No. 6.1

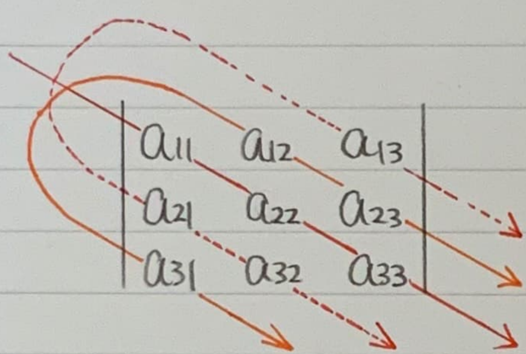
Date 20・11・7

行列式

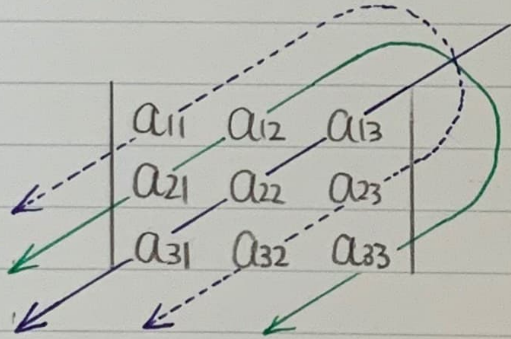
P86 行列式の展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$$



$$\underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{21}a_{32}a_{13}} + \underline{a_{31}a_{12}a_{23}}$$



$$\underline{a_{31}a_{22}a_{13}} + \underline{a_{11}a_{32}a_{23}} + \underline{a_{21}a_{12}a_{33}}$$

3次の行列式はサラスの方法で展開できる. 4次以上では余因子による展開式を用いる.

行列式の展開

P86 行列式の展開

$$\text{余因子 } A_{ij} = (-1)^{i+j} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

余因子による行列式の展開（第1列を例に）

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

P88 $\boxed{1}$

(1) $|A| = 1\cdot3\cdot7+0+0-0-4\cdot6-0 = -3$

(2) $|A| = 4+3+2-2-4-3 = 0$

(3) $|A| = 0+18+0-0-14-0 = 4$

(4) $|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41}$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (140+126+180-140-126-180)$$
$$-(56+72+90-80-63-72)$$

$$= 0-3 = -3$$

No. 6.3
Date 20・11・7

行列式の性質

P89 $\boxed{2}$

(1) $|A| = (3-4)-(2-4)+(2-3) = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ← 第1行と第3行が同じだから0

(2) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ ← 第1列と第3列が比例しているので、
$|A| = 0$

(3) $|A| = 36+10+21-12-18-35 = 2$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2$

(4) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 1 & 4 & 3 \\ 10 & 4 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$= 10\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$

$= -10(-3-5) = 80$

行列式による連立1次方程式の解法

P89 行列式による連立1次方程式の解法

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=p_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=p_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=p_3 \end{cases}$$

クラメルの公式

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $(\neq 0)$ とすると、

$$x=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad y=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad z=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}$$

P90 $\boxed{3}$

(1) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-1=-3$$

$$x=\frac{1}{-3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}(-6)=2$$

$$y=3-2=1$$

P90 $\boxed{3}$

(2) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 24-2 = 22$

$x = \frac{1}{22}\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{22}(\cancel{18}+2+9+2-\cancel{18}+9) = 1$

$y = \frac{1}{22}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{22}(-9+30+4-15+36-2) = 2$

$z = 6-1-2 = 3$

(3) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1+2)+(-1) = 2$

$x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 15 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(6-15+12+1) = 2$

$y = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\{(-1+15)+(-6)\} = 4$

$z = 4+1 = 5$

行列（マトリクス）

P90 行列（マトリクス）

行列の積

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times3+5\times1 \\ 4\times3+7\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \end{bmatrix}$$

(m, n)型行列 × (n, l)型行列 ＝ (m, l)型行列

単位行列

対角成分が1で他が0のものを単位行列といい、
$[E]$（または$[U]$, $[I]$）で表す.

$[A][E] = [A]$
$[A][O] = [O]$

$[A][B] \neq [B][A]$

No. 6.6

Date 20.11.7

逆行列と連立1次方程式

P94 $\boxed{4}$

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 19 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{bmatrix}$

P94 逆行列と連立1次方程式

$[A]$の逆行列 $[A]^{-1}$

$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [E]$

P96 逆行列の求め方

① $[A]$に対して、$|A| \neq 0$であることを確認する.

② 転置行列 $[A]_t$を求める.

③ $[A]_t$の余因子 $A'_{11}, A'_{12}, \ldots, A'_{n1}, \ldots, A'_{nm}$を求める.

④ $[A]^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & \cdots & A'_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{n1} & A'_{n2} & \cdots & A'_{nn} \end{bmatrix}$

逆行列の求め方

P97 $\boxed{5}$

(1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12-10 = 2$

$[A]_t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$[A]^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2.5 \\ -1 & 1.5 \end{bmatrix}$

(2) $|A| = 1$

$[A]_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $|A| = ad-bc$

$[A]_t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$[A]^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

(4) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5$

$[A]_t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$[A]^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

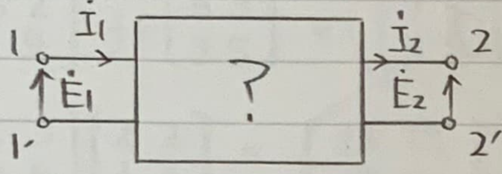
$[A]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

No. 6.8

Date 20・11・7

4端子回路と行列

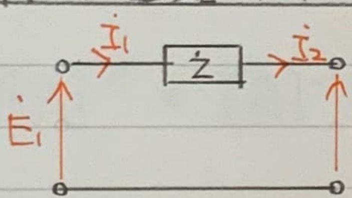
P97 4端子回路と行列



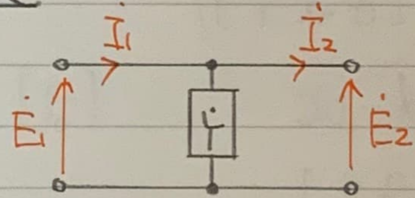
$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{ただし} \quad \begin{vmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{vmatrix} = 1$$

$\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}, \dot{D}$ は $\boxed{?}$ のインピーダンスのつながり方によって決まる定数で、4端子定数という。

簡単な回路の4端子定数



(a) インピーダンス回路



(b) アドミタンス回路

(a)
$$\begin{bmatrix} 1 & \dot{z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

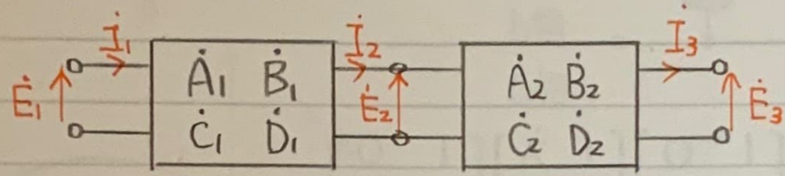
$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_2 + \dot{z}\dot{I}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

(b)
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

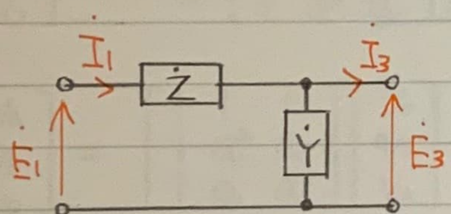
$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_2 \\ \dot{Y}\dot{E}_2 + \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

P97 4端子回路と行列

縦続接続



$$\begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A}_1 & \dot{B}_1 \\ \dot{C}_1 & \dot{D}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{A}_2 & \dot{B}_2 \\ \dot{C}_2 & \dot{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}$$



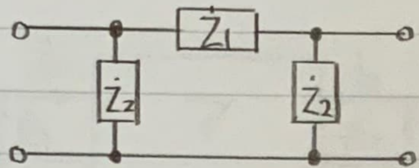
$$\begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\dot{Z}\dot{Y} & \dot{Z} \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

No.

Date

P100 $\boxed{6}$

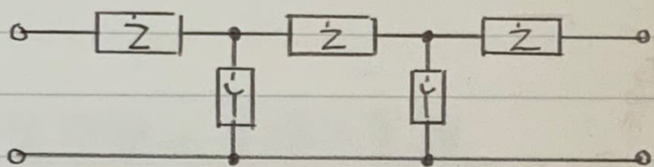
(1)



$$\begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\dot{Z}_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\dot{Z}_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z}_1 \\ 1/\dot{Z}_2 & \dot{Z}_1/\dot{Z}_2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\dot{Z}_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} & \dot{Z}_1 \\ \frac{1}{\dot{Z}_2}\left(2+\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}\right) & \frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}+1 \end{bmatrix}$$

(2)



$$\begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\dot{Z}\dot{Y} & \dot{Z} \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\dot{Z}\dot{Y} & \dot{Z}(2+\dot{Z}\dot{Y}) \\ \dot{Y} & 1+\dot{Z}\dot{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

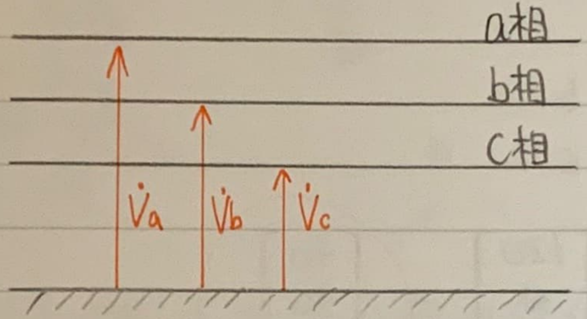
$$= \begin{bmatrix} 1+3\dot{Z}\dot{Y}+(\dot{Z}\dot{Y})^2 & \dot{Z}(2+\dot{Z}\dot{Y}) \\ 2\dot{Y}+\dot{Z}\dot{Y}^2 & 1+\dot{Z}\dot{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3\dot{Z}\dot{Y}+(\dot{Z}\dot{Y})^2 & 3\dot{Z}+4\dot{Z}^2\dot{Y}+\dot{Z}^3\dot{Y}^2 \\ 2\dot{Y}+\dot{Z}\dot{Y}^2 & 1+3\dot{Z}\dot{Y}+(\dot{Z}\dot{Y})^2 \end{bmatrix}$$

対象回路ではA=Dとなる。

対象座標法と行列

P101 対象座標法と行列



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix}$$

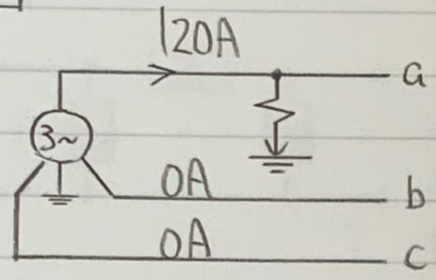
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

$\dot{V}_0$を零相電圧, $\dot{V}_1$を正相電圧, $\dot{V}_2$を逆相電圧という.

No.

Date

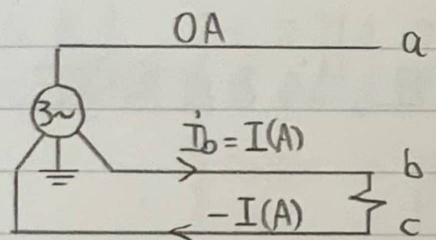
P104 $\boxed{7}$



$$\begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 120(1+a^2+a) \\ 120(1+a+a^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

P104 $\boxed{8}$



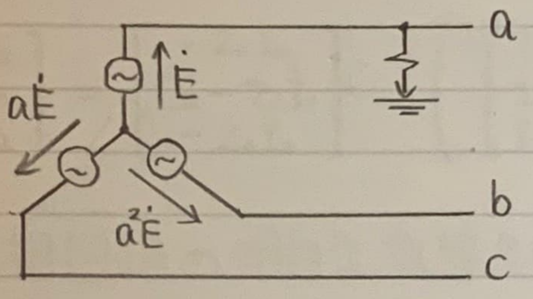
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ I \\ -I \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ I(a-a^2) \\ I(a^2-a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ j(1/\sqrt{3}) \\ -j(1/\sqrt{3}) \end{bmatrix} I$$

2線短絡時 $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$

No.

Date

P104 $\boxed{9}$



非接地形において1線地絡したとき

$\dot{V}_a = 0,\ \dot{V}_b = (a^2-1)\dot{E},\ \dot{V}_c = (a-1)\dot{E}$

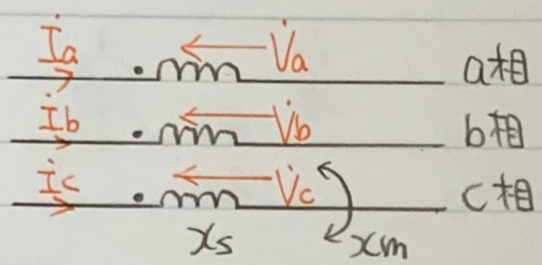
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ (a^2-1)\dot{E} \\ (a-1)\dot{E} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (a^2+a-2)\dot{E} \\ (2a^3-a^2-a)\dot{E} \\ (a^4-a)\dot{E} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (a^2+a+1-3)\dot{E} \\ (-a^2-a-1+3)\dot{E} \\ (a-a)\dot{E} \end{bmatrix} = \frac{\dot{E}}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{E} \\ \dot{E} \\ 0 \end{bmatrix}$$

No.

Date

P105 対称分インピーダンスと対称分回路



$$\begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} x_s & x_m & x_m \\ x_m & x_s & x_m \\ x_m & x_m & x_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_a \\ \dot{V}_b \\ \dot{V}_c \end{bmatrix} = \frac{j}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s & x_m & x_m \\ x_m & x_s & x_m \\ x_m & x_m & x_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix}$$

$$= \frac{j}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s & x_m & x_m \\ x_m & x_s & x_m \\ x_m & x_m & x_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} j(x_s+2x_m)\dot{I}_0 \\ j(x_s-x_m)\dot{I}_1 \\ j(x_s-x_m)\dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

零相インピーダンス $\dot{Z}_0$, 正相・逆相インピーダンス $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2$ は

$$\dot{Z}_0 = j(x_s+2x_m)$$
$$\dot{Z}_1 = j(x_s-x_m)$$
$$\dot{Z}_2 = j(x_s-x_m)$$

発電機のリアクタンスなど $\dot{Z}_0 \neq \dot{Z}_1 \neq \dot{Z}_2$ となる不平衡状態の回路計算には対称座標法が必要である。

P108 発電機の基本式

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{Z}_0\dot{I}_0 \\ \dot{E}_a - \dot{Z}_1\dot{I}_1 \\ -\dot{Z}_2\dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{V}_0/\dot{Z}_0 \\ (E_a - \dot{V}_1)/\dot{Z}_1 \\ -\dot{V}_2/\dot{Z}_2 \end{bmatrix} \right)$$

三相回路の明白な故障条件（1線地絡の例）

$$\begin{cases} \cdot\ \dot{V}_a = 0 \\ \cdot\ \dot{I}_b = 0,\ \dot{I}_c = 0 \end{cases} \qquad \dot{V}_a = \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 &= (-\dot{Z}_0\dot{I}_0) + (E_a - \dot{Z}_1\dot{I}_1) + (-\dot{Z}_2\dot{I}_2) \\ &= E_a - (\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)\dot{I}_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\dot{I}_0 = \frac{E_a}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} \quad (= \dot{I}_1 = \dot{I}_2)$$

$$\dot{V}_0 = -\dot{Z}_0\dot{I}_0 = \frac{-\dot{Z}_0 E_a}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

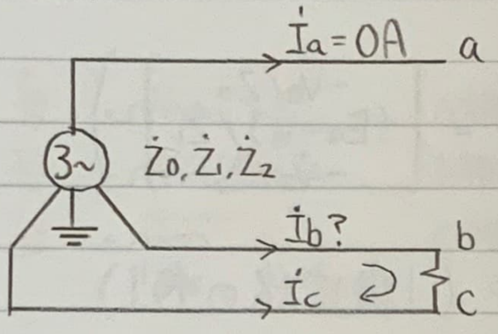
$$\dot{V}_1 = E_a - \dot{Z}_1\dot{I}_1 = \frac{(\dot{Z}_0 + \dot{Z}_2)E_a}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

$$\dot{V}_2 = -\dot{Z}_2\dot{I}_2 = \frac{-\dot{Z}_2 E_a}{\dot{Z}_0 + \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

No.

Date

P110 $\boxed{10}$



b,C相間の2線短絡時

$\dot{I}_a = 0$, $\dot{I}_b = -\dot{I}_c$, $\dot{V}_b = \dot{V}_c$ ← ① まず故障条件

$\dot{V}_b = \dot{V}_0 + a^2\dot{V}_1 + a\dot{V}_2$ ← ② 次に対称座標変換

$\dot{V}_c = \dot{V}_0 + a\dot{V}_1 + a^2\dot{V}_2$

$\dot{V}_b = \dot{V}_c$ より $\cancel{\dot{V}_0} + a^2\dot{V}_1 + a\dot{V}_2 = \cancel{\dot{V}_0} + a\dot{V}_1 + a^2\dot{V}_2$

$(a^2 - a)\dot{V}_1 = (a^2 - a)\dot{V}_2$

$\therefore \dot{V}_1 = \dot{V}_2$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{I}_b \\ -\dot{I}_b \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ (a-a^2)\dot{I}_b \\ (a^2-a)\dot{I}_b \end{bmatrix}$$

$\therefore \dot{I}_0 = 0$, $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2 = \frac{1}{3}(a - a^2)\dot{I}_b = j\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{I}_b$

発電機の基本式を用いて ← ③ 発電機の基本式

$\dot{V}_1 = \dot{E}_a - \dot{Z}_1\dot{I}_1$

$\dot{V}_2 = \dot{Z}_2\dot{I}_2$

P110 $\boxed{10}$

$\dot{V}_1 = \dot{V}_2$ より　$E_a - \dot{Z}_1 \dot{I}_1 = \dot{Z}_2 \dot{I}_1$

$\therefore \dot{I}_1 = \dfrac{E_a}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$

$\dot{I}_b = -j\sqrt{3}\,\dot{I}_1 = -j\dfrac{\sqrt{3}E_a}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$

$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2$ とすると、$\dot{I}_b = -j\dfrac{\sqrt{3}E_a}{2\dot{Z}_1}$

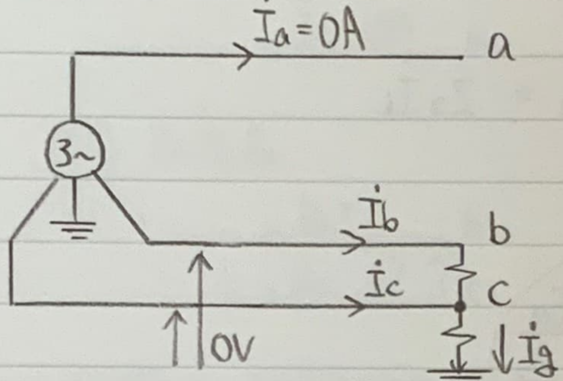
3線短絡電流は $\dot{I}_{3S} = \dfrac{E_a}{\dot{Z}_1}$ であるから、

$$\therefore \frac{|\dot{I}_b|}{|\dot{I}_{3S}|} = \left| \frac{-j\dfrac{\sqrt{3}E_a}{2\dot{Z}_1}}{\dfrac{E_a}{\dot{Z}_1}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \fallingdotseq 0.866\text{(倍)}$$

No.

