

Sun and Abraham (2021) part1

1 推定式の概要

Sun and Abraham (2021) は、従来の Difference-in-Differences (DID) 手法を拡張し、heterogeneous な処置効果を考慮した推定方法を提案。特にイベント・スタディ回帰における処置効果の推定を改善するためのアプローチとなる。

$$Y_{g,t} = \hat{\gamma}_g + \hat{\lambda}_t + \sum_{\ell=-K, \ell \neq -1}^L \hat{\beta}_\ell \mathbf{1}\{F_g = t - \ell\} + \varepsilon_{g,t} \quad (1)$$

1.1 各変数の意味

- $Y_{g,t}$: グループ g の時点 t におけるアウトカム (例えば雇用率や売上高)
- $\hat{\gamma}_g$: グループ固定効果 (group fixed effects)
- $\hat{\lambda}_t$: 時点固定効果 (time fixed effects)
- $\hat{\beta}_\ell$: 相対時間 (relative time) ℓ における処置効果
- $\mathbf{1}\{F_g = t - \ell\}$: グループ g が最初に処置を受けた時点 F_g から ℓ 期間経過している場合に 1 をとる指標変数
- $\varepsilon_{g,t}$: 誤差項

2 イベント・スタディ回帰の推定値とバイアスの問題

Sun and Abraham (2021) は、イベント・スタディ回帰の推定値が実際の処置効果の加重平均であることを示しつつ、従来の Difference-in-Differences (DID) 推定のバイアス問題を指摘。特に、異質な処置効果 (heterogeneous treatment effects) がある場合、DID 推定値が歪められる可能性がある点を強調している。

2.1 推定式の概要

イベント・スタディ回帰における処置効果の期待値は以下の式で表されます。

$$E[\hat{\beta}_\ell] = E\left[\sum_g w_{g,\ell} TE_g(\ell) + \sum_{\ell' \neq \ell} \sum_g w_{g,\ell'} TE_g(\ell')\right] \quad (2)$$

イベント・スタディ回帰の推定値 $\hat{\beta}_\ell$ の期待値が、実際の処置効果の加重平均として解釈できることを示し

ている。しかし、推定値は単純な平均ではなく、異なる重みを持ち、他の時点の処置効果も影響を与えることがあるため、バイアスを含む可能性がある。

2.2 各項の意味

2.2.1 (1) 第一項：対象期間の処置効果の重み付き平均

$$\sum_g w_{g,\ell} TE_g(\ell) \quad (3)$$

- $TE_g(\ell)$: グループ g における相対時間 ℓ の処置効果 (Treatment Effect)
 - 具体的には、処置を受けてから ℓ 期間後のアウトカムの変化を表す
- $w_{g,\ell}$: 処置効果にかかる重み
 - 各グループ g の処置効果がどれだけ推定値に反映されるかを決定する
 - ただし、 $w_{g,\ell}$ は負の値を取ることがあるため、処置効果が正であっても推定値が負になる可能性がある

この項の意味：

- 各グループ g における処置効果 $TE_g(\ell)$ の重み付き平均
- ただし、負の重みが存在する場合、推定値が直感と異なる結果になる可能性がある

2.2.2 (2) 第二項：他の相対時間の処置効果の影響

$$\sum_{\ell' \neq \ell} \sum_g w_{g,\ell'} TE_g(\ell') \quad (4)$$

- $\ell' \neq \ell$: 異なる相対時間 (例：本来 ℓ における処置効果を推定したいのに、 ℓ' という異なる時点の処置効果が混入する)
- $TE_g(\ell')$: グループ g における相対時間 ℓ' の処置効果
- $w_{g,\ell'}$: 異なる相対時間 ℓ' における処置効果にかかる重み
 - この重みの総和は 0 になるが、異なる時点の処置効果の変動する場合、バイアスを生じる可能性がある

この項の意味：

- 本来、推定すべき相対時間 ℓ の処置効果 $TE_g(\ell)$ だけを反映したいが、他の時間 ℓ' における処置効果 $TE_g(\ell')$ も影響を与えてしまう
- そのため、イベント・スタディ回帰の推定値には、本来の処置効果以外の影響が混入し、正確な因果効果を示さない可能性がある