Дискретное отображение (д/з)

$$x_{n+1} = \frac{r x_n}{1 + x_n^2}, \quad r>0$$

① Стац. решения: $x^* = f(x^*)$

$$x^* = \frac{r x^*}{1+(x^*)^2}$$

$$x^*(1+(x^*)^2) - r x^* = 0$$

$$x^*(1-r+(x^*)^2) = 0$$

$$x_1^* = 0$$

$$x_{2,3}^* = \pm\sqrt{r-1}$$ – сущ. при $r \geq 1$.

$$f(x) = \frac{rx}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{r(1+x^2) - rx \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{r + rx^2 - 2rx^2}{(1+x^2)^2} = \frac{r(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x_1^*=0) = r$$

$$|f'(x_1^*)| < 1 \Rightarrow -1 < r < 1$$

$r > 0 \Rightarrow$ $0 < r < 1$ – x_1^* устойчив.

$r \geq 1$ – x_1^* неустойчив.

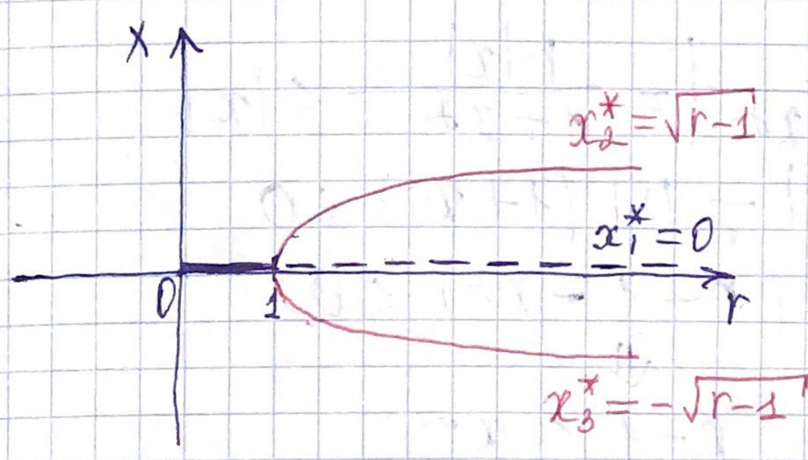
$$f'\left(x^*_{2,3} = \pm\sqrt{r-1}\right) = \frac{r(1-r+1)}{(1+r-1)^2} = \frac{r(2-r)}{r^2} =$$

$$= \frac{2-r}{r} = \frac{2}{r} - 1$$

$$\left|\frac{2}{r} - 1\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{2}{r} - 1 < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2}{r} < 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{r} < 1$$

$r > 0 \Rightarrow r > 1$ — $x^*_{2,3}$ - устойчив.



② $f'(x^*) = -1$ — условие зарождения 2-цикла.

$f'(x^*_1 = 0) = r \neq -1$, т.к. $r > 0$.

$$f'\left(x^*_{2,3} = \pm\sqrt{r-1}\right) = \frac{2}{r} - 1 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{r} = 0 \Rightarrow$$ такого r нет.

$\Rightarrow$ Периодич. решений в задаче нет.

1) слу.ч. $|x| < \left|\frac{rx}{1+x^2}\right| = \frac{r|x|}{1+x^2}$

$|x|(1+x^2) - r|x| < 0$

$|x|(1-r+x^2) < 0$

$\Downarrow$

$x^2 < r-1$

$\Downarrow$

$|x| < \sqrt{r-1}$

2) случ. $\left|\frac{rx}{1+x^2}\right| = \frac{r|x|}{1+x^2} < |x|$

$r|x| - |x|(1+x^2) < 0$

$|x|(r-1-x^2) < 0$

$\Downarrow$

$r-1 < x^2$

$\Downarrow$

$\sqrt{r-1} < |x|$

$\Downarrow$

$|x_n|$ либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает и const, если $|x_n|$ начинается в фиксир. точке

$\Downarrow$

хаотических траекторий нет