

# Callaway and Sant'Anna (2021) part1

## 1 分析の背景と前提

- **政策**：一方向的離婚法の導入（バイナリ：処置あり or 処置なし）
- **導入時期**：州ごとに異なる（staggered adoption）
- **目的**：導入から経過した年数に応じた効果（動学的効果）を推定すること

## 2 Callaway and Sant'Anna (2021) の推定対象

Callaway and Sant' Anna (2021) は、コホート（政策の導入時点が同じグループ）ごとに、導入からの経過年数に応じた処置効果を定義している。すなわち、各「コホート  $c$ 」と「処置経過年数  $\ell$ 」ごとに以下のような処置効果を考える：

$$ATT_{c,\ell} = E[Y_{c,c+\ell}(0_{c-1}, 1_{\ell+1}) - Y_{c,c+\ell}(0_{c+\ell})] \quad (1)$$

- これは、時点  $c$  に処置を受けた州が、 $\ell + 1$  年後に受けた累積的な処置効果を意味する。
- 潜在アウトカムで定義される平均処置効果（ATT）である。
- なお、 $Y_{c,c+\ell}(0_{c-1}, 1_{\ell+1})$  は、 $c$  の時点で処置を受け、それ以降  $\ell + 1$  年間処置を受け続けたときのアウトカムを意味する。
- 一方、 $Y_{c,c+\ell}(0_{c+\ell})$  は、 $c + \ell$  まで処置を受けなかった場合の潜在アウトカムである。

## 3 DID 推定量の形式

この  $ATT_{c,\ell}$  を推定するために、以下の差の差（Difference-in-Differences, DID）推定量が用いられる：

$$DID_{c,\ell} = (Y_{c,c+\ell} - Y_{c,c-1}) - (Y_{n,c+\ell} - Y_{n,c-1}) \quad (2)$$

ここで：

- $Y_{c,t}$ ：時点  $t$  における、処置されたコホート  $c$  の平均アウトカム（例：離婚率）
- $Y_{n,t}$ ：同じ時点  $t$  における、never-treated 州（政策を一度も導入していない州）の平均アウトカム

この推定量は、導入直前と導入後のアウトカムの差分を、never-treated 州の同時期の変化と比較すること

で、純粋な政策効果を識別しようとするものである。

## 4 Wolfers (2006) をこの形式で再表現

たとえば、ある州が 1970 年に一方向的離婚法を導入したとすると、その州はコホート  $c = 1970$  に属する。このとき、1973 年時点（導入から 3 年後、すなわち  $\ell = 3$ ）での処置効果は、次のように表される：

$$ATT_{1970,1973} = \mathbb{E}[Y_{1970,1973}(0_{1969}, 1_4) - Y_{1970,1973}(0_{1973})] \quad (3)$$

この ATT を推定するために用いられる DID 推定量は：

$$DID_{1970,3} = (Y_{1970,1973} - Y_{1970,1969}) - (Y_{n,1973} - Y_{n,1969}) \quad (4)$$

つまり、導入から 3 年後における政策効果を、導入直前と比較しつつ、never-treated 州の変化で差し引いて推定する。

## 5 全体の推定スキーム

1. 各コホート  $c$  ごとに、すべての  $\ell \geq 0$  について  $DID_{c,\ell}$  を計算する。
2. それらを加重平均することで、たとえば処置後 3 年目の平均効果  $ATT_3$  を次のように求める：

$$ATT_3 = \sum_c w_{c,3} \cdot DID_{c,3} \quad (5)$$

3. ここで  $w_{c,3}$  は、各コホートにおける重み（たとえば、州の数やサンプルサイズに基づく）である。

## 6 Wolfers (2006) の式 (2) を Callaway and Sant' Anna (2021) の枠組みで再構成

元の式 (Wolfers, 2006)

