Дмитриева Анастасия, БПМ172

Контрольная работа

$\boxed{№1}$

$$\dot{x} = 4x^3 + r^2x - rx = f(x)$$

1) Стац. решение: $\dot{x} = 0$

$$4x^3 + r^2x - rx = 0$$

$$x(4x^2 + r^2 - r) = 0$$

$$x_1^* = 0$$

$$x^2 = \frac{r - r^2}{4}$$

$$x_{2,3}^* = \pm\frac{\sqrt{r(1-r)}}{2} \Rightarrow \exists \text{ при } r(1-r) \geq 0$$

$$f'(x) = 12x^2 + r^2 - r$$

$$f'(0) = r^2 - r$$

устойчив при $r^2 - r < 0$

$r(r-1) < 0 \Rightarrow r \in (0,1)$

$$f'\left(\frac{\pm\sqrt{r(1-r)}}{2}\right) = \frac{12r(1-r)}{4} + r^2 - r = 3r(1-r) + r^2 - r =$$

$$= 3r - 3r^2 + r^2 - r = 2r - 2r^2 = 2r(1-r)$$

устойчив при $r(1-r) < 0 \Rightarrow r \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

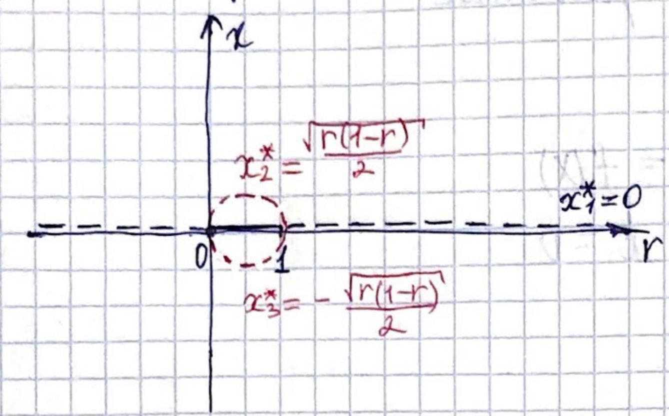
но $x_{2,3}^*$ $\exists$ при $r \in [0,1] \Rightarrow$ неустойчив

2) точки бифуркации:

$r_{Б1} = 0$ — суперкрит. вилка

$r_{Б2} = 1$ — докритич. вилка

3) бифур. диаграмма



№2

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - xy^2 \\ \dot{y} = xy^2 - y \end{cases}, \quad \mu \neq 0$$

1) Стац. точки: $\begin{cases} \mu - xy^2 = 0 & \Rightarrow \mu = xy^2 \\ xy^2 - y = 0 & \Rightarrow xy^2 = y \Rightarrow y = \mu. \end{cases}$

$$x = \frac{\mu}{y^2} = \frac{\mu}{\mu^2} = \frac{1}{\mu}$$

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\mu}; \mu\right)$$

2) Якобиан: $J = \begin{pmatrix} -y^2 & -2xy \\ y^2 & 2xy - 1 \end{pmatrix}$

$$J\left(\frac{1}{\mu}; \mu\right) = \begin{pmatrix} -\mu^2 & -2\frac{1}{\mu}\cdot\mu \\ \mu^2 & 2\frac{1}{\mu}\cdot\mu - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu^2 & -2 \\ \mu^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau = 1 - \mu^2$$

$$\Delta = -\mu^2 + 2\mu^2 = \mu^2 > 0$$

$1 - \mu^2 < 0 \Rightarrow \mu < -1, \mu > 1 \Rightarrow$ неуст

$1 - \mu^2 > 0 \Rightarrow \mu \in (-1, 1) \Rightarrow$ уст

$1-\mu^2=0$

$\mu^2=1 \Rightarrow \mu_{н}=\pm 1$ – бифур. котора.

№3

$$\begin{cases} \dot{x}=-x-2y^2 \\ \dot{y}=xy-x^2y. \end{cases}$$

ф-ция Ляпунова: $V(x,y)=ax^2+by^2$

$\frac{dV}{dt}=2ax\dot{x}+2by\dot{y}=2ax(-x-2y^2)+2by(xy-x^2y)=$

$=-2ax^2-4axy^2+2bxy^2-2x^2by^2=$

$=-2ax^2+xy^2(2b-4a)-2bx^2y^2$

$2b-4a=0 \Rightarrow 2b=4a \Rightarrow b=2a$

Пусть $a=1,\ b=2 \Rightarrow$

$\frac{dV}{dt}=-2x^2+0-4x^2y^2=-2x^2-4x^2y^2<0$

$\Rightarrow$ замкнутых траекторий нет.

№4

$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + r - x_n^2$

1) стац. точки:

$x^* = x^* + r - (x^*)^2$

$(x^*)^2 = r$

$x^*_{1,2} = \pm\sqrt{r}$ $\exists$ при $r \geq 0$.

$f'(x) = 1 - 2x$

$f'(\sqrt{r}) = 1 - 2\sqrt{r}$

$|1-2\sqrt{r}| < 1 \Rightarrow -1 < 1-2\sqrt{r} < 1$

$-2 < -2\sqrt{r} < 0$

$0 < \sqrt{r} < 1 \Rightarrow r \in (0,1)$ - устойч. $x_1^* = \sqrt{r}$

$f'(-\sqrt{r}) = 1 + 2\sqrt{r}$

$|1+2\sqrt{r}| < 1 \Rightarrow -1 < 1+2\sqrt{r} < 1$

$-2 < 2\sqrt{r} < 0 \Rightarrow -1 < \sqrt{r} < 0$, но $\sqrt{r} \geq 0$

$x_2^* = -\sqrt{r}$ неуст.

2) $f'(\sqrt{r}) = 1 - 2\sqrt{r} = -1$ - условие зарожд. 2-цикла

$-2\sqrt{r} = -2$

$\sqrt{r} = 1$

$r = \pm 1$, но $r \geq 0 \Rightarrow r_Б = 1$ - удвоен. периода

3) $x = f(f(x))$

$x = f(x + r - x^2) = x + r - x^2 + r - (x + r - x^2)^2 =$

$= -x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2rx - r^2 + 2r - 2rx + x$

$-x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2rx^2 - r^2 + 2r - 2rx = 0 \ | : x^2 - r$

$x^2 - 2x + 2 - r = 0$.

$D = 4 - 4(2-r) = 4 - 8 + 4r = 4r - 4 = 4(r-1)$

$\boxed{N4}$ продолж.

$$x^*_{3,4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{r-1}}{2} = 1 \pm \sqrt{r-1}$$ — 2 цикл

устойчив. 2-цикла: $|f'(x_3^*)\, f'(x_4^*)| < 1$

$$\left|\left(1-2(1+\sqrt{r-1})\right)\left(1-2(1-\sqrt{r-1})\right)\right| < 1$$

$$\left|\left(1-2-2\sqrt{r-1}\right)\left(1-2+2\sqrt{r-1}\right)\right| < 1$$

$$\left|\left(-1-2\sqrt{r-1}\right)\left(-1+2\sqrt{r-1}\right)\right| < 1$$

$$|1-4(r-1)| < 1$$

$$|1-4r+4| < 1$$

$$|5-4r| < 1$$

$$-1 < 5-4r < 1$$

$$-6 < -4r < -4$$

$$1 < r < \frac{6}{4}$$

$$1 < r < \frac{3}{2}$$ — устойч. 2-цикл.