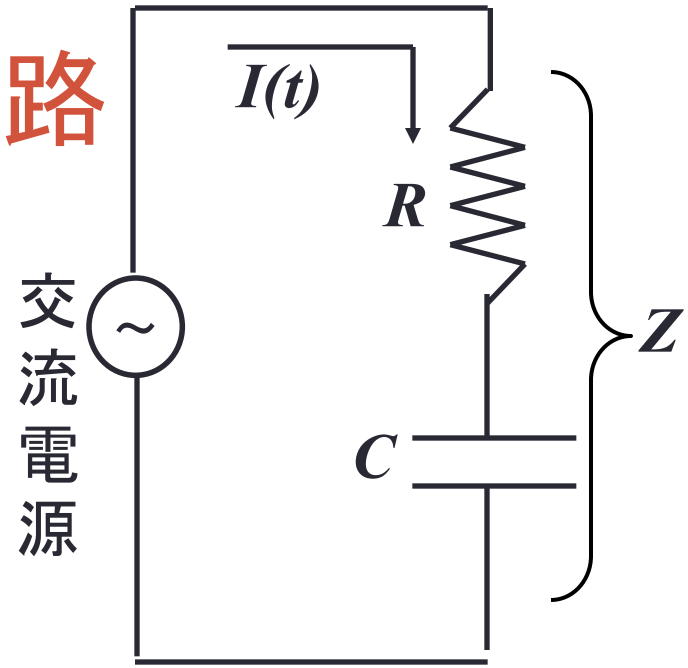
自然科学 II（物理学）

第６回

白倉 尚貴

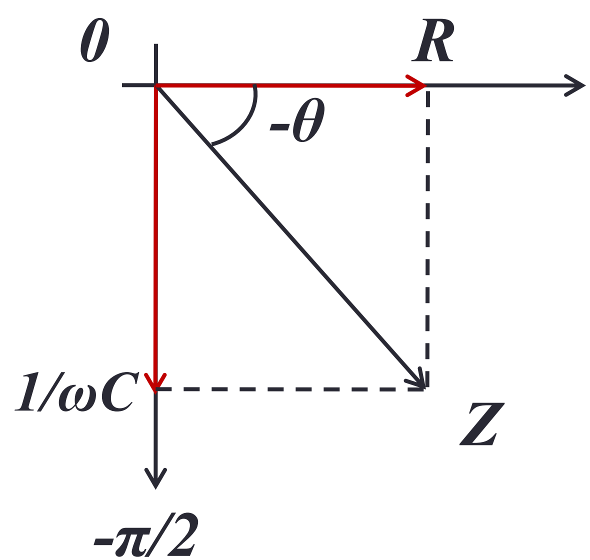
コンデンサと抵抗の交流回路



一方、右図のように抵抗RとコンデンサCが接続されると、この回路のインピーダンス|Z|は右下図より

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

ZはRと$-90°$をなす$1/\omega C$でつくられる角度$-\theta$をもつ合成ベクトルで示される



コンデンサと抵抗の交流回路

したがって、電圧$V(t) = V_0 \sin\omega t$に対し

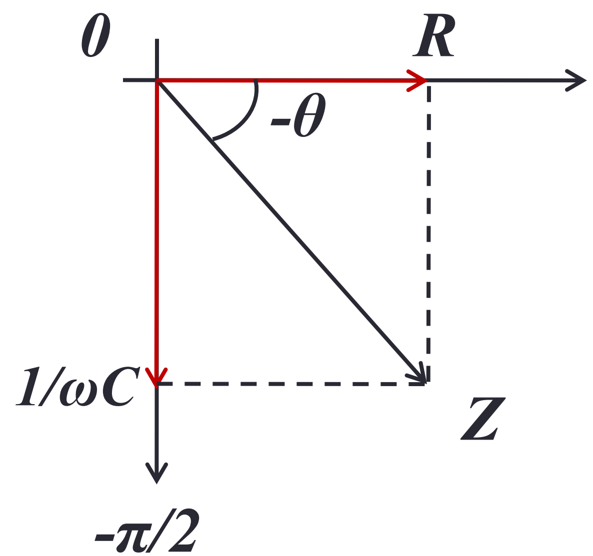
電流$I(t)$は

$$I(t) = \frac{V(t)}{|Z|}$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \theta)$$

ただし

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{1}{R\omega C}$$



逆に交流電流に対して交流電圧は

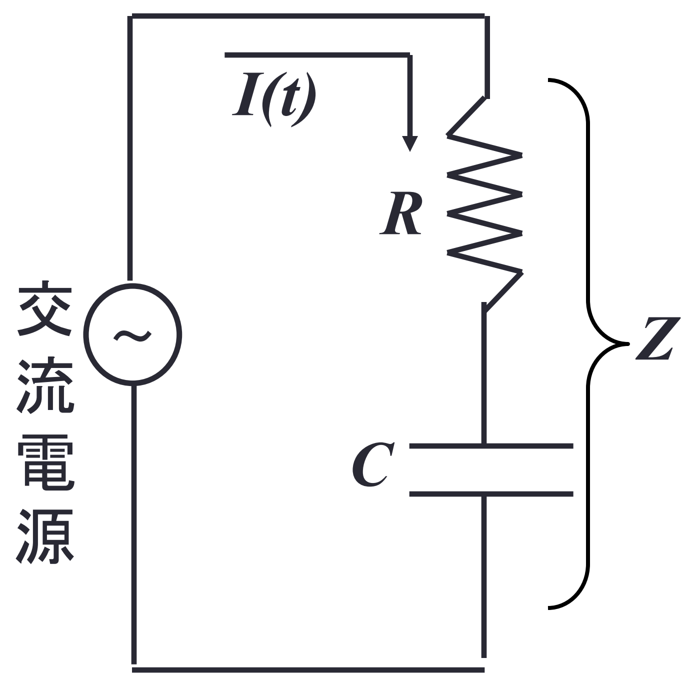
位相がθだけ遅れた電圧が生じる

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} 1/R\omega C$$

復習1

右図のように抵抗RとコンデンサCを交流電源に接続する。
抵抗Rを6 [Ω], 静電容量Cを1/8[F]とし、交流電源の周波数fを1/2π、最大電圧V_0を20[V]とする。
回路の合成インピーダンス$|Z|$を求めよ。
電流$I(t)$を式で記述せよ。



復習1解答

解答

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{1}{2\pi \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{8}}\right)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \theta)$$

$$= \frac{20}{10} \sin\left(\frac{2\pi}{2\pi} t + \theta\right) = 2\sin(t + \theta)$$

