Система Лоренца (д/з)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \qquad \sigma, r, b > 0$$

Ненулевые решения:

$$C^{\pm} = \left(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$$

Якобиан: $J = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$

$$J(C^{\pm}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Харак. ур-ние. $\det(J - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\sigma-\lambda & \sigma & 0 \\ 1 & -1-\lambda & \mp\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\sigma-\lambda)\left[(-1-\lambda)(-b-\lambda)+b(r-1)\right]-\sigma\left[1(-b-\lambda)+b(r-1)\right]=0$$

$$(-\sigma-\lambda)\left[b+\lambda+b\lambda+\lambda^2+br-b\right]-\sigma\left[-b-\lambda+br-b\right]=0$$

$$-\cancel{\sigma b}-\cancel{\sigma\lambda}-\sigma b\lambda-\sigma\lambda^2-\sigma br+\cancel{\sigma b}-\cancel{b\lambda}-\lambda^2-b\lambda^2-$$

$$-\lambda^3-br\lambda+\cancel{b\lambda}+\sigma b+\cancel{\sigma\lambda}-\sigma br+\sigma b=0$$

$$-\lambda^3-\lambda^2(\sigma+1+b)-\lambda(\sigma b+br)-(2\sigma br-2\sigma b)=0$$

$$\lambda^3+\lambda^2(\sigma+1+b)+\lambda b(\sigma+r)+2\sigma b(r-1)=0$$

$$P(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2(\sigma+1+b)+\lambda b(\sigma+r)+2\sigma b(r-1)$$

– характ. полином.

$$a_0=1>0$$

$$a_1=\sigma+1+b>0$$

$$a_2=b(\sigma+r)>0$$

$$a_3=2\sigma b(r-1)>0 \quad \underline{\text{при } r>1}$$

Матрица Гурвица: $H=\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$

$$H=\begin{pmatrix} \sigma+1+b & 2\sigma b(r-1) & 0 \\ 1 & b(\sigma+r) & 0 \\ 0 & \sigma+1+b & 2\sigma b(r-1) \end{pmatrix}$$

Критерий Гурвица: главные миноры положительны
$\Rightarrow$ полином устойчив.

$$\Delta_1 = \sigma + 1 + b > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sigma+1+b & 2\sigma b r - 2\sigma b \\ 1 & \sigma b + b r \end{vmatrix} =$$

$$= (\sigma+1+b)(\sigma b + b r) - (2\sigma b r - 2\sigma b) =$$

$$= \sigma^2 b + \sigma b r + \sigma b + b r + \sigma b^2 + b^2 r - 2\sigma b r + 2\sigma b =$$

$$= \sigma^2 b - \sigma b r + 3\sigma b + b r + \sigma b^2 + b^2 r =$$

$$= \underbrace{b}_{>0}\left[\sigma(\sigma+b+3) + r(b+1-\sigma)\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(\sigma+b+3) + r(b+1-\sigma) > 0$$

$$\Downarrow$$

$\Delta_2 > 0$ при $r < \dfrac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$ $(\sigma > b+1)$

$\Delta_3 = \underbrace{2\sigma b(r-1)}_{\substack{>0 \\ \text{при } r>1}} \cdot \Delta_2 > 0$ при $\Delta_2 > 0$

Полином устойчив при $r > 1$ и $r < \dfrac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}$

$\Rightarrow$ граница уст-ти: $\boxed{r_H(\sigma, b) = \dfrac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}}$

допустим, хар. ур-ние имеет два чисто мнимых корня вида $\lambda_{1,2} = i\omega$, найдём, при каком r это происходит.

$$\lambda^3 + (\sigma+1+b)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0$$

$$(i\omega)^3 + (\sigma+1+b)(i\omega)^2 + b(\sigma+r)i\omega + 2\sigma b(r-1) = 0$$

$$-i\omega^3 - (\sigma+1+b)\omega^2 + b(\sigma+r)i\omega + 2\sigma b(r-1) = 0$$

Re : $-(\sigma+1+b)\omega^2 + 2\sigma b(r-1) = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{\dfrac{2\sigma b(r-1)}{\sigma+1+b}}$

Im: $-i\omega^3 + b(\sigma+r)i\omega = 0$

$$-i\omega(\omega^2 - b(\sigma+r)) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\omega = 0\\ \omega = \pm\sqrt{b(r+\sigma)}\end{array}\right.$$

$$\pm\sqrt{\frac{2\sigma b(r-1)}{\sigma+1+b}} = \pm\sqrt{b(r+\sigma)}$$

$$\frac{2\sigma b(r-1)}{\sigma+1+b} = b(r+\sigma)$$

$$2\sigma b(r-1) = (br + b\sigma)(\sigma+1+b)$$

$$2\sigma br - 2\sigma b = b\sigma r + br + b^2 r + b\sigma(\sigma+1+b)$$

$$\sigma br - br - b^2 r = b\sigma(\sigma+b+3)$$

$$br(\sigma-1-b) = b\sigma(\sigma+b+3)$$

$$r = \frac{b\sigma(\sigma+b+3)}{b(\sigma-1-b)} = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-1-\sigma} = r_н$$

$\Rightarrow$ при $r = r_н$ хар. ур-ние имеет два чисто мнимых корня

ч.т.д.