
1ère égalité

Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Alors $x \notin A \cup B$. On en déduit que $x \notin A$ et $x \notin B$. Donc $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$ d'ou finalement $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
Ainsi

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

Soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Alors $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$ donc $x \notin A$ et $x \notin B$. Ainsi $x \notin A \cup B$ donc $x \in \overline{A \cup B}$
Ainsi

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

On déduit finalement

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

(par double inclusion)

2ème égalité
Elle se déduit en fait de la première : on applique la première égalité non à A et B mais à $\overline{A}$ et $\overline{B}$:

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}$$

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = A \cap B$$

d'où en passant des 2 côtés au complémentaire

$$\overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A \cap B}$$
$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$$

□

13.10 Cardinal

Définition 10.0.1 : cardinal

Soit A un ensemble. S'il possède un nombre fini d'élément, on appelle cardinal de A et on note Card(A) le nombre d'éléments de A

Exemple :

$$\text{Card}(\{-1, 8, 6, \pi\}) = 4$$
$$\text{Card}([\![1, n]\!]) = n$$
$$\text{Card}([\![0, n]\!]) = n + 1$$

■

Proposition 10.0.2 : cardinal d'un complémentaire

Soit E un ensemble et $A \subset E$. Alors
$$\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

Remarque :
Formule analogue à
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$(1 = P(\Omega))$

$\boxtimes$

Proposition 10.0.3 : cardinal d'une réunion

Soient A et B deux ensembles. Alors
$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Remarque :
Analogue à la formule
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B$$

$\boxtimes$

Proposition 10.0.4 : cardinal d'une réunion disjointe

Soient A et B deux ensembles disjoints. Alors
$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$$

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Notations

Général

- $\leftrightarrows$: liens entre chapitres
- ► ... ◄ : citation du programme
- Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels, on note

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

- Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des réels, on note

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$$

Ensembles

- Un ensemble est souvent noté en majuscule
- On détaille les éléments d'un ensemble grâce à $\{$ et $\}$
- Si k et n sont des entiers tels que $k \leq n$. On note $[\![k, n]\!] = \{k, k+1, \ldots, n\}$. Par exemple $[\![1, n]\!] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$
- On utilise $\in$ pour signifier qu'un élément appartient à un ensemble
- La réunion de deux ensembles est notée grâce à $\cup$
- L'intersection de deux ensembles est notée grâce à $\cap$
- Un nombre entier est habituellement notée p, q, k,...

Analyse

- Une fonction est souvent notée f, g ou h...
- Le discriminant d'un trinôme est noté Δ
- L'ensemble de définition d'une fonction f est noté $\mathscr{D}_f$
- La courbe représentative d'une fonction f est habituellement noté $\mathscr{C}_f$
- Si f est une fonction, on note f' sa dérivée

- Si f et g sont deux fonctions, on note $f + g$ la fonction qui à $x \mapsto f(x) + g(x)$
- Si f et g sont deux fonctions, on note $f \times g$ la fonction qui à $x \mapsto f(x) \times g(x)$
- Si f et g sont deux fonctions, on dit que $f \geq g$ lorsque pour tout x, $f(x) \geq g(x)$
- Si f est une fonction, on appelle zéros de f les solutions de $f(x) = 0$
- Les zéros d'un trinôme sont appelés racines d'un trinôme
- La valeur absolue de x est notée $|x|$
- Une suite est habituellement notée (u_n),(v_n),(w_n),...
- La raison d'une suite arithmétique est habituellement notée r
- La raison d'une suite géométrique est habituellement notée q

Géométrie

- Un angle est habituellement noté α, β, θ,...
- On désigne un vecteur par ses coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Le vecteur nul est noté $\vec{0}$
- On utilise $\cdot$ pour désigner le produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- On utilise $||\vec{u}||$ pour désigner la norme d'un vecteur u

Probabilités et statistiques

- Une variable aléatoire est en général notée X, Y ou Z...
- Si X est une variable aléatoire, alors on note $E(X)$ son espérance
- Si X est une variable aléatoire, alors on note $V(X)$ sa variance
- Si X est une variable aléatoire, alors on note $\sigma(X)$ son écart-type

Annexe B

Logique mathématiques

"En complément des objectifs rappelés ci-dessous, un travail sur la notion d'équivalence doit naturellement être mené en série scientifique (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence)."

"Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples, à :

- *utiliser correctement les connecteurs logiques "et", "ou" et à distinguer leur sens des sens courants de "et", "ou" dans le langage usuel ;*
- *utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;*
- *distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;*
- *utiliser à bon escient les expressions "condition nécessaire", "condition suffisante" ;*
- *formuler la négation d'une proposition ;*
- *utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;*
- *reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.*

B.1 Enoncés, assertions, propriétés

Définition 1.0.1 : énoncé, assertion

Un énoncé est une phrase portant sur des objets mathématiques. Un énoncé peut contenir une ou plusieurs variables libres, c'est à dire susceptibles d'êtres remplacées par des objets mathématiques. Un énoncé ne comportant aucun variable libre est appelée une assertion. Une assertion est susceptible d'avoir une valeur de vérité (vrai ou faux).

Lorsque dans un énoncé, toutes les variables libres sont remplacées par des objets mathématiques, on obtient une assertion.

Exemples :

1. A : "$3 \leq 2$". A est un assertion. Sa valeur de vérité est faux.
2. $$A(x) : "\sqrt{5} \leq x - 4"$$

   $A(x)$ est un énoncé avec une variable libre

$$A(7) : "\sqrt{5} \leq 7 - 4"$$

$A(7)$ est une assertion vraie

$$A(6) : "\sqrt{5} \leq 6 - 4"$$

$A(6)$ est une assertion fausse

3.

$$A(x, y) : "x + y = 4"$$

A est un énoncé avec deux variables libres. $A(1, 1)$ est une assertion fausse alors que $A(3, 1)$ est une assertion vraie

■

Définition 1.0.2 : propriété, relation

Un énoncé qui comporte une variable libre est appelé une propriété. Un énoncé qui comporte 2 variables libres ou plus est appelé une relation

Si E est un ensemble et P une propriété, l'ensemble des éléments de E qui vérifient P est noté

$$\{x \in E / P(x)\}$$

Le / est à comprendre comme "tel que"

Exemples :

$$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\} = [3, +\infty[$$
$$\{n \in \mathbb{N} / 2 \leq n \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

■

B.2 Connecteurs logiques

Définition 2.0.1 : négation d'un énoncé

Si A est un énoncé, l'énoncé contraire de A (qui exprime que A est faux) est appelé négation de A et noté non(A)

Exemples :

$$A : \text{"La route est mouillé"}$$
$$\text{non}(A) : \text{"La route n'est pas mouillé"}$$
$$B(x) : "\sqrt{5} \leq x - 4"$$
$$\text{non}(B(x)) : "\sqrt{5} > x - 4"$$

■

Si A est une assertion vraie alors non(A) est un assertion fausse et inversement : si A est une assertion fausse alors non(A) est une assertion vraie

Définition 2.0.2 : et, ou

Soient A et B deux énoncés.

- l'énoncé A ET B exprime que les deux énoncés sont vraies
- l'énoncé A OU B exprime qu'au moins un des deux énoncés est vrai

Attention : en maths, et sauf indication contraire, **le ou n'est pas exclusif**

Définition 2.0.3 : implication

Soient A et B deux énoncé. L'énoncé (non(A) OU B) est noté $A \Rightarrow B$

Ainsi si A et B sont deux assertions :

- Si A est fausse alors $A \Rightarrow B$ est vraie
- Si B est vraie alors $A \Rightarrow B$ est vraie
- Si A est vraie et B est fausse alors $A \Rightarrow B$ est fausse

Exemples :

1. "$1 \leq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$" est une assertion vraie car "$1 \leq 0$" est une assertion vraie (Note de l'auteur : c'est un bien difficile sur lequel bien des gens se trompent et ont du mal à comprendre le concept : on est bien d'accord que l'assertion de droite est une assertion fausse mais on s'en fout car celle de gauche aussi)
2. "$0 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$" est une assertion fausse
3. "$x > 5 \Rightarrow x^2 > 25$" est une assertion vraie

■

Définition 2.0.4 : énoncé réciproque

L'énoncé $B \Rightarrow A$ est appelé énoncé réciproque de $A \Rightarrow B$

Attention : il ne s'agit pas de l'énoncé contraitre

Définition 2.0.5 : équivalence

L'énoncé

$$(A \Rightarrow B \text{ ET } B \Rightarrow A)$$

est noté

$$A \Leftrightarrow B$$

Si A et B sont des assertions

- Si A et B sont vraies alors $A \Leftrightarrow B$ est vrai
- Si A et B sont fausses alors $A \Leftrightarrow B$ est vraie