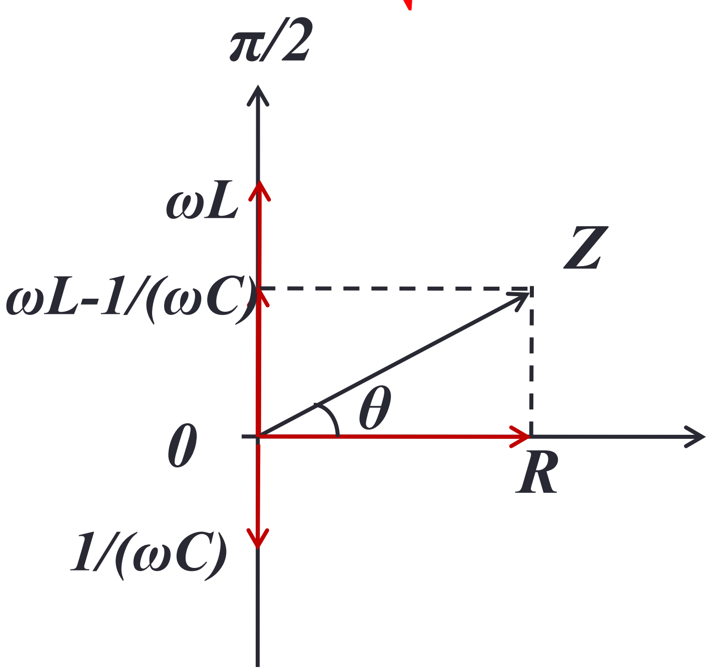
ただし　$\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{1}{R\omega C} = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{4}{3}$

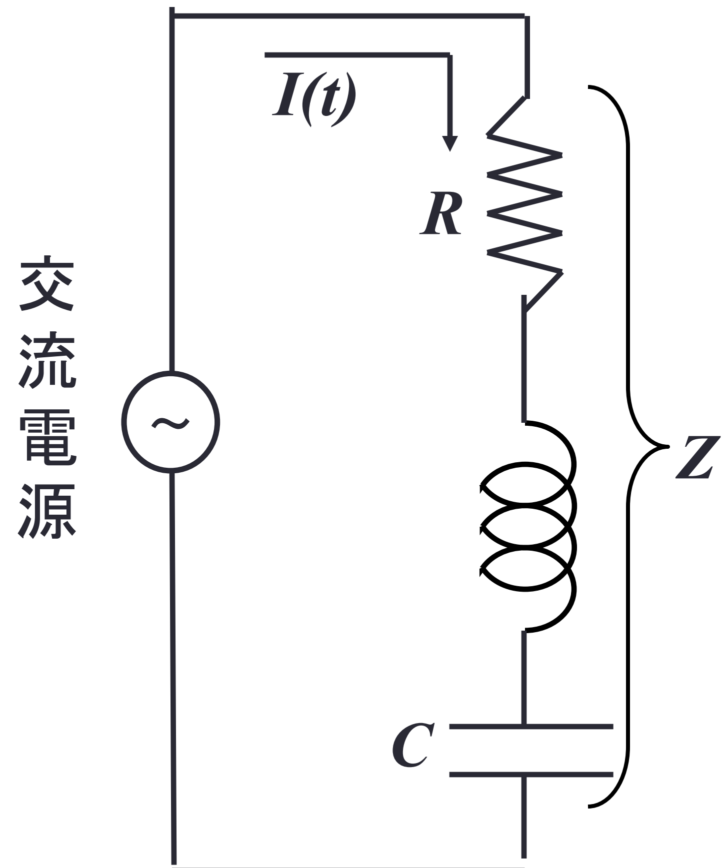
R,L,Cの直列接続に対する交流回路

右図のように*R,L,C*を直列に接続

インピーダンス|*Z*|は

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$





R,L,Cの直列接続に対する交流回路

$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ これは右図のように抵抗RにたいしてωLと$1/\omega C$をプロットして、合成インピーダンス$(\omega L - 1/\omega C)$とRでなす角度θを求める

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

したがって、

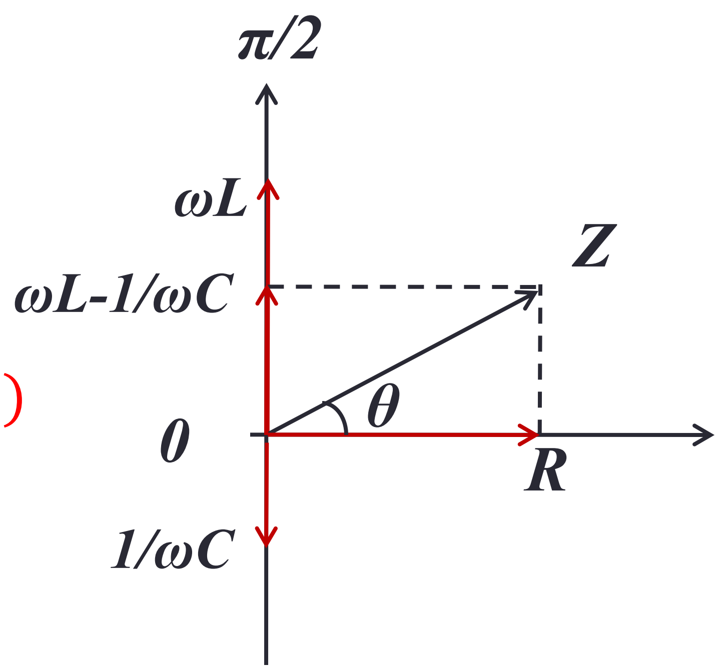
$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin(\omega t - \theta)$$

ただし

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$

$\theta = \tan^{-1}(\omega L - 1/\omega C)/R$



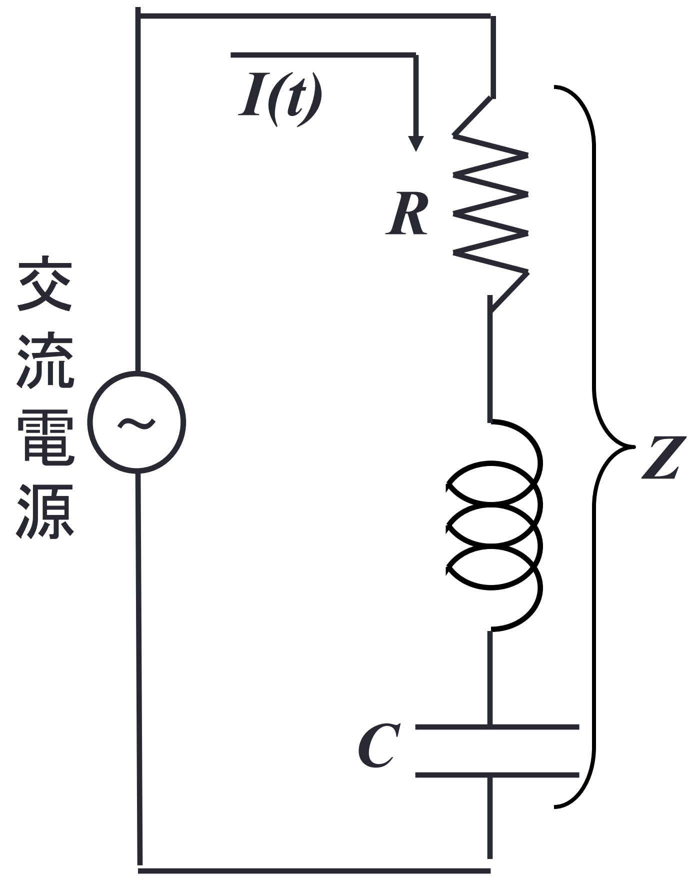
復習2

右図のように抵抗Rと自己インダクタンスL,コンデンサCを交流電源に接続する。

抵抗Rを5 [Ω]、自己インダクタンスLを14[H]、静電容量Cを1/2 [F]とし、
交流電源の周波数fを1/2π、最大電圧V_0を39 [V]とする。

回路の合成インピーダンス|Z|を求めよう。

電流$I(t)$はどのようになるか（式で書ける）



復習2解答

インピーダンス$|Z|$は

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{2\pi}{2\pi}\times 14 - \frac{1}{\frac{2\pi}{2\pi}\times\frac{1}{2}}\right)^2}$$

