Sujets : les complexes

Si au cours du sujet, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur énoncé, il l'indique sur sa copie et continue sa composition.

Il est demandé au candidat une clarté dans les raisonnements qu'il mettra en place.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Soit A un ensemble. On définit une loi sur cette ensemble comme une fonction qui à 2 éléments de A associe un élément de A (exemple : $+$ est une loi sur $\mathbb{R}$ car à a et b, elle associe $a + b \in \mathbb{R}$)

On considère une loi $\otimes$ sur un ensemble A.

- Soit $e \in A$. On dit que e est un neutre pour $\otimes$ si pour tout $x \in A$, on a
$$e \otimes x = x \otimes e = x$$
(par exemple 0 est un neutre pour la loi $+$ sur $\mathbb{R}$ car $a + 0 = 0 + a = a$ pour tout a réel)
- On dit que $\otimes$ est commutative sir pout tout x et y dans A, on a
$$x \otimes y = y \otimes x$$
(exemple, la loi $+$ est commutative car $a + b = b + a$ pour tout a et b réel)
- On suppose que $\otimes$ admet un élément neutre e. Soit $x \in A$. On dit que A est inversible pour $\otimes$ s'il existe y tel que
$$x \otimes y = y \otimes x = e$$
(exemple : si $a \in \mathbb{R}$, a est inversible pour la loi $+$ car $a + (-a) = 0$)

Si $\oplus$ et $\otimes$ sont deux lois sur $\mathbb{R}$ on dit que $\otimes$ est distributive sur $\oplus$ si pour tout $x, y, z \in A$, on a
$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

1 Préliminaires

1. Soit A un ensemble et $\otimes$ une loi sur cet ensemble. Soit $e \in A$ et $e' \in A$ deux neutres pour $\otimes$. En calculant $e \otimes e'$ et $e' \otimes e$ ainsi qu'en utilisant les définition d'un neutre, montrer que
$$e = e'$$
Le neutre, s'il existe, est unique
2. Soit A un ensemble et $\otimes$ une loi de neutre e. Soit $x \in A$ inversible. Soit y et z deux inverses de x. En vous inspirant de la question précédente, et en utilisant la définition d'un inverse, montrer
$$y = z$$
Un élément inversible admet un unique inverse

2 Propriétés de $\mathbb{R}^2$

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples de réels (c'est-à-dire les points du plan...)
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\}_{x,y \in \mathbb{R}}$$
((1,-3), (2,4) et (3,0) sont par exemples des éléments de $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ des lois suivantes : pour tout couples (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

$$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y) \quad (\lambda\in\mathbb{R})$$

$$(x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$$

De plus, pour un couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on note $(x,y)^2=(x,y)\times(x,y)$

On confond un élément de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x,0)$ avec le nombre réel associé x (en fait on assimile la droite des réels à la droite des abscisses...)

On admet que

$$(x,y)=(x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x=x' \\ y=y' \end{cases}$$

1. Soit (x,y) un couple de $\mathbb{R}^2$. Calculer $(0,0)+(x,y)$ En déduire que $(0,0)$ est un neutre pour $+$ sur $\mathbb{R}^2$
2. Soit (x,y) un couple de $\mathbb{R}^2$. Calculer $(1,0)\times(x,y)$ En déduire que $(1,0)$ est un neutre pour $\times$ sur $\mathbb{R}^2$
3. Soit (x,y) un couple de $\mathbb{R}^2$. montrer que son inverse pour la loi $+$ est le couple $(-x,-y)$
4. Soit (x,y) un couple de $\mathbb{R}^2$. Calculer $(0,0)\times(x,y)$ En déduire que $(0,0)$ n'a pas d'inverse pour la loi $\times$
5. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x,y)\neq(0,0)$. Montrer alors que (x,y) admet un inverse pour la loi $\times$ que l'on note $\frac{1}{(x,y)}$ (on résoudra un système et on explicitera $\frac{1}{(x,y)}$ par ses coordonnées)

   Ainsi, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$

   $$\boxed{(x,y)\times\frac{1}{(x,y)}=(1,0)}$$

6. Montrer $(0,1)^2=(-1,0)$

   Alors en notant $i=(0,1)$ et en confondant $(-1,0)$ avec -1 on obtient la relation fondamentale des complexes

   $$\boxed{i^2=-1}$$

   NB : Il n'y a pas d'erreurs d'énoncé : c'est tout le propre des complexes d'avoir des nombres qui, élevés au carré, font des nombres négatifs

7. R.O.C., rappelez le théorème de décomposition selon 2 vecteurs non colinéaires
8. Montrer que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires
9. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Ecrire sa décomposition selon $(1,0)$ et $(0,1)$.