- Dans les autres cas $A \Leftrightarrow B$ est fausse

Exemples :

$$"1 \leq 0 \Leftrightarrow 5 \leq 4"$$

est une assertion vraie

$$"x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0"$$

est un énoncé vraie pour tout x

■

B.3 Table de verité

On établit une table de vérité : V pour vrai et F pour faux

A	B	non(A)	A ET B	A OU B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

On remarque alors que

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A))$$

Définition 3.0.1 : contraposée

Si A et B sont des énoncés, non$(B) \Rightarrow$ non(A) est appelé énoncé contraposé de $A \Rightarrow B$. Ils ont toujours même valeur de vérité

Ne pas confondre énoncé contraire, contraposée, réciproque : la réciproque d'un énoncé peut très bien être fausse alors que la contraposée est vraie

Exemples :

A : "S'il pleut, la route est mouillée"

Enoncé réciproque

"Si la route est mouillée, alors il pleut"

qui peut être faux, s'il vient de pleuvoir ou si le voisin lave sa voiture, la route peut être mouillée alors qu'il ne pleut pas ?

Enoncé contraposé

"Si la route n'est pas mouillée, alors il ne pleut pas"

qui lui est bien sûr tout le temps vrai

■

B.4 Quantificateurs

Définition 4.0.1 : quantificateur existentiel

Soit E un ensemble et P une propriété. L'assertion "il existe un élément de E vérifiant la propriété P" s'écrit

$$\exists x \in E, P(x)$$

ou parfois

$$\exists x \in E/P(x)$$

Remarque :
Cette assertion veut dire qu'il existe au moins un élément de E qui vérifie P. L'assertion "il existe un unique élément de E vérifiant P s'écrit"

$$\exists! x \in E, P(x)$$

ou

$$\exists! x \in E/P(x)$$

⊠

Définition 4.0.2 : quantificateur universel

Soit E un ensemble et P une propriété. L'assertion "tous les éléments de E vérifient la propriété P" s'écrit

$$\forall x \in E, P(x)$$

ou parfois

$$\forall x \in E/P(x)$$

Remarque :
Dans les énoncés

$$\exists x \in E, P(x)$$

$$\forall x \in E, P(x)$$

x n'est pas une variable libre, c'est une variable muette

⊠

Proposition 4.0.3 : négation des quantificateurs

La négation de

$$\exists x \in E, P(x)$$

est

$$\forall x \in E, \text{non}(P(x))$$

La négation de

$$\forall x \in E, P(x)$$

est

$$\exists x \in E, \text{non}(P(x))$$

Exemple :
La négation de "Tous les élèves de première sont forts en sport" est "il existe un élève de première qui n'est pas fort en sport"

■

Gros attention : dans un énoncé avec plusieurs quantificateurs, on ne peut pas échanger le sens d'un quantificateur $\forall$ et d'un quantificateur $\exists$. On peut par contre échangé deux mêmes quantificateurs.

Exemple :
On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des français et $R(x, n)$ la relation "n est le numéro de sécurité sociale de x"

L'assertion
$$\forall x \in \mathscr{F}, \exists n \in \mathbb{N}, R(x, n)$$
veut dire que "Tous les français ont un numéro de sécurité sociale" alors
$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathscr{F}, R(x, n)$$
veut dire "il existe un nombre qui soit le numéro de sécurité sociale de tous les français", autrement dit "tous les français ont le même numéro de sécurité sociale"

■

B.5 Condition nécessaire, condition suffisante

Soient E un ensemble et $A(x)$ et $B(x)$ des propriétés. SI pour tout $x \in E$, on a $A(x) \Rightarrow B(x)$ on dit que B est une **condition nécessaire** pour que A soit vraie. On dit alors aussi que A est une **condition nécessaire** pour que A soit vraie. Si pour tout $x \in E$, on a $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, on dit que B est une condition nécessaire et suffisante pour que A soit vraie (et inversement : A est une condition nécessaire et suffisante pour que B soit vraie). On peut alors dire qu'on a A si et seulement si on a B.

Ainsi si B est une condition suffisante à A alors :

- Si on a B alors, on a A
- On peut avoir A sans avoir B

Ainsi si B est une condition nécessaire à A alors :

- Si on a A alors, on a B
- On ne peut avoir A sans avoir B

Exemple :

"S'il pleut la route est mouillée"

"il pleut" est une condition suffisante à "la route est mouillée". "La route est mouillée" est une condition nécessaire à "il pleut".

■

B.6 Modes de raisonnements

Pour montrer qu'une assertion du type
$$\forall x \in E, P(x)$$
il suffit d'exhiber un élément de E qui ne vérifie pas la propriété

Exemple :
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ est pair}$$
est fausse

On a $3^2 = 9$ et 9 n'est pas pair donc c'est bien faux

■

Si E est fini de cardinal petit, on peut montrer qu'une assertion du type

$$\forall x \in E, P(x)$$

est vraie ou fausse par disjonction des cas, c'est à dire en testant tous les cas possibles

Exemple :
Montrer, par disjonction des cas, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est un entier pair.

