Contrôle de cours

Produit scalaire

Durée du contrôle : 1h10
Ce sujet comporte 3 pages
La calculatrice est autorisée

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

Rappeler les 4 formules donnant le produit scalaire de deux vecteurs du plan en prouvant seulement celle avec les normes

Calculer

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Etude de l'orthogonal, temps conseillé : 25 min) :

1. Montrer la caractérisation suivante :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \pm||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

2. Rappeler la définition de 2 vecteurs orthogonaux
3. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. On note $\{\vec{u}\}^{\perp}$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$. Que vaut $\{\vec{0}\}^{\perp}$? A partir de maintenant, on suppose $\vec{u} \neq \vec{0}$. On veut alors montrer le résultat suivant : tous les vecteurs de $\{\vec{u}\}^{\perp}$ sont colinéaires entre eux
4. Montrer que $\vec{u} \notin \{\vec{u}\}^{\perp}$
5. Montrer que $\vec{0} \in \{\vec{u}\}^{\perp}$
6. Soit $\vec{v} \in \{\vec{u}\}^{\perp}$. Montrer alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{v} \in \{\vec{u}\}^{\perp}$
7. On suppose que $x = 0$ ($\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$). Montrer alors que si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \{\vec{u}\}^{\perp}$ alors $b = 0$. En déduire que tout vecteur de $\{\vec{u}\}^{\perp}$ s'écrit $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et que par conséquent, tous les vecteurs de $\{\vec{u}\}^{\perp}$ sont colinéaires entre eux. On admet que si l'on suppose $y = 0$ et $x \neq 0$, on obtient le même résultat
8. Ainsi, on suppose maintenant $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Soient $\vec{v_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\{\vec{u}\}^{\perp}$. Montrer alors

$$\boxed{y_1 = -\frac{x}{y}x_1} \quad (1)$$

$$\boxed{y_2 = -\frac{x}{y}x_2} \quad (2)$$

9. Montrer alors que

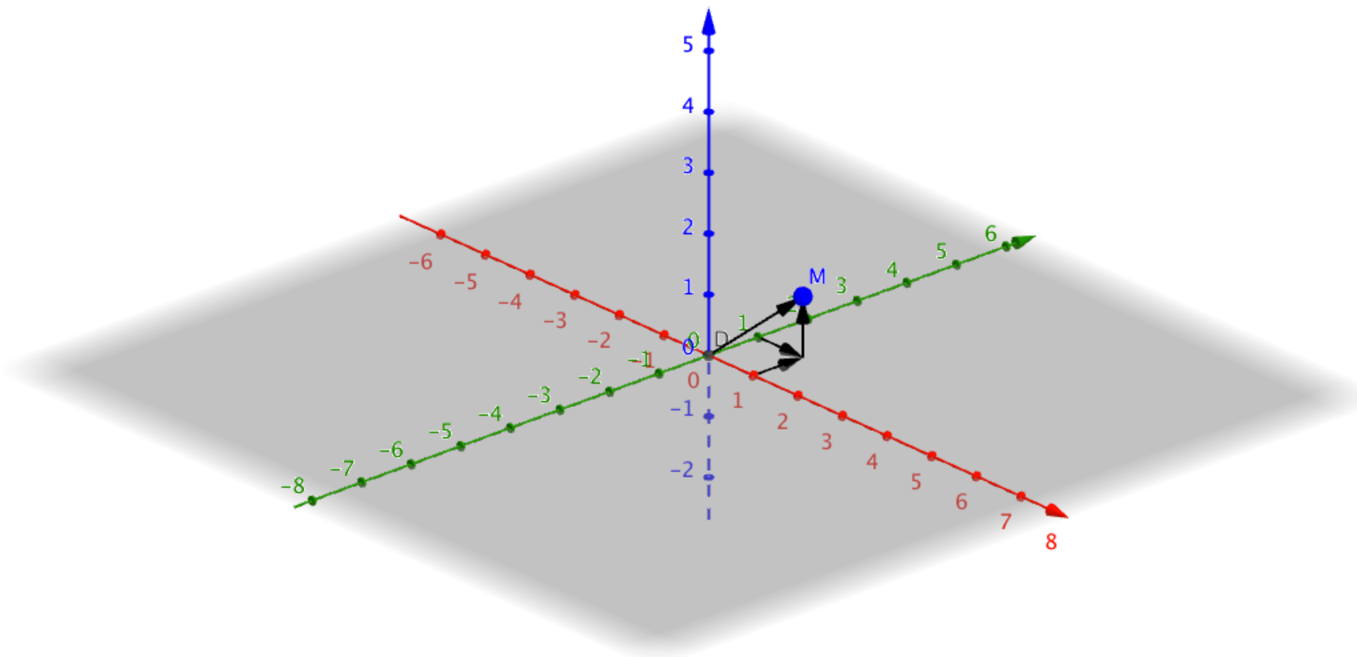
$$x_1^2y_2^2 + y_1^2x_2^2 = 2x_1y_1x_2y_2$$

(Indication : on pourra remplacer les y_1^2 et y_2^2 grâce aux expressions (1) et (2) puis après avoir des simplifications, faites réapparaître des y_1 et y_2 avec (1) et (2))

10. Comparer littéralement $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}$ et $||\vec{v_1}|| \times ||\vec{v_2}||$
11. Conclure grace à la question 1

Exercice 3 (Equation cartésienne de sphère, temps conseillé : 15 min) :

On introduit les points et vecteurs de l'espace. On repère un point de l'espace par 3 coordonnées : $M(x_M, y_M, z_M)$



De même un vecteur $\vec{u}$ de l'espace est repéré par 3 coordonnées :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a toujours

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

De plus, on définit le produit scalaire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$

et on définit

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

1. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Etablir la formule donnant $||\vec{u}||$ en fonction de x, y, z

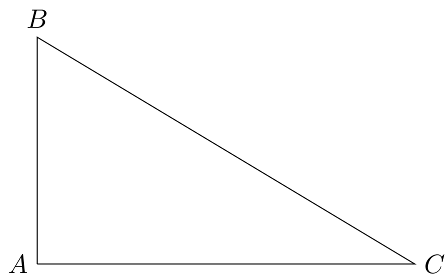
2. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon $r \geq 0$ *(On rappelle qu'une sphère est l'ensemble des points à une distance r de Ω où la distance entre Ω et M est donnée par $||\overrightarrow{\Omega M}||$)*

   Etablir l'équation cartésienne de cette sphère

Exercice 4 (Théorèmes de Pythagore et d'Al-Kachi, temps conseillé : 15 min) :

Dans cet exercice, on prouve le fameux théorème de Pythagore puis le (moins fameux) théorème d'Al-Kachi

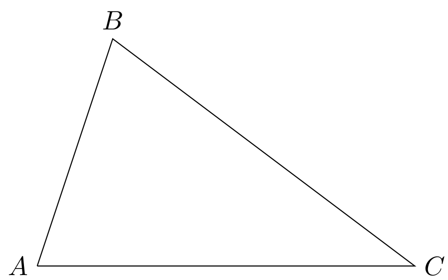
1. On considère un triangle rectangle ABC rectangle en A :



   Quelle est la valeur de l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$. Quel est son cosinus ?

2. En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ avec la méthode des normes et avec celle du cosinus, montrer le fameux théorème de Pythagore

3. On généralise ce résultat avec le théorème d'Al-Kachi : on considère un triangle quelconque



   L'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ est noté α. En utilisant une méthode analogue à la question précédente, montrer que

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha)$$

$\star \star \star$

FIN DU SUJET