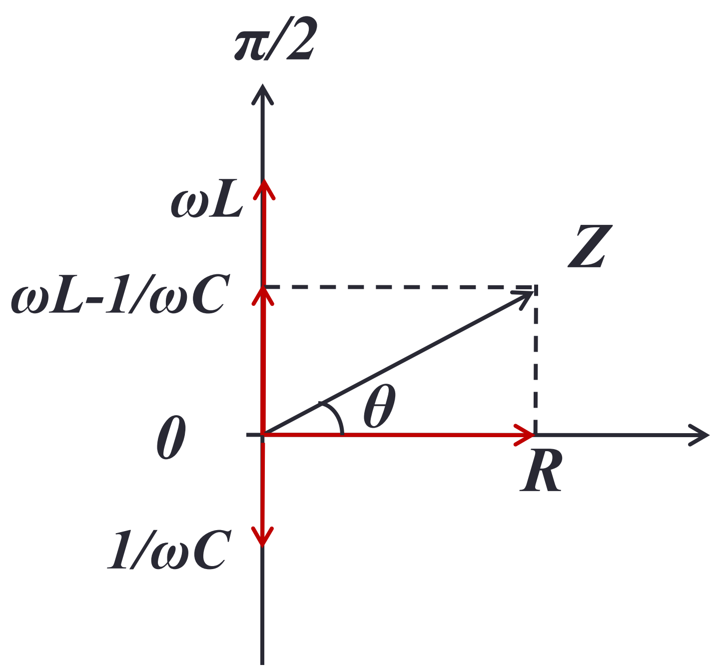
$$= \sqrt{5^2 + (14-2)^2} = \sqrt{25+144} = 13$$

電流$I(t)$は

$$I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\sin(\omega t - \theta)$$

$$= \frac{39}{13}\sin\left(\frac{2\pi}{2\pi}t + \theta\right) = 3\sin(t - \theta)$$