1er cas : n est pair

Alors n est pair et $n+1$ est impair or le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair donc $n(n+1)$ est pair

2ème cas : n est impair

Alors n est impair et $n+1$ est pair or le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est pair donc $n(n+1)$ est pair

■

Pour montrer qu'une assertion est vraie (resp. fausse), on peut supposer qu'elle est fausse (resp. vraie) et obtenir une contradiction : on appelle cela le raisonnement par l'absurde.
Exemple :
Montrer, en utilisant un raisonnement par l'absurde que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas. *Ce résultat, tout à fait hors programme, est là pour la culture et reste un très beau résultat, mais il fait intervenir une astuce un peu sortie du chapeau*
Supposons par l'absurde que l'ensemble de tous les ensembles existe. Notons le $\mathcal{T}$. On considère l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{T} / x \notin x\}$$

$\mathcal{C}$ est un ensemble donc $\mathcal{C} \in \mathcal{T}$. Est ce que $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$? Supposons tout d'abord $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Par définition de $\mathcal{C}$, on a $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$. Contradiction. Supposons $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$. Alors par définition de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Contradiction là aussi : l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

■

Pour montrer une équivalence

$$A \Leftrightarrow B$$

on peut montrer

$$A \Rightarrow B$$

puis

$$B \Rightarrow A$$

(raisonnement par double implication)

Exemple :
Montrer que

$$||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

Supposons $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Alors

$$||\vec{u}|| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

Ainsi

$$\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = 0$$

Réciproquement, supposons que $||\vec{u}|| = 0$ Alors

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

d'où

$$x^2 + y^2 = 0$$

Or

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$$
$$0 \leq x^2 \leq 0$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

De même $y = 0$ Ainsi $\vec{u} = \vec{0}$

■

Finalement, pour montrer une implication

$$A \Rightarrow B$$

on peut aussi montrer que

$$\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$$

(raisonnement par contraposée)

Exemple :
Montrer, en utilisant un raisonnement par contraposée, que si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $n^2 + n < 0$ alors n strictement positif. La contraposée de cette assertion est n^2 positif ou nul entraine $n^2 + n$ positif ou nul, ce qui est clairement vrai d'où le résultat.

■

Annexe C

Limites

Je vais ici donner les vrais définition des limites de suites et de fonction. Inutile de dire que c'est complètement hors programme.

C.1 Limites de suites

Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n \geq A$$

En fait, ça veut dire que la suite devient aussi grand que l'on veut : en effet ça veut dire que dès que l'on prend un nombre positif, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont au dessus de A. On note alors

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers l'infini si

$$\forall B < 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, u_n \leq B$$

On note alors

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Ca c'était pour les limites infinies. On considère maintenant $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) tend vers ℓ lorsque n tend vers l'infini si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

En fait

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

ainsi, on revient bien à la définition donnée dans le chapitre sur les suites : tout intervalle contenant ℓ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang.On note alors

$$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$$

C.2 Limites de fonctions

Pour les limites de fonctions c'est presque pareil mais pas tu tout : on considère une fonction f (pour simplifier, on l'imagine définie sur $\mathbb{R}$)

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x \geq x_0, f(x) \geq A$$

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \forall B < 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x \geq x_0, f(x) \leq B$$

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x \leq x_0, f(x) \geq A$$

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \forall B < 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} / \forall x \leq x_0, f(x) \leq B$$

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}/\forall x \geq x_0, |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}/\forall x \leq x_0, |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0/|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists\delta > 0/|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty \Leftrightarrow \forall B < 0, \exists\delta > 0/|x - a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq B$$

voili voilou.... Et encore, y'a pas encore les définitions de limites à gauche, limites à droites lol.

Annexe D

Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence a été utilisé pour la première fois par Blaise Pascal (⥃ Biographie de Blaise Pascal, page **??**)

L'idée du raisonnement par récurrence c'est que si on peut monter sur la première marche d'un escalier, et que l'on sait que à partir d'une marche on peut passer à la suivante, alors on peut monter l'escalier.

On utilise le raisonnement par récurrence pour montrer des propriétés qui sont vraies pour tout $\mathbb{N}$ ou pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit P_n une propriété. On montre tout d'abord P_0 (ou P_1 ou P_2, enfin ça dépend du contexte). C'est **l'initialisation**. Ensuite, on passe à ce qu'on appelle **l'héridité** : on fixe $k \in \mathbb{N}$, on suppose que P_k est vraie et on montre P_{k+1}.

