Предельные циклы (д/з)

Показать, что в системе $\exists$ предел. цикл.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2+5y^2) = f(x,y) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2+y^2) = g(x,y) \end{cases}$$

1) стац. точки: $\dot{x}=0, \dot{y}=0$

$(x^*, y^*) = (0,0)$

Якобиан: $J = \begin{pmatrix} 1-3x^2-5y^2 & -1-10xy \\ 1-2xy & 1-x^2-3y^2 \end{pmatrix}$

$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \tau = 2, \quad \Delta = 1+1=2 \Rightarrow$ неустойчив. фокус

2) Переход к полярным коорд.: $(x,y) \longrightarrow (r, \varphi)$

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

$x^2+y^2 = r^2$

$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}, \quad \dot{\varphi} = \dfrac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}$

$x(x-y-x(x^2+5y^2)) + y(x+y-y(x^2+y^2)) = r\dot{r}$

$x^2 - \cancel{xy} - x^4 - 5x^2y^2 + \cancel{yx} + y^2 - x^2y^2 - y^4 = r\dot{r}$

$\underbrace{x^2+y^2}_{r^2} - 6x^2y^2 - \underbrace{(x^4+y^4)}_{r^4-2x^2y^2} = r\dot{r}$

$r^2 - 6x^2y^2 - r^4 + 2x^2y^2 = r\dot{r}$

$$r^2 - r^4 - 4x^2y^2 = r\dot{r}$$

$$r^2 - r^4 - 4r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi = r\dot{r}$$

$$r^2 - r^4 - r^4\sin^2(2\varphi) = r\dot{r}$$

$$r - r^3 - r^3\sin^2(2\varphi) = \dot{r}$$

$$\boxed{\dot{r} = r(1 - r^2 - r^2\sin^2(2\varphi))}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{x(x + y - y(x^2+y^2)) - y(x - y - x(x^2+5y^2))}{r^2} =$$

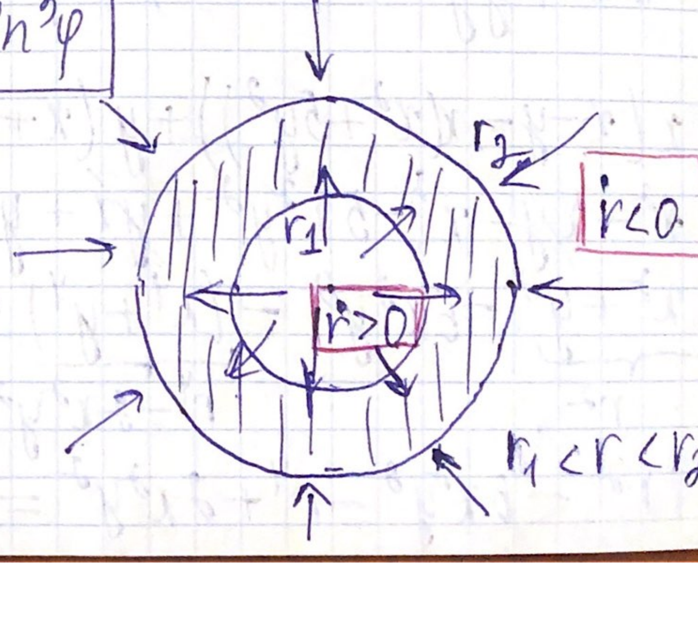
$$= \frac{x^2 + \cancel{xy} - \cancel{x^3y} - xy^3 - \cancel{xy} + y^2 + \cancel{x^3y} + 5y^3x}{r^2} =$$

$$= \frac{x^2 + y^2 + 4xy^3}{r^2} = \frac{r^2 + 4r^4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi}{r^2} =$$

$$= 1 + 4r^2\cos\varphi\sin^3\varphi$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = 1 + 4r^2\cos\varphi\sin^3\varphi}$$

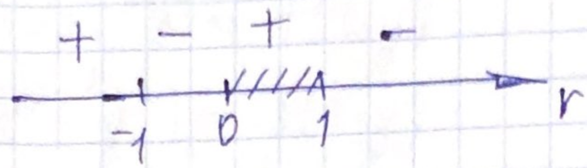
3) „Ловушка"



а) $r_1: \dot{r} > 0$

$r(1-r^2-r^2\underbrace{\sin^2(2\varphi)}_{\in[0,1]}) > 0$

$r - r^3 > 0$



$r(1-r^2) > 0$

$r(1-r)(1+r) > 0$

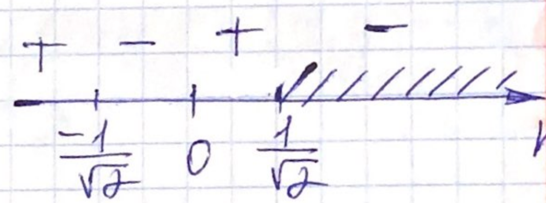
$\boxed{r_{max} = 1}$

б) $r_2: \dot{r} < 0$

$r(1-r^2-r^2\underbrace{\sin^2(2\varphi)}_{\in[0,1]}) < 0$

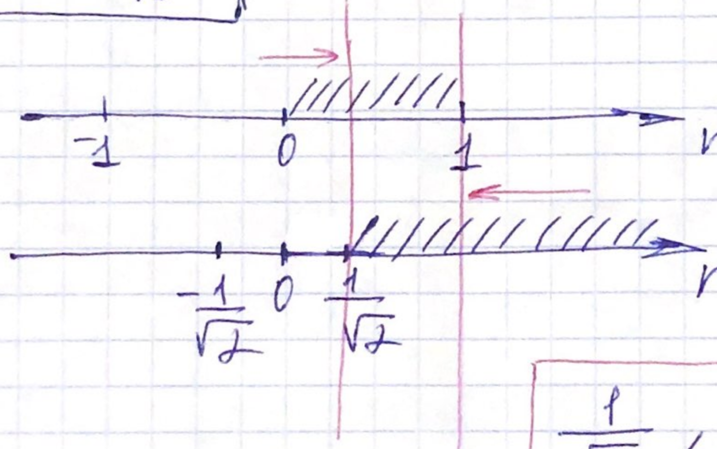
$r(1-r^2-r^2\cdot 1) < 0$

$r(1-2r^2) < 0$



$r(1-\sqrt{2}r)(1+\sqrt{2}r) < 0$

$\boxed{r_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$



Выполнены все условия теоремы Пуанкаре — Бендиксона $\Rightarrow$ в системе $\exists$ предел. цикл.

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} < r < 1}$