Date

P110 $\boxed{11}$



b相, C相が短絡し、その短絡点が地絡したとき

故障条件; $\dot{I}_a = 0$, $\dot{V}_b = \dot{V}_c = 0$

$$\dot{V}_0 + a^2\dot{V}_1 + a\dot{V}_2 = \dot{V}_0 + a\dot{V}_1 + a^2\dot{V}_2 = 0$$

$$\therefore \dot{V}_1 = \dot{V}_2, \quad \dot{V}_0 = -(a^2+a)\dot{V}_1 = \dot{V}_1 = \dot{V}_2$$

$$\dot{I}_a = \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0$$

発電機の基本式より

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_0 \\ \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{V}_0/\dot{Z}_0 \\ (E_a-\dot{V}_1)/\dot{Z}_1 \\ -\dot{V}_2/\dot{Z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = -\frac{\dot{V}_0}{\dot{Z}_0} + \frac{E_a-\dot{V}_1}{\dot{Z}_1} - \frac{\dot{V}_2}{\dot{Z}_2} = 0$$

$$-\dot{V}_0\dot{Z}_1\dot{Z}_2 + (E_a-\dot{V}_0)\dot{Z}_0\dot{Z}_2 - \dot{V}_0\dot{Z}_0\dot{Z}_1 = 0$$

$$\dot{V}_0(-\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_0\dot{Z}_2 - \dot{Z}_0\dot{Z}_1) + E_a \cdot \dot{Z}_0\dot{Z}_2 = 0$$

P110 $\boxed{11}$

$$\dot{V}_0 = \frac{\dot{Z}_0 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_0\dot{Z}_1 + \dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_0} E_a$$

$$\dot{I}_0 = -\frac{\dot{V}_0}{\dot{Z}_0} = -\frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_0\dot{Z}_1 + \dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_0} E_a$$

地絡電流 $\dot{I}_g = \dot{I}_b + \dot{I}_c$

$\dot{I}_0 = \frac{1}{3}(\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c)$ より

$$\dot{I}_g = 3\dot{I}_0 = -\frac{3\dot{Z}_2}{\dot{Z}_0\dot{Z}_1 + \dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_0} E_a$$

$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2$ かつ 中性点非接地系統 $(|\dot{Z}_0| = \infty)$ のとき

$$\dot{V}_0 = \frac{\dot{Z}_0\dot{Z}_2}{\dot{Z}_0\dot{Z}_1 + \dot{Z}_1\dot{Z}_2 + \dot{Z}_2\dot{Z}_0} E_a = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_0} + \dot{Z}_2} E_a$$

$$= \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} E_a = \frac{1}{2} E_a$$

したがって 中性点非接地系統 において

$$\begin{cases} \text{a相1線地絡時} \ \text{---} \ \dot{V}_0 = -E_a & (\because \boxed{9}) \\ \text{bc相2線地絡時} \ \text{---} \ \dot{V}_0 = \frac{1}{2} E_a \end{cases}$$

↑ 1線地絡時 の 逆位相 の 1/2 の大きさである.

No. 7.1

Date 20.11.8

微分法

P120 $\boxed{1}$

(1) $(2x^2)' = 4x$, $f'(2) = 4 \cdot 2 = 8$

(2) $(x^2-2x+3)' = 2x-2$, $f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$

(3) $\{5(x^2-7)\}' = 10x$, $f'(2) = 20$

P120 $\boxed{2}$

(1) $(3\sin x)' = 3\cos x$

(2) $(x^5 - 2\cos x)' = 5x^4 + 2\sin x$

(3) $(x^n - ne^x)' = nx^{n-1} - ne^x$

(4) $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$

(5) $(\log x^3)' = (3\log x)' = \frac{3}{x}$

(6) $(x \sin x \cos x)' = \sin x \cos x + x(\cos^2 x - \sin^2 x)$

(7) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

(8) $\left(\frac{\log x}{x}\right)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} - \log x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}(1 - \log x)$

微分係数と導関数

P120 $\boxed{2}$ (つづき)

(9) $\{7(x-1)\sin x\,(x^2-2x+1)^{-1}\}'$

$= \{7\sin x\,(x-1)^{-1}\}'$

$= 7\cos x\,(x-1)^{-1} + 7\sin x\{-(x-1)^{-2}\}$

$= \dfrac{7\cos x}{x-1} - \dfrac{7\sin x}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{7}{(x-1)^2}\{(x-1)\cos x - \sin x\}$

No. 7.3

Date 20・11・8

極限値と微分法

P124 極限値と微分法

ロピタルの定理

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

(ただし $\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)}$ が $\frac{0}{0}$ または $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形であること)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right) \right\}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots \right) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{1} \right) = 1$$

No. 7.4
Date 20・11・8

いろいろな微分法

P130 合成関数の導関数

$y = f(x)$, $z = g(y)$ の合成関数 $z = g(f(x))$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \cdot \frac{df(x)}{dx}$$

例：合成関数 $i = I_m \sin(2\pi f t)$ [A]

$$e = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt} I_m \sin(2\pi f t)$$

$$= L I_m \frac{d \sin(2\pi f t)}{d(2\pi f t)} \cdot \frac{d(2\pi f t)}{dt}$$

$$= 2\pi f L I_m \cos(2\pi f t) \quad [V]$$

P131 $\boxed{3}$

(1) $\{(x^2+x+1)^3\}' = 3(x^2+x+1) \cdot (x^2+x+1)'$

$$= 3(x^2+x+1)(2x+1)$$

(2) $(\sqrt{2x-5})' = \frac{1}{2}(2x-5)^{-\frac{1}{2}}(2x-5)'$

$$= (2x-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$$

No.

Date

P131 $\boxed{3}$

(3) $\left\{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^5\right\}' = 5\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{x}{x^2+1}\right)'$

$= 5\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^4 \left\{(x^2+1)^{-1} - 2x^2(x^2+1)^{-2}\right\}$

$= 5\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^4 \cdot \frac{1}{(x^2+1)^2}\left\{(x^2+1) - 2x^2\right\}$

$= 5\frac{x^4(1-x^2)}{(x^2+1)^6}$

(4) $\left\{(x-1)^2(x^2+x+3)^3\right\}'$

$= 2(x-1)(x^2+x+3)^3 + (x-1)^2 \cdot 3(x^2+x+3)^2 \cdot (2x+1)$

$= (x-1)(x^2+x+3)^2\left\{2(x^2+x+3) + 3(x-1)(2x+1)\right\}$

$= (x-1)(x^2+x+3)^2(8x^2-x+3)$

(5) $(x\sqrt{x^2+1})' = \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

(6) $\left\{\log(2x+1)^3\right\}' = \left\{3\log(2x+1)\right\}'$

$= 3 \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{6}{2x+1}$

P131 $\boxed{3}$

(7) $\left(\log\dfrac{x-1}{x+1}\right)' = \{\log(x-1)-\log(x+1)\}'$

$= \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{x^2-1}$

(8) $\{(x^2+1)e^{2x}\}' = 2xe^{2x} + (x^2+1)\cdot 2e^{2x}$

$= e^{2x}\{2(x^2+1)+2x\} = 2e^{2x}(x^2+x+1)$

(9) $(\cot x)' = \left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'$

$= -\sin x\cdot(\sin x)^{-1} + \cos x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)\cos x$

$= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(10) $(\cos^2 x)' = 2\cos x(-\sin x) = -2\cos x\sin x$

(11) $\{\sin(x^2+1)\}' = \cos(x^2+1)\cdot 2x$

(12) $(e^x\cos 2x)' = e^x\cos 2x - e^x\sin 2x\cdot 2$

$= e^x(\cos 2x - 2\sin 2x)$

No.

Date

P132 逆関数の導関数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}$$

例： $y = \sin^{-1}x$

$-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $x = \sin y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\sin y}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

P133 媒関変数による導関数

$y = f(t)$, $x = g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

例： $x = a\cos\omega t$, $y = b\sin\omega t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{b\cos\omega t}{-a\sin\omega t} = -\frac{b^2 a\cos\omega t}{a^2 b\sin\omega t}$$

$$= -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

No.

Date

P133 陰関数の導関数

陰関数 $f(x,y)=0$ の導関数は両辺を x で微分して求める.

例: 円 $f(x,y)=x^2+y^2-4=0$

両辺を x で微分すると

$$\frac{dx^2}{dx}+\frac{dy^2}{dx}=0 \qquad 2x+\frac{dy^2}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

No.

Date

P136 $\boxed{4}$

(1) $y = (x+1)^4(2x-1)^3$

$\log y = 4\log(x+1) + 3\log(2x-1)$

$\frac{d\log y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x+1} + \frac{6}{2x-1}$

$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{4}{x+1} + \frac{6}{2x-1}\right) = (x+1)^3(2x-1)^2(14x+2)$

(2) $y = a^x$

$\log y = \log a^x = x\log a$

$\frac{d\log y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \log a$

$\frac{dy}{dx} = y\log a = a^x\log a$

(3) $y = x^{e^x}$

$\log y = e^x\cdot\log x$

$\frac{d\log y}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = e^x\log x + e^x\cdot\frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx} = y\cdot e^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right) = x^{e^x}\cdot e^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right)$

No.
Date

P137 $\boxed{5}$

(1) $f(x) = \sin x$

$$f^{(1)}(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$f^{(2)}(x) = -\sin x = \sin(x + \pi)$$
$$f^{(3)}(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$$

したがって $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

(2) $g(x) = \cos x$

$$g(x) = f^{(1)}(x)$$

$$g^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

(3) $f(x) = \log(1+x) \quad (x > -1)$

$$f^{(1)}(x) = (1+x)^{-1}$$
$$f^{(2)}(x) = -(1+x)^{-2}$$
$$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3}$$
$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}$$

したがって $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)! \cdot (1+x)^{-n}$

No. 7.5
Date 20・11・8

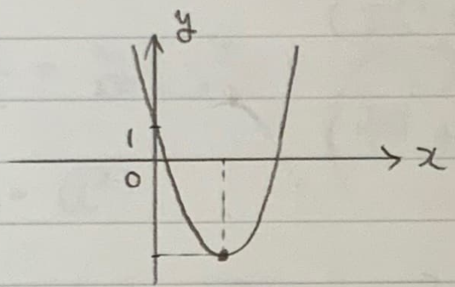
関数の極大・極小

P137 関数の極大・極小

例： $y = x^2 - 4x + 1$

$y' = 2x - 4 = 2(x-2)$

$y' = 0$ のとき $x = 2,\ y = -3$



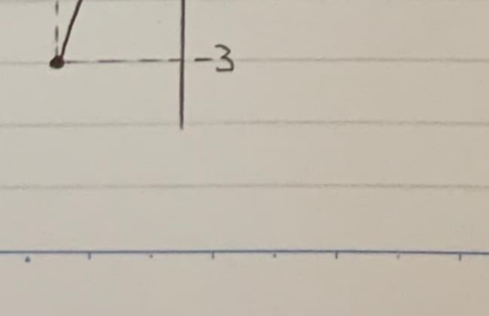
x		2	
y'	$-$	0	$+$
y	↘	-3 極小	↗

例： $y = \sqrt{9-x^2} + x$ 　 $(9 - x^2 \geqq 0 \quad -3 \leqq x \leqq 3)$

$y' = -\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}} + 1$

$y' = 0$ のとき $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき $y = 3\sqrt{2}$



x	-3	$\cdots$	$\frac{3}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	-3	↗	$3\sqrt{2}$	↘	3

No.

Date . .

P139 $\boxed{6}$

(1) $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$

$f'(x) = 4x - 8$ 　 $f'(x) = 0$ のとき $x = 2$

$f(2) = 2 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 5 = -3$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

$x = 2$ で極小値 -3

(2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$

$f'(x) = 0$ のとき $x = -3, 1$

$f(-3) = 35$, $f(1) = 3$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	35	$\searrow$	3	$\nearrow$

$x = -3$ で極大値 35, $x = 1$ で極小値 3

No.

Date

P139 $\boxed{6}$

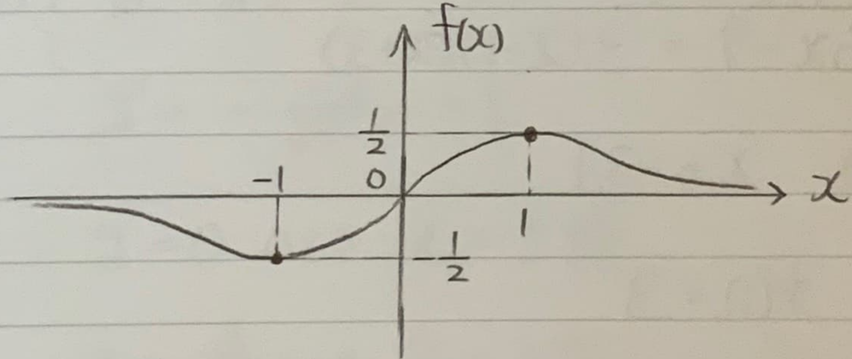
(3) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

$f'(x) = (1+x^2)^{-1} - 2x^2(1+x^2)^{-2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$f'(x) = 0$ のとき $x = \pm 1$

$f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$



$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0^+$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0^-$

したがって $x=-1$ で極小値 $-\frac{1}{2}$, $x=1$ で極大値 $\frac{1}{2}$

No.

Date

P139 $\boxed{6}$

(4) $f(\theta) = 3\sin\theta + 4\cos\theta = 5\sin(\theta+\phi)$

(ただし $\tan\phi = 3/5$)

$f'(\theta) = 5\cos(\theta+\phi) = 5\sin(\theta+\phi+\frac{\pi}{2})$

$(= 3\cos\theta - 4\sin\theta)$

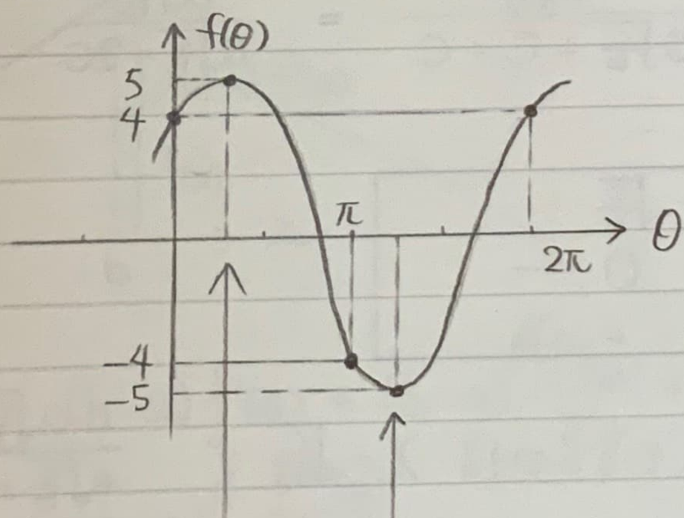
$f'(\theta) = 0$ のとき $\cancel{\theta = -(\phi+\frac{\pi}{2})}$ $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4},\ \tan^{-1}\frac{3}{4}+\pi$

$\cancel{f(-\phi-\frac{\pi}{2}) = 5\sin(-\frac{\pi}{2}) = -5}$ $f(\tan^{-1}\frac{3}{4}) = 5$

$f(\tan^{-1}\frac{3}{4}+\pi) = -5$

θ	-2π	$\cdots$	$-\phi-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	2π
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	4	↘	-5	↗	4

$f(-2\pi) = f(2\pi) = 4,\quad f(0) = 3$



$\theta = 0.6\cancel{8}435$ で 極大値 5

$\theta = 3.7851$ で 極小値 -5

No.

Date

P139 $\boxed{7}$

$$\eta = f(I) = \frac{EI}{EI + I^2R + W_i} \qquad (I \geqq 0)$$

ηが最大となる銅損I^2Rと鉄損W_iとの関係を求める.

$$f(x) = \frac{ax}{ax + bx^2 + c}$$ とおきかえて

$$f'(x) = a(bx^2 + ax + c)^{-1} - ax(2bx + a)(bx^2 + ax + c)^{-2}$$

$$= (bx^2 + ax + c)^{-2}\{a(bx^2 + ax + c) - ax(2bx + a)\}$$

$$= (bx^2 + ax + c)^{-2}(-abx^2 + ac) = \frac{-a(bx^2 - c)}{(bx^2 + ax + c)^2}$$

$f'(x) = 0$ のとき $x = \pm\sqrt{\frac{c}{b}}$

$$f\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right) = \frac{a\sqrt{\frac{c}{b}}}{a\sqrt{\frac{c}{b}} + c + c} = \frac{a\sqrt{\frac{c}{b}}}{a\sqrt{\frac{c}{b}} + 2c}$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{c}{b}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\frac{a}{c}$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

$f(x)$が最大となるのは $x = \sqrt{\frac{c}{b}}$ で $\dfrac{a\sqrt{\frac{c}{b}}}{a\sqrt{\frac{c}{b}} + 2c}$

すなわち 効率ηが最大となるのは $I = \sqrt{\frac{W_i}{R}}$ のときで,

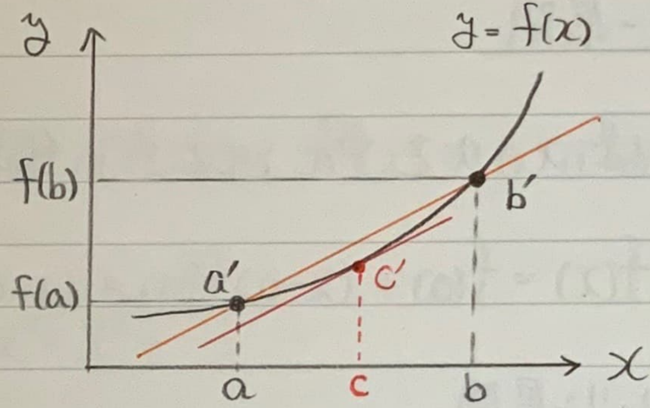
$$\eta_{max} = \frac{E\sqrt{\frac{W_i}{R}}}{E\sqrt{\frac{W_i}{R}} + 2W_i}$$

関数の級数展開と近似値の計算

P140　関数の級数展開と近似値の計算

平均値の定理

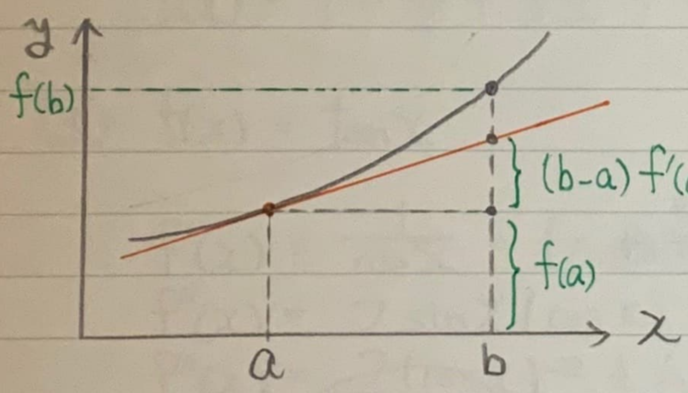
$\overline{a'b'}$ と平行で $f(x)$ と接する点を c' とし、x の値を c とする.



区間 $[a,b]$ において
次式を満足する c が少なくとも1つ存在する.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \qquad \left(f(b) = f(a) + (b-a)f'(c) \right)$$

これを 平均値の定理という.



$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + (b-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots$$
$$\cdots + (b-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

これをテイラーの定理という.

No.

Date

P142 テイラー展開とマクローリン展開

テイラー展開

f(x)は $x=a$ を中心として次の級数に展開できる.

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + (x-a)^3\frac{f'''(a)}{3!} + \cdots$$

マクローリン展開

f(x)を $x=0$ を中心としてテイラー展開することを特にマクローリン展開とよぶ.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

P143 $\boxed{8}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$x=1$ のとき

$$e^1 = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \fallingdotseq 2.7083$$

No.

Date

P143 $\boxed{9}$

(1) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f''(x) = 2\cdot\frac{1}{(1-x)^3}$, $f'''(x) = 6\cdot\frac{1}{(1-x)^4}$
$f''''(x) = 24\cdot\frac{1}{(1-x)^5}$

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, $f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$
$f'''(x) = -\frac{15}{8}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$, $f''''(x) = \frac{105}{16}(1+x)^{-\frac{9}{2}}$

$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{15}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots$

(3) $f(x) = \tan x$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2}$
$f''(x) = 2\sin x(\cos x)^{-3}$
$f'''(x) = 2(\cos x)^{-2} + 6\sin^2 x(\cos x)^{-4}$
$f''''(x) = 4\sin x(\cos x)^{-3} + 12\sin x\cos x(\cos x)^{-4} + 24\sin^3 x(\cos x)^{-5}$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 2$, $f''''(0) = 0$

$f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \cdots$

No.