ただし
$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{12}{5}$$



今回の授業

5/22　過渡状態・定常状態

- 定常状態と過渡状態

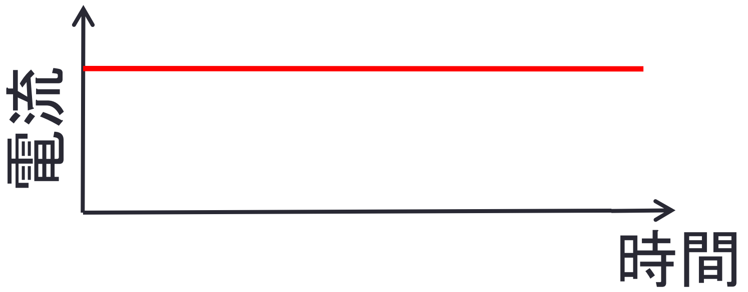
- 過渡現象

    RL回路

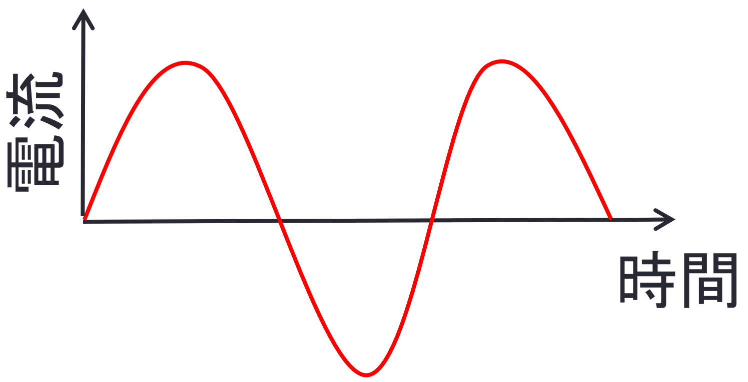
    RC回路

定常状態と過渡状態

直流回路では、時間に関係なく
一定の電流が回路に流れていた



交流回路では、周期的に決まった
値で電流がプラスからマイナスへと
変化し続けた



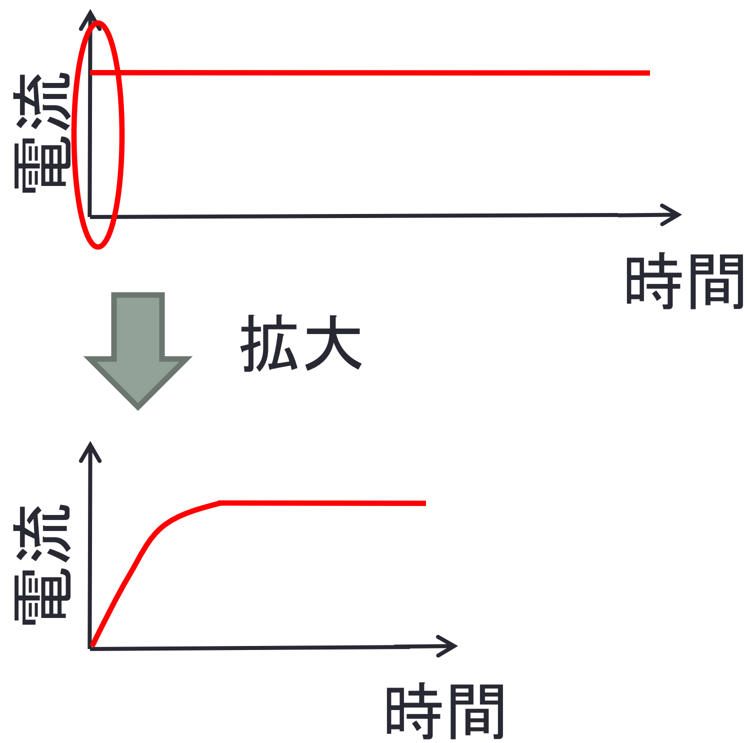
どちらも同じことが永遠に続くので
定常状態という

定常状態と過渡状態

直流回路に注目する
大きな時間間隔で見ると、
直流回路には一定の電流が流れる

しかし電圧をかけ始めたときの
とても短い時間では
電流がゼロから一定の値まで
増える様子が見える

このように電流が一定の値（定常状態）
まで到達する間を過渡状態という



今回の授業

5/22　過渡状態・定常状態

- 定常状態と過渡状態

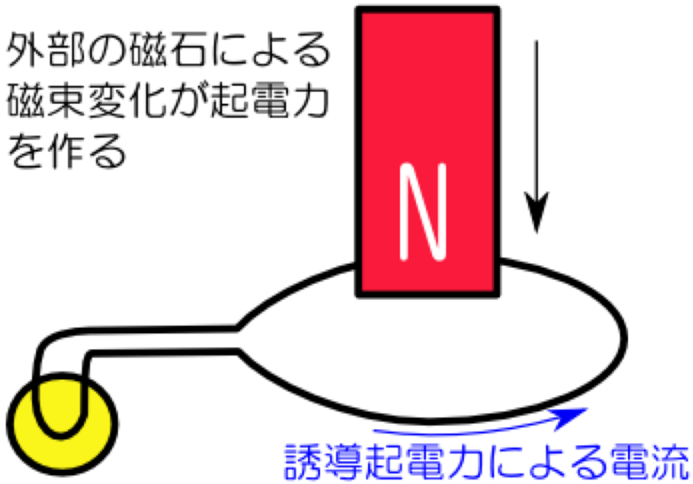
- 過渡現象

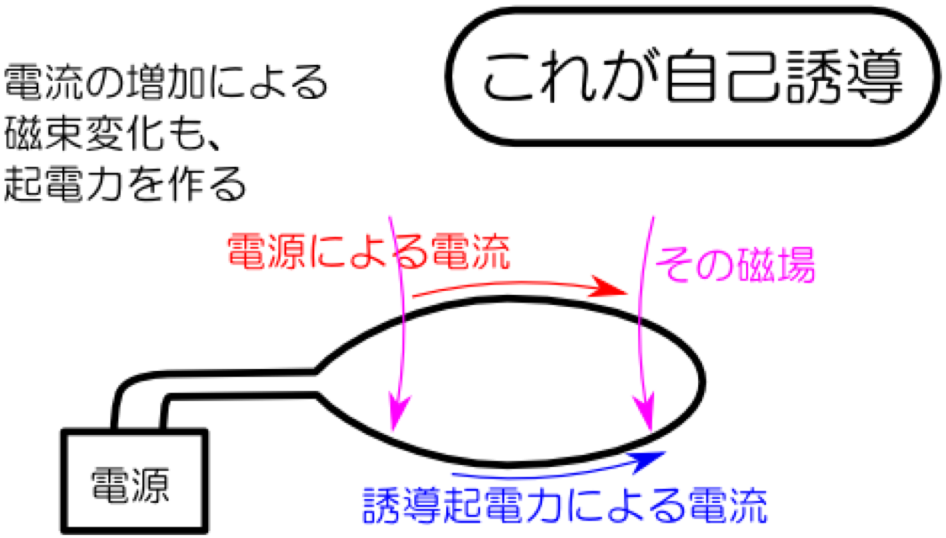
  RL回路

  RC回路

復習：自己誘導

コイルに流れる電流Iによって磁束Φが生じるが、電流が時間的に変化すると、コイルを貫く磁束Φも変化し、この結果レンツの法則によって磁束を打ち消すような起電力がコイルに生じる
これを自己誘導という





http://www.phys.u-ryukyu.ac.jp/~maeno/cgi-bin/pukiwiki/index.php

復習：自己誘導

磁束$\boldsymbol{\Phi}$は電流$\boldsymbol{I}$に比例し

$$\phi = LI$$

この磁束の変化を妨げる方向に起電力が生じるから

$$V = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{L\Delta I}{\Delta t}$$

となり、この比例定数$\boldsymbol{L}$を自己インダクタンスという
単位はヘンリー[**H**]であらわす

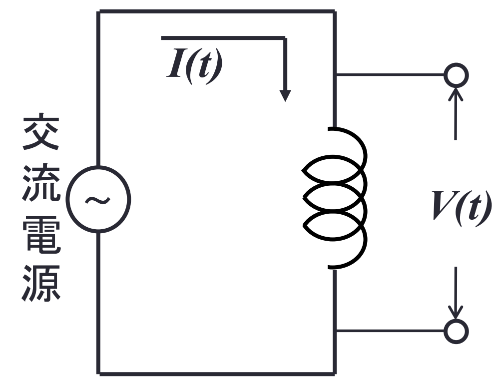
コイルに流れる電流$\boldsymbol{I}$が、1秒間に1**A**の割合で変化したときに
誘導起電力1**V**を生じる自己インダクタンスを1ヘンリーという

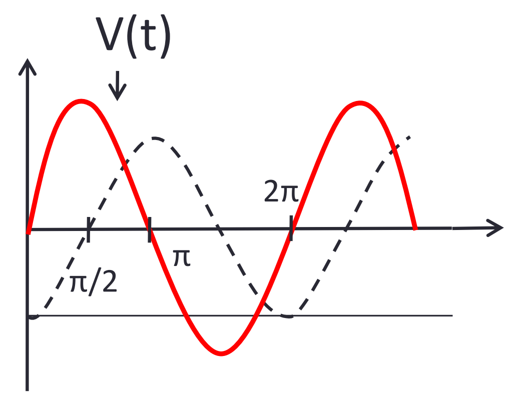
過渡現象: RL回路

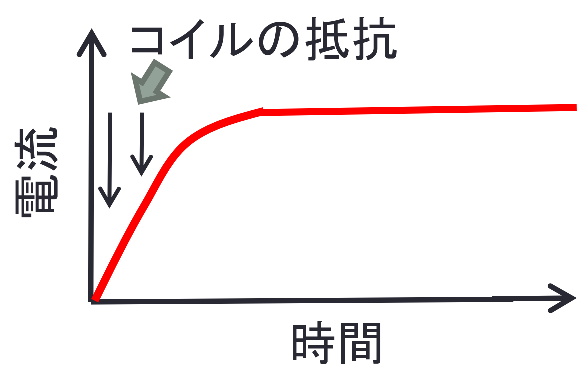
交流電源にコイルが接続された回路では、電圧の周期的変化によってコイルに抵抗が発生した