Formellement

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 \text{ vraie} \\ \forall k \in \mathbb{N}, P_k \Rightarrow P_{k+1} \end{array}\right. \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ vraie}$$

Exemples :
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{l=0}^{n} l^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Initialisation

$$\sum_{l=0}^{0} l^2 = 0$$

et

$$\frac{0 \times 1 \times 1}{6} = 0$$

donc c'est bon

Héridité :
Soit k, fixé, dans $\mathbb{N}$. On suppose

$$\sum_{l=0}^{k} l^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

alors

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{k+1} l^2 &= \sum_{l=0}^{k} l^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= (k+1)(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1) \\ &= (k+1)(\frac{2k^2+k+6k+6}{6}) \\ &= (k+1)(\frac{2k^2+3k+4k+6}{6}) \\ &= (k+1)(\frac{(k+2)(2k+3)}{6}) \\ &= \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est hériditaire

Conclusion :
La propriété est vraie pour tout n

2ème exemple :

On considère la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2}{2n+1}$$

Initialisation

$$u_0 = 2$$

et

$$\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2$$

donc c'est bon

Héridité :
Soit k, fixé, dans $\mathbb{N}$. On suppose

$$u_k = \frac{2}{2k+1}$$

alors

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= \frac{u_k}{1+u_k} \\
&= \frac{\dfrac{2}{2k+1}}{1+\dfrac{2}{2k+1}} \\
&= \frac{\dfrac{2}{2k+1}\times(2k+1)}{1\times(2k+1)+\dfrac{2}{2k+1}\times(2k+1)} \\
&= \frac{2}{2k+1+2} \\
&= \frac{2}{2(k+1)+1}
\end{aligned}
$$

Ainsi la propriété est héréditaire

Conclusion :
La propriété est vraie pour tout n

■

Annexe E

Culture mathématique

"Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique"

Pythagore (580 av. JC - 485 av. JC)

Naissance : vers 580 av. JC (Samos)
Décès : vers -485 av. JC (Métaponte, 85 ans)
Nationalité : Grecque

Pythagore était surtout un penseur philosophique et un réformateur religieux. Il est connu pour deux grands travaux en mathématiques : le théorème de Pythagore, connu de tous, et pour le nombre d'or

Euclide (300 av. JC)

Nationalité : Grecque

On ne sait pas vraiment quand-est ce qu'Euclide a vécu mais on estime sa vie à 300 av. JC. Il est connu pour de la géométrie : la géométrie euclidienne, ça vient de lui et c'est celle qu'on utilise la plupart du temps (même à moi il arrive rarement de faire de la géométrie sur des ellipsoïdes de révolution dans des hypersphères en dimension 127). Il est aussi connu pour la division euclidienne ($\leftrightarrows$ arithmétique) et l'algorithme d'Euclide ($\leftrightarrows$ arithmétique, calcul de pgcd)

Leonardo Fibonacci (1175 - 1256)

Naissance : vers 1175 (Pise)
Décès : vers 1256 (Pise, 81 ans)
Nationalité : Pisan

Mathématicien pisan, Leonardo Fibonacci est connu pour la suite du même nom : la suite de Fibonacci (elle fera elle aussi l'objet d'un sujet). Il est aussi connu pour quelques travaux sur les suites, la géométrie ou pour avoir introduit certaines notations ($\leftrightarrows$ cours sur les suites).

René Descartes (1596 - 1650)

Naissance : 31 mars 1596 (La Haye)
Décès : 11 février 1650 (Stockholm, 53 ans)
Nationalité : Française

René Descartes était un mathématicien, physicien et philosophe. Son travail de philosophie est connu pour la phrase « Je pense donc je suis ». Son travail de physicien est connu en optique géométrique pour les lois de Snell-Descartes ($\leftrightarrow$ cours de physique). En mathématiques, il a travaillé pour pouvoir adapter des résultats algébriques sur de la géométrie (ce qu'on appelle la géométrie analytique) ($\leftrightarrow$ géométrie)

Pierre de Fermat (1601 - 1665)

Naissance : 1601 (Beaumont-de-Lomagne)
Décès : 12 janvier 1665 (Castres, 64 ans)
Nationalité : Française

Fermat, mathématicien et homme de sciences est connu pour des travaux en maths et en physique. En physique, il a travaillé sur l'optique et a énoncé ce qu'on appelle aujourd'hui le principe de Fermat. On lui doit aussi la méthode des tangentes ($\leftrightarrows$ dérivation pour savoir ce qu'est une tangente). Il a eu une grande importance en arithmétique avec 2 grand théorèmes : le petit théorème de Fermat et le dernier théorème de Fermat (celui ci a mis 300 ans à être prouvé). Il a aussi eu une très grande importance dans la théorie de dérivation ($\leftrightarrows$ dérivation) et a eu des échanges avec Blaise Pascal sur des questions de probabilités (qui en était alors à ses débuts, $\leftrightarrows$ Blaise Pascal). Conclusion, en mathématiques, il a travaillé en arithmétique, sur la dérivation et sur les probabilités.

