

Задача 3 Взвешенное голосование
3 алгоритма: $b_1(x)$, $b_2(x)$, $b_3(x)$
каждый ошибается с вероятностью p

$$a_0 = \sum_{i=1}^3 w_i [b_i(x)=0]$$

$$a_1 = \sum_{i=1}^3 w_i [b_i(x)=1]$$

1) $w_1 = 0,3$; $w_2 = 0,4$; $w_3 = 0,3$

Заметим, что $\sum w_i$ больше, если 3 или 2
значит, правильный ответ алгоритм даст,
если не больше чем один алгоритм ошибается.
Тогда вероятность ошибки алгоритма:

$$\text{Решение} = 1 - \underbrace{(1-p)^3}_{\text{все три правильно}} - \underbrace{C_3^2 \cdot p \cdot (1-p)^2}_{\substack{\text{ошибка в} \\ \text{два алор.} \quad \text{правильно} \\ \text{два алгоритма,} \\ \text{один ошибается}}} \quad \ominus$$

$$\begin{aligned} \ominus 1 - (1-p)^3 - 3p(1-p)^2 &= 1 - (1 - 3p + 3p^2 - p^3) - 3p(1 - 2p + p^2) = \\ &= 1 - 1 + 3p - 3p^2 + p^3 - 3p + 6p^2 - 3p^3 = 3p^2 - 2p^3 = \\ &= p^2(3 - 2p) \end{aligned}$$

Ответ: $p^2(3 - 2p)$

2) $w_1 = 0,2$; $w_2 = 0,5$; $w_3 = 0,2$

Нарисуем таблицу возможных ответов

ответ b_1 ($w_1=0,2$)	ответ b_2 ($w_2=0,5$)	ответ b_3 ($w_3=0,2$)	итоговый ответ
1	1	1	1
0	0	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1

Из таблицы видно, что алгоритм ошибается, если:

- 1) все ошибаются;
- 2) два алгоритма ошибаются и их \sum весов $>$ 3 веса
- 3) ошибается один алгоритм, чей вес больше суммарный весов двух других.

Тогда вероятность ошибки алгоритма:

$$P_{\text{ошибки}} = 1 - \underbrace{(1-p)^3}_{\text{три правильно}} - \underbrace{p^2(1-p)}_{\substack{\text{2 ошибаются,} \\ \text{один прав,} \\ \text{но его вес больше,} \\ \text{чем } \sum \text{весов других}}} - \underbrace{2p(1-p)^2}_{\substack{\text{один ошибается,} \\ \text{два правильно,}}} \quad \ominus$$

$$\begin{aligned} \ominus & 1 - (1 - 3p + 3p^2 - p^3) - p^2 + p^3 - 2p(1 - 2p + p^2) = \\ & = 1 - 1 + 3p - 3p^2 + p^3 - p^2 + p^3 - 2p + 4p^2 - 2p^3 = \\ & = p \end{aligned}$$

Ответ: p