Sujet : la suite de Fibonacci

Si au cours du sujet, le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et continue sa composition.

Il est demandé au candidat une clarté dans les raisonnements qu'il mettra en place.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

I - Etude d'une fonction

Dans la suite du sujet, on note f la fonction définie pour tout x par

$$f(x) = x^2 - x - 1$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer les racines de f. La racine positive de f est noté φ et la négative est noté ψ
3. Dresser le tableau de signe de f
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Tracer la courbe représentative de f
6. Montrer de deux manières différentes que
$$\varphi^2 = \varphi + 1$$
7. Montrer que
$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$
8. On note (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$
On admet que (u_n) admet une limite ℓ lorsque n tend vers l'infini. Que dire de la limite de (u_{n+1}) ?
9. Montrer alors que
$$\ell = \varphi$$
10. Calculer, à l'aide de la calculatrice, u_{50}. Que constatez vous ?

II - Quelques résultats sur les rationnels et les irrationnels

On rappelle qu'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit rationnel s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x = \frac{p}{q}$$

L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$. L'ensemble $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est l'ensemble des irrationnels.

Tout nombre rationnel s'écrit

$$\frac{p}{q}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}*$ et p et q premier entre eux c'est à dire pgcd(p,q)=1)

1. Montrer que le produit de deux rationnels est un rationnel

2. Montrer que la somme de deux rationnels est un rationnel
3. Montrer que l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel
4. En déduire que si a est irrationnel et b est rationnel alors $a \times b$ est forcément un irrationnel
5. Montrer que si a est irrationnel et b est rationnel alors $a + b$ est forcément irrationnel
6. La somme de deux irrationnels est-elle irrationnelle ?
7. Le produit de deux irrationnels est-il irrationnel ?
8. On dit qu'un nombre $n \in \mathbb{N}$ est pair s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On dit qun nombre $n \in \mathbb{N}$ est impair s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Montrer que
$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}$$
Comment s'appelle la raisonnement qui permet de déduire que
$$\boxed{n^2 \text{ pair} \Rightarrow n \text{ pair}}$$
9. On va montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel et donc on suppose l'existence de $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$
avec p et q premiers entre eux
   (a) Justifier que $p \in \mathbb{N}^*$
   (b) Montrer que
   $$p^2 = 2q^2$$
   En déduire que p est pair
   (c) Montrer alors, en remplaçant p par un certain $2k$ que q est pair
   (d) Quelle contradiction vient d'arriver ? On en déduit que $\sqrt{2}$ est irrationnel
10. En utilisant une démonstration analogue, on peut montrer que $\sqrt{5}$ est irrationnel. En utilisant les questions 4 et 5, montrer que φ est irrationnel

III - Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Soit a et b deux réels. On s'interesse aux suites définies par
$$\begin{cases} u_0 = u_0 \quad \text{(donné)} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

1. On s'interesse d'abord au cas $a = 1$. Comment appelle-t-on alors ce type de suite. Donner le terme général de u_n. Que dire de la limite ?
2. On suppose maintenant $a \neq 1$. On définie la suite (v_n) par
$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$
Montrer que (v_n) est géométrique de raison a et de premier terme que l'on précisera
3. En déduire une expression du terme général de (v_n) puis une expression du terme général de (u_n)
4. On suppose ici $0 < a < 1$. Trouver alors la limite de u_n

IV - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit a et b dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite u_n vérifie $E_{(a,b)}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

De plus on note

$$g_{(a,b)} : x \mapsto x^2 - ax - b$$

et on note $\Delta_{(a,b)}$ son discriminant

1. On suppose tout d'abord que $\Delta_{(a,b)} > 0$. On admet alors que les suites (u_n) qui vérifient $E_{(a,b)}$ sont de la forme

   $$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

   où λ et μ sont des réels quelconque et r_1, r_2 sont les deux racines de $g_{(a,b)}$

   Exprimer alors λ et μ en fonction de u_0, u_1, a et b

2. On suppose maintenant que $\Delta_{(a,b)} = 0$. On admet alors que les suites (u_n) qui vérifient $E_{(a,b)}$ sont de la forme

   $$u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n$$

   où λ et μ sont des réels quelconque et r_0 est l'unique racine de $g_{(a,b)}$ (on suppose $r_0 \neq 0$)

   Exprimer alors λ et μ en fonction de u_0, u_1, a et b

V - Suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(\mathcal{F}_n)$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \end{cases}$$

1. Calculer les 11 premiers termes de la suite de Fibonacci (de $\mathcal{F}_0$ à $\mathcal{F}_{10}$)
2. Exprimer, à l'aide des parties I et III, le terme général de $\mathcal{F}_n$ Cette formule s'appelle la formule de (ρ) Binet
3. Montrer que

   $$\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi$$

   (*Indication : on pourra commencer par remarquer que* $|\psi| < 1$)

4. Calculer $\dfrac{\mathcal{F}_{10}}{\mathcal{F}_9}$. Que remarquez-vous ?