Contrôle de cours (correction)

Dérivation

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

On dit qu'une fonction f est dérivable en a si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h}$$

Le cas échant on note

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h}$$

. Si f et g sont dérivables sur I alors $f + g$ et $f \times g$ sont dérivables sur I et on a

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f \times g)' = f'g + fg'$$

. Si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

On a

$$a \text{ est un extremum local} \Leftrightarrow f' \text{ s'annule en changeant de signe}$$

Exercice 2 (Calculs de dérivée, temps conseillé : 10 min) :

Pour les 3 fonctions : donner le domaine de définition et montrer qu'elles sont dérivables sur un ensemble à préciser. Exprimer ensuite la dérivée

1. $$f : x \mapsto 3x^4 + 4x^2 + 3$$

   f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\boxed{f'(x) = 12x^3 + 8x}$$

2. $$g : x \mapsto \frac{x^3 + \sqrt{x}}{(x+4)^2}$$

   g est définie sur $[0, +\infty[$ (racine carrée). De plus $(x+4)^2$ ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient d'une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et d'une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$ ($x \mapsto x^3 + \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$). De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

   $$\boxed{g'(x) = \frac{(3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}})(x+4)^2 + (x^3 + \sqrt{x})(2x+8)}{(x+4)^4}}$$

   Pourquoi la dérivée de $x \mapsto (x+4)^2$ ets $x \mapsto 2x + 8$? Il suffit d'écrire $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$ d'après les identités remarquables et de dériver

3. $$h : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

   sur $[1, +\infty[$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

   ainsi sur $[1, +\infty[$

   $$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$$

   donc est dérivable de dérivée $x \mapsto 1$

Exercice 3 (Etude de deux fonctions, temps conseillé : 20 min) :

1. f est une fonction trinôme donc définie sur $\mathbb{R}$

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

3. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \times \frac{3}{2}x - 6$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 3x - 6}$$

4. On calcule les racines de f' :

$$\Delta = 3^2 + 4 \times 3 \times 6 = 81$$

$\Delta > 0$ donc ce trinôme admet deux racines réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{3 - 9}{6}$$

$$\boxed{x_1 = -1}$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{81}}{2 \times 3} = \frac{3 + 9}{6}$$

$$\boxed{x_1 = 2}$$

Le coefficient dominant du trinôme étant positif, le trinôme est négatif entre les racines. Le tableau de signe est donné à la question suivante avec le tableau de variation de f

5. Tableau de signe et de variation

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

6. f' s'annule en changeant de signe en $x = -1$ et $x = 2$. Ainsi les extrémaux de f sont $f(-1)$ et $f(2)$ avec

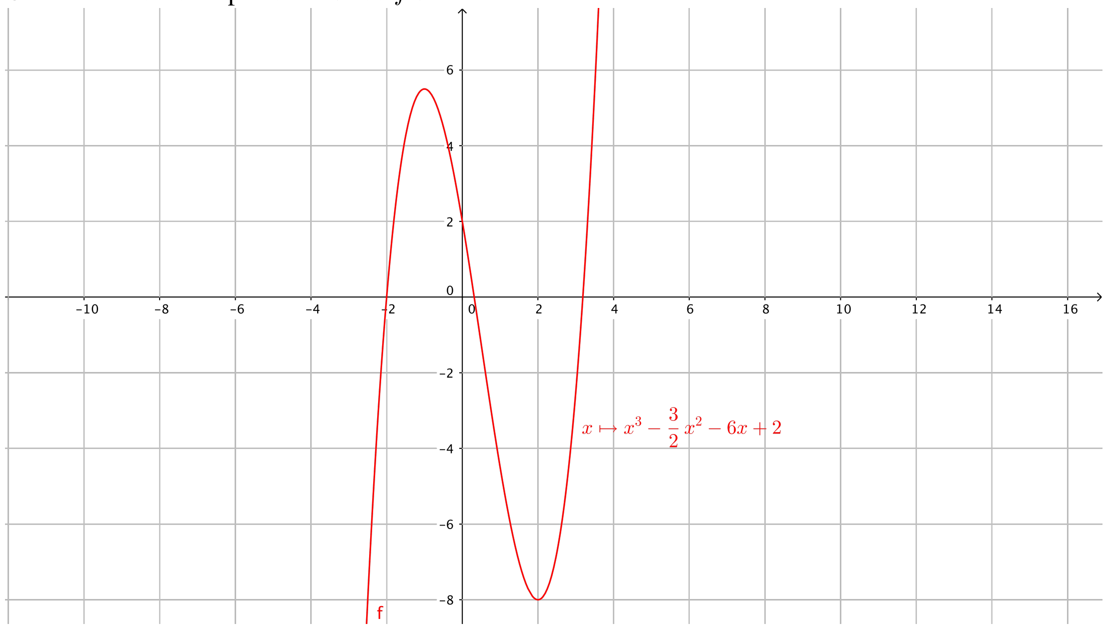
$$\boxed{f(-1) = \frac{11}{2}}$$

et

$$\boxed{f(2) = -8}$$

Pour être plus précis, on peut dire que $f(-1)$ est un maximum local de f et $f(2)$ un minimum local. NB : on aurait pu indiquer $\frac{11}{2}$ et -8 directement dans le tableau de signe/variation

7. On trace la courbe représentative de f :



8. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ donc g est définie sur $\mathbb{R}$

9. On va (évidement !) utiliser la dérivée de g puisque g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

On a

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

et

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Ainsi, on peut déduire le tableau de signe variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	

On trouve par la même occasion un maximum local (même global d'ailleurs) atteint en 0 : $g(0) = 1$ (g' s'annule en changeant de signe en 0)

Exercice 4 (Tableau de variation d'un trinôme, temps conseillé : 20 min) :

1. f est définie est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables. On a de plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f'(x) = 2ax + b}$$

qui est une **fonction affine**

2. Dans tous les cas

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

<u>1er cas : $a > 0$</u>
Dans ce cas, on a

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{2a}$$

et on déduit le tableau de signe/variation

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	

<u>2ème cas : $a < 0$</u>
Dans ce cas, on a

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{2a}$$

(on inverse le sens de l'inégalité car on divise par un nombre négatif) et on déduit le tableau de signe/variation

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	

3. Dans tous les cas, la dérivée s'annule bien en changeant dans signe en $x = -\dfrac{b}{2a}$ et le fait que ce soit un maximum ou un minimum, il suffit de regarder les variations de f selon le signe de f

⋆⋆⋆

FIN DU SUJET