Contrôle de cours

Produit scalaire

Durée du contrôle : 1h10
Ce sujet comporte 3 pages
La calculatrice est autorisée

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

Méthode	Conditions d'applications	Formules
Analytiquement	Si l'on connait les coordonnées	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$
Avec les normes	Si l'on connait $\|\|\vec{u}\|\|$, $\|\|\vec{v}\|\|$, $\|\|\vec{u} - \vec{v}\|\|$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\|\vec{u}\|\|^2 + \|\|\vec{v}\|\|^2 - \|\|\vec{u} - \vec{v}\|\|^2)$
Projection orthogonale	Si l'on connait le projeté orthogonal	$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \|\|\overrightarrow{OH}\|\| \times \|\|\overrightarrow{OA}\|\|$ où H est le projeté de B sur (OA)
Normes et angle	Si on connait l'angle entre les vecteurs et la norme des vecteurs	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\|\vec{u}\|\| \times \|\|\vec{v}\|\| \times \cos(\alpha)$

On a

$$\frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2) = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - (||\vec{u}||^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2) = \frac{1}{2}2\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

De plus

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \times 4 - 3 \times 5 = 8 - 15 = -7$$

Exercice 2 (Etude de l'orthogonal, temps conseillé : 25 min) :

1. Si l'un des deux vecteurs est nul alors l'autre est nul et c'est ok. On les suppose alors non nuls.

   On suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires. L'angle α qui les sépare est alors de 0 ou de π (selon s'ils ont le même sens ou sens opposé) donc le cosinus vaut 1 ou -1. Ainsi

   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\alpha) = \pm||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

   Réciproquement si

   $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

   alors

   $$||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\alpha) = \pm||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

   d'où $\cos(\alpha) = \pm 1$ et $\alpha = 0 + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi + 2k\pi$ et les vecteurs sont colinéaires.

2. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3. $\{\vec{0}\}^\perp$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{0}$ soit l'ensemble des vecteurs du plan

4. Si $u \in \{\vec{u}\}^\perp$ alors $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ donc $||\vec{u}||^2 = 0$ d'où $\vec{u} = \vec{0}$. Donc $\boxed{u \notin \{\vec{u}\}^\perp}$

5. $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur donc en particulier à $\vec{u}$ donc

$$\boxed{\vec{0} \in \{\vec{u}\}^\perp}$$

6. Soit $\vec{v} \in \{\vec{u}\}^\perp$ Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Ainsi

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda \times 0 = 0$$

d'où

$$\boxed{\lambda \vec{v} \in \{\vec{u}\}^\perp}$$

7. Si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \{\vec{u}\}^\perp$ alors

$$a \times x + b \times y = 0$$
$$a \times 0 + b \times y = 0$$
$$b \times y = 0$$
$$b = 0$$

Tout vecteur de $\{\vec{u}\}^\perp$ s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$. Ils sont bien tous colinéaires.

8. On a $\vec{v_1} \in \{\vec{u}\}^\perp$ donc

$$x \times x_1 + y \times y_1 = 0$$
$$y \times y_1 = -x \times x_1$$
$$y_1 = -\frac{x}{y} x_1$$

On a $\vec{v_2} \in \{\vec{u}\}^\perp$ donc

$$x \times x_2 + y \times y_2 = 0$$
$$y \times y_2 = -x \times x_2$$
$$y_2 = -\frac{x}{y} x_2$$

d'où

$$\boxed{y_1 = -\frac{x}{y} x_1} \quad (1)$$

$$\boxed{y_2 = -\frac{x}{y} x_2} \quad (2)$$

9. On a

$$x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 = x_1^2 \left(-\frac{x}{y} x_2\right)^2 + \left(-\frac{x}{y} x_1\right)^2 x_2^2 = 2\frac{x^2}{y^2} x_1^2 x_2^2 = 2x_1 \frac{x}{y} y_1 x_2 \frac{x}{y} y_2 = 2x_1(-y_1)x_2(-y_2) = 2x_1 y_1 x_2 y_2$$

10. On a

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

et

$$||\vec{v_1}|| \times ||\vec{v_2}|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{(x_1 x_2)^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + (y_1 y_2)^2} =$$

$$\sqrt{(x_1 x_2)^2 + 2x_1 y_1 x_2 y_2 + (y_1 y_2)^2} = \sqrt{(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

On a donc

$$\boxed{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = ||\vec{v_1}|| \times ||\vec{v_2}||}$$

11. D'après la question 1 et la question précédente, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont colinéaires

Exercice 3 (Equation cartésienne de sphère, temps conseillé : 15 min) :

1. On a
$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$
$$||\vec{u}|| = \sqrt{x \times x + y \times y + z \times z}$$
$$\boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

2. Soit $M(x, y, z)$ sur la sphère. Alors
$$||\overrightarrow{\Omega M}|| = r$$
donc
$$||\overrightarrow{\Omega M}||^2 = r^2$$
Or
$$\overrightarrow{\Omega M} = \begin{pmatrix} x - x_\Omega \\ y - y_\Omega \\ z - z_\Omega \end{pmatrix}$$
donc
$$||\overrightarrow{\Omega M}|| = \sqrt{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2}$$
d'où finalement
$$\boxed{\mathscr{S} : (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = r^2}$$

Exercice 4 (Théorèmes de Pythagore et d'Al-Kachi, temps conseillé : 15 min) :

1. L'angle est de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ou 90°). Son cosinus est de 0.

2. On a
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AC}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos(\alpha) = 0$$
Or
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}||^2)$$
or
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$
donc
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2)$$
d'où finalement
$$\frac{1}{2}(||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2) = 0$$
puis
$$||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2 = 0$$
et
$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$

3. On a
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AC}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos(\alpha)$$
Or
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}||^2)$$
or
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$
donc
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2)$$

d'où finalement

$$\frac{1}{2}(||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2) = ||\overrightarrow{AC}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos(\alpha)$$

puis

$$||\overrightarrow{AC}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{CB}||^2 = 2||\overrightarrow{AC}|| \times ||\overrightarrow{AB}|| \times \cos(\alpha)$$

et

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha)}$$

⋆ ⋆ ⋆

FIN DU SUJET