Contrôle de cours (correction)

Géométrie plane et trigonométrie

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs On suppose $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ (dans ces cas là, la preuve est immédiate)

Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires. Alors, il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

Alors

$$x = kx'$$
$$y = ky'$$

Alors

$$xy' - x'y = kx'y' - x'ky' = 0$$

Réciproquement, supposons que

$$xy' - x'y = 0$$

$\vec{u} \neq \vec{0}$ donc au moins une de ses coordonnées est non nulle. On suppose $x \neq 0$ (la démonstration est la même si c'est $y \neq 0$)

Alors

$$y' = \frac{x'}{x}y$$

On pose alors $k = \frac{x'}{x}$

$$kx = k\frac{x'}{x} = x'$$
$$ky = \frac{x'}{x}y = y'$$

donc

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

donc les vecteurs sont colinéaires

Exercice 2 (temps conseillé : 20 min) :

1. On a (lecture graphique)

$$\boxed{A(3,5;1)}$$
$$\boxed{B(2,5;3)}$$
$$\boxed{C(-1,5;2)}$$

2. On a

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{3,5 + 2,5}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$$
$$\boxed{I(3,2)}$$

3. On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 - 3,5 \\ 3 - 1 \end{pmatrix}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

4. On considère deux points A_1 et A_2 de $\mathscr{D}$, on prend par exemple

$$A_1(0;2)$$

et

$$A_2(3,0)$$

et calcule $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\begin{pmatrix}0-3\\2-0\end{pmatrix}$$

ainsi

$$\boxed{\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \mathscr{D}}$$

5. On utilise le vecteur directeur calculé à la question précédente et on utilise le fait que $A_1(0;2)$ soit un point de $\mathscr{D}$

$$\mathscr{D} : 2x + 3y = 2 \times 0 + 3 \times 2$$

$$\boxed{\mathscr{D} : 2x + 3y = 6}$$

ou sous la forme d'une équation réduite

$$\boxed{\mathscr{D} : y = -\frac{2}{3}x + 2}$$

6. Si $D(x_D, y_D)$ est tel que $ABCD$ soit un parallélogramme alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1,5-x_D\\2-y_D\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1,5 - x_D = -1 \\ 2 - y_D = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = -0,5 \\ y_D = 0 \end{cases}$$

Finalement

$$\boxed{D(-0,5;0)}$$

Exercice 3 (Coordonnées polaires, temps conseillé : 25 min) :

1. Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs non colinéaires. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur du plan. Alors il existe un unique couple de réels (λ, μ) tel que

$$\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}$$

2. On a

$$\cos(\theta) \times \cos(\theta) - \sin(\theta) \times (-\sin(\theta)) = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \neq 0$$

3. Bah oui...

4. On a

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\\sin(\theta)\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

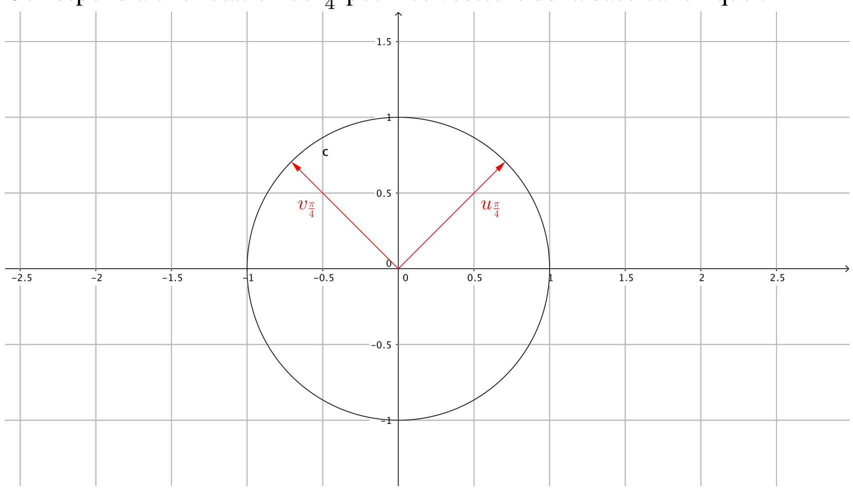
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\cos(\theta)\\\lambda\sin(\theta)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\mu\sin(\theta)\\\mu\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\cos(\theta) - \mu\sin(\theta)\\\lambda\sin(\theta) + \mu\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x &= \lambda\cos(\theta) &- &\mu\sin(\theta) & (1) \\ y &= \lambda\sin(\theta) &+ &\mu\cos(\theta) & (2) \end{cases}$$

5.
$$\cos(\theta) \times (1) + \sin(\theta) \times (2)$$
$$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = \lambda\cos(\theta)^2 - \mu\cos(\theta)\sin(\theta) + \lambda\sin(\theta)^2 + \mu\cos(\theta)\sin(\theta)$$
$$x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = \lambda(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)$$
$$\boxed{x\cos(\theta) + y\sin(\theta) = \lambda}$$
$$-\sin(\theta) \times (1) + \cos(\theta) \times (2)$$
$$-\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = -\lambda\sin(\theta)\cos(\theta) + \mu\sin(\theta)^2 + \lambda\sin(\theta)\cos(\theta) + \mu\cos(\theta)^2$$
$$-\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = \mu(\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2)$$
$$\boxed{-\sin(\theta)x + \cos(\theta)y = \mu}$$

6. Correspond à une rotation de $\frac{\pi}{4}$ pour les vecteurs de la base canonique :



7. On calcule λ et μ pour $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ grâce à la question 5 :

$$\lambda = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + 1 \times \sin(\frac{\pi}{4})$$
$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\boxed{\lambda = \frac{3\sqrt{2}}{4}}$$
$$\mu = 1 \times \cos(\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4})$$
$$\mu = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$\boxed{\mu = \frac{\sqrt{2}}{4}}$$

Ainsi
$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{4}u_{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{2}}{4}v_{\frac{\pi}{4}}}$$

8. Le cas $\theta = 0$ correspond au cas que l'on utilise quasiment tout le temps, c'est à dire une décomposition selon $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

⋆⋆⋆

FIN DU SUJET