Date

P144 $\boxed{10}$

(1) $(1+x)^{-1} \fallingdotseq 1-x$

(2) $(1-x)^{-1} \fallingdotseq 1+x$

(3) $(1+x)^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1+\frac{x}{2}$

(4) $(1-x)^{\frac{1}{2}} \fallingdotseq 1-\frac{x}{2}$

P144 $\boxed{11}$

$$f(\varphi) = \sqrt{(1+\varepsilon_r\cos\varphi+\varepsilon_x\sin\varphi)^2+(\varepsilon_x\cos\varphi-\varepsilon_r\sin\varphi)^2}-1$$

$$= \{\cancel{1+2(\varepsilon_r\cos\varphi+\varepsilon_x\sin\varphi)+(\varepsilon_x\cos\varphi-\varepsilon_r\sin\varphi)^2-1}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$f(\varphi) = (1+\varepsilon_r\cos\varphi+\varepsilon_x\sin\varphi)\times\left\{1+\left(\frac{\varepsilon_x\cos\varphi-\varepsilon_r\sin\varphi}{1+\varepsilon_r\cos\varphi+\varepsilon_x\sin\varphi}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}-1$$

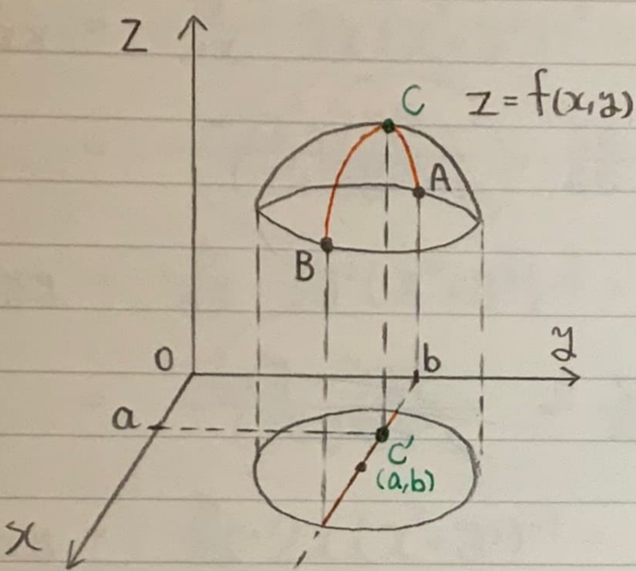
$$\fallingdotseq (1+\varepsilon_r\cos\varphi+\varepsilon_x\sin\varphi)\times\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_x\cos\varphi-\varepsilon_r\sin\varphi}{1+\varepsilon_r\cos\varphi+\varepsilon_x\sin\varphi}\right)^2\right\}-1$$

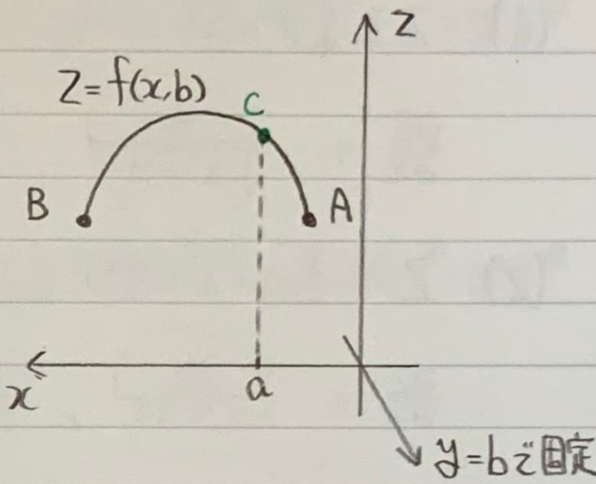
$$= \varepsilon_r\cos\varphi+\varepsilon_x\sin\varphi+\frac{1}{2}\cdot\frac{(\varepsilon_x\cos\varphi-\varepsilon_r\sin\varphi)^2}{1+\varepsilon_r\cos\varphi+\varepsilon_x\sin\varphi}$$

上式で第2項分母の$\varepsilon_r\cos\varphi+\varepsilon_x\sin\varphi$を無視すれば右辺となる.

偏微分法

P146 偏導関数





2変数関数 $z=f(x,y)$ について、yをある一定値bに固定すると、$z=f(x)$ のように1変数関数で表せる.

これを $z=f(x,y)$ の xについての偏導関数という.

ルンド

$$f_x(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

No.

Date

P147 $\boxed{12}$

(1) $Z = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(2) $Z = \log(x^2+y^3)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^2+y^2}$$

P147 $\boxed{13}$

(1) $$Z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$Z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$Z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = -xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$Z_{yx} = Z_{xy} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

P147 $\boxed{13}$ (つづき)

(2) $z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot 2x(x^2+y^2)^{-1} = 2(x^2+y^2)^{-1} - 4x^2(x^2+y^2)^{-2}$

$= \frac{-2x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot 3y^2(x^2+y^3)^{-1} = 6y(x^2+y^3)^{-1} - 9y^4(x^2+y^3)^{-2}$

$= \frac{6x^2y - 3y^4}{(x^2+y^3)^2}$

$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot 2x(x^2+y^3)^{-1} = -6xy^2(x^2+y^3)^{-2}$

$= \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2}$

$z_{yx} = z_{xy} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2}$

No.

Date

P149 2変数関数の極大・極小

$z = f(x,y)$ について $(x,y) = (a,b)$ が z の極値を与える条件は

(i) $f_x(a,b) = 0$, $f_y(a,b) = 0$

(ii) $f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - \{f_{xy}(a,b)\}^2 > 0$

極大か極小かを判断するには

- $f_{xx}(a,b) < 0$ ならば $(x,y) = (a,b)$ で z は極大
- $f_{xx}(a,b) > 0$ ならば $(x,y) = (a,b)$ で z は極小

No.
Date . .

P150 $\boxed{14}$

(1) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - y + 1$

$f_x(x,y) = 2x - y - 4$

$f_y(x,y) = -x + 2y - 1$

$f_x(x,y) = 0$, $f_y(x,y) = 0$ のとき
$2x - y - 4 = 0$, $-x + 2y - 1 = 0$ $\therefore x = 3, y = 2$

$f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = 2$
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -1$

$f_{xx}(3,2) \cdot f_{yy}(3,2) - \{f_{xy}(3,2)\}^2 = 3 > 0$

以上より $(x,y) = (3,2)$ で z は極小値

$z = f(3,2) = 9 - 6 + 4 - 12 - 2 + 1 = -6$ をとる.

No.

Date

P150 $\boxed{14}$

(2) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y \quad f_y(x,y) = -3x + 3y^2$

$f_x(x,y) = 0, \ f_y(x,y) = 0$ のとき

$3x^2 - 3y = 0, \ -3x + 3y^2 = 0$

$(x,y) = (0,0), (1,1)$

$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{yy}(x,y) = 6y$

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -3$

$f_{xx}(0,0) = 0, \quad f_{xx}(1,1) = 6 > 0$

上式から $(x,y) = (0,0)$ は極値ではない.

$f_{xx}(1,1) \cdot f_{yy}(1,1) - \{f_{xy}(1,1)\}^2 = 27 > 0$

$f(1,1) = 1 - 3 + 1 = -1$

以上より $(x,y) = (1,1)$ で z は極小値 -1 をとる.

No.
Date

P150 全微分

Zの全微分は次式で求まる.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$$

(1変数関数の場合: $dy = \frac{dy}{dx}\cdot dx$)

これは x, y が $\Delta x, \Delta y$ だけ増えたときの Z の増加量を表した式である.

これを利用して, 陰関数の導関数が求められる.

陰関数 $f(x,y) = 0$ の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

No. 8.1.2

Date 20・11・9

不定積分

P161 $\boxed{1}$

(1) $\int (x^3-5x^2+9)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 9x + C$

(2) $\int (2x-1)(3x-2)\,dx = \int (6x^2-7x+2)\,dx$

$= 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + C$

(3) $\int \frac{6}{x^5}\,dx = -\frac{6}{4}x^{-4} = \frac{-3}{2x^4} + C$

(4) $\int (x-\frac{1}{\sqrt{x}})^2\,dx = \int (x^2+\frac{1}{x}-2\sqrt{x})\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3 + \ln|x| - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(5) $\int (3e^x - 5\sin x)\,dx = 3e^x + 5\cos x + C$

(6) $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,dx = \int \frac{x^2+2x+1}{x}\,dx = \int (x+2+\frac{1}{x})\,dx$

$= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C$

No.

Date

P162 $\boxed{2}$

(1) $\int (2x+1)^2 dx = \int (2x+1)^2 \frac{1}{\frac{d(2x+1)}{dx}} \cdot d(2x+1)$

$= \frac{1}{2}\int (2x+1)^2 \cdot d(2x+1) = \frac{1}{6}(2x+1)^3 + C$

(2) $\int E_m \sin(3\omega t+\pi)\, dt = E_m \int \sin(3\omega t+\pi) \frac{1}{\frac{d\omega t}{dt}} \cdot d\omega t$

$= \frac{E_m}{\omega}\int \sin(3\omega t+\pi)\, d\omega t = -\frac{E_m}{3\omega}\cos(3\omega t+\pi) + C$

(3) $\int E_m e^{-3t} \cdot dt = -\frac{E_m}{3} e^{-3t} + C$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int (x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + C$

(5) $\int \frac{1}{4x-3} dx = \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$

No.
Date

P162 部分積分法

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx$$

P163 $\boxed{3}$

(1) $\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$

(2) $\int \ln x \cdot x\,dx = \ln x \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot dx$

$= \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$

(3) $\int \sin\beta t \cdot e^{\alpha t}\cdot dt = \sin\beta t\cdot\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} - \int \beta\cos\beta t\cdot\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t}dt$

$= \frac{1}{\alpha}\sin\beta t\, e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}\int \cos\beta t\cdot e^{\alpha t}dt$

$\int \cos\beta t\cdot e^{\alpha t}dt = \cos\beta t\,\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} - \int(-\beta\sin\beta t\,\frac{1}{\alpha}e^{\alpha t})dt$

$= \frac{1}{\alpha}\cos\beta t\, e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}\int \sin\beta t\cdot e^{\alpha t}dt$

したがって $X = \int \sin\beta t\, e^{\alpha t}dt$ とおくと、

$X = \frac{1}{\alpha}\sin\beta t\, e^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\cos\beta t\, e^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}X\right)$

$X = \dfrac{e^{\alpha t}(\sin\beta t - \frac{\beta}{\alpha}\cos\beta t)}{\alpha(1+\beta^2/\alpha^2)} = \dfrac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t) + C$

いろいろな関数の積分

P166 $\boxed{4}$

(1) $\dfrac{1}{9-x^2} = \dfrac{1}{(3-x)(3+x)} = \dfrac{a}{3-x} + \dfrac{b}{3+x}$

$1 = a(3+x) + b(3-x)$
$x(a-b) + 3(a+b) = 1$

$a-b=0,\ 3(a+b)=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{6}$

$$\int \frac{1}{9-x^2}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{3-x}\cdot dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{3+x}\cdot dx$$
$$= -\frac{1}{6}\ln|3-x| + \frac{1}{6}\ln|3+x| + C$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$$

(2) $\dfrac{2x-1}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x-3}$

$2x-1 = a(x-3) + b(x-2)$
$x(a+b-2) = 3a+2b-1$

$a+b-2=0,\ 3a+2b-1=0 \qquad \therefore\ a=-3,\ b=5$

$$\int \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{-3}{x-2}dx + \int \frac{5}{x-3}dx$$
$$= -3\ln|x-2| + 5\ln|x-3| + C$$

No.

Date

P166 $\boxed{4}$ (つづき)

(3) $$\frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$$

$$x^2+1 = a(x+2)^2 + b(x+1)(x+2) + c(x+1)$$
$$= (a+b)x^2 + (4a+3b+c)x + 4a+2b+c$$

$a+b=1$, $4a+3b+c=0$, $4a+2b+c=1$
$\therefore a=2$, $b=-1$, $c=-5$

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x+2)^2}dx = \int \frac{2}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+2}dx - 5\int \frac{1}{(x+2)^2}dx$$
$$= 2\ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + C$$
$$= \ln\frac{|x+1|^2}{|x+2|} + \frac{5}{x+2} + C$$

P166 三角関数の積分の手法

$t = \tan\frac{x}{2}$ とおくと $x = 2\mathrm{Tan}^{-1}t$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2\cos^2(\tfrac{x}{2}) - 1 = \frac{2}{\tan^2(\frac{x}{2})+1} - 1 = \frac{2}{t^2+1} - 1$$

例: $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{dx}{dt}dt = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\cdot dt$$
$$= \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

No.

Date . .

P167 $\boxed{5}$

(1) $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\}$ より

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{1}{2}\int \cos(a-b)x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos(a+b)x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a-b}\sin(a-b)x - \frac{1}{a+b}\sin(a+b)x\right\} + C$$

(2) $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$t = \tan x$ とおくと、 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\tan x \cos^2 x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$= \frac{2t}{1+t^2}$$

したがって

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = 2\int \frac{dx}{\sin 2x} = 2\int \frac{1+t^2}{2t} dx$$

$$= 2\int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = 2\int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\tan x| + C$$

No.

Date

P168　e^xを含む積分の手法

$t = e^x$ とおくと $x = \ln t$　$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

例：$\frac{1}{a+be^x}$ を積分せよ

$$\int \frac{1}{a+be^x} dx = \int \frac{1}{a+bt} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$$

$$= \int \frac{1}{a+bt} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{b}{a+bt} \right) dt$$

$$= \frac{1}{a} \{ \ln t - \ln(a+bt) \} + C$$

$$= \frac{1}{a} \{ x - \ln(a+be^x) \} + C$$

No. 8.4
Date 20・11・9

定積分

P172 $\boxed{6}$

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

(2) $\int_0^{\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\pi} = 0$

(3) $\int_1^5 \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_1^5 = \ln 5$

P174 $\boxed{7}$

(1) $\int_{-1}^{2} (3x^2 - 2x^3)\, dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

(2) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi$

(3) $t = 1 - x$ とおくと $x = 1 - t$ $\frac{dx}{dt} = -1$

$\int_0^1 \sqrt{1-x}\, dx = \int_1^0 \sqrt{t} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_0^1 \sqrt{t}\, dt$

$= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

No.

Date

P174　定積分の部分積分法

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx$$

P175　$\boxed{8}$

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2+7x+10}dx = \int_{-1}^{3} \frac{dx}{(x+2)(x+5)}$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5}\right)dx$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left[\ln\left|\frac{x+2}{x+5}\right|\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{5}{8} - \ln\frac{1}{4}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}$

(2) $t = e^x$ とおくと　$x = \ln t$　$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$

また、$e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{t}$

$\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{dx}{e^x+5+6e^{-x}} = \int_1^3 \frac{1}{t+5+\frac{6}{t}}\cdot\frac{1}{t}\cdot dt$

$\displaystyle = \int_1^3 \frac{dt}{t^2+5t+6} = \int_1^3 \frac{dt}{(t+2)(t+3)} = \int_1^3\left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right)dt$

$\displaystyle = \left[\ln\left|\frac{t+2}{t+3}\right|\right]_1^3 = \ln\frac{5}{6} - \ln\frac{3}{4} = \ln\frac{10}{9}$

P175 $\boxed{8}$ (つづき)

(3) $\int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(m-n)\theta - \cos(m+n)\theta\} d\theta$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)\theta - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)\theta\right]_0^{2\pi} = 0$

(4) $\int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = 1$

(5) $\int_0^1 xe^{-x} dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$

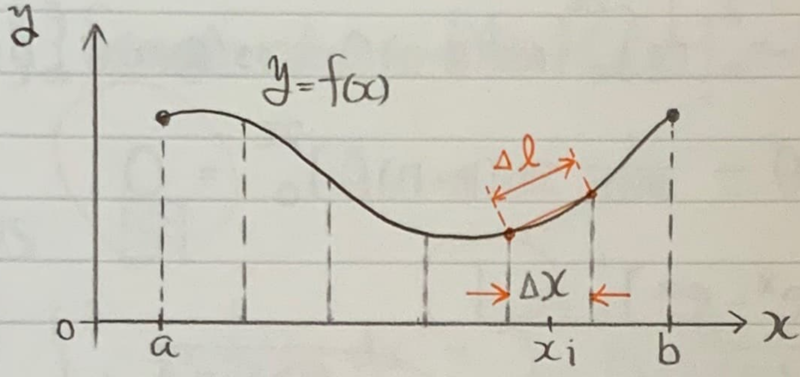
(6) $\int_0^{\pi} x\sin x \, dx = [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi} = \pi$

No. 8.5

Date 20・11・9

定積分の応用

P177 曲線の長さの計算



区間[a,b]をn等分した区間の長さ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ を考える.

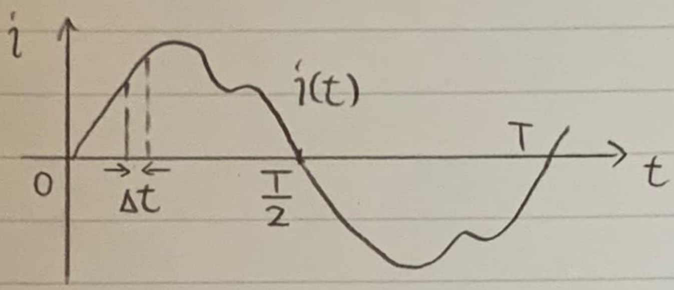
図のΔlは

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + \{f'(x_i)\cdot\Delta x\}^2} = \Delta x\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}$$

したがって 曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ から b までの距離は

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\cdot dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$$

P180 交流の平均値と実効値 (※対称波)



$$\text{平均値 } I_{av} = \frac{1}{(T/2)}\int_0^{\frac{T}{2}} i(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{(2\pi f T/2)}\int_0^{\frac{2\pi f T}{2}} i(2\pi f t)\cdot d2\pi f t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} i(\theta)\,d\theta$$

$$\text{実効値 } I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{(T/2)}\int_0^{\frac{T}{2}} \{i(t)\}^2\,dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \{i(\theta)\}^2\,d\theta}$$

No. 8.5

Date 20・11・9

定積分の応用 (つづき)

P181 $\boxed{9}$

$$v = V_{1m}\sin\omega t + V_{3m}\sin(3\omega t - \phi)$$

$$I_{av} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{V_{1m}\sin\theta + V_{3m}\sin(3\theta-\phi)\}d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-V_{1m}\cos\theta - \frac{1}{3}V_{3m}\cos(3\theta-\phi)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{V_{1m} - \frac{V_{3m}}{3}\cos(\pi-\phi) + V_{1m} + \frac{V_{3m}}{3}\cos(-\phi)\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(2V_{1m} + \frac{2}{3}V_{3m}\cos\phi\right)$$

P181 $\boxed{10}$

$$I_{av} = \frac{1}{\pi/2}\left(\frac{1}{2}E_m\frac{\pi}{2}\right) = \frac{E_m}{2}$$

$e(\theta) = \frac{E_m}{\pi/2}\cdot\theta$ で表せるから

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{E_m}{\pi/2}\theta\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4E_m^2\theta^2}{\pi^2}d\theta = \frac{8E_m^2}{\pi^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^2 d\theta$$

$$= \frac{8E_m^2}{\pi^3}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8E_m^2}{\pi^3}\left(\frac{\pi^3}{24} - 0\right)$$

$$= \frac{E_m^2}{3}$$

$$I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{3}}E_m$$

No.

Date

P181 $\boxed{11}$

$$v = \sqrt{2}V_1 \sin\omega t + \sqrt{2}V_3 \sin 3\omega t$$
$$i = \sqrt{2}I_1 \sin\omega t + \sqrt{2}I_3 \sin 3\omega t$$

$$P = V_1 I_1 + V_3 I_3$$

P183 $\boxed{12}$

(1) 4π

(2) 2π

(3) $\omega = 2\pi(1-\cos 60^\circ) = \pi$

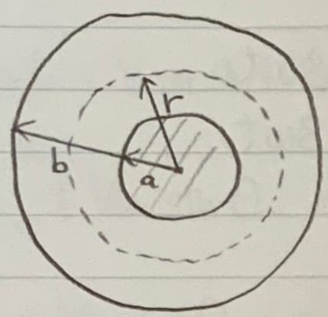
P183 $\boxed{13}$

$$F = I\omega = 4\pi I_0 \ (\mathrm{Im})$$

No.

