Contrôle de cours (correction)

Suites

Exercice 1 (R.O.C., temps conseillé : 10 min) :

On peut générer une suite de 3 manières : explicitement (exemple pour tout n, $u_n = n$), par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

et implicitement

On appelle suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

On a alors

$$u_n = u_{n-1} + r = u_{n-2} + 2r = \ldots = u0 + nr$$

De plus $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ donc (u_n) est strictement croissante si $r > 0$, constante si $r = 0$ et strictement décroissante si $r < 0$

Exercice 2 (Etude d'une suite, temps conseillé : 20 min) :

1. A $t = nmin$, la température de l'eau est u_n et elle va prendre 2 degrés Celsius avant d'arriver $t = n + 1min$. Ainsi la température à $t = n + 1min$ est de 2 degrés plus élevée que celle à $t = nmin$:

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + 2}$$

La température de l'eau étant initialement de 25 degrés Celsius, on a

$$\boxed{u_0 = 25}$$

(u_n) est la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 25

2. On déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

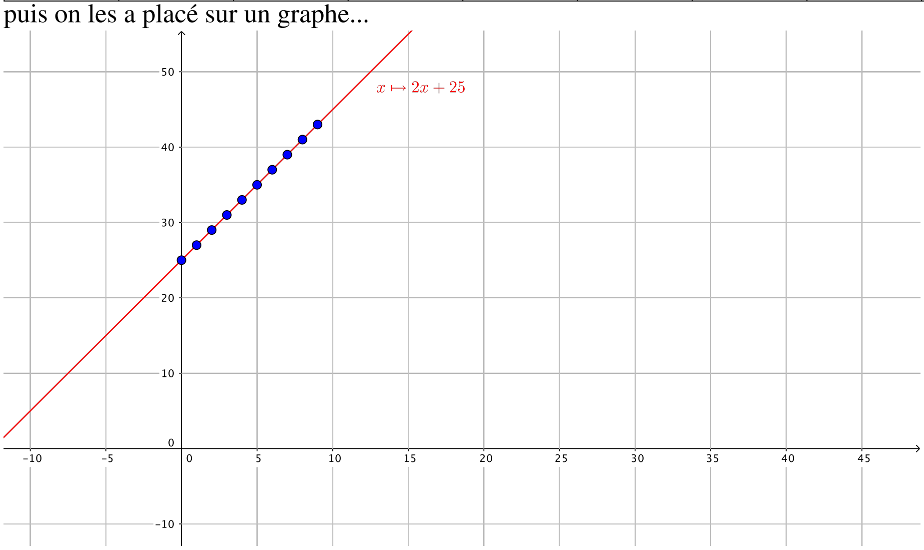
$$\boxed{u_n = 25 + 2n}$$

3. Suite arithmétique de raison positive don c(u_n) est (strictement) croissante

4. On a calculé les 10 premiers termes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43

puis on les a placé sur un graphe...



5. Voici un algorithme qui convient

```
VARIABLES
u EST_DU_TYPE NOMBRE
A EST_DU_TYPE NOMBRE
N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  SAISIR A
  u PREND_LA_VALEUR 25
  N PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (u < A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    u PREND_LA_VALEUR u+2
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

6. On a

$$\begin{aligned} u_n &\geq 100 \\ \Leftrightarrow 25 + 2n &\geq 100 \\ \Leftrightarrow 2n &\geq 75 \\ \Leftrightarrow n &\geq 37,5 \end{aligned}$$

7. Au bout de 38 minutes (ou 37 minutes et 30 secondes si l'on suppose la chauffe linéaire entre les minutes n et $n+1$)

8. Mauvaise car la température tendrait vers l'infini

Exercice 3 (Limite d'une suite géométrique, temps conseillé : 20 min) :

1. On appelle suite arithmétique de raison q et de premier terme v_0 la suite définie par

$$\begin{cases} v_0 = v_0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = qv_n \end{cases}$$

   On a alors pour tout n,

$$\boxed{v_n = v_0 q^n}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 1^n = v_0$

3.

$$v_n \geq A$$
$$v_0 q^n \geq A$$
$$q^n \geq \frac{A}{v_0}$$
$$\ln(q^n) \geq \ln\left(\frac{A}{v_0}\right)$$
$$n\ln(q) \geq \ln\left(\frac{A}{v_0}\right)$$
$$\boxed{n \geq \frac{\ln(\frac{A}{v_0})}{\ln(q)}}$$

   (on ne change pas le sens de l'inégalité car $\ln(q) > 0$ car $q > 1$). Pour tout A, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$ donc

$$\boxed{v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

4.
$$v_n \leq \varepsilon$$
$$v_0 q^n \leq \varepsilon$$
$$q^n \leq \frac{\varepsilon}{v_0}$$
$$\ln(q^n) \leq \ln\left(\frac{\varepsilon}{v_0}\right)$$
$$n\ln(q) \leq \ln\left(\frac{\varepsilon}{v_0}\right)$$
$$\boxed{n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{v_0}\right)}{\ln(q)}}$$

On inverse le sens de l'inégalité car $\ln(q) < 0$. Ainsi tout intervalle ouvert centré en 0 contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang donc
$$\boxed{v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Exercice 4 (Exercices classiques du bac (abordable en première), temps conseillé : 20 min) :

1. On a
$$\boxed{u_0 = 100}$$
$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + 6 = \frac{3}{4} \times 100 + 6 = 75 + 6$$
$$\boxed{u_1 = 81}$$
$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + 6 = \frac{3}{4} \times 81 + 6 = \frac{243}{4} + 6 = \frac{243}{4} + \frac{24}{4}$$
$$\boxed{u_2 = \frac{267}{4}}$$
$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + 6 = \frac{3}{4} \times \frac{267}{4} + 6$$
$$\boxed{u_3 = \frac{897}{16}}$$

2. On a
$$v_0 = u_0 - 24$$
$$v_0 = 100 - 24$$
$$\boxed{v_0 = 76}$$

De plus
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 24}{u_n - 24}$$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3}{4}u_n + 6 - 24}{u_n - 24}$$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3}{4}u_n - 18}{u_n - 24}$$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{4}\frac{u_n - \frac{4}{3}18}{u_n - 24}$$
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{4}\frac{u_n - 24}{u_n - 24}$$
$$\boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{4}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a ainsi
$$v_n = v_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 76 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
or
$$v_n = u_n - 24$$
donc
$$u_n = v_n + 24$$
d'où
$$\boxed{24 + 76 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$
4. (v_n) est décroissante car (v_n) est une suite géométrique de raison positive inférieure à 1 ($\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3}{4} \leq 1$) et (u_n) est décroissante car $u_n = v_n + 24$ et v_n décroissante ($u_{n+1} - u_n = v_{n+1} + 24 - (v_n + 24) = v_{n+1} - v_n \leq 0$)
5. v_n est une suite géométrique dont la raison est comprise entre 0 et 1 (strictement) donc
$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
Ainsi par passage à la limite dans
$$u_n = v_n + 24$$
, on obtient,
$$\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 24}$$

⋆⋆⋆

FIN DU SUJET