John Wallis (1616 - 1703)

Naissance : 23 novembre 1616 (Ashford)
Décès : 28 octobre 1703 (Oxford, 83 ans)
Nationalité : Anglaise

Il a inventé le symbole infini. Bon après il a travaillé sur des intégrales ($\leftrightarrows$ terminale pour savoir car qu'est une intégrale) qui portent le doux nom d'intégrales de Wallis. Elles permettent notamment d'établir la formule de Stirling ($\leftrightarrows$ Stirling pour savoir ce qu'est la formule de Stirling). D'un point de vue moins mathématique, il a travaillé sur la phonétique et l'éducation des sourds.

Blaise Pascal (1623 - 1662)

Naissance : 19 juin 1623 (Clermont-Ferrand)
Décès : 19 aout 1662 (Paris, 39 ans)
Nationalité : Française

Il a inventé le raisonnement par récurrence ($\leftrightarrows$ le raisonnement par récurrence et la terminale) et les probabilités ($\leftrightarrows$ probabilités). Il a rendu célèbre le triangle arithmétique (aujourd'hui appelé triangle de Pascal) ($\leftrightarrow$ variables aléatoires). Il a aussi fait quelques travaux en géométrie et en arithmétique.

Christian Huygens (1629 - 1695)

Naissance : 14 avril 1629 (La Haye)
Décès : 8 juillet 1695 (La Haye, 66 ans)
Nationalité : Néerlandaise

Mathématicien physicien néerlandais, Huygens a travaillé sur les probabilités avec Pascal et Fermat sur le problème des partis (problème dont sont partis les probabilités). C'est lui qui a introduit la notion d'espérance ($\leftrightarrows$ variables aléatoires). En physique, il travailla sur les pendules et a établi la formule donnant la période du pendule. Il travailla aussi sur la lumière et en mécanique. ($\leftrightarrows$ physique)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Naissance : 1er juillet 1646 (Leipzig)
Décès : 14 novembre 1695 (Hanovre, 70 ans)
Nationalité : Saint-Empire (actuelle Allemagne)

Leibniz était un philosophe, mathématicien, physicien, logicien, diplomate, juriste et bibliothécaire et philologue. Son travail en mathématiques est très axé sur la dérivation (et l'intégration : $\leftrightarrows$ terminale). Il a notamment prouvé des formules importante et introduit de nouvelles notations, toujours utilisées aujourd'hui. En physique, il a travaillé sur la mécanique et les lois du mouvement. ($\leftrightarrows$ physique)

Abraham de Moivre (1667 - 1754)

Naissance : 26 mai 1667 (Vitry-Le-François)
Décès : 27 novembre 1754 (Londres, 87 ans)
Nationalité : Française

De Moivre a fait quelques travaux en géométrie mais surtout en probabilités (⇆ probabilités). Une formule porte son nom : la formule de De Moivre

$$(cos(x) + isin(x))^n = cos(nx) + isin(nx)$$

où i est tel que $i^2 = -1$ (⇆ complexes (terminale ou sujet))

James Stirling (1692 - 1770)

Naissance : mai 1692 (Stirling)
Décès : 5 décembre 1770 (Edimbourg, 78 ans)
Nationalité : Ecossaise

Il est principalement connu pour la formule de Stirling qui stipule que

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Daniel Bernoulli (1700 - 1782)

Naissance : 8 février 1700 (Groningue)
Décès : 17 mars 1782 (Bâle, 82 ans)
Nationalité : Suisse

Mathématicien et physicien suisse, Bernoulli est connu pour ses travaux de mécanique des fluides en physique et pour son travail en probabilités en mathématiques. Loi de Bernoulli, expérience de Bernoulli, ...(⇆ cours) Il a aussi fait quelques travaux sur la dérivation (⇆ dérivation).

Thomas Bayes (1702 - 1761)

Naissance : vers 1702 (Londres)
Décès : 7 avril 1761 (Tunbridge Wells, 59 ans)
Nationalité : Anglaise

On lui doit les formules de Bayes en probabilité (⇆ sujet) et c'est d'ailleurs un peu près tout. On retiendra aussi quelques travaux en analyse et en dérivation.