Date . .

P183 $\boxed{14}$



半径rの位置において、厚さdrの微小筒の
静電容量dCは

$$dC = \varepsilon \frac{2\pi r}{dr}$$

ケーブルの静電容量は

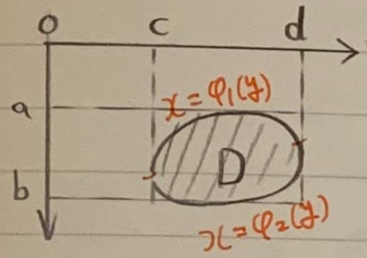
$$\frac{1}{C} = \int_a^b \frac{1}{dC} = \int_a^b \frac{dr}{2\pi\varepsilon r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}\ln\left|\frac{b}{a}\right|$$ より

$$C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left|\frac{b}{a}\right|}$$

多重積分・線積分・面積分

二重積分（重積分）

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dS = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx$$



三重積分

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

線積分

$$\int_C f(x,y,z)\,dl$$

面積分

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS$$

No. 9.1.2

Date 20.11.9

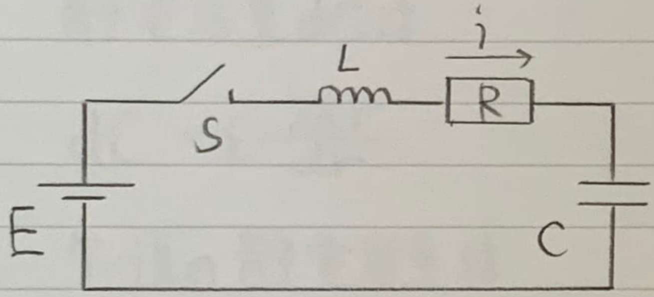
微分方程式の作り方・初期条件

P193 $\boxed{1}$

(1) $\frac{du}{dt} = -g$

(2) $\frac{d^2h}{dt^2} = -g$

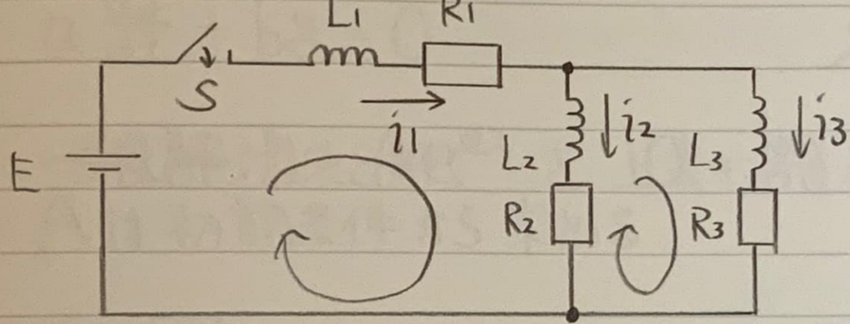
P196 $\boxed{2}$



$$E = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$$

$$E = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$

P196 $\boxed{3}$



$$E = L_1\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 \quad \cdots ①$$

$$0 = L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - L_3\frac{di_3}{dt} - R_3 i_3 \quad \cdots ②$$

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad \cdots ③$$

$$0 = L_2\frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - L_3\frac{d}{dt}(i_1 - i_2) - R_3(i_1 - i_2)$$

$$L_3\frac{di_1}{dt} + R_3 i_1 = (L_2 + L_3)\frac{di_2}{dt} + (R_2 + R_3) i_2 \quad \cdots ④$$

①$\times L_3$ − ④$\times L_1$ より

$$(L_1R_3 - L_3R_1) i_1 = (L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1)\frac{di_2}{dt} + \{L_1(R_2+R_3) + L_3R_2\} i_2 - L_3E$$

$$(L_1R_3 - L_3R_1)\frac{di_1}{dt} = (L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1)\frac{d^2i_2}{dt^2} + \{L_1(R_2+R_3) + L_3R_2\}\frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{d^2i_2}{dt^2} + \frac{L_1(R_2+R_3) + L_2(R_3+R_1) + L_3(R_1+R_2)}{L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1}\frac{di_2}{dt} + \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{L_1L_2 + L_2L_3 + L_2L_1}\frac{di_2}{dt} = \frac{R_3E}{L_1L_2 + L_2L_3 + L_3L_1}$$

No. 9.3
Date 20・11・9

微分方程式の種類と名称

P200 種類と名称

① 階数　② 次数

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 4\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6y = 0$$ … 2階3次微分方程式

③ 変数分離形

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy$$

④ 同次形

fを1変数関数として $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ の形で表されるもの

⑤ 線形と非線形

1次の微分方程式は線形である。

⑥ 定数係数線形微分方程式

$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = d$ はその1例

右辺が0のものを同次形という。

定数係数線形微分方程式

P202 定数係数 1階 線形微分方程式（同次形）

$$a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

一般解 $y = Ae^{\alpha x}$ を上式に代入して α を求める.
A は初期条件から求める.

P202 $\boxed{4}$

$Ri = \frac{q}{C}$ から $R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$ $\left(\because i = -\frac{dq}{dt}\right)$

一般解を $q = Ae^{\alpha t}$ とすると、

$$R\frac{dAe^{\alpha t}}{dt} + \frac{1}{C}Ae^{\alpha t} = 0$$

$$\cancel{A}\alpha R\cdot \cancel{e^{\alpha t}} + \frac{1}{C}\cancel{A}\cancel{e^{\alpha t}} = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{RC}$$

したがって $q = Ae^{-\frac{1}{RC}t}$

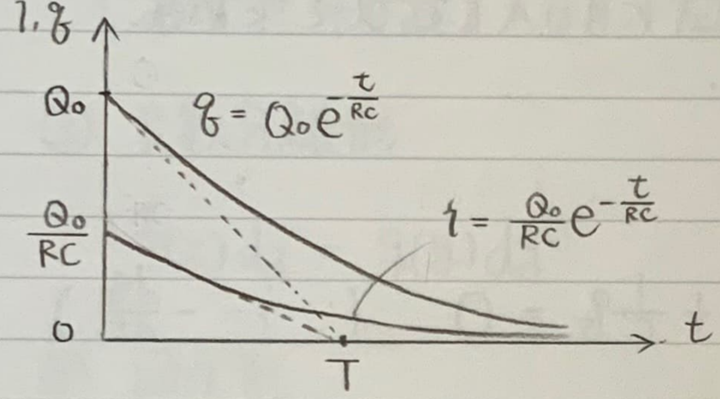
初期条件 $q(0) = q(0-) = Q_0$ より $A = Q_0$

$$q = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

（つづく）

P202 $\boxed{4}$（つづき）

$$i = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t}$$



それぞれの $t=0$ における接線の傾きを求める

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{Q_0}{RC}, \quad \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{Q_0}{(RC)^2}$$

これらの接線の t 軸切片 T は

$$T_1 = Q_0 \times \left| -\frac{Q_0}{RC} \right|^{-1} = RC$$

$$T_2 = \frac{Q_0}{RC} \times \left| -\frac{Q_0}{(RC)^2} \right|^{-1} = RC$$

$$T = T_1 = T_2 = RC$$

No.

Date

P206 定数係数2階線形微分方程式(同次形)

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$$

$y=Ce^{px}$として上式へ入れると特性方程式をうる:
$ap^2+bp+C=0$

[i] 特性方程式の解が異なる2つの実数解 α, β をもつとき

一般解: $y=Ae^{\alpha x}+Be^{\beta x}$

[ii] 特性方程式の解が二重解 λ の場合

一般解: $y=e^{\lambda x}(A+Bx)$

[iii] 特性方程式の解が共役な虚数解 $\alpha+j\beta$ の場合

一般解: $y=Ae^{(\alpha+j\beta x)}+Be^{(\alpha-j\beta)x}$

$$=e^{\alpha x}(Ae^{j\beta x}+Be^{-j\beta x})$$

$$=e^{\alpha x}\{(A+B)\cos\beta x+(A-B)\sin\beta x\}$$

$$=e^{\alpha x}(A_1\cos\beta x+A_2\sin\beta x)$$

P209 $\boxed{5}$

(1) $\frac{d^2i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 0$

特性方程式 $p^2 + 3p + 2 = 0$

$(p+1)(p+2) = 0 \qquad p = -1, -2$

一般解 $i = Ae^{-t} + Be^{-2t}$

初期条件 $i = 1,\ \frac{di}{dt} = 0$ より

$1 = A + B$

$\frac{di}{dt} = -Ae^{-t} - 2Be^{-2t} \qquad 0 = -A - 2B$

$\therefore A = 2,\ B = -1$

したがって 特殊解 $i = 2e^{-t} - e^{-2t}$

No.

Date

P209 $\boxed{5}$ (つづき)

(2) $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + 2i = 0$

特性方程式 $p^2 + p + 2 = 0$ $p = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}$

一般解 $i = e^{\alpha t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

(ただし $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\omega = \frac{\sqrt{7}}{2}$)

$\frac{di}{dt} = e^{\alpha t}\{(\alpha A + \omega B)\cos\omega t - (\omega A - \alpha B)\sin\omega t\}$

初期条件 $i = 1$, $\frac{di}{dt} = 0$ より

$1 = A$, $0 = \alpha A + \omega B$

$\therefore A = 1$, $B = -\frac{\alpha}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{7}}$

したがって

一般解 $i = Ae^{(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2})} + Be^{(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2})}$

特殊解 $i = e^{(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2})} + \frac{1}{\sqrt{7}}e^{(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2})}$

No.

Date

P209 $\boxed{5}$ (つづき)

(3) $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + 2\dfrac{di}{dt} + i = 0$

特性方程式 $p^2 + 2p + 1 = 0$ $p = -1$

一般解 $i = e^{-t}(A + Bt)$

$\dfrac{di}{dt} = -Ae^{-t} + Be^{-t} - Bte^{-t}$

$= -e^{-t}(A - B + Bt)$

初期条件 $i = 1$, $\dfrac{di}{dt} = 0$ より

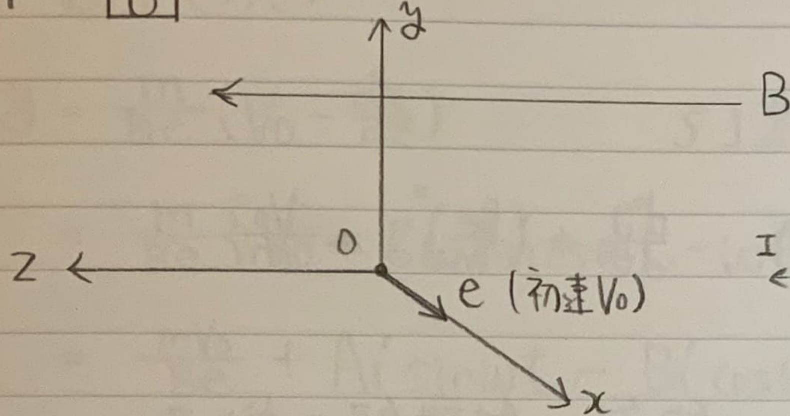
$1 = A$, $0 = -A + B$ $\therefore$ $A = B = 1$

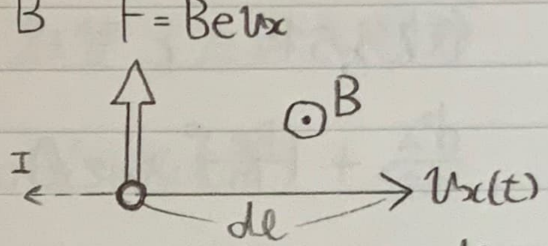
したがって 特殊解 $i = e^{-t}(1 + t)$

No.

Date

P209 $\boxed{6}$





$$v_x(t) = \frac{dl}{dx}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Be\frac{dx}{dl}, \quad -m\frac{d^2x}{dt^2} = Be\frac{dy}{dl}$$

両辺を積分すると

$$m\frac{dy}{dt} = Bex + C_1, \quad -m\frac{dx}{dt} = Bey + C_2$$

初期条件 $x=0, y=0$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = V_0$, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0$ から

$$0 = C_1, \quad -mV_0 = C_2$$

$$x = \frac{m}{Be}\cdot\frac{dy}{dt}, \quad y = \frac{m}{Be}\left(V_0 - \frac{dx}{dt}\right)$$

お互いに代入して

$$x = -\left(\frac{m}{Be}\right)^2\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$y = \frac{mV_0}{Be} - \left(\frac{m}{Be}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2}$$

No.

Date

P209 $\boxed{6}$ (つづき)

微分方程式を整理して

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{Be}{m}\right)^2 x = 0 \,,\quad \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{Be}{m}\right)^2 y = \frac{V_0}{m}$$

xの微分方程式の一般解と特殊解を求める.

特性方程式は $P_x^2 + \left(\frac{Be}{m}\right)^2 = 0 \qquad P_x = \pm j\frac{Be}{m}$

$$x = A_1 e^{j\frac{Be}{m}t} + B_1 e^{-j\frac{Be}{m}t}$$

$$= (A_1+B_1)\cos\left(\frac{Be}{m}\right)t + (A_1-B_1)\sin\left(\frac{Be}{m}\right)t$$

$$= A_1'\cos\omega t + B_1'\sin\omega t \qquad \left(ただし\ \omega = \frac{Be}{m}\right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega B_1'\cos\omega t - \omega A_1'\sin\omega t$$

初期条件 $\frac{dx}{dt} = V_0 \,,\ x = 0$ から

$$0 = A_1' \,,\quad V_0 = \omega B_1' \qquad \therefore\ A_1' = 0 \,,\ B_1' = \frac{V_0}{\omega}$$

したがって特殊解は

$$x = \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t = \frac{mV_0}{Be}\sin\left(\frac{Be}{m}\right)t$$

No.

Date

P209 $\boxed{6}$ (つづき)

$$y = \frac{m}{Be}\left(V_0 - \frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \frac{m}{Be}\left\{V_0 - (\omega B_1' \cos\omega t - \omega A_1' \sin\omega t)\right.$$

$$= \frac{mV_0}{Be} + A_1' \sin\omega t - B_1' \cos\omega t$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega A_1' \cos\omega t + \omega B_1' \sin\omega t$$

初期条件 $\frac{dy}{dt} = 0,\ y = 0$ から

$$0 = \frac{mV_0}{Be} - B_1',\quad 0 = \omega A_1' \qquad \therefore\ A_1' = 0,\ B_1' = \frac{mV_0}{Be}$$

したがって特殊解は

$$y = \frac{mV_0}{Be} - \frac{mV_0}{Be}\cos\left(\frac{Be}{m}\right)t$$

以上より $\sin\left(\frac{Be}{m}\right)t = \frac{Be}{mV_0}\cdot x$

$$\cos\left(\frac{Be}{m}\right)t = 1 - \frac{Be}{mV_0}\cdot y$$

$$\sin^2\left(\frac{Be}{m}\right)t + \cos^2\left(\frac{Be}{m}\right)t = \left(\frac{Be}{mV_0}x\right)^2 + \left(1 - \frac{Be}{mV_0}y\right)^2$$

$$x^2 + \left(y - \frac{mV_0}{Be}\right)^2 = \left(\frac{mV_0}{Be}\right)^2$$

電子運動の軌跡は 中心$\left(0, \frac{mV_0}{Be}\right)$, 半径 $\frac{mV_0}{Be}$ の円である.

No. 9.5

Date 20. 11. 10

定数係数線形微分方程式（非同次形）

P211 定数係数線形微分方程式（非同次形）

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(x)$$

一般解は次式で与えられる.

$$y = y_t + y_s$$

ただし　y_t : 補助方程式（同次形）の一般解（過渡解）
　　　　y_s : 原方程式の1つの特殊解（定常解）

P215 特殊解 y_s

電気回路の場合、定常解は 回路論で求める電気量に等しい. ただし、数学的に解く場合、以下のように特殊解を仮定して求める.

$f(x)$	特殊解として仮定する式
a（定数）	k
ax	$k_1x + k_2$
ax^2	$k_1x^2 + k_2x + k_3$
ae^{bx}	ke^{bx}
$\begin{cases} a\cos bx \\ a\sin bx \end{cases}$	$k_1\cos bx + k_2\sin bx$
$\begin{cases} ae^{bx}\cos cx \\ ae^{bx}\sin cx \end{cases}$	$k_1e^{bx}\cos cx + k_2e^{bx}\sin cx$

No.

Date

P216 $\boxed{7}$

(1) $\frac{d^2i}{dt^2}+2\frac{di}{dt}+i=10$

過渡解を求める.

$p^2+2p+1=0 \quad (p+1)^2=0 \quad p=-1$

$i_t=e^{-t}(A+Bt)$

定常解を求める. $i_s=K$と仮定して、原方程式に代入すると

$K=10$

よって $i_s=10$

以上より $i=i_t+i_s=e^{-t}(A+Bt)+10$

No.

Date . .

P216 $\boxed{7}$ (つづき)

(2) $\frac{d^2 i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 10t$

過渡解を求める.

$p^2+3p+2=0 \quad (p+1)(p+2)=0 \quad \therefore p=-1,-2$

$i_t = Ae^{-t} + Be^{-2t}$

定常解を求める. $i_s = k_1 t + k_2$ と仮定すると,

$\frac{d^2 i_s}{dt^2} + 3\frac{di_s}{dt} + 2i_s = 3k_1 + 2(k_1 t + k_2) = 10t$

$2k_1 t + (3k_1 + 2k_2) = 10t$

$2k_1 = 10,\ 3k_1 + 2k_2 = 0 \quad \therefore k_1 = 5,\ k_2 = -7.5$

よって $i_s = 5t - 7.5$

以上より $i = i_t + i_s = Ae^{-t} + Be^{-2t} + 5t - 7.5$

P216 $\boxed{7}$ (つづき)

(3) $\frac{d^2 i}{dt^2} + 3\frac{di}{dt} + 2i = 100\sin 10t$

過渡解を求める.

$p^2 + 3p + 2 = 0 \quad p = -1, -2$

$i_t = Ae^{-t} + Be^{-2t}$

定常解を求める. $i_s = K_1\cos 10t + K_2\sin 10t$ と仮定すると、

$(-100K_1 + 30K_2 + 2K_1)\cos 10t + (-100K_2 - 30K_1 + 2K_2)\sin 10t$
$= 100\sin 10t$

$-98K_1 + 30K_2 = 0, \quad -98K_2 - 30K_1 = 100$

$\therefore K_1 = -0.2856, \quad K_2 = -0.9330$

よって $i_s = -0.2856\cos 10t - 0.9330\sin 10t$

以上より

$i = Ae^{-t} + Be^{-2t} - 0.2856\cos 10t - 0.9330\sin 10t$

No.