直流回路においても電流が一定の値（定常状態）になるまでの電流の変化によってコイルに抵抗が発生する

この現象を過渡現象という

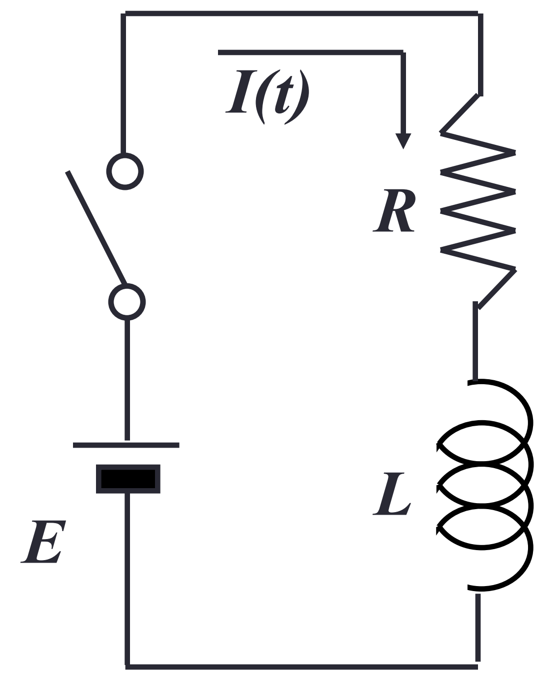






過渡現象:RL回路

直流電源に抵抗*R*および自己インダクタンス*L*をとりつけ、スイッチをつける



スイッチを閉じた瞬間から電流が
一定の値に達するまでの間、
コイルは電流の変化に対して逆方向の誘導起電力を発生させる（自己誘導）

$$V = \frac{L\Delta I}{\Delta t}$$

ここでの*V*は、*RI*とおなじように*V*だけ
電圧を下げるという意味

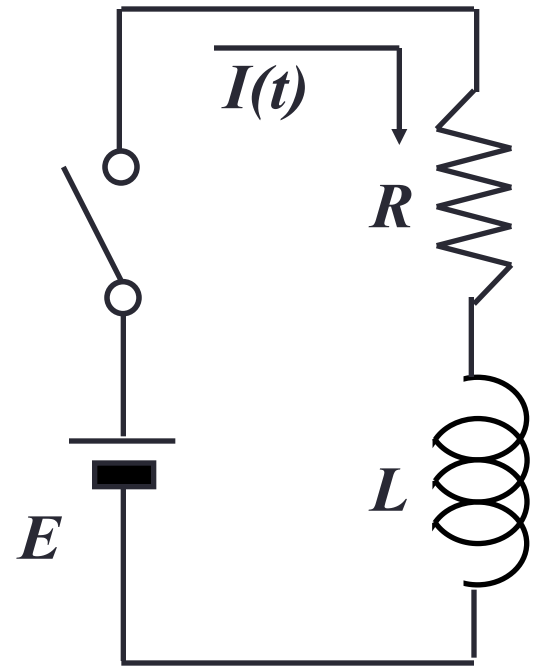
過渡現象:RL回路

$V = L\ (\Delta I / \Delta t)$のコイルによる電圧降下を含んだ*RL*回路の電圧について式を書くと

キルヒホッフの第二法則より

$$E = RI + \frac{L\Delta I}{\Delta t}$$

もし電流の変化がなければ $(\Delta I/\Delta t = 0)$
$E = RI$の定常状態



過渡現象:RL回路

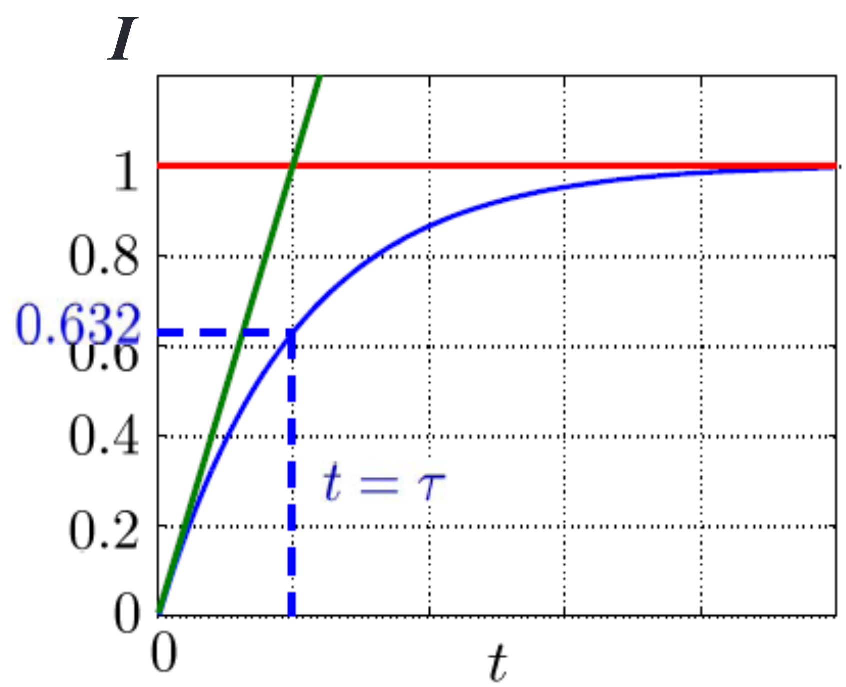
***E* = *RI* + *L*(*ΔI*/*Δt*)**

の微分方程式を解くと

（導出は割愛）

$$I=\frac{E}{R}\left[1-\exp\left\{-\left(\frac{R}{L}\right)t\right\}\right]$$

定常状態からコイルの過渡現象を引いた電流となる



http://k-lab.e.ishikawa-nct.ac.jp/course/CT2/09CT2/handouts/09CT2_f_lect01/09CT2_f_lect01_slide.pdf

過渡現象:RL回路

$\boldsymbol{E = RI + L(\Delta I/\Delta t)}$

I(t)=定常解+過渡解

定常解

$$\boldsymbol{E = RI}$$

$$\boldsymbol{I = \frac{E}{R}}$$

過渡解

$$0 = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i$$

$$\frac{1}{i}di = -\frac{R}{L}dt$$

$$\log_e i = -\frac{R}{L}t + C$$

$$i = \exp\left(-\frac{R}{L}t + C\right)$$

$$i = D\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

$$I(t) = I + i$$

$$= \frac{E}{R} + D\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

t=0の時、I(t)=0なので

$$0 = \frac{E}{R} + D\exp(0)$$

$$0 = \frac{E}{R} + D$$

$$D = -\frac{E}{R}$$

過渡現象:RL回路

$$I = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{R}{L}\right)t\right\}\right]$$

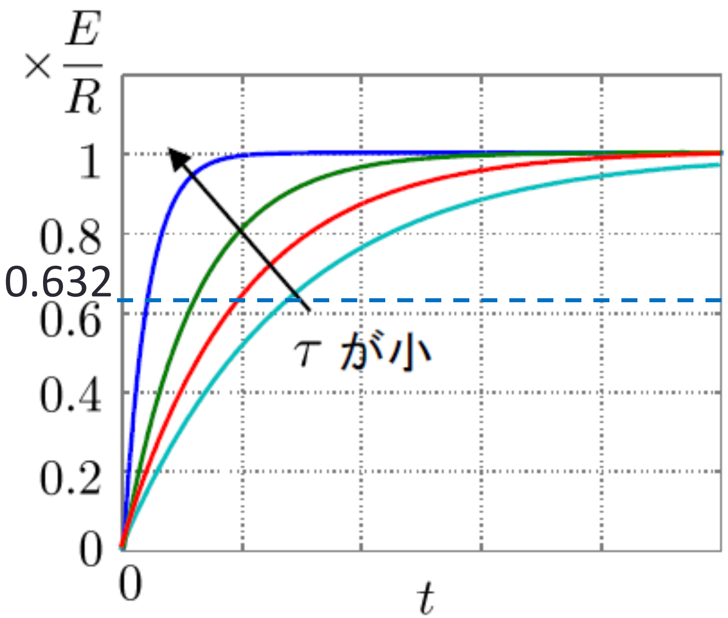
において tの係数の逆数 を

時定数τとよぶ、上式のように

RL回路における時定数τは

$$\tau = \frac{L}{R}$$

時定数τが 大きいほど 電流が定常状態に近づくのが遅れ、小さいほど早くなる



時刻$t = \tau$のとき、電流は定常状態の約 63% となる

http://k-lab.e.ishikawa-nct.ac.jp/course/CT2/09CT2/handouts/09CT2_f_lect01/09CT2_f_lect01_slide.pdf

