Contrôle de cours

Variables aléatoires

Durée du contrôle : 1h30
Ce sujet comporte 4 pages
La calculatrice est autorisée

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P). On note $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Rappeler la définition de l'espérance, variance et écart-type de X. Redémontrer les formules suivantes

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

et

$$V(aX) = a^2V(X)$$

Exercice 2 (Un jeu de casino, temps conseillé : 20 min) :

On joue à un jeu : les droits d'entrées sont de 2 euros (il faut payer 2 euros pour faire une partie). Le joueur choisit alors une couleur parmi ($\clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit$) et une valeur parmi (2,3,4,5,6,7,8,9,V,D,R,A). Il pioche ensuite une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes :

- Si la carte a la bonne couleur et la bonne valeur, il gagne 22 euros
- Si la carte a la bonne couleur ou (exclusif) la bonne valeur, on rembourse sa mise (il gagne 2 euros)
- SI la carte n'a rien en commun avec les choix du joueur, le joueur ne gagne rien

1. Calculer les probabilités des évènements suivants
   - A:"Le joueur tire la carte qui a la bonne couleur et la bonne valeur"
   - B:"Le joueur tire une carte qui a uniquement la bonne couleur"
   - C:"Le joueur tire une carte qui a uniquement la bonne valeur"
   - D:"Le joueur tire une carte qui n'a ni la bonne valeur ni la bonne couleur"
2. On note X la variable aléatoire qui compte le gain en euros. Donner $X(\Omega)$
3. Etablir, à l'aide de la question 1, la loi de X
4. Calculer $E(X)$. Quelle interprétation lui donner ? Joueriez-vous à ce jeu ?
5. Si le joueur joue 100 fois à ce jeu. Combien, en moyenne, aura-t-il gagné (ou perdu) ?
6. Calculer $V(X)$. Quelle interprétation lui donner
7. Le joueur joue un nombre n de fois. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où le joueur a obtenu la bonne combinaison. Quelle loi suit Y ?
8. Calculer $P(Y \leq 2)$ pour $n = 50$. Comment interpréter ce résultat.
9. Donner $E(Y)$ pour n quelconque. A partir de combien d'essais peut-il espérer avoir 2 fois la combinaison gagnante ?

Exercice 3 (Un peu de loi binomiale, temps conseillé : 15 min) :

1. Rappeler la définition de la loi binomiale. Donner l'espérance et la variance de X si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$
2. Un joueur de fléchette tire au centre avec une probabilité de 0,7. Il tire 20 fois. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fléchette qui vont au milieu. Quelle est la loi de X
3. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 13 fléchettes au milieu
4. Calculer la probabilité qu'il y ait moins de 7 fléchettes (7 inclus)
5. Le joueur vient jouer tous les soirs. En moyenne combien met-il de fléchettes par soir
6. Calculer $V(X)$. Quelle interprétation lui donner vous ?
7. Ecrire un algorithme qui calcule $n!$, n étant une variables (entière) à saisir par l'utilisateur. On suppose que cet algorithme est accessible dans tous les autres algorithmes par

   ```
   factorielle(n)
   ```

8. Ecrire un algorithme qui calcule $\binom{n}{k}$, k et n étant des entiers saisis par l'utilisateurs. On suppose que cet algorithme est accessible dans tous les autres algorithmes par

   ```
   binom(k,n)
   ```

9. Ecrire un algorithme qui calcule $P(X = k)$, où $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, k et n étant des entiers saisis par l'utilisateur et p un nombre entre 0 et 1 saisi par l'utilisateur (on utilisera pow(x,n) pour x^n)

Exercice 4 (Loi géométrique, temps conseillé : 30-40 min) :

Soit X une variable aléatoire sur (Ω, P) et soit $p \in]0,1[$. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$$

On note alors

$$X \sim \mathcal{G}(p)$$

Cette loi est aussi appelée loi du premier succès

1. *"Cette loi est aussi appelée loi du premier succès"*. En utilisant un arbre pondéré, expliquer cette affirmation. (On montrera que $(X = k)$ est l'évènement "le premier succès arrive après k essais")
2. Rappeler la formule donnant

   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$$

   où q est un réel différent de 1
3. Comparer, avec des petits points

   $$\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

   et

   $$\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}$$

   En déduire que

   $$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

4. Montrer alors que
$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = 1-(1-p)^n$$
On rappelle que $\sum_k \lambda a_k = \lambda \sum_k a_k$

5. On note
$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(X=k)$$
Déduire, de la question précédente, que
$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = 1$$
Est-ce rassurant ? *On rappelle que si* $0<q<1$, *alors* $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

6. On veut ici établir le résultat suivant :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$
pour tout $x \in]0,1[$
   (a) On note
   $$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$
   Montrer que f_n est dérivable et donner sa dérivée
   (b) Ecrire $f_n(x)$ sous la forme d'un quotient grâce à la somme de termes en progression géométrique. Montrer que le quotient est dérivable et donner sa dérivée
   (c) En déduire que
   $$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$
   (d) En déduire, par une passage à la limite lorsque $n\to+\infty$ que si $0<x<1$ alors
   $$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

7. Montrer alors que, si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors
$$\boxed{E(X) = \frac{1}{p}}$$

8. Il est possible de montrer, avec des passages à la limite, que
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^{k-1} = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{1}{(1-x)^2}$$
pour tout $x \in]0,1[$. Montrer alors que, si $X \sim \mathcal{G}(p)$
$$\boxed{V(X) = \frac{1-p}{p^2}}$$
(On pourra utiliser la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$*)*

9. On considère le jeu suivant : les 4 as d'un jeu de 52 cartes sont posés devant nous, face cachée. On pioche au hasard une carte parmi les 4. Si c'est l'as de coeur, on s'arrête. Sinon on remélange les cartes, et les redisposes et on recommence. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirage avant que le jeu s'arrête

(a) Expliquer pourquoi $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{4})$

(b) Calculer $P(X = 3)$

(c) Calculer $P(X \geq 7)$

(d) Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Interpréter

(e) La valeur de l'espérance vous parait-elle contre intuitive ?

$\star\star\star$

FIN DU SUJET