Системы второго порядка-2 (д/з)

① $\begin{cases} \dot{x} = x(3-2x-2y) = f_1(x,y) \\ \dot{y} = y(2-x-y) = f_2(x,y) \end{cases}$

Стац. решения: $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$

$(0;0)$; $(0,2)$; $(\frac{3}{2};0)$

Якобиан:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4x-2y & -2x \\ -y & 2-x-2y \end{pmatrix}$$

1) $J(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} \tau = 5 \\ \Delta = 6 \end{matrix} \Big| \Rightarrow$ неуст. узел

$\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_1} = (1,0)$

$\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v_2} = (0,1)$

2) $J(0,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{matrix} \tau = -3 \\ \Delta = 2 \end{matrix} \Big| \Rightarrow$ устойчив. узел

$\lambda_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v^{(2)} = -2v^{(1)}$

$\vec{v_3} = (1,-2)$

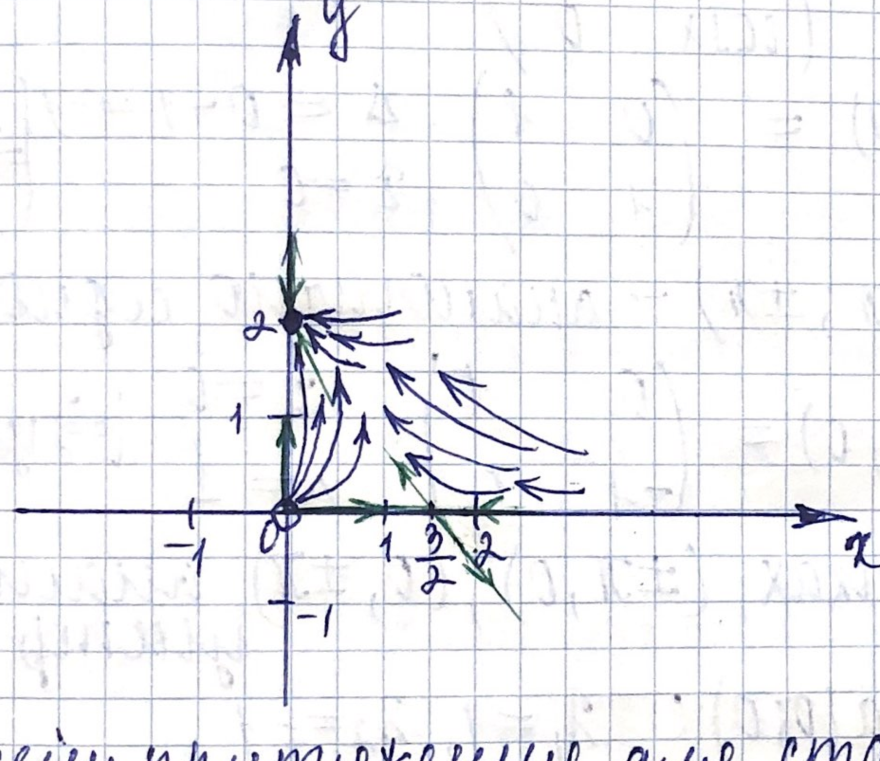
$$\lambda_2=-2:\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^{(1)}\\ v^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{v_4}=(0,1)$$

3) $J\left(\frac{3}{2};0\right)=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ $\quad \tau=-\frac{5}{2},\ \Delta=-\frac{3}{2} \Rightarrow$ седло.

$$\lambda_1=\frac{1}{2}:\ \begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^{(1)}\\ v^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow v^{(1)}=\frac{-6}{7}v^{(2)}$$

$$\vec{v_5}=(6,-7)$$

$$\lambda_2=-3:\ \begin{pmatrix}0 & -3\\ 0 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^{(1)}\\ v^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \vec{v_6}=(1,0)$$



Бассейн притяжения для стац. решения $(0,2)$ — вся I четверть.