Leonhard Euler (1707 - 1783)

Naissance : 15 avril 1707 (Bâle)
Décès : 18 septembre 1783 (Saint-Pétersbourg, 76 ans)
Nationalité : Suisse

C'est le boss du game. Laplace (⇆ plus loin) disais « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous ». Il fut sur des timbres et des billets et fit de grand progrès en mathématique et en physique. Liste non exhaustive : fonctions beta et gamma d'Euler, les sommes d'Euler, les développement Eulérien, droite d'Euler, théorie des graphes, théorie des nombres, analyse (étude des fonctions), trigonométrie, notations (e, i, $f(x)$, Σ pour la somme, sin, cos,. . .) (⇆ maths). Souvent des choses bien compliquées pour des élèves de première. On lui doit une très belle formule, incompréhensible avant la terminale S que voici :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Jean le Rond D'Alembert (1717 - 1783)

Naissance : 16 novembre 1717 (Paris)
Décès : 29 octobre 1783 (Paris, 65 ans)
Nationalité : Française

Il est évidemment connu pour avoir rédigé l'encyclopédie avec Diderot. On lui doit notamment quelques théorèmes sur des notions non abordées en filière scientifique (les « sommes infinies ») et quelques travaux de probabilités avec la martingale de D'Alembert

Jospeh-Louis Lagrange (1736 - 1813)

Naissance : 25 janvier 1736 (Turin)
Décès : 10 avril 1813 (Paris, 77 ans)
Nationalité : Sarde puis Française

Il a travaillé dans des domaines tels que l'arithmétique ou l'analyse (avec notamment les polynômes interpolateurs de Lagrange ($\leftrightarrows$ les polynômes sont des généralisations des trinômes)) ou encore sur la dérivation. En physique, il a résolu le problème des 3 corps, inventé le système métrique avec Lavoisier et fait de la mécanique des fluides. Il a aussi travaillé sur des probabilités.

Nicolas de Condorcet (1743 - 1794)

Naissance : 17 septembre 1743 (Ribemont)
Décès : 29 mars 1794 (Bourg-La-Reine, 50 ans)
Nationalité : Française

Il travaille à ses débuts sur le calcul intégral ($\leftrightarrows$ terminale) puis sur l'arithmétique ($\leftrightarrows$ sujet). Il est néanmoins connu pour ses travaux sur les probabilités qui d'une part, ont quasiment crées les statistiques et d'autre part, qui ont permis la réflexion sur le modèle électoral, en pleine période de révolution.

Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827)

Naissance : 29 mars 1749 (Beaumont-en-Auge)
Décès : 5 mars 1827 (Paris ,77 ans)
Nationalité : Française

On lui doit le domaine de Laplace, qui sert aujourd'hui dans beaucoup de domaines, des travaux sur le calcul intégral ($\leftrightarrows$ terminale) et sur les équations différentielles. Il a aussi beaucoup travaillé en probabilités et en mécanique céleste.

Jean Baptiste Joseph Fourrier (1768 - 1830)

Naissance : 21 mars 1768 (Auxerre)
Décès : 16 mai 1830 (Paris, 62 ans)
Nationalité : Française

Bon, il est chaud : décomposition des fonctions périodiques en sommes (infinies) de cosinus et sinus, et pas mal de travaux sur la propagation de la chaleur. Il a été prof à l'ENS et à polytechnique, rien que ça....

Carl Friedrich Gausse (1777 - 1855)

Naissance : 30 avril 1777 (Brunswick)
Décès : 23 février 1855 (Göttingen, 77 ans)
Nationalité : Allemande

Il a fait de l'analyse, notamment l'étude de certains intégrales ($\leftrightarrows$ terminale), il a fait de l'arithmétique ($\leftrightarrows$ sujet) (on lui doit le Lemme de Gauss, considéré aujourd'hui comme le théorème le plus important de l'arithmétique) puis aussi de la physique avec l'étude de certains corps célestes, un peu de mécanique des fluides et de l'électromagnétisme (on lui doit le théorème de Gauss, assez important en électrostatique) et encore pas mal d'autre trucs.