おさらい

コイルの誘導起電力 $V = \frac{L\Delta I}{\Delta t}$

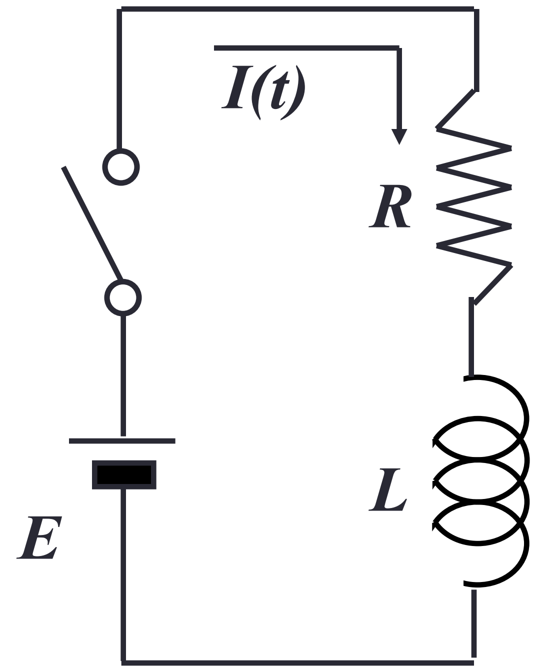
$\boldsymbol{RL}$回路における電圧 $E = RI + \frac{L\Delta I}{\Delta t}$

$\boldsymbol{RL}$回路に流れる電流 $I = \frac{E}{R}\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{R}{L}\right)t\right\}\right]$

時定数$\boldsymbol{\tau}$ $\tau = \frac{L}{R}$

例題1

右図の様に回路が接続されている。
電池の起電力Eを20 [V]、抵抗Rを5 [Ω]
コイルの自己インダクタンスLを15 [H]とする。
次の式、および値を求めよう。
(1)時定数τの値
(2)スイッチを閉じてから時定数τだけ
　時間が経過したときの電流の値
　※$exp\{-1\} = 0.37$



例題1解答

(1)

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{15}{5} = 3$$

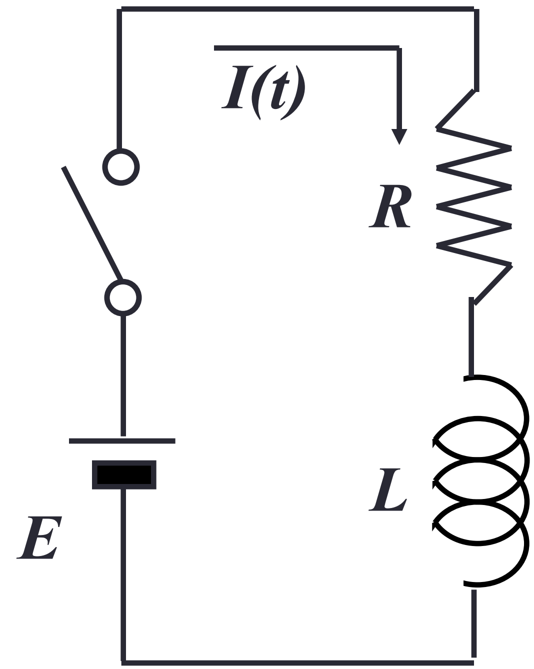
(2)

$$\exp\{-1\} = 0.37$$

$$I = 4(1 - 0.37) = 4 \times 0.63 = 2.52[A]$$

演習1

右図の様に回路が接続されている。
電池の起電力Eを30 [V]、抵抗Rを6 [Ω]
コイルの自己インダクタンスLを12 [H]とする。
次の式、および値を求めよう。
(1)時定数τの値
(2)スイッチを閉じてから時定数τだけ
時間が経過したときの電流の値
※$exp\{-1\} = 0.37$



演習1解答

(2)

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{12}{6} = 2$$

(3)