Date

P216 $\boxed{7}$

(4) $y'' - 2y' = 2e^x \sin x$

過渡解を求める. $p^2 - 2p = 0$ $p = 0, 2$

$y_t = A + Be^{2t}$

定常解を求める. $y_s = k_1 e^x \cos x + k_2 e^x \sin x$ と仮定すると、

$e^x \cos x \{2k_2 - 2(k_1 + k_2)\} - e^x \sin x \{2k_1 - 2(k_1 - k_2)\}$
$= -2k_1 e^x \cos x - 2k_2 e^x \sin x$
$= 2e^x \sin x$

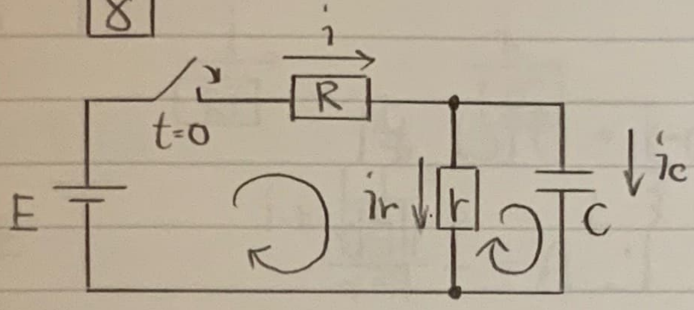
$-2k_1 = 0,\ -2k_2 = 2$ $\therefore\ k_1 = 0,\ k_2 = -1$

よって $y_s = -e^x \sin x$

以上より $y = A + Be^{2t} - e^x \sin x$

No.
Date

P216 $\boxed{8}$



$i_C = \dfrac{dq}{dt}$ とする. キルヒホッフの第2法則より

$Ri + ri_r = E$, $ri_r = \dfrac{q}{C}$

$i = i_r + i_C = \dfrac{q}{rC} + \dfrac{dq}{dt}$

$R\left(\dfrac{q}{rC} + \dfrac{dq}{dt}\right) + \dfrac{q}{C} = E$

$R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{R+r}{rC} \cdot q = E$

特性方程式 $Rp + \dfrac{R+r}{rC} = 0$ $\quad p = -\dfrac{R+r}{RrC}$

$q_t = Ae^{-\frac{R+r}{RrC}t}$

定常解 q_s は 定常状態の回路から

$q_s = \dfrac{r}{R+r}E \cdot C$ とわかる.

以上より $q = Ae^{-\frac{R+r}{RrC}t} + \dfrac{rEC}{R+r}$

No.

Date

P216 $\boxed{8}$ (つづき)

初期条件 $q(0) = q(0-) = 0\,(C)$ より

$$0 = A + \frac{rEC}{R+r} \qquad \therefore A = -\frac{rEC}{R+r}$$

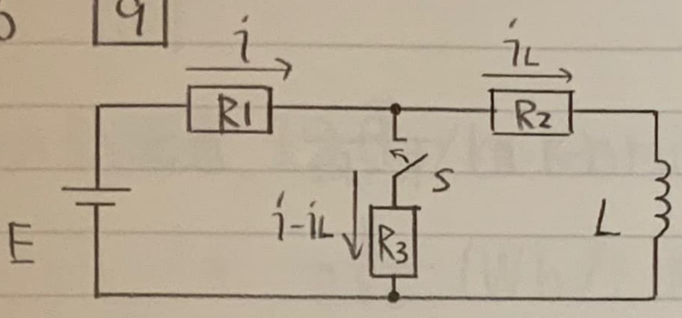
$$q = -\frac{rEC}{R+r}e^{-\frac{R+r}{RrC}t} + \frac{rEC}{R+r}$$

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}e^{-\frac{R+r}{RrC}t}$$

No.

Date

P216 $\boxed{9}$



(1) $E = R_1 i + R_3(i - i_L)$, $R_3(i - i_L) = R_2 i_L + L\dfrac{di_L}{dt}$

$$i = \frac{E}{R_1+R_3} + \frac{R_3}{R_1+R_3} i_L$$

$$R_3\left(\frac{E}{R_1+R_3} + \frac{R_3}{R_1+R_3} i_L - i_L\right) = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt}$$

$$R_3(E - R_1 i_L) = (R_1+R_3)R_2 i_L + (R_1+R_3)L\frac{di_L}{dt}$$

$$(R_1+R_3)L\frac{di_L}{dt} + k i_L = R_3 E$$

特性方程式 $(R_1+R_3)Lp + k = 0$ $\quad p = -\dfrac{k}{(R_1+R_3)L}$

$$i_{Lt} = Ae^{-\frac{k}{R_1+R_3}t}$$

定常解 $i_{Ls} = \dfrac{E}{R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}} \times \dfrac{R_3}{R_2+R_3} = \dfrac{R_3E}{k}$

したがって

$$i_L = Ae^{-\frac{k}{(R_1+R_3)L}t} + \frac{R_3E}{k}$$

No.

Date

P216 $\boxed{9}$ (つづき)

(1) 初期条件 $i_L(0) = i_L(0-) = \dfrac{E}{R_1+R_2}$ から

$$\frac{E}{R_1+R_2} = A + \frac{R_3E}{k}$$

$$\therefore A = E\left(\frac{1}{R_1+R_2} - \frac{R_3}{k}\right)$$

$$= E \cdot \frac{k - R_3(R_1+R_2)}{k(R_1+R_2)} = E \cdot \frac{R_1R_2}{k(R_1+R_2)}$$

したがって

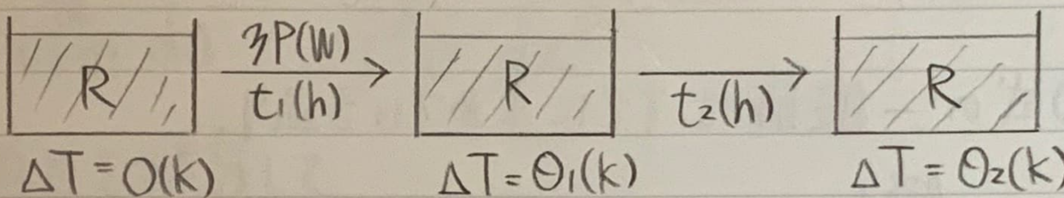
$$i_L = \frac{R_1R_2E}{k(R_1+R_2)} e^{-\frac{k}{(R_1+R_3)L}t} + \frac{R_3E}{k}$$

(2) 時定数 $T = \dfrac{L(R_1+R_3)}{k}$ (s)

P216 $\boxed{10}$

水の熱容量 $4.2\,(\mathrm{kJ/kg \cdot K}) = 4.2 \times \dfrac{10^3}{3600}\,(\mathrm{W \cdot h/L \cdot K})$

$\fallingdotseq \dfrac{1}{0.86}\,(\mathrm{W \cdot h/L \cdot K})$



$\dfrac{Q}{0.86} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{R}\theta = \eta P$ …… 加熱時 ①

$\dfrac{Q}{0.86} \cdot \dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{1}{R}\theta = 0$ …… 温度低下時 ②

①式の過渡解は、特性方程式 $\dfrac{Q}{0.86}p + \dfrac{1}{R} = 0$ より

$\theta_t = Ae^{-\frac{0.86}{RQ}t}$

①式の定常解は $\theta_s = K$ と仮定すると $K = \eta PR$

したがって $\theta = Ae^{-\frac{0.86}{RQ}t} + \eta PR$

初期条件 $\theta = 0$ より

$0 = A + \eta PR$ $\quad\therefore A = -\eta PR$

以上より $\theta = -\eta PRe^{-\frac{0.86}{RQ}t} + \eta PR$

No.

Date . .

P216 $\boxed{10}$ (つづき)

$t=t_1$ において

$$\theta(t_1) = \eta PR\left(1-e^{-\frac{0.86}{QR}t_1}\right)\ [k] \quad \cdots ③$$

次に②式の一般解はすでに求めている通り、

$$\theta = Be^{-\frac{0.86}{QR}t}$$

初期条件 $\theta(0)=\theta_1$ から

$$\theta_1 = B$$

したがって $\theta = \theta_1 e^{-\frac{0.86}{QR}t}$

$t=t_2$ において

$$\theta(t_2) = \theta_1 e^{-\frac{0.86}{QR}t_2}\ [k] \quad \cdots ④$$

以上③,④式より

$$\theta_2 = \eta PR\left(1-e^{-\frac{0.86}{QR}t_1}\right)e^{-\frac{0.86}{QR}t_2}$$

$$水温 = T+\theta_2 = T+\eta PR\left(1-e^{-\frac{0.86}{QR}t}\right)e^{-\frac{0.86}{QR}t}$$

No. 9.6
Date 20・11・10

変数分離形 微分方程式

P218 $\boxed{11}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+y^2)}{y(1-x^2)}$$

$$y(1-x^2)dy = -x(1+y^2)dx$$

$$\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{-x}{1-x^2}dx$$

両辺を積分して

$$\int \frac{y}{1+y^2} \cdot dy = \int \frac{x}{x^2-1}dx$$

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{2}\ln|1+y^2| + C_1$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C_2$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+y^2| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C_2 - C_1$$

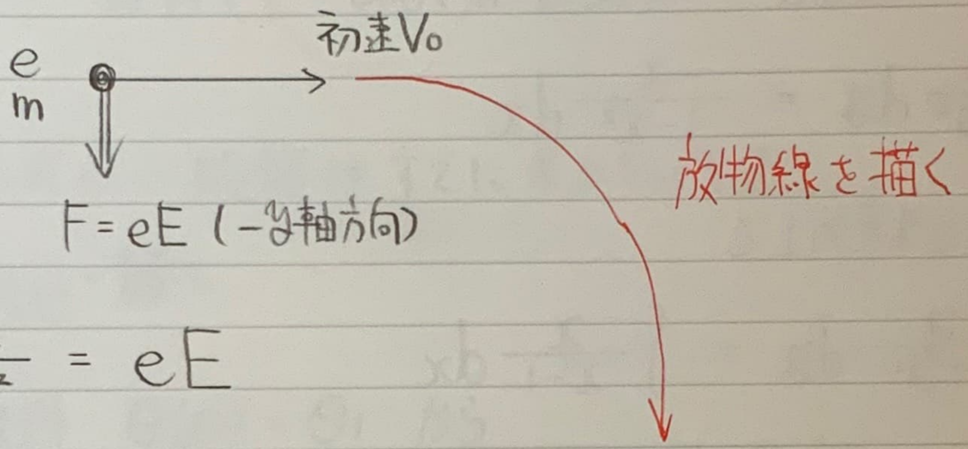
$$\ln|1+y^2| = \ln|x^2-1| + \ln C$$

$$|1+y^2| = |C(x^2-1)|$$

$$y = \sqrt{C|x^2-1|-1}$$

P218 $\boxed{12}$

x軸方向に働く力はないため $\frac{dx}{dt} = V_0$



$$m\frac{d^2y}{dt^2} = eE$$

両辺を積分して

$$m\frac{dy}{dt} = eEt + C_1$$

初期条件 $\frac{dy}{dt} = 0$ より $C_1 = 0$

$m\frac{dy}{dt} = eEt$ の両辺を積分して

$$my = \frac{1}{2}eEt^2 + C_2$$

初期条件 $y = 0$ より $C_2 = 0$

したがって $y = \frac{eE}{2m}t^2$

P218 $\boxed{12}$ (つづき)

$\frac{dx}{dt} = V_0$ の両辺を積分して

$x = V_0 t + C_3$

初期条件 $x=0$ より $C_3 = 0$

以上より $x = V_0 t$, $y = \frac{eE}{2m} t^2$

これらから t を消すと

$y = \frac{eE}{2m} \cdot \left(\frac{x}{V_0}\right)^2 = \frac{eE}{2mV_0^2} \cdot x^2$ (放物線)

No. 10.1.2

Date 20・11・10

ラプラス変換

P224　例(1)：$f(t)=1$ のラプラス変換 $(t>0)$

$$\mathcal{L}[1]=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty=\frac{1}{s}$$

ただし $s>0$

P224　例(3)：$f(t)=t$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty e^{-st}\cdot t\,dt=\left[-\frac{1}{s}te^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^\infty$$

$$=\frac{1}{s^2}$$

P225　例(4)：$f(t)=e^{at}$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt$$

$$=-\frac{1}{s-a}\left[e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty=\frac{1}{s-a}$$

ただし $s-a>0$

P225 例(5) ; $f(t) = \sin\omega t$ のラプラス変換

$$\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \text{ より}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}]$$

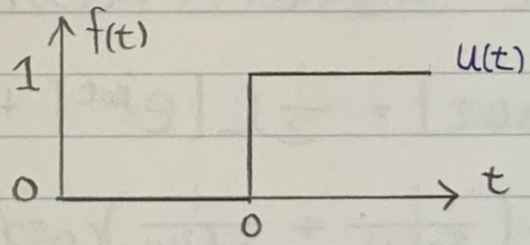
$$= \frac{1}{2j}\{\mathcal{L}[e^{j\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-j\omega t}]\}$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

P225 単位ステップ・ランプ・インパルス関数

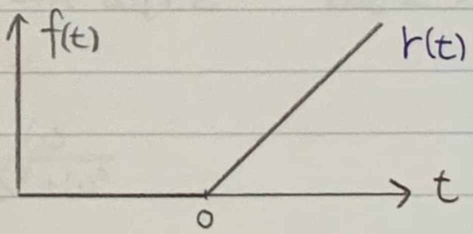
- 単位ステップ関数

$f(t) = 1$



- 単位ランプ関数

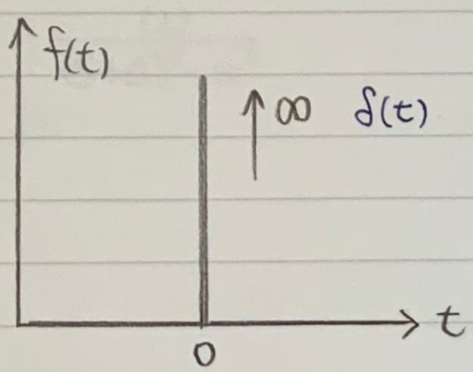
$f(t) = t$



- 単位インパルス関数

$f(t) = \delta(t)$

$(F(s) = 1)$



面積が1で時間の幅が0の波形

No.

Date

P226 $\boxed{1}$

(1) $\mathcal{L}[a] = \int_0^{\infty} a e^{-st} \cdot dt = a\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{a}{s}$

(2) $\mathcal{L}[at] = \int_0^{\infty} a t e^{-st} dt$

$= a\left[-\frac{1}{s}te^{-st} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{a}{s^2}$

(3) $\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$

$= -\frac{1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$

(4) $\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$ より

$\mathcal{L}[\cos\omega t] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{j\omega t}] + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-j\omega t}]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

ラプラス変換の定理

P226 定理3 時間的相似

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{a}{s}\right)$$

例: $\mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1}$ に対して

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)-1} = \frac{1}{s-a}$$

P227 定理4 $e^{at}f(t)$ のラプラス変換

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

例: $\mathcal{L}[\sin\omega t] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

No.

Date . .

P227 定理5 微分法則

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0+)$$

簡単に言えば $\frac{d}{dt}$ が s に置き換わる。また、$f(0+)$ は $t=0$ における $f(x)$ で、過渡現象などの初期条件に相当する。

例： $\mathcal{L}\left[\frac{de^{at}}{dt}\right] = s\frac{1}{s-a} - e^0 = \frac{s}{s-a} - 1 = \frac{a}{s-a}$

P227 定理6 積分法則

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_a^0 f(t)dt$$

したがって $a=-\infty$ のときは

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^0 f(t)dt$$

また、$a=0$ のときは

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

簡単に言えば、積分記号が $\frac{1}{s}$ に置き換わる。

例： $\mathcal{L}[q] = \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t i\,dt\right] = \frac{1}{s}I(s) + \underbrace{\frac{Q_0}{s}}_{\text{初期電荷}}$

P228 定理7.8 初期値・最終値の定理

最終値の定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

初期値の定理

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

No.

Date

P229 $\boxed{2}$

(1) $\mathcal{L}[2+3t] = \frac{2}{s} + \frac{3}{s^2}$

(2) $\mathcal{L}[e^{at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

(3) $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}F(s)$

$f(t) = \cos at$ とすると

$F(s) = \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2}$

$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

(4) $\mathcal{L}\left[L\frac{di}{dt}\right] = L\{sI(s) - i(0)\}$

$= L(sI(s) - I_0)$

(5) $\mathcal{L}\left[\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,dt\right] = \frac{1}{C}\left\{\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} i\,dt\right\}$

$= \frac{1}{C}\left(\frac{I(s)}{s} + \frac{Q_0}{s}\right)$

(6) $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1+6s}{6+6s} \cdot \cancel{\frac{1}{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{1+6s}{6+6s} = \frac{1}{6}$

逆変換の求め方

P231 部分分数分解（ヘビサイドの展開定理）

(i) 分母Q(s)が単根の場合

$$\frac{P(s)}{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)} = \frac{A_1}{s-a_1} + \frac{A_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{s-a_n}$$

上式のA_1を求めるには、両辺に$(s-a_1)$をかけて、$s=a_1$とする.

(ii) 分母Q(s)に重根を含む場合

$$\frac{P(s)}{(s-a_0)^m(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)} = \frac{A_1}{(s-a_0)^m} + \frac{A_2}{(s-a_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{s-a_0}$$
$$+ \frac{B_1}{s-a_1} + \frac{B_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{B_n}{s-a_n}$$

(iii) 分母Q(s)に共役複素根を含む場合

$$\frac{P(s)}{\{(s+a)^2+b^2\}^2(s-a_1)} = \frac{B_2s+C_2}{(s+a)^2+b^2} + \frac{A_1}{s-a_1}$$

No.

Date . .

P233 $\boxed{3}$

(1) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s}\right] = 3$

(2) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2s-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{3}{2}}{s-\frac{1}{2}}\right] = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}t}$

(3) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t$

(4) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{4s^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+(\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}$

(5) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^{3+1}}\cdot\frac{1}{6}\right] = \frac{t^3}{6}$

(6) $\frac{3s+8}{s^2+4} = \frac{s}{s^2+2^2}\cdot 3 + \frac{2}{s^2+2^2}\cdot 4$ より

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+8}{s^2+4}\right] = 3\cos 2t + 4\sin 2t$

(7) $\frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}$

$\mathcal{L}^{-1} = e^{2t} - e^{t}$

(8) $\frac{2s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$

$A = \left[\frac{2s+1}{(s+1)(s+2)}\right]_{s=0} = \frac{1}{2}$

$B = 1,\ C = -\frac{3}{2}$

$\mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$

No.
Date

P233 $\boxed{3}$ (つづき)

(9) $\dfrac{1}{s(s^2+a^2)} = \dfrac{As+B}{s^2+a^2} + \dfrac{C}{s}$

$C = \dfrac{1}{a^2}$

$\left[\dfrac{1}{s}\right]_{s=ja} = \left[As+B\right]_{s=ja}$ $\quad -j\dfrac{1}{a} = jaA + B$

$A = -\dfrac{1}{a^2},\ B = 0$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{s}{s^2+a^2} + \dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{s}\right]$

$= -\dfrac{1}{a^2}\cos at + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$

(10) $\dfrac{s}{(s+a)^2} = \dfrac{A}{(s+a)^2} + \dfrac{B}{s+a}$

$A = [s]_{s=-a} = -a$

$B = \left[\dfrac{d}{ds}s\right]_{s=-a} = 1$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{(s+a)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-a\dfrac{1}{(s+a)^2} + \dfrac{1}{s+a}\right]$

$= -a\cdot te^{-at} + e^{-at} = e^{-at}(1-at)$

No.

Date

P233 $\boxed{3}$ (つづき)

(11) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2+b^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{b}{(s+a)^2+b^2}\cdot\frac{1}{b}\right]$

$= e^{-at}\sin bt \cdot \frac{1}{b}$

(12) $\frac{s+5}{s^2+2s+5} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{2}{(s+1)^2+2^2}\cdot 2$

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+5}{s^2+2s+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + 2\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right]$

$= e^{-t}\cos 2t + 2e^{-t}\sin 2t$

$= e^{-t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$

微分方程式の解法

P235 $\boxed{4}$

$$\frac{dy}{dt} + y = 2$$

両辺をラプラス変換して

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \frac{2}{s}$$

初期条件 $y(0) = 0$ から

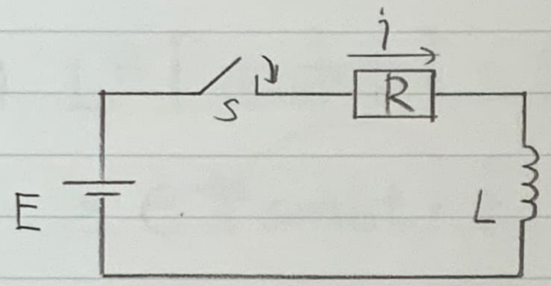
$$Y(s) = \frac{2}{s(s+1)} = 2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1}\right] = 2(1 - e^{-t})$$

No.