Simon Denis Poisson (1781 - 1840)

Naissance : 21 juillet 1781 (Pithiviers)
Décès : 25 avril 1840 (Sceaux, 58 ans)
Nationalité : Française

Ces travaux en physique se sont surtout portés sur l'électromagnétisme (on lui doit notamment l'équation de Poisson) ainsi que dans la mécanique céleste (encore !). En mathématiques, il a travaillé sur les intégrales ($\leftrightarrows$ terminale), sur les séries de Fourier et les intégrales de Fourier ($\leftrightarrows$ Joseph Fourier). Il a aussi travaillé dans le domaine des probabilités (on lui doit la loi de Poisson : X suit loi de Poisson de paramètre λ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$ ($\leftrightarrows$ terminale et sujet pour l'exponentielle)) et il a fait un peu de calcul variationnel.

Augustin Louis Cauchy (1789 - 1837)

Naissance : 21 aout 1789 (Paris)
Décès : 23 mai 1837 (Sceaux, 67 ans)
Nationalité : Française

Suites de Cauchy, Théorème de Cauchy, Produit de Cauchy, Inégalité de Cauchy-Schwarz, règle de Cauchy, critère de Cauchy, théorème des valeurs intermédiaires ($\leftrightarrows$ terminale), et encore plein d'autres. Il a travaillé en analyse et en algèbre et en analyse complexe et en géométrie et en optique et en mécanique. Il a démontré des résultats assez important dans chacun de ces domaines. Par exemple, il a précisé la notions de limites ($\leftrightarrows$ cours sur les suites)

Michel Chasles (1793 - 1880)

Naissance : 15 novembre 1793 (Epernon)
Décès : 18 décembre 1880 (Paris, 87 ans)
Nationalité : Française

Il est bien connu pour les relation de Chasles, tant pour les vecteurs ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\leftrightarrows$ cours les vecteurs) que pour les angles orientés ($\leftrightarrows$ cours sur la trigonométrie). Sauf qu'aucune des deux relations n'est de lui... On lui doit par contre le théorème de Chasles et des résultats en géométrie et en algèbre.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859)

Naissance : 13 février 1805 (Düren)
Décès : 5 mai 1859 (Göttingen, 54 ans)
Nationalité : Allemand

Il a travaillé en arithmétique (théorème de progression arithmétique, démonstration du dernier théorème de Fermat ($\leftrightarrows$ Fermat) pour l'exposant 5). Il a également travaillé en analyse sur les intégrales ($\leftrightarrows$ terminale) et les séries : une intégrale porte d'ailles son nom :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

En probabilité, il a formulé le principe des tiroirs : si on range $n + 1$ chaussettes dans n tiroirs, il y a un (au moins) tiroir avec 2 chaussettes (au moins). Malgré sa simplicité, ce résultat permet de démontrer des résultats compliqués. Il a été le prof de Riemann ($\leftrightarrows$ Riemann un peu plus loin)

Evariste Galois (1811 - 1832)

Naissance : 25 octobre 1811 (Bourg-La-Reine)
Décès : 31 mai 1832 (Paris, 20 ans)
Nationalité : Française

Bon c'est le boss du game. Il est mort à 20 ans (après un duel à cause d'une fille). Pendant ses 20 ans, il en a passé 3 en prisons pour ses idées politiques, inventés toute la théorie des groupes (et putain c'est pas rien), montré que trouver les racines d'un polynômes de degré 5 ou plus, c'est super chaud puis quelques autres travaux qui n'ont pas été compris de son vivant.

Bernhard Riemann (1828 - 1866)

Naissance : 17 septembre 1828 (Breselenz)
Décès : 20 juillet 1866 (Selasca, 39 ans)
Nationalité : Allemande

Il a beaucoup travaillé dans l'analyse (séries de Riemann, intégrales de Riemann, somme de Riemann, fonction zêta de Riemann,...). La fonction zêta de Riemann est aujourd'hui source d'un des problèmes du millénaire : trouver les solutions de

$$\zeta(z) = 0$$

avec $z \mapsto \zeta(z)$ est la fonction zêta.

Georg Cantor (1845 - 1918)

Naissance : 3 mars 1845 (Saint-Petersbourg)
Décès : 6 janvier 1918 (Halle, 72 ans)
Nationalité : Allemande

En gros, il a inventé les ensembles. (en vraie, il était chaud et tout ce qu'on enseigne aujourd'hui en France e base sur une théorie des ensembles très légèrement améliorée de celle de Cantor)

Andreï Kolmogorov (1903 - 1987)

Naissance : 25 avril 1903 (Tambov)
Décès : 20 octobre 1987 (Moscou, 84 ans)
Nationalité : Russe puis Soviétique

Il a travaillé en analyse, en logique, en topologie et en mécanique mais il est surtout connu pour être le père des probabilités modernes : les probabilités, comme est le sont enseignées aujourd'hui dans les écoles, découlent de sa théorie.