   On déduit que tout élément z de $\mathbb{R}^2$, on peut trouver a et b tels que

   $$z=a(1,0)+b(0,1)=a+ib$$

   Cette forme est appelé écriture algébrique.

   A partir de maintenant

   $$\mathbb{C}=\{a+ib\}_{a,b\in\mathbb{R}}$$

   On a $\mathbb{C}\simeq\mathbb{R}^2$ (c'est presque égal, il y a juste une ou deux petites nuances)

Si $z \in \mathbb{C}$, on dit que z est un complexe. $\mathbb{C}$ est appelé l'ensemble des complexes et on a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Si $z = a + ib$, a est appelée partie réelle de z et notée $Re(z)$ et b est appelée partie imaginaire de z et notée $Im(z)$

Ainsi pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{z = Re(z) + iIm(z)}$$

Si $Im(z) = 0$, alors z est réel
Si $Re(z) = 0$, on dit que z est un imaginaire pur Si $Im(z) = Re(z) = 0$, alors $z = 0$

On admet que

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

(identification des parties réelles et imaginaires)

10. On admet que la loi $\times$ est distributive sur $+$. On considère le nombre complexe $3 + 2i$. Donner sa partie réelle, sa partie imaginaire et calculer $(3 + 2i)^2$
11. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer, en utilisant la définition ou la distributivité de $\times$ sur $+$, que

$$\boxed{z^2 = Re(z)^2 - Im(z)^2 + 2iRe(z)Im(z)}$$

3 Conjugué

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe

$$\overline{z} = a - ib$$

1. Calculer $\overline{3 + i}$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$
   (a) On suppose $Im(z) = 0$. Montrer que $\overline{z} = z$
   (b) On suppose $\overline{z} = z$. Montrer que $Im(z) = 0$

   Ainsi on a montré

$$\boxed{\overline{z} = z \Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow z \text{ réél}}$$

3. Montrer que

$$\overline{\overline{z}} = z$$

4. Exprimer, en fonction de $Re(z)$ et $Im(z)$, le nombre

$$z \times \overline{z}$$

   En déduire que $z \times \overline{z} \in \mathbb{R}$
5. Soit z et z' complexes

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

6. Soit z et z' complexes

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

7. Soit $z \neq 0$. Montrer que

$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$$

4 Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle module de z et on note

$$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$$

1. Calculer le module de $-4 + 3i$
2. Montrer que
$$|z|^2 = z \times \overline{z}$$
3. Montrer l'équivalence
$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
(on raisonnera par double équivalence en montrant $(z = 0) \Rightarrow (|z| = 0)$ puis $(|z| = 0) \Rightarrow (z = 0)$)
4. Soit z et z' deux nombres complexes. Montrer que
$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$
5. Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que
$$|z^n| = |z|^n$$
6. Soit $z \neq 0$. Montrer que
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$
En déduire que si z et z' sont deux nombres complexes avec $z' \neq 0$, on a
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{z}{|z'|}$$
7. En vous inspirant d'une démonstration vue en cours, montrer que
$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

5 Retour sur les trinômes du second degré

1. Montrer que i est solution de l'équation
$$x^2 + 1 = 0$$
Calculer le discriminant du trinôme $x \mapsto x^2 + 1$. Que remarquez vous ?
2. Soit a réel avec $a < 0$. Montrer que
$$i\sqrt{-a}$$
est d'une part bien défini et d'autre part solution de
$$x^2 = a$$
3. R.O.C. Rappelez, sans le démontrer, la forme canonique d'un trinôme $f : ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ en fonction de ses coefficients et de son discriminant. Vous démontrerez ensuite le résultat sur les racines d'un trinôme lorsque $\Delta > 0$ et lorsque $\Delta = 0$
4. On s'intéresse au cas $\Delta < 0$. Montrer que, dans ce cas, le trinôme f admet 2 racines complexes x_1 et x_2 que l'on explicitera en fonction des coefficients. On montrera de plus que
$$\overline{x_1} = x_2$$
5. Trouver les racines (éventuellement complexes) du trinôme $f : x \mapsto 2x^2 - 6x + 13$

6 Racine carrée d'un nombre complexe

1. Soit $z_1 = a + ib$. On s'intéresse aux solutions de l'équation

$$z^2 = a + ib$$

. On note $z = x + iy$. En déduire un système de deux équations à deux inconnues, puis que pour tout nombre complexe z_1, l'équation $z^2 = a + ib$ a des solutions. On donnera notamment des relations entre x,y,a et b

2. Trouver une solution de l'équation

$$z^2 = 7 + 2i$$