Date

P235 $\boxed{5}$ (つづき)



$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{E}{s} = RI(s) + L\{sI(s) - i(0)\}$$

初期条件 $i(0+) = i(0-) = 0(A)$ より

$$\frac{E}{s} = (R+sL)I(s)$$

$$I(s) = \frac{E}{s(sL+R)} = \frac{\frac{E}{L}}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{E}{L}\cdot\frac{L}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

$$= \frac{E}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right)$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

No.

Date . .

P236 $\boxed{6}$

(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

$\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + 4\{sY(s) - y(0)\} + 5Y(s) = 0$

初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ より

$Y(s)(s^2 + 4s + 5) = 2$

$Y(s) = \dfrac{2}{s^2+4s+5} = \dfrac{2}{(s+2)^2+1^2} = \dfrac{1}{(s+2)^2+1^2} \cdot 2$

$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s+2)^2+1^2} \cdot 2\right] = 2e^{-2x}\sin x$

No.

Date

P236 $\boxed{6}$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

$\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} + 4\{sY(s) - y(0)\} + 4Y(s) = 0$

初期条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

$Y(s)(s^2+4s+4) - s - 4 = 0$

$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+4} = \frac{s+4}{(s+2)^2} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{(s+2)}$

$A = [s+4]_{s=-2} = 2$

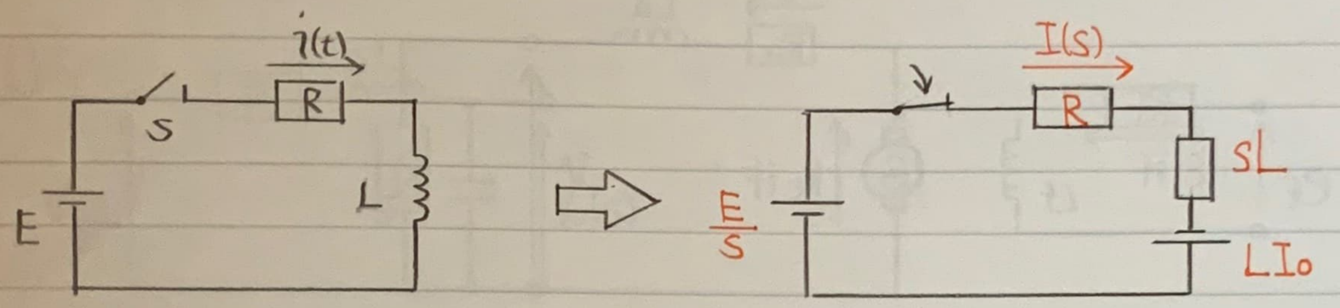
$B = [\frac{d}{ds}(s+4)]_{s=-2} = 1$

$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}\right]$

$= 2xe^{-2x} + e^{-2x} = e^{-2x}(1+2x)$

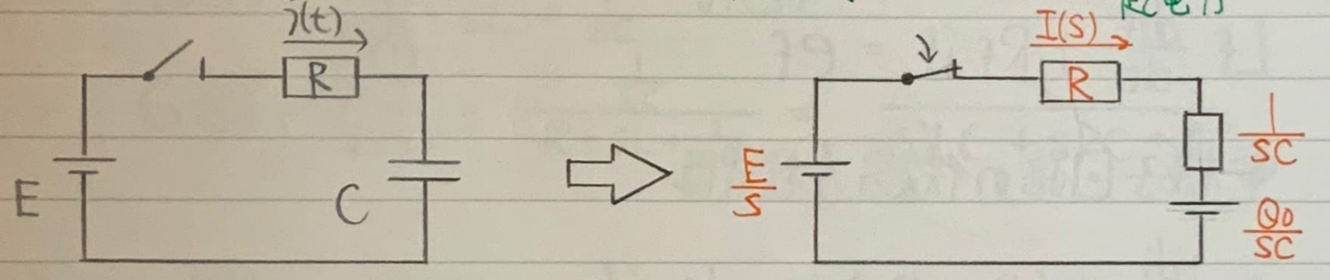
補助回路による過渡現象の解法

P238 補助回路 (RL・RC)



$$L\frac{di}{dt}+Ri=E$$

$$\underbrace{(sL+R)}_{\text{インピーダンス}}I(s)=\underbrace{\frac{E}{s}+LI_0}_{\text{起電力}}$$



$$Ri+\frac{1}{c}\int idt=E$$

$$\underline{(R+\frac{1}{sc})}I(s)=\underline{\frac{E}{s}-\frac{Q_0}{sc}}$$

① 直流起電力 $E \rightarrow \frac{E}{s}+LI_0-\frac{Q_0}{sc}$

$e(t) \rightarrow E(s)+LI_0-\frac{Q_0}{sc}$

② インピーダンス $R \rightarrow R$

$L \rightarrow sL$

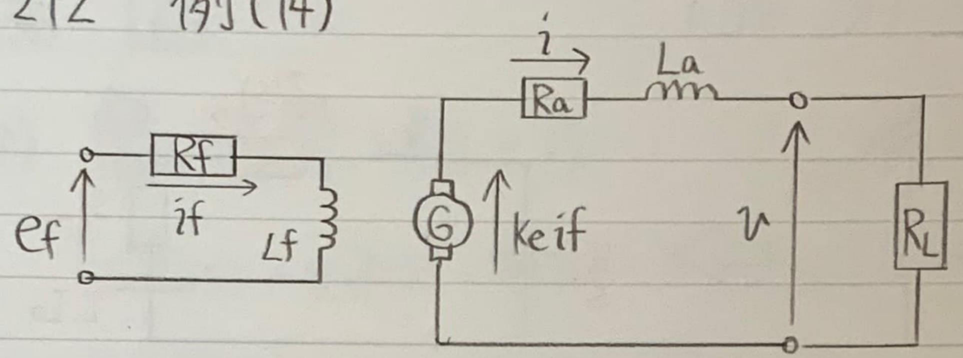
$C \rightarrow \frac{1}{sc}$

No. 10.7

Date 20・11・11

伝達関数と応答

P242 例(14)



界磁回路の微分方程式は

$$L_f \frac{di_f}{dt} + R_f i_f = e_f \quad \cdots ①$$

電機子回路の微分方程式は

$$L_a \frac{di}{dt} + (R_a + R_L) i = K_e i_f \quad \cdots ②$$

出力電圧 $v = R_L i \quad \cdots ③$

①~③を初期条件0としてラプラス変換すると

$$sL_f I_f(s) + R_f I_f(s) = E_f(s) \quad \cdots ①'$$

$$sL_a I(s) + (R_a + R_L) I(s) = K_e I_f(s) \quad \cdots ②'$$

$$V(s) = R_L I(s) \quad \cdots ③'$$

以上①'~③'式から

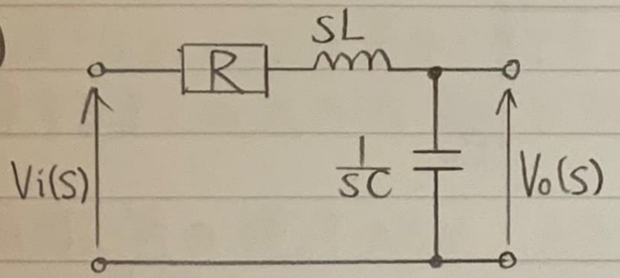
$$\therefore \; G(s) = \frac{V(s)}{E_f(s)} = \frac{R_L K_e}{(L_f s + R_f)(L_a s + R_a + R_L)}$$

No.

Date

P243 $\boxed{9}$

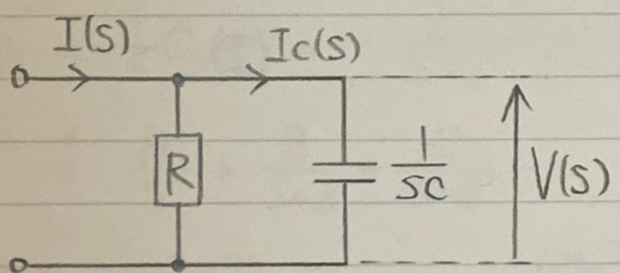
(1)



$$V_o(S) = \frac{\frac{1}{sC}}{R+sL+\frac{1}{sC}} \cdot V_i(S)$$

$$G(S) = \frac{V_o(S)}{V_i(S)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R+sL+\frac{1}{sC}} = \frac{1}{s^2LC+sRC+1}$$

(2)



$$V(S) = \frac{1}{sC} \cdot I_c(S)$$

$$I_c(S) = I(S) \cdot \frac{R}{R+\frac{1}{sC}}$$

$$V(S) = \frac{1}{sC} \cdot \frac{R}{R+\frac{1}{sC}} \cdot I(S) = \frac{R}{sRC+1} I(S)$$

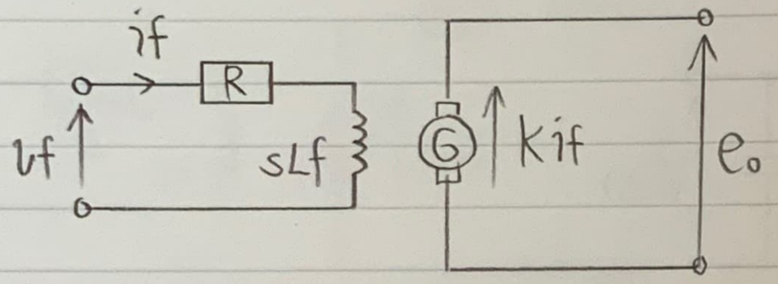
$$G(S) = \frac{V(S)}{I(S)} = \frac{R}{sCR+1}$$

No.

Date

P243 [9]

(3)



界磁回路

$$V_f(s) = RI_f(s) + sL_fI_f(s) \quad \cdots ①$$

電機子回路

$$KI_f(s) = E_0(s) \quad \cdots ②$$

①, ②式より

$$V_f(s) = (R+sL_f)\frac{E_0(s)}{K}$$

$$G(s) = \frac{E_0(s)}{V_f(s)} = \frac{K}{R+sL_f} = \frac{\frac{K}{R}}{1+s\frac{L_f}{R}}$$

No.

Date

P243 過渡応答

システムの入力が変化したとき、制御系が安定状態に達するまでの出力の変化状態を過度特性(過渡応答)という.

過渡応答の検討のため，入力に単位ステップ関数$u(t)$のときの応答を調べる. この応答をインディシャル応答という.

P243 10

$$G(s) = \frac{2s^2+32s+72}{s^2+7s+12}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{2s^2+32s+72}{s(s^2+7s+12)} = \frac{2s^2+32s+72}{s(s+3)(s+4)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$$

$$A = \left[\frac{2s^2+32s+72}{(s+3)(s+4)}\right]_{s=0} = 6$$

$$B = \left[\frac{2s^2+32s+72}{s(s+4)}\right]_{s=-3} = 2$$

$$C = \left[\frac{2s^2+32s+72}{s(s+3)}\right]_{s=-4} = -6$$

$$Y(s) = \frac{6}{s} + \frac{2}{s+3} - \frac{6}{s+4}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 6+2e^{-3t}-6e^{-4t}$$

No.

Date

P243 $\boxed{11}$

$G(s) = \frac{7}{s}$, 入力 $r(t) = e^{5t}$

$Y(s) = \mathcal{L}[e^{5t}]G(s) = \frac{1}{s-5} \cdot \frac{7}{s}$

$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-5}$

$A = \left[\frac{7}{s-5}\right]_{s=0} = -\frac{7}{5}$

$B = \left[\frac{7}{s}\right]_{s=5} = \frac{7}{5}$

$Y(s) = -\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{s} + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{s-5}$

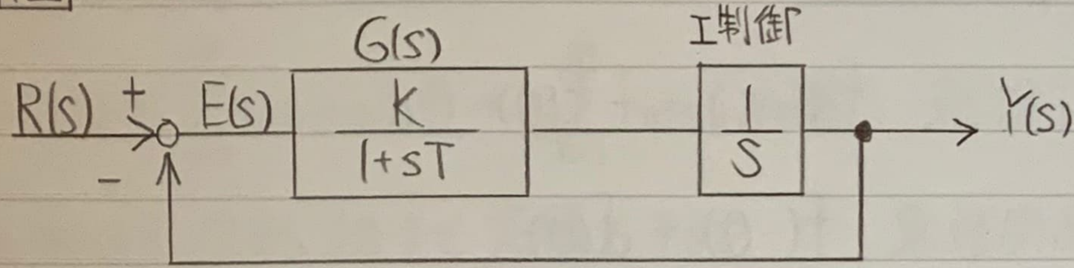
$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{7}{5}\frac{1}{s} + \frac{7}{5}\frac{1}{s-5}\right]$

$= -\frac{7}{5} + \frac{7}{5}e^{5t} = \frac{7}{5}(e^{5t} - 1)$

No.

Date

P247 $\boxed{12}$



偏差 $E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G(s)E(s)$

$$\therefore E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

(1) 積分要素がないとき

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{K}{1+sT}} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+K+sT}$$

$$= \frac{1}{1+K}$$

(2) 積分要素があるとき

$$\lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}\cdot\frac{K}{1+sT}} = \lim_{s\to 0} \frac{s(1+sT)}{s(1+sT)+K}$$

$$= 0$$

No. 11.1

Date 20.11.11

フーリエ級数

P249 ひずみ波形

① 対称波 $f(\theta+\pi) = -f(\theta)$

② 偶関数波 $f(-\theta) = f(\theta)$

③ 奇関数波 $f(-\theta) = -f(\theta)$

対称波で奇関数波である波形は、次の三角関数の級数で表すことができる。

$$f(\theta) = b_1 \sin\theta + b_3 \sin 3\theta + b_5 \sin\theta + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \quad (n:\text{奇数})$$

P251 フーリエ級数

a_n, b_nを適当な大きさの値とすると、すべての $\theta = 2\pi$ を周期とする周波関数は次の級数で表される。

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

これをフーリエ級数といい、a_n, b_nをフーリエ係数という。

フーリエ係数の求め方

P251 フーリエ係数の求め方

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

上式の両辺を 0から2πまで定積分すると

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = a_0 \int_0^{2\pi} d\theta + \left(a_1 \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta + a_2 \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta + \cdots\right)$$

$$+ \left(b_1 \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta + b_2 \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta + \cdots\right) \quad \cdots (*)$$

$$= a_0 \int_0^{2\pi} d\theta \quad \left(\because \int_0^{2\pi} \cos m\theta d\theta = 0,\ \int_0^{2\pi} \sin m\theta d\theta = 0\right)$$

$$\therefore \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta}$$

また、他の係数 a_n は (*)式の両辺に「$\cos n\theta$」をかけて求まる。

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta = a_0 \int_0^{2\pi} \cos n\theta d\theta + \sum_{m=1}^{n} a_n \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} b_n \int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin m\theta d\theta$$

$$= a_n \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta$$

$$\left(\because \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0,\ \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = 0\right)$$

$$\therefore \boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \cdot d\theta}$$

No.

Date . .

P251 フーリエ係数の求め方 (つづき)

同様にして、係数b_nは、前ページ(*)式の両辺に「$\sin n\theta$」をかけることで求められる.

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta \cdot d\theta}$$

したがって、$\theta = 2\pi$を周期とする周期関数$f(\theta)$をフーリエ級数に展開するには、フーリエ係数a_0, a_n, b_nを求め、次の式に入れればよい.

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

波形の種類によるフーリエ級数の特徴

P256 波形の種類によるフーリエ級数の特徴

① 対称波

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \quad (n: 奇数,\ a_0 = 0)$$

② 偶関数波

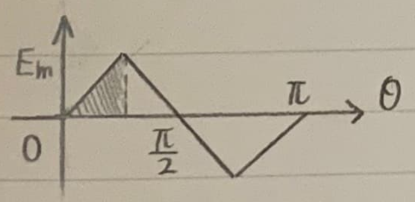
$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n-1}^{\infty} a_n \cos n\theta \quad (b_n = 0)$$

③ 奇関数波

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \quad (a_0 = 0,\ a_n = 0)$$

P257 $\boxed{11}$

(1)



対象波かつ奇関数であるから
$a_0 = 0$, $a_n = 0$ で、nは奇数となる。

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta \quad (n: 奇数)$$

$$f(\theta) = \frac{E_m}{\pi/2}\theta = \frac{2E_m}{\pi}\theta \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$$

No.

Date

P257 $\boxed{11}$ (つづき)

(1) $b_n = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{2E_m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin n\theta \cdot d\theta$

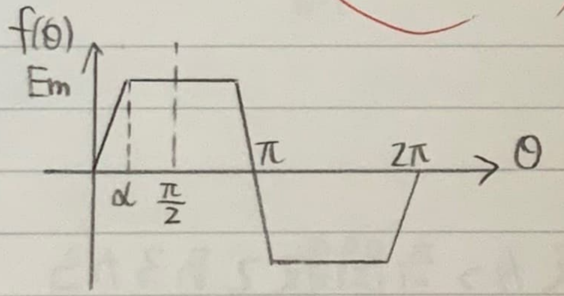
$= \frac{8E_m}{\pi^2}\left[-\frac{1}{n}\theta\cos n\theta + \frac{1}{n^2}\sin n\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{8E_m}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)$

$= \frac{8E_m}{\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$

$= \begin{cases} \frac{8E_m}{n^2\pi^2} & (n=1,5,9,13\cdots) \\ -\frac{8E_m}{n^2\pi^2} & (n=3,7,11,15\cdots) \end{cases}$

(2)



対称波かつ奇関数波である.

$f(\theta) = \begin{cases} \frac{E_m}{\alpha}\theta & (0<\theta<\alpha) \\ E_m & (\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}) \end{cases}$

$b_n = \frac{4}{\pi}\left(\frac{E_m}{\alpha}\int_0^{\alpha}\theta\sin n\theta d\theta + E_m\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\sin n\theta d\theta\right)$

$= \frac{4E_m}{\pi}\left\{\frac{1}{\alpha}\left[-\frac{\theta}{n}\cos n\theta + \frac{1}{n^2}\sin n\theta\right]_0^{\alpha} + \left[-\frac{1}{n}\cos n\theta\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\right.$

No.

Date

P257 $\boxed{III}$ (つづき)

(2) $b_n = \frac{4E_m}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha}\left(\cancel{-\frac{\alpha}{n}\cos n\alpha} + \frac{1}{n^2}\sin n\alpha\right) + \cancel{\frac{4E_m}{\pi} \cdot \frac{1}{n}\cos n\alpha}$

$= \frac{4E_m}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha n^2} \cdot \sin n\alpha$

$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$

$= \frac{4E_m}{\alpha\pi}\left(\sin\alpha \sin\theta + \frac{\sin 3\alpha}{3^2}\sin 3\theta + \frac{\sin 5\alpha}{5^2}\sin 5\theta + \cdots\right)$

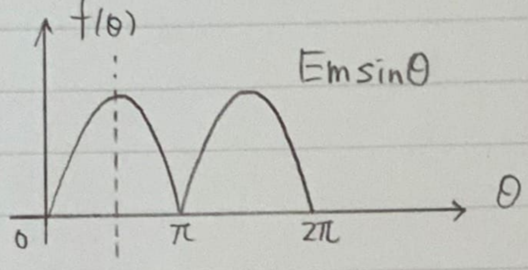
No. 11.3

Date 20・11・12

波形の種類によるフーリエ級数の特徴（つづき）

$\boxed{1}$ （つづき）

(3)



全波整流波形
偶関数波であるから
$b_n = 0$

$$f(\theta) = \begin{cases} E_m \sin\theta & (0 < \theta < \pi) \\ -E_m \sin\theta & (\pi < \theta < 2\pi) \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)\,d\theta = \frac{2E_m}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{2E_m}{\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2E_m}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} E_m \sin\theta \cos n\theta\,d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} E_m \sin\theta \cos n\theta\,d\theta\right)$$

ここで $I(\theta) = \int \sin\theta \cos n\theta\,d\theta$ とおくと、

$$a_n = \frac{E_m}{\pi}\left\{ \Big[I(\theta)\Big]_0^{\pi} - \Big[I(\theta)\Big]_{\pi}^{2\pi} \right\}$$

$$= \frac{E_m}{\pi}\left\{ I(\pi) - I(0) - I(2\pi) + I(\pi) \right\}$$

$$= \frac{2E_m}{\pi}\left\{ I(\pi) - I(0) \right\}$$

No.