$$\exp\{-1\} = 0.37$$

$$I = 5(1 - 0.37) = 5 \times 0.63 = 3.15 \; [A]$$

今回の授業

5/22　過渡状態・定常状態

- 定常状態と過渡状態

- 過渡現象

  RL回路

  RC回路

復習: 静電容量

右図の様に2枚の平らな金属板に電圧*V*を与えると両端に電荷±*q*が発生

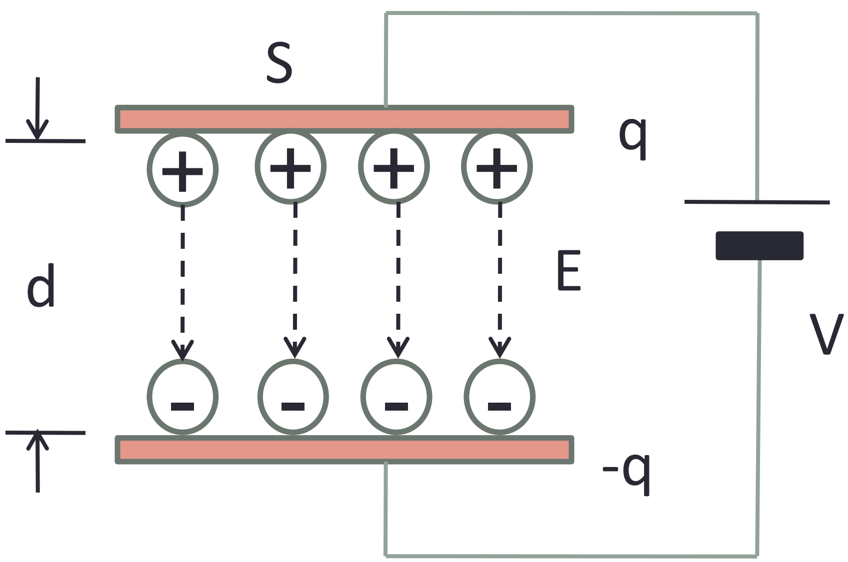
このとき金属板間の電界*E*は

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

ε_0: 真空中の誘電率
S: 面積

電圧*V*は*V*=*Ed*を用いて

$$V = \frac{qd}{\varepsilon_0 S}$$



復習: 静電容量

以上から電荷*q*は

$$q = \frac{\varepsilon_0 VS}{d}$$

となり、電圧*V*と面積*S*に比例し、距離*d*に反比例する

電圧が1Vのときにたまる電荷は

$$\frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

となり、これをC_0とすると、電荷*q*は

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$ より $$q = C_0 V$$

C_0を静電容量といい、単位はF: ファラッド

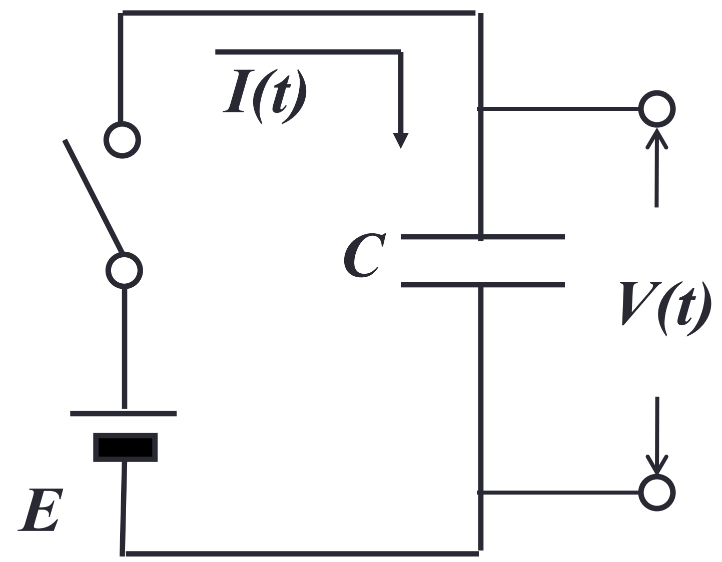
F: ファラッド = C / V

過渡現象：RC回路

右図のように電池*E*にコンデンサ*C*をつなげ、スイッチで回路を開閉する

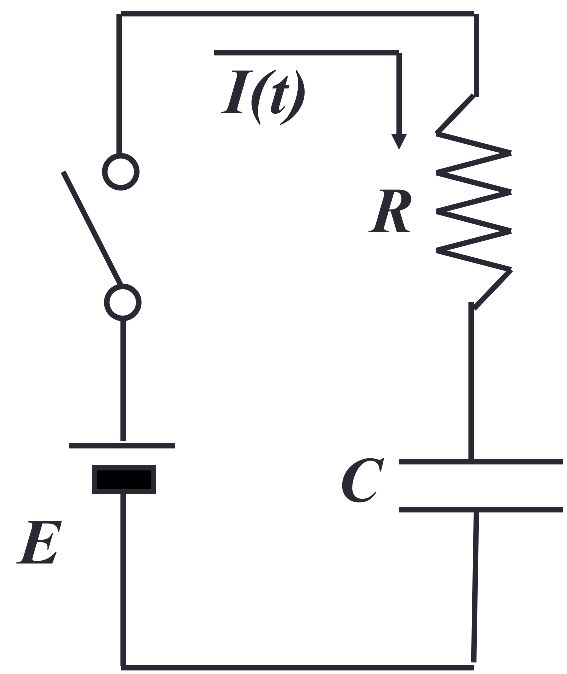
スイッチを閉じた瞬間からコンデンサに静電容量を満たす電荷がたまるまで、回路には電流が流れる

これがコンデンサにおける過渡現象である



過渡現象：RC回路

直流電源に抵抗*R*およびコンデンサ*C*をとりつけ、スイッチをつける



スイッチを閉じた瞬間からコンデンサに電荷がたまるまでの間、
コンデンサには電流がながれる
電流は電荷量の変化に等しいので

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$$

過渡現象：RC回路

キルヒホッフの第二法則を用いると

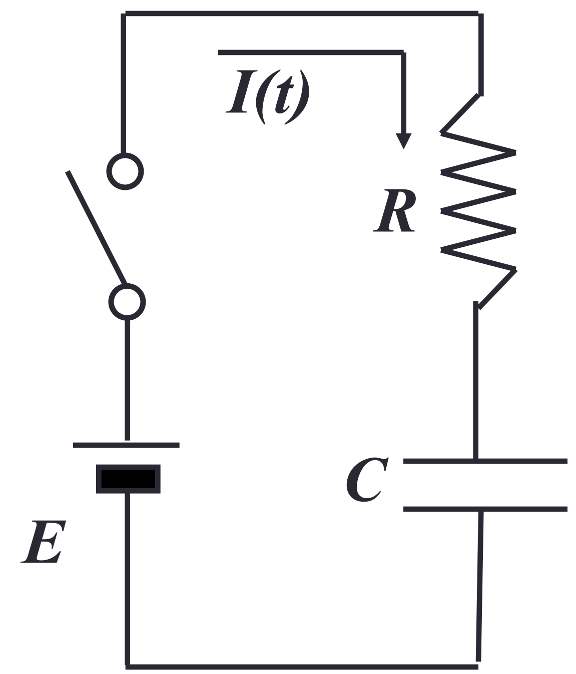
$$E = RI + \frac{q}{C}$$

$q = CV$ より

電荷がたまりきるまでの過渡状態において、 $I = \Delta q / \Delta t$ を代入して

$$E = R\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right) + \frac{q}{C}$$

もし電荷の変化がなければ $(\Delta I/\Delta t = 0)$
$q = CE$ の定常状態、電流は流れない



過渡現象：RC回路

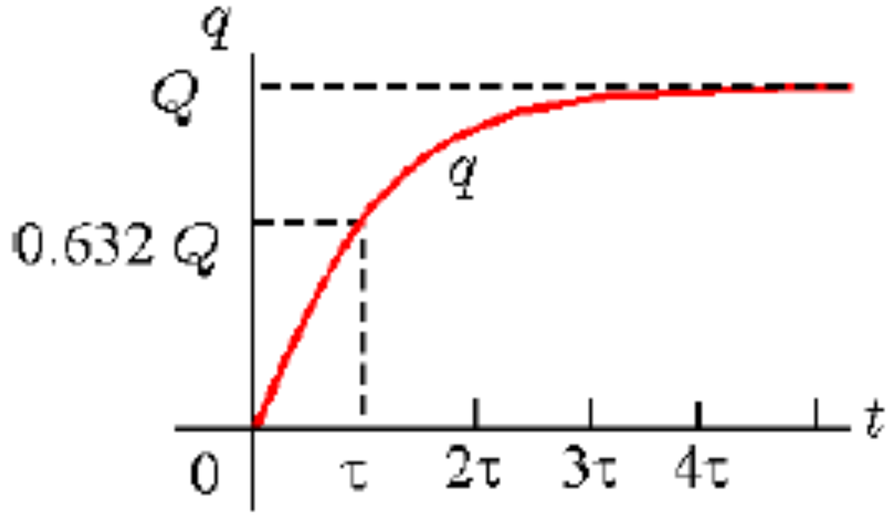
$$E = R\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right) + \frac{q}{C}$$

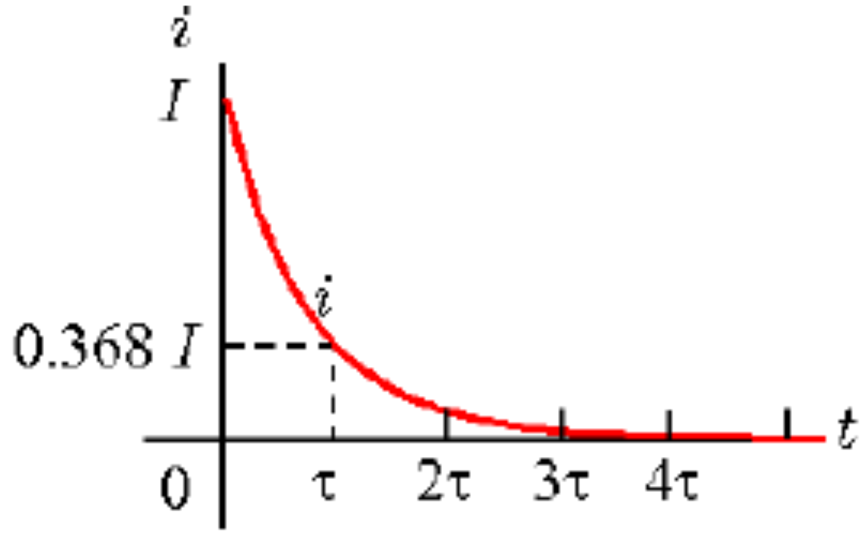
の微分方程式を解くと
（導出は割愛）

$$q = CE\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\right]$$

電流は

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)$$





http://k-lab.e.ishikawa-nct.ac.jp/course/CT2/09CT2/handouts/09CT2_f_lect01/09CT2_f_lect01_slide.pdf