Wolfers (2006) の推定式 (2) は以下のように与えられる：

$$DivorceRate_{s,t} = \sum_{k=1}^K \beta_k \cdot D_{s,t}^{(k)} + \alpha_s + \lambda_t + \gamma_s t + \delta_s t^2 + \varepsilon_{s,t} \quad (6)$$

- $D_{s,t}^{(k)}$ ：政策導入から  $k$  年目の州  $s$  におけるダミー変数
- $\alpha_s$ ：州固定効果 (State fixed effects)
- $\lambda_t$ ：年固定効果 (Time fixed effects)
- $\gamma_s t + \delta_s t^2$ ：州ごとの線形および二次トレンド
- $\varepsilon_{s,t}$ ：誤差項

この式は、いわゆる **2-way fixed effects with leads and lags** (事前・事後の年次ダミー付きの固定効果モデル) である。しかしながら、近年の文献では、処置効果がコホートによって異質 (heterogeneous) である場合、この種の回帰モデルはバイアスを含む可能性があることが指摘されている。

## Callaway and Sant' Anna (2021) の枠組みを用いた再構成

この枠組みでは、導入時点ごとのコホートと、導入からの年数 (イベントタイム) に着目して処置効果を識別する。以下では、その再構成ステップを示す。

### Step 1: コホートとイベントタイムの定義

- 各州  $s$  の政策導入年を  $c_s$  (cohort) と定義する。
- 各観測単位  $(s, t)$  に対して、イベントタイム  $\ell = t - c_s$  を定義する。
- 基準年として、導入直前の年 ( $\ell = -1$ ) を省略し、他の年との差として効果を推定する。

### Step 2: イベントタイムごとのダミー変数の定義

$$D_{s,t}^{(\ell)} = \mathbb{I}[t - c_s = \ell] \quad (7)$$

これは、州  $s$  においてイベントタイム  $\ell$  のときに 1、それ以外では 0 となるダミー変数である。

### Step 3: 再構成された推定式 (イベントスタディ形式)

$$\text{DivorceRate}_{s,t} = \sum_{\ell \neq -1} \theta_{\ell} \cdot D_{s,t}^{(\ell)} + \alpha_s + \lambda_t + \varepsilon_{s,t} \quad (8)$$

- $\theta_{\ell}$ : 導入から  $\ell$  年後の平均処置効果 (ATT)
- $\alpha_s$ : 州固定効果
- $\lambda_t$ : 年固定効果
- $\varepsilon_{s,t}$ : 誤差項

この形式は、コホートごとに導入時点を基準とした時間経過 (イベントタイム) を追いながら、処置効果の時系列的変化を識別することを目的とする。

### Step 4: ATT の集約表現 (参考)

Callaway and Sant' Anna の手法では、イベントタイム  $\ell$  ごとの平均的な処置効果 (ATT) は、コホート別の DID 推定量の加重平均として表される:

$$\text{ATT}_{\ell} = \sum_c w_{c,\ell} \cdot \text{DID}_{c,\ell} \quad (9)$$

- $\text{DID}_{c,\ell}$ : 導入年  $c$  のコホートに対する  $\ell$  年後の DID 推定量
- $w_{c,\ell}$ : 各コホートに対する重み (たとえば州ごとのサンプルサイズなどに応じたもの)

Wolfers (2006) の式 (2) は、イベントタイムダミーを用いた 2-way fixed effects モデルであり、全州を一樣に扱う前提のもとで推定される。しかしながら、導入タイミングが異なる場合や、処置効果が州やタイミングごとに異質である場合、この手法はバイアスを生む可能性がある。

一方、Callaway and Sant' Anna (2021) の枠組みでは、政策導入時期に基づくコホートごとに動学的な因果効果 (ATT) を識別し、それらをイベントタイムに沿って統合することで、より柔軟かつ頑健な推定が可能となる。特に、\*\*異質な処置効果を捉えるためには、コホート別の DID 推定とその加重平均による集約が重要である\*\*。

したがって、Wolfers の分析を現代的な因果推定のフレームワークで再構成することにより、より信頼性の高い推定が実現できる。