Date

$\boxed{1}$ (つづき)

(3) $I(\theta) = \int \sin\theta \cos n\theta \, d\theta$

$= \frac{1}{2}\int \{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\} d\theta$

$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta\right\} + C$

[i] $n = 1, 3, 5, 7, \cdots$ のとき

$I(\pi) = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\pi\right\} + C$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) + C = \frac{1}{n^2-1} + C$

$I(0) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1}\cos 0 + \frac{1}{n-1}\cos 0\right) + C = \frac{1}{n^2-1} + C$

[ii] $n = 2, 4, 6, 8, \cdots$ のとき

$I(\pi) = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\pi + \frac{1}{n-1}\cos(n-1)\pi\right\} + C$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) + C = \frac{-1}{n^2-1} + C$

$I(0) = \frac{1}{n^2-1} + C$

No.

Date

$\boxed{\text{I}}$ (つづき)

(3) したがって係数 a_n は

[i] $n = 1, 3, 5, 7, \cdots$ のとき

$$a_n = \frac{2E_m}{\pi}\left(\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-1}\right) = 0$$

[ii] $n = 2, 4, 6, 8, \cdots$ のとき

$$a_n = \frac{2E_m}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2-1} - \frac{1}{n^2-1}\right) = \frac{2E_m}{\pi} \cdot \frac{-2}{(n-1)(n+1)}$$

$$\therefore f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta$$

$$= \frac{2E_m}{\pi}\left(1 - \frac{2\cos 2\theta}{1\cdot 3} - \frac{2\cos 4\theta}{3\cdot 5} - \frac{2\cos 6\theta}{5\cdot 7} - \cdots\right)$$

双曲線関数の定義

P259 双曲線関数

三角関数の表現

$$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

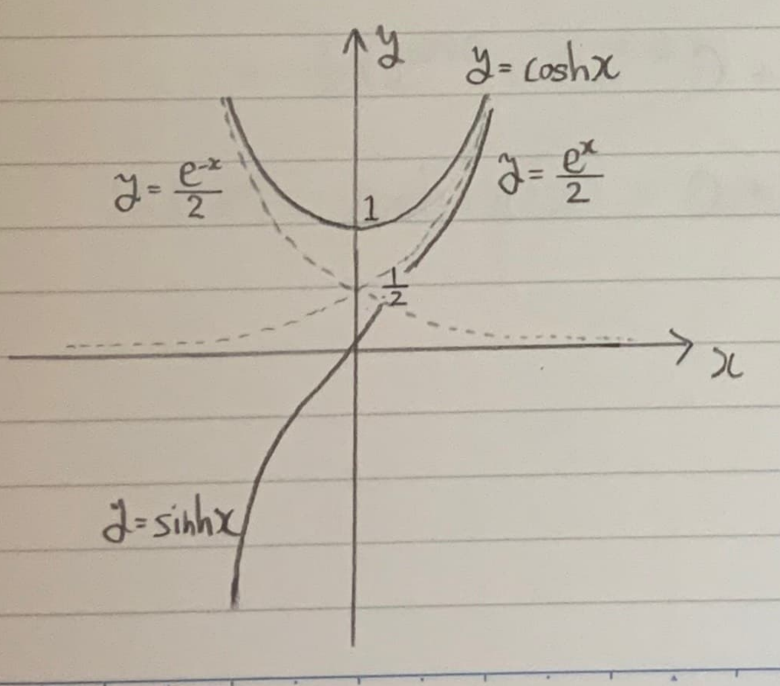
双曲線関数の定義

ハイパボリックcos　　ハイパボリックsin

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$



No. 12.2

Date 20・11・12

双曲線関数の公式

P261 双曲線関数の公式

① $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$

$\tanh(-x) = -\tanh x$

② $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$

③ 加法定理

$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

④ $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$

$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$

$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

⑤ $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

No.
Date

P262 $\boxed{1}$

(1) $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2e^{x}e^{-x}) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}$

$\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2e^{x}e^{-x}) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

(2) $\int \cosh x = \int \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}dx = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x}) + C$

$= \sinh x + C$

(3) $\cosh(x+y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y})$

(右辺) $= \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$

$= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y}$
$+ e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y})$

$= \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-x-y})$

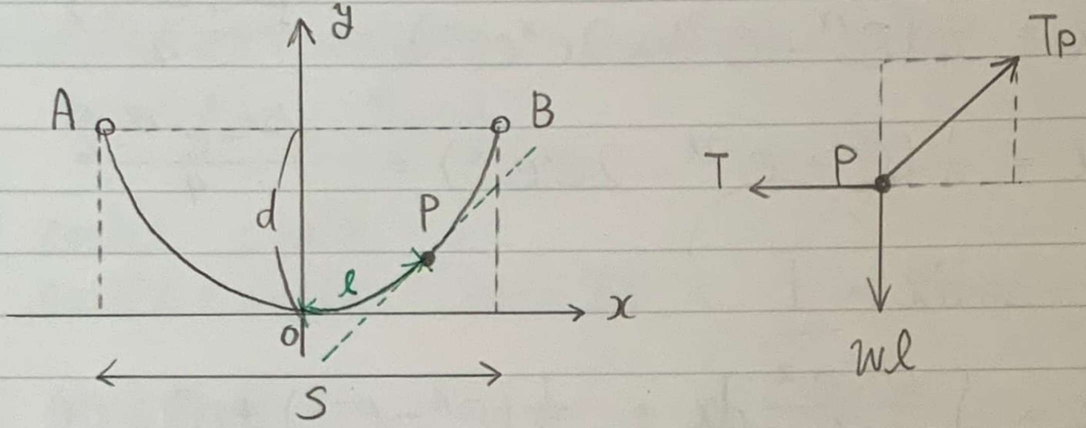
以上より $\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x \sinh y$

No. 12.3

Date 20.11.12

逆双曲線関数

P264 例(3) 電線の弛度



任意の点P(x, y)について、P点における張力をT_P [kg]、OP間の長さをl (m)とすると、右上図のように

$\overrightarrow{T_P} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{wl}$ であらわされ、T_Pは点Pの接線方向であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{wl}{T} \quad \text{(P点の微分係数)}$$

両辺を微分して

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{T} \cdot \frac{dl}{dx} = \frac{w}{T}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \left(\because\ dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx\right)$$

$\frac{dy}{dx} = p$ とおくと

$$\frac{dp}{dx} = \frac{w}{T}\sqrt{1+p^2}$$

No.

Date

P264　例(3)　電線の弛度（つづき）

変数分離して、両辺を積分する.

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}dp = \frac{w}{T}dx \qquad \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{w}{T}dx$$

$$\sinh^{-1} p = \frac{w}{T}x + C_1$$

題意より $x=0$ において $p = \frac{dy}{dx} = 0$　$\therefore C_1 = 0$

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{w}{T}x$$

両辺を積分すると

$$y = \frac{T}{w}\cosh \frac{w}{T}x + C_2$$

$x=0$ において $y=0$　$\therefore C_2 = -\frac{T}{w}$

したがって 電線の曲線の方程式は

$$\boxed{y = \frac{T}{w}\left(\cosh \frac{w}{T}x - 1\right)}$$

No.

Date

P264　例(3)　電線の弛度

電線の曲線の方程式 $f(x) = \frac{T}{w}\left(\cosh \frac{w}{T}x - 1\right)$

たるみ d は $x = \frac{S}{2}$ における y の値であるから、

$$d = f\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{T}{w}\left(\cosh \frac{wS}{2T} - 1\right)$$

また、電線の総実長 L は

$$L = 2\int_0^{\frac{S}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = 2\int_0^{\frac{S}{2}} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{w}{T}x} \cdot dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{S}{2}} \cosh \frac{w}{T}x\, dx = \frac{2T}{w}\left[\sin \frac{w}{T}x\right]_0^{\frac{S}{2}}$$

$$= \frac{2T}{w} \sinh \frac{wS}{2T}$$

No.

Date

P266 $\boxed{2}$

$$\cosh x \fallingdotseq 1 + \frac{x^2}{2!} = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\sinh x \fallingdotseq x + \frac{x^3}{3!} = x\left(1 + \frac{1}{6}x^2\right)$$ と近似できるから

例(3)において、$y = f(x)$, 弛度 d, 実長 L は 以下のように近似することができる.

$$f(x) = \frac{T}{w}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{w}{T}\right)^2 - 1\right\} = \frac{w}{2T}x^2$$

$$d = \frac{T}{w}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{wS}{2T}\right)^2 - 1\right\} = \frac{wS^2}{8T}$$

$$L = \frac{2T}{w}\cdot\frac{wS}{2T}\left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{wS}{2T}\right)^2\right\} = S + \frac{w^2S^3}{24T^2}$$

$$= S + \left(\frac{wS^2}{8T}\right)^2\cdot\frac{8}{3S} = S + \frac{8D^2}{3S}$$

No. 12.4

Date 20.11.12

複素変数の双曲線関数

P266 複素変数の双曲線関数

$$\cosh \dot{z} = \frac{e^{\dot{z}} + e^{-\dot{z}}}{2}, \quad \sinh \dot{z} = \frac{e^{\dot{z}} - e^{-\dot{z}}}{2}$$

$$\cosh(j\dot{z}) = \cos \dot{z}$$

$$\sinh(j\dot{z}) = j\sin \dot{z}$$

$$\tanh(j\dot{z}) = j\tan \dot{z}$$

$\dot{z} = x + jy$ とすると

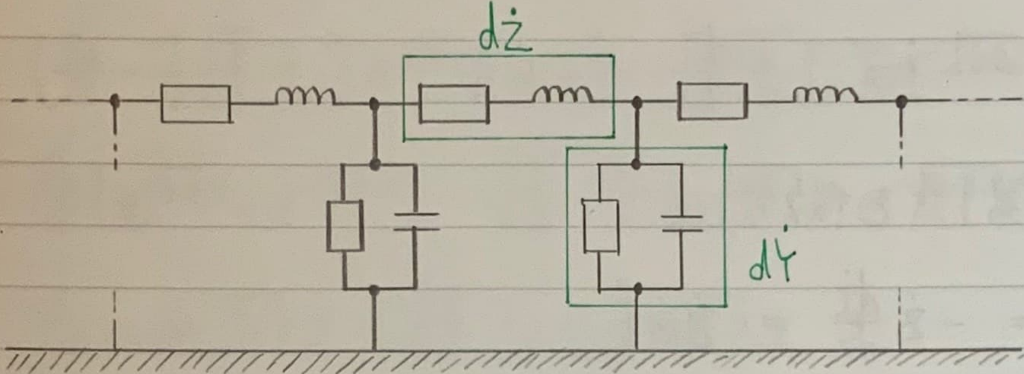
$$\sinh \dot{z} = \sinh(x + jy) = \sinh j(y - jx)$$

$$= j\sin(y - jx) = j(\sin y \cos jx - \cos y \sin jx)$$

$$= \sinh x \cos y + j\cosh x \sin y$$

分布定数回路の交流電圧・電流

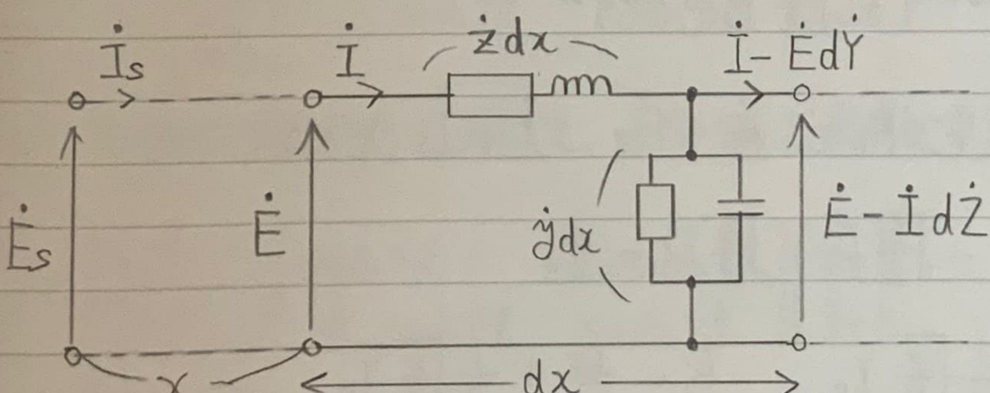
P267 分布定数回路



送電線の単位長さ当たりのインピーダンス，アドミタンスを
$\dot{z}$，$\dot{y}$とし、送電端からの距離をxとすると、

$$d\dot{Z} = \dot{z}\,dx, \quad d\dot{Y} = \dot{y}\,dx$$

距離xの位置における電圧$\dot{E}(x)$，電流$\dot{I}(x)$を
簡単に$\dot{E}$，$\dot{I}$とすると、



微小区間dxでの電圧・電流の増加分は

$$d\dot{E} = -\dot{I}\dot{z}\,dx, \quad d\dot{I} = -\dot{E}\dot{y}\,dx$$

No.

Date

P267 分布定数回路 (つづき)

$$\frac{d\dot{E}}{dx} = -\dot{I}\dot{z}, \quad \frac{d\dot{I}}{dx} = -\dot{E}\dot{y}$$

上の第1式を微分して

$$\frac{d^2\dot{E}}{dx^2} = -\dot{z}\frac{d\dot{I}}{dx} = \dot{y}\dot{z}\dot{E}$$

$$\frac{d^2\dot{E}}{dx^2} - \dot{y}\dot{z}\dot{E} = 0 \quad \text{--- } (*)$$

微分方程式の一般解は

$$\dot{E} = Ae^{\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x} + Be^{-\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x}$$

$$\dot{I} = -\frac{1}{\dot{z}}\cdot\frac{d\dot{E}}{dx} = -\frac{1}{\dot{z}}\left(\sqrt{\dot{y}\dot{z}}Ae^{\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x} - \sqrt{\dot{y}\dot{z}}Be^{-\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{\dot{y}}{\dot{z}}}Ae^{\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x} + \sqrt{\frac{\dot{y}}{\dot{z}}}Be^{-\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x}$$

$x=0$ すなわち送電端で $\dot{E} = \dot{E}_s$, $\dot{I} = \dot{I}_s$ とすると、

$$A + B = \dot{E}_s, \quad -\sqrt{\frac{\dot{y}}{\dot{z}}}A + \sqrt{\frac{\dot{y}}{\dot{z}}}B = \dot{I}_s$$

$$\therefore A = \frac{\dot{E}_s}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}\dot{I}_s, \quad B = \frac{\dot{E}_s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}\dot{I}_s$$

No.
Date

P267 分布定数回路 (つづき)

$$\dot{E} = \left(\frac{\dot{E}_s}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}\dot{I}_s\right)e^{\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x} + \left(\frac{\dot{E}_s}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}\dot{I}_s\right)e^{-\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x}$$

$$= \frac{\dot{E}_s}{2}\left(e^{\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x} + e^{-\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x}\right) - \sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}\cdot\frac{\dot{I}_s}{2}\left(e^{\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x} + e^{-\sqrt{\dot{y}\cdot\dot{z}}x}\right)$$

$$= \dot{E}_s \cosh\sqrt{\dot{y}\dot{z}}x - \sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}\dot{I}_s \sinh\sqrt{\dot{y}\cdot\dot{z}}x$$

$$= \dot{E}_s \cosh\dot{\gamma}x - \dot{Z}_0\dot{I}_s \sinh\dot{\gamma}x$$

ただし 特性インピーダンス $\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{\dot{z}}{\dot{y}}}$
伝搬定数 $\dot{\gamma} = \sqrt{\dot{y}\cdot\dot{z}}$ とする.

ここで 送電線の全長lとすると、受電端は

$$\begin{bmatrix}\dot{E}_r\\ \dot{I}_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh\dot{\gamma}l & -Z_0\sinh\dot{\gamma}l\\ -\frac{1}{Z_0}\sinh\dot{\gamma}l & \cosh\dot{\gamma}l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{E}_s\\ \dot{I}_s\end{bmatrix}$$

両辺に逆行列をかけて 送電端を表すと

$$\begin{bmatrix}\dot{E}_s\\ \dot{I}_s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh\dot{\gamma}l & Z_0\sinh\dot{\gamma}l\\ \frac{1}{Z_0}\sinh\dot{\gamma}l & \cosh\dot{\gamma}l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{E}_r\\ \dot{I}_r\end{bmatrix}$$

No.

Date

P 267 分布定数回路 (つづき)

直列インピーダンス $\dot{z} = R + j\omega L$
並列インピーダンス $\dot{y} = G + j\omega C$

簡単な解析を行うため、R,Gを無視し、LとCのみの
無損失分布定数回路として扱うことが多い。
$\dot{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, $\dot{\gamma} = j\omega\sqrt{LC}$

微分方程式の一般解の指数部分に注目すると、

$$\dot{E} = Ae^{j\omega\sqrt{LC}x} + Be^{-j\omega\sqrt{LC}x}$$

$$\dot{I} = -\sqrt{\frac{C}{L}}Ae^{j\omega\sqrt{LC}x} + \sqrt{\frac{C}{L}}Be^{-j\omega\sqrt{LC}x}$$

第2項は、距離xだけ進むと位相が$\omega\sqrt{LC}x$だけ
遅れることを意味している。
一方、交流の位相は、短時間あたりωt (rad) 進むので
位相が同じ位置では

$$\omega\sqrt{LC}x = \omega t$$

の関係が成り立つ。

$$x = \frac{1}{\sqrt{LC}}t \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

P267 分布定数回路 (つづき)

したがって、一般解の第2項は左から右へ移動する進行波であり、第1項は右から左へ進む反射波を意味している.

その速度は無損失分布定数回路において $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ であり、周波数に無関係である.

例えば同軸ケーブルにおいて

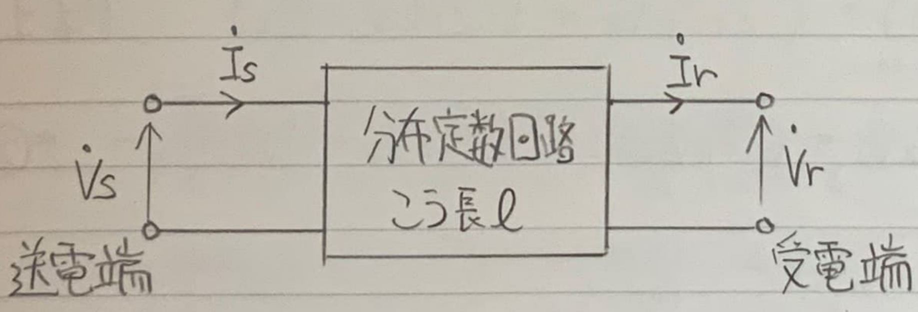
$$L = 2\log\frac{R}{r} \times 10^{-7} \ (\mathrm{H/m})$$

$$C = \frac{\varepsilon_s}{2\log\left(\frac{R}{r}\right)} \times \frac{1}{9\times10^{9}} \ (\mathrm{F/m})$$

進行波の速度 $u = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_s}} \times \underbrace{3\times10^{8}}_{\text{光速}} \ (\mathrm{m/s})$ である.

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_s \\ \dot{I}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega\sqrt{LC}\,l & j\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\omega\sqrt{LC}\,l \\ j\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\omega\sqrt{LC}\cdot l & \cos\omega\sqrt{LC}\,l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_r \\ \dot{I}_r \end{bmatrix}$$

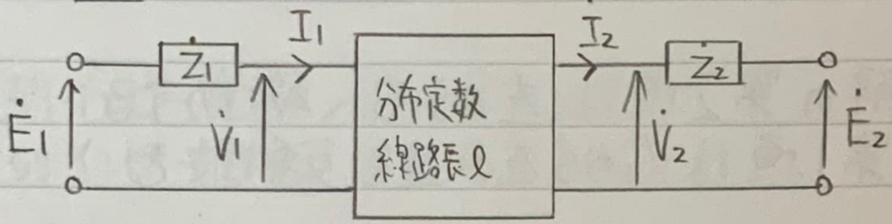
上式のように四端子分布定数回路として扱うことができる.