過渡現象:RC回路

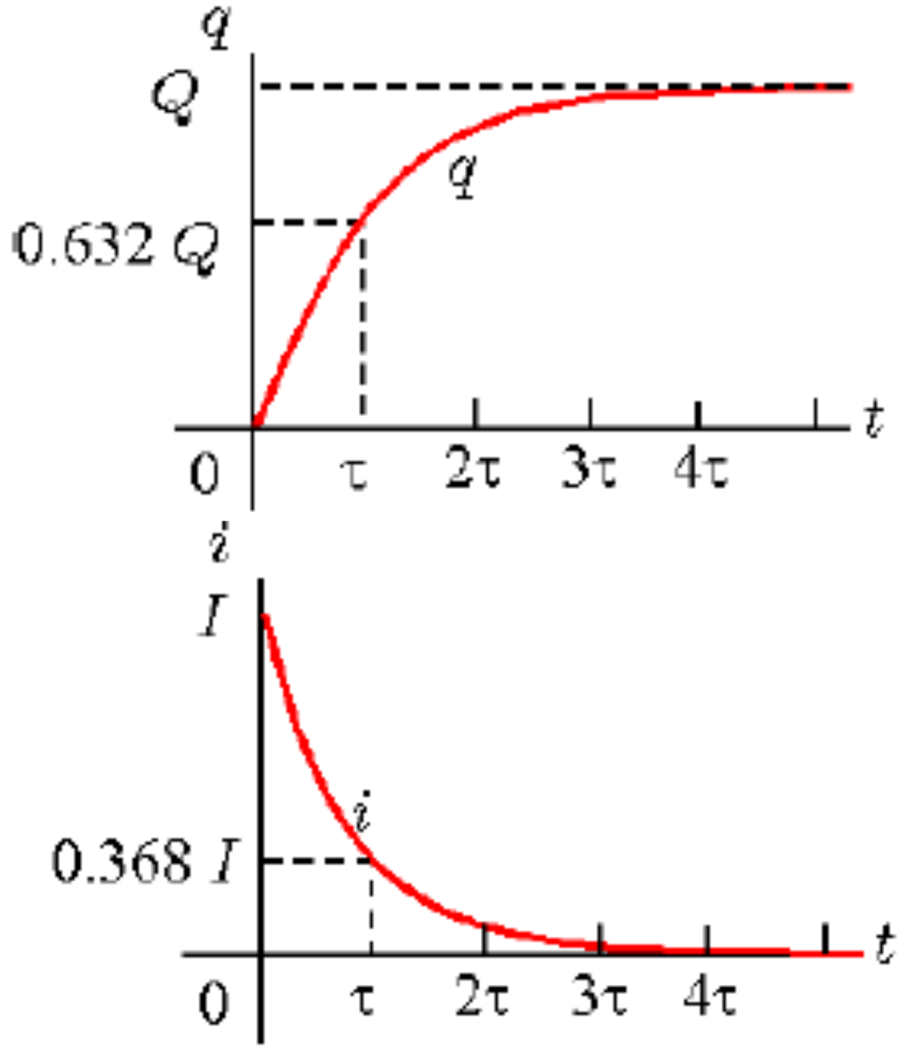
$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)$$

上式の電流を持つRC回路における時定数τは

$$\tau = CR$$

時定数τが大きいほど電流が定常状態に近づくのが 遅れ、小さいほど 早く なる

時刻$t = \tau$のとき、電流は定常状態の約 37%となる



http://k-lab.e.ishikawa-nct.ac.jp/course/CT2/09CT2/handouts/09CT2_f_lect01/09CT2_f_lect01_slide.pdf

おさらい

コンデンサにながれる電流 $$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

*RC*回路における電圧 $$E = RI + \frac{q}{C}$$

$I = \Delta q / \Delta t$を代入 $$E = R\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right) + \frac{q}{C}$$

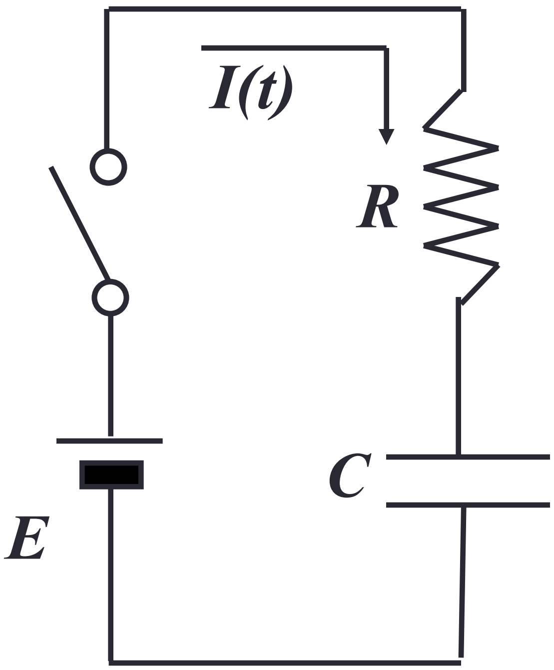
微分方程式を解くと $$q = CE\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{CR}\right)\right]$$

*RC*回路における電流 $$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{CR}\right)$$

時定数τ $$\tau = CR$$

例題2

右図の様に回路が接続されている。
電池の起電力Eを32 [V]、抵抗Rを4 [Ω]
コンデンサの静電容量Cを5 [F]と
する。
次の式、および値を求めよう。
(1)時定数τの値
(2)スイッチを閉じてから時定数τだけ
時間が経過したときの電流の値
※$exp\{-1\} = 0.37$



例題2解答

(2)

$$\tau = CR = 5 \times 4 = 20$$

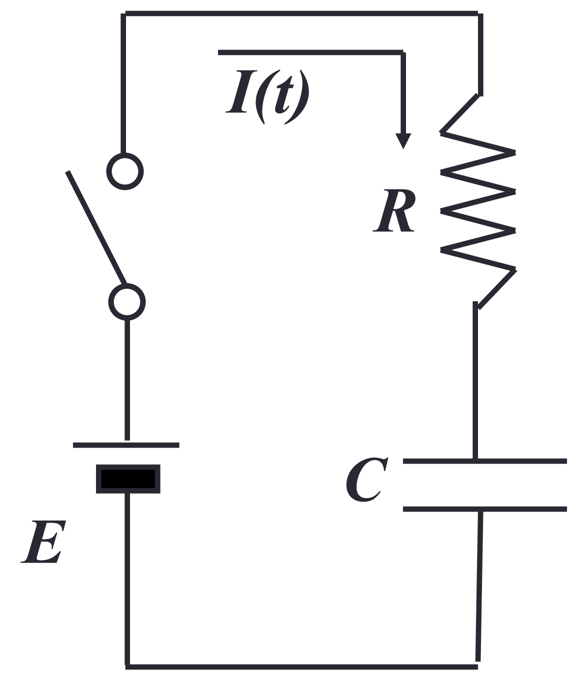
(3)

$$\exp\{-1\} = 0.37$$

$$I = 8 \times 0.37 = 2.96\ [\mathrm{A}]$$

演習2

右図の様に回路が接続されている。
電池の起電力Eを20 [V]、抵抗Rを8 [Ω]
コンデンサの静電容量Cを8 [F]と
する。
次の式、および値を求めよう。
(1)時定数τの値
(2)スイッチを閉じてから時定数τだけ
時間が経過したときの電流の値
※$exp\{-1\} = 0.37$



演習2解答

(1)

$$\tau = CR = 8 \times 8 = 64$$

(2)

$$\exp\{-1\} = 0.37$$

$$I = 2.5 \times 0.37 = 0.925 \ [\mathrm{A}]$$