② $\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = \sin x \end{cases}$

При замене $t \to -t$, $y \to -y$, $x \to -x$ система не меняется $\Rightarrow$ является обратимой

Стац. решения: $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$

$(0, 0)$, $(0, \pm\pi)$, $(\pm\pi; 0)$; $(\pm\pi, \pm\pi)$, ...

Якобиан:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cos y \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta = 0 - 1 = -1 \\ \tau = 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \text{седло}$$

В $(\pm\pi; \pm\pi)$ – аналогично седло.

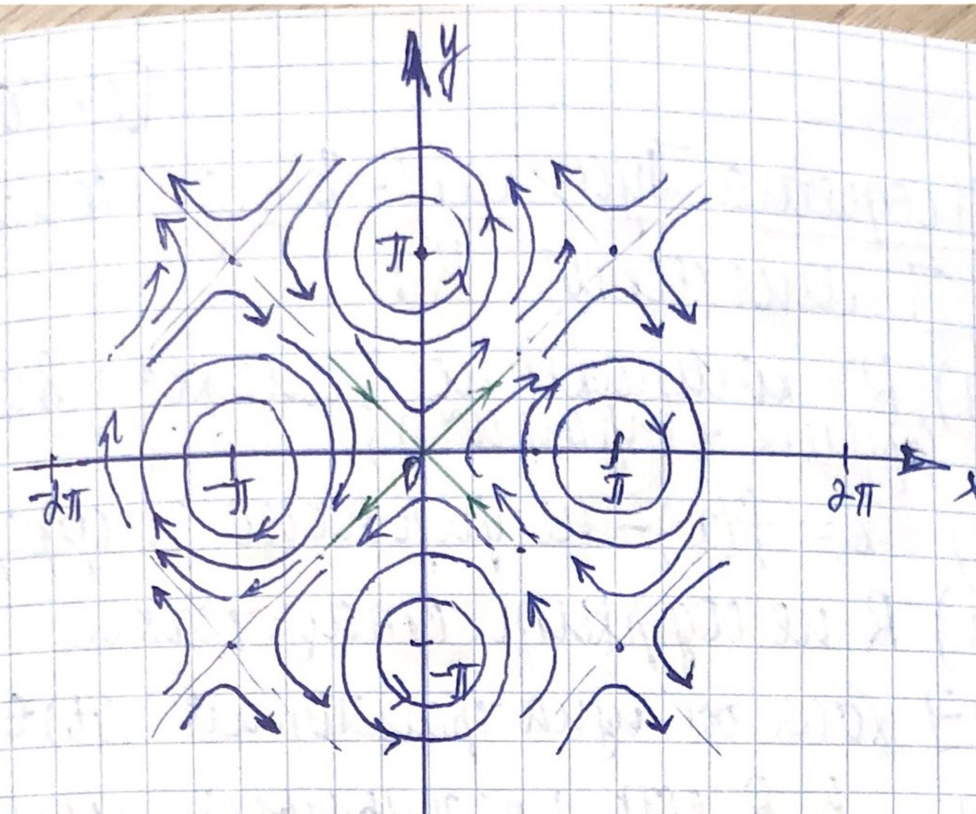
$$J(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \tau = 0 \\ \Delta = 1 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \text{центр}$$

В точках $(\pm\pi, 0)$, $(0, \pm\pi)$ аналогично центр.

точка $(0; 0)$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

$\vec{v_1} = (1, 1)$

$\vec{v_2} = (1, -1)$



③ $\begin{cases} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases}$

ф-ция Ляпунова : $V(x,y) = ax^2 + by^2$

$\frac{dV}{dt} = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} = 2ax(y - x^3) +$
$+ 2by(-x - y^3) = 2axy - 2ax^4 -$
$- 2bxy - 2by^4$

$\forall a, b : \begin{matrix} a = b \\ a > 0 \\ b > 0 \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \frac{dV}{dt} < 0$

например] $a = b = 1$: $\frac{dV}{dt} = 2xy - 2x^4 -$
$- 2xy - 2y^4 = -2x^4 - 2y^4 < 0 \Rightarrow$ предел. цикл нет.