No.

Date

P269 $\boxed{3}$



$$\begin{bmatrix}\dot{V}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cosh\dot{\gamma}l & Z_0\sinh\dot{\gamma}l\\ \frac{1}{Z_0}\sinh\dot{\gamma}l & \cosh\dot{\gamma}l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{V}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{A} & \dot{B}\\ \dot{C} & \dot{D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{V}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$$

$\dot{E}_1 - \dot{V}_1 = \dot{Z}_1\dot{I}_1$, $\dot{V}_2 - \dot{E}_2 = \dot{Z}_2\dot{I}_2$ を上式に代入して

$$\dot{V}_1 = \dot{A}\dot{V}_2 + \dot{B}\dot{I}_2 = \dot{A}\dot{V}_2 + \dot{B}\cdot\frac{\dot{V}_2 - \dot{E}_2}{\dot{Z}_2} \quad \text{--- ①}$$

$$= \left(\dot{A} + \frac{\dot{B}}{\dot{Z}_2}\right)\dot{V}_2 - \frac{\dot{B}}{\dot{Z}_2}\dot{E}_2$$

$$\dot{Z}_2\dot{V}_1 = (\dot{A}\dot{Z}_2 + \dot{B})\dot{V}_2 - \dot{B}\dot{E}_2 \quad \text{--- ①'}$$

$$\dot{I}_1 = \dot{C}\dot{V}_2 + \dot{D}\dot{I}_2 \quad \text{--- ②}$$

$$\frac{\dot{E}_1 - \dot{V}_1}{\dot{Z}_1} = \dot{C}\dot{V}_2 + \dot{D}\frac{\dot{V}_2 - \dot{E}_2}{\dot{Z}_2}$$

$$\dot{Z}_2(\dot{E}_1 - \dot{V}_1) = \dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{V}_2 + \dot{D}\dot{Z}_1(\dot{V}_2 - \dot{E}_2)$$

$$\dot{Z}_2\dot{E}_1 - \dot{Z}_2\dot{V}_1 = \dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2\dot{V}_2 + \dot{D}\dot{Z}_1\dot{V}_2 - \dot{D}\dot{Z}_1\dot{E}_2 \quad \text{--- ②'}$$

No.

Date

P269 $\boxed{3}$ (つづき)

①'を②'に代入すると

$$\dot{Z}_2\dot{E}_1-(\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B})\dot{V}_2+\dot{B}\dot{E}_2=(\dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{D}\dot{Z}_1)\dot{V}_2-\dot{D}\dot{Z}_1\dot{E}_2$$

$$\dot{V}_2(\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B}+\dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{D}\dot{Z}_1)=\dot{E}_1\dot{Z}_2+\dot{E}_2(\dot{B}+\dot{D}\dot{Z}_1)$$

$$\dot{V}_2=\frac{\dot{Z}_2\dot{E}_1+(\dot{B}+\dot{D}\dot{Z}_1)\dot{E}_2}{\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B}+\dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{D}\dot{Z}_1}$$

①'より

$$\dot{Z}_2\dot{V}_1=(\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B})\frac{\dot{Z}_2\dot{E}_1+(\dot{B}+\dot{D}\dot{Z}_1)\dot{E}_2}{\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B}+\dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{D}\dot{Z}_1}-\dot{B}\dot{E}_2$$

$$=\frac{\dot{A}\dot{Z}_2^2\dot{E}_1+\dot{B}\dot{Z}_2\dot{E}_1+(\cancel{\dot{A}\dot{B}\dot{Z}_2}+\dot{A}\dot{D}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\cancel{\dot{B}^2}+\cancel{\dot{B}\dot{D}\dot{Z}_1})\dot{E}_2-(\cancel{\dot{A}\dot{Z}_2}+\cancel{\dot{B}}+\dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\cancel{\dot{D}\dot{Z}_1})\dot{B}\dot{E}_2}{\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B}+\dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{D}\dot{Z}_1}$$

$$=\frac{(\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B})\dot{E}_1+(\dot{A}\dot{D}\dot{Z}_1-\dot{C}\dot{B}\dot{Z}_1)\dot{E}_2}{\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B}+\dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{D}\dot{Z}_1}\cdot\dot{Z}_2$$

ここで $\dot{A}\dot{D}-\dot{B}\dot{C}=\cosh^2\dot{\gamma}l-\sinh^2\dot{\gamma}l=1$ より

$$\dot{V}_1=\frac{(\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B})\dot{E}_1+\dot{Z}_1\dot{E}_2}{\dot{A}\dot{Z}_2+\dot{B}+\dot{C}\dot{Z}_1\dot{Z}_2+\dot{D}\dot{Z}_1}$$

以上より

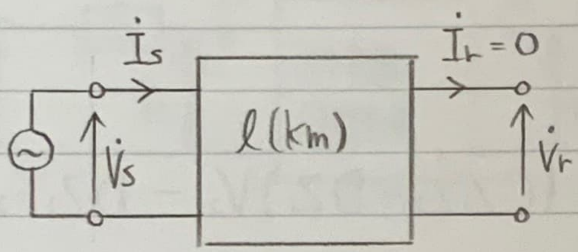
$$\dot{V}_1=\frac{(\dot{Z}_2\cosh\dot{\gamma}l+\dot{Z}_0\sinh\dot{\gamma}l)\dot{E}_1+\dot{Z}_1\dot{E}_2}{(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)\cosh\dot{\gamma}x+(\dot{Z}_0+\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_0})\sinh\dot{\gamma}x}$$

$$\dot{V}_2=\frac{\dot{Z}_2\dot{E}_1+(\dot{Z}_1\cosh\dot{\gamma}l+\dot{Z}_0\sinh\dot{\gamma}l)\dot{E}_2}{(\dot{Z}_1+\dot{Z}_2)\cosh\dot{\gamma}x+(\dot{Z}_0+\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_0})\sinh\dot{\gamma}x}$$

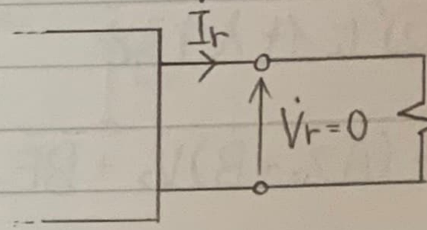
No.

Date 20.11.13

P270 $\boxed{4}$



(開放時)



(短絡時)

$$\begin{bmatrix}\dot{V}_s\\ \dot{I}_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cosh\dot{\gamma}l & Z_0\sinh\dot{\gamma}l\\ \frac{1}{Z_0}\sinh\dot{\gamma}l & \cosh\dot{\gamma}l\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{V}_r\\ \dot{I}_r\end{bmatrix}$$

(ただし $\dot{\gamma}=j\omega\sqrt{LC}$, $Z_0=\sqrt{\frac{L}{C}}$)

開放時、$\dot{I}_r=0$ であるから

$\dot{V}_s=\cosh\dot{\gamma}l\,\dot{V}_r$, $\dot{I}_s=\frac{1}{Z_0}\sinh\dot{\gamma}l\,\dot{V}_r$

$$\dot{V}_s=\cosh\dot{\gamma}l\times\frac{Z_0\dot{I}_s}{\sinh\dot{\gamma}l}=\frac{Z_0}{\tanh\dot{\gamma}l}\dot{I}_s$$

したがって $jX_0=\dfrac{Z_0}{\tanh\dot{\gamma}l}=\dfrac{Z_0}{j\tan\omega\sqrt{LC}\,l}$

$Z_0=X_0\tan\omega\sqrt{LC}\,l$ …①

No.

Date

P270 $\boxed{4}$ (つづき)

短絡時 $V_r = 0$ であるから

$$\dot{V}_s = Z_0 \sinh \dot{\gamma} l \, \dot{I}_r \ , \quad \dot{I}_s = \cosh \dot{\gamma} l \, \dot{I}_r$$

$$\dot{V}_s = Z_0 \sinh \dot{\gamma} l \times \frac{\dot{I}_s}{\cosh \dot{\gamma} l} = \dot{Z}_0 \tanh \dot{\gamma} l \cdot \dot{I}_s$$

したがって $jx_s = Z_0 \tanh \dot{\gamma} l = j Z_0 \tan \omega \sqrt{LC} l$

$$Z_0 = \frac{x_s}{\tan \omega \sqrt{LC} l} \quad \cdots ②$$

①, ②の両辺を辺々相乗して

$$Z_0^2 = \frac{L}{C} = x_0 x_s \qquad \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{x_0 x_s} \quad \cdots ③$$

①式を②式で割ると

$$1 = \frac{x_0}{x_s} \tan^2 \omega \sqrt{LC} l \qquad \tan \omega \sqrt{LC} l = \sqrt{\frac{x_s}{x_0}}$$

$$\sqrt{LC} = \frac{1}{\omega l} \mathrm{Tan}^{-1} \sqrt{\frac{x_s}{x_0}} \quad \cdots ④$$

③式 × ④式, ④式 ÷ ③式 より

$$L = \frac{\sqrt{x_0 x_s}}{\omega l} \mathrm{Tan}^{-1} \sqrt{\frac{x_s}{x_0}} \ (\mathrm{H/km})$$

$$C = \frac{1}{\omega l \sqrt{x_0 x_s}} \mathrm{Tan}^{-1} \sqrt{\frac{x_s}{x_0}} \ (\mathrm{F/km})$$

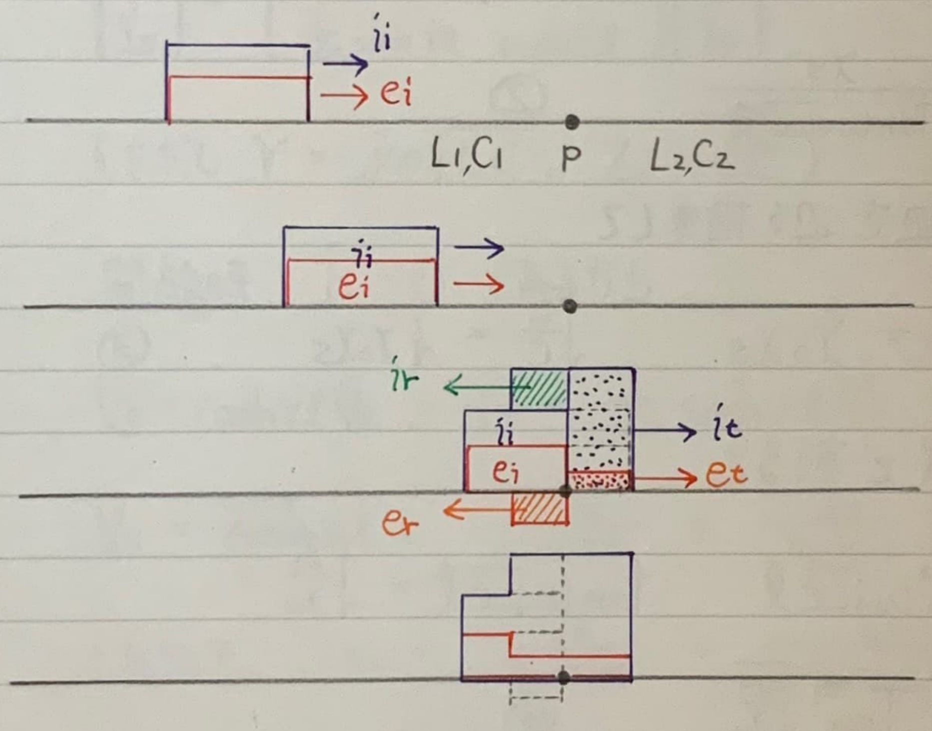
No. 13.1
Date 20.11.13

進行波

P271 進行波

雷サージのように、持続時間がごく短い電圧・電流の状態は送電線の電線を進む波、すなわち進行波として解析する。

進行波の解析には簡単のため、無損失分布定数線路として扱う。RやGがあると、波形の減衰や変形が起きる。

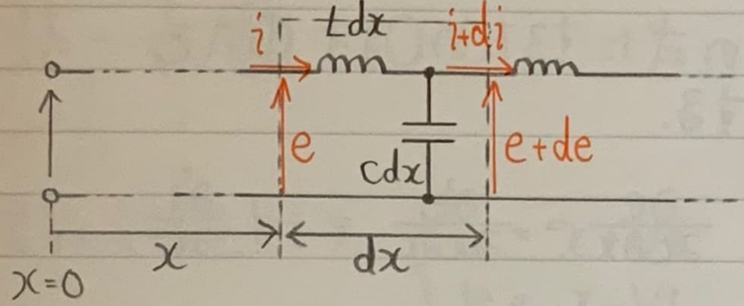


線路定数が異なる点で反射波が生じる。
侵入波と反射波は互いに干渉せず、それぞれ同じ波形を保って進む。
P点の両側で電圧と電流は等しくなるため、

透過波(= 侵入波 + 反射波)を生じる。
t　　i　　r

進行波の微分方程式

P273 微分方程式の立式



送電端から距離xの点における微小区間について
電圧$e(x,t)$, 電流$i(x,t)$を考える.

$$de = -L dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t}, \quad di = -C dx \frac{\partial e}{\partial t}$$

上式の微分de, diは正しくは

$$de = \frac{\partial e}{\partial x} \cdot dx, \quad di = \frac{\partial i}{\partial x} \cdot dx$$

とすべきであるから

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial e}{\partial t} \quad \cdots ②$$

No.

Date

P273 微分方程式の立式 (つづき)

①,②式を e, i 単独の式にするため、まず①式を x, t について偏微分する.

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = -L\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial e}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 e}{\partial x \partial t} = -L\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

②式を x, t について偏微分すると.

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C\frac{\partial^2 e}{\partial x \partial t}, \quad \frac{\partial i}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -C\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$$

4つの式から $\frac{\partial^2 e}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ を消去して

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \quad \text{… ③}$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad \text{… ④}$$

P275 波動方程式の一般解

③,④式は波動方程式と呼ばれている.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

その一般解はダランベールの解として以下のように知られている.

$$f(x,t) = \underbrace{g}_{\text{任意関数}}(x+Vt) + \underbrace{h}_{\text{任意関数}}(x-Vt)$$

No.
Date

P275 ダランベールの解の導出

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

変数変換を行う。 $\begin{cases} u = x + Vt \\ v = x - Vt \end{cases}$

すなわち $x = \frac{u+v}{2}$, $t = \frac{u-v}{2V}$ であるから

$$f(x,t) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2V}\right)$$

これを波動方程式に代入する.

ここで、$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ は以下のように計算できる.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}$$

No.

Date

P275　ダランベールの解の導出（つづき）

同様に $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ を計算すると、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = V \cdot \frac{\partial f}{\partial u} - V \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v} \right)$$

波動方程式に代入すると

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v} \right) - \frac{1}{V^2} \cdot V^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v} \right)$$

$$= 4 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial u} = g'(u)$（任意関数）, $h(v)$ を積分定数とすると、

$$f = \int g'(u) du + h(v) = g(u) + h(v)$$

以上より

$$f(x, t) = g(x + Vt) + h(x - Vt)$$

No.

Date

P276 一般解の示す波動性

$$e = f_1(x - \underbrace{vt}_{\text{距離の次元}}) + f_2(x + vt)$$

$$i = g_1(x - vt) + g_2(x - vt)$$

それぞれ第1項は任意関数で与えられる波形が形を変えず速さ v (m/s) で、x が増加する方向に進むことを示している.

すなわち第1項は前進波で、第2項は後進波である.
また、これらが互いに干渉することなく、存在しうることを示している.

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \ (\mathrm{m/s})$$

No.

Date

P278 電圧波と電流波の関係

②式 $\frac{\partial i}{\partial x} = -C\frac{\partial e}{\partial t}$ の両辺をxで積分すると

$i = -C\int\frac{\partial e}{\partial t}dx$

$= -C\int\frac{\partial}{\partial t}\left\{f_1\left(x-\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)+f_2\left(x+\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\right\}dx$

$= \sqrt{\frac{C}{L}}f_1\left(x-\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)-\sqrt{\frac{C}{L}}f_2\left(x+\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$

$= \frac{1}{Z_s}f_1(x-vt)-\frac{1}{Z_s}f_2(x+vt)$

ただし $v=\frac{1}{\sqrt{LC}}$, サージインピーダンス $Z_s=\sqrt{\frac{L}{C}}$ (Ω)

電圧の前進波,後進波 および 電流の前進波・後進波を
それぞれ e_f, e_b, i_f, i_b とおくと、

$i = i_f + i_b = \frac{1}{Z_s}e_f - \frac{1}{Z_s}e_b$

$e_f = Z_s i_f$, $e_b = -Z_s \cdot i_b$ … 電流の向きが逆方向である.

No. 13.3
Date 20・11・13

進行波計算のポイント

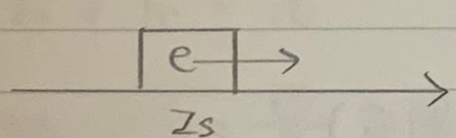
P279 進行波計算

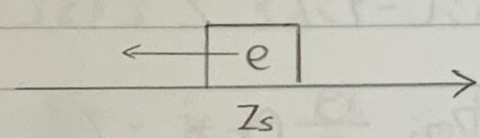
① 無損失分布定数回路において

進行波の速さ $v = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

サージインピーダンス $Z_s = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$

②





進行波が電流の正方向に進むとき ⟷ 逆方向に進むとき

$i = \dfrac{e}{Z_s}$　　　　$i = -\dfrac{e}{Z_s}$

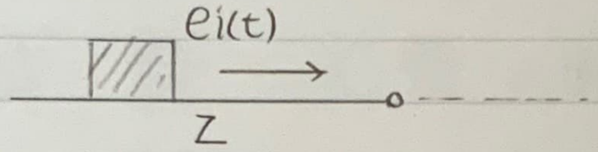
③ 接続点において両側の電圧・電流は常に等しい.
また.異なるサージインピーダンスの線路の接続点では
反射波を生じる.

透過波 = 侵入波 + 反射波

No.

Date

P280 例(1) 開放端



開放端では電流は常に0だから

$i_r + i_i = 0 \quad \therefore \ i_r = -i_i$

サージインピーダンスをZとすると、

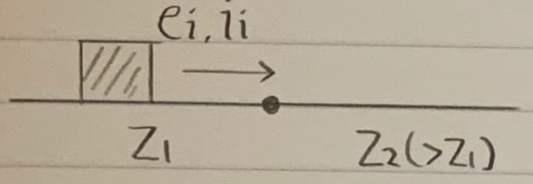
$e_i = Z i_i, \quad e_r = -Z i_r$ (反射波)

$\therefore \ e_i = e_r$

以上より 開放端の電位は

$e_i + e_r = 2e_i$

P281 例(2) 接続点



接続点の両側の電圧電流は等しいから

$$e_i + e_r = e_t \quad \cdots ①$$
$$i_i + i_r = i_t \quad \cdots ②$$

また、$i_i = \dfrac{e_i}{Z_1}$, $i_r = -\dfrac{e_r}{Z_1}$, $i_t = \dfrac{e_t}{Z_2}$ の関係より

$$\frac{e_i}{Z_1} - \frac{e_r}{Z_1} = \frac{e_t}{Z_2} \quad \cdots ③$$

①, ③式より e_r, e_t を求めると、

$$e_r = e_i - \frac{Z_1}{Z_2} e_t = e_i - \frac{Z_1}{Z_2}(e_i + e_r)$$

$$\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) e_r = \left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right) e_i$$

$$\therefore e_r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} e_i, \quad i_r = -\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot i_i$$

$$e_t = \frac{Z_2}{Z_1} e_i - \frac{Z_2}{Z_1} e_r = \frac{Z_2}{Z_1} e_i - \frac{Z_2}{Z_1}(e_t - e_i)$$

$$\left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) e_t = \frac{2Z_2}{Z_1} e_i$$

$$\therefore e_t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} e_i, \quad i_t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot i_i$$