自然科学 II（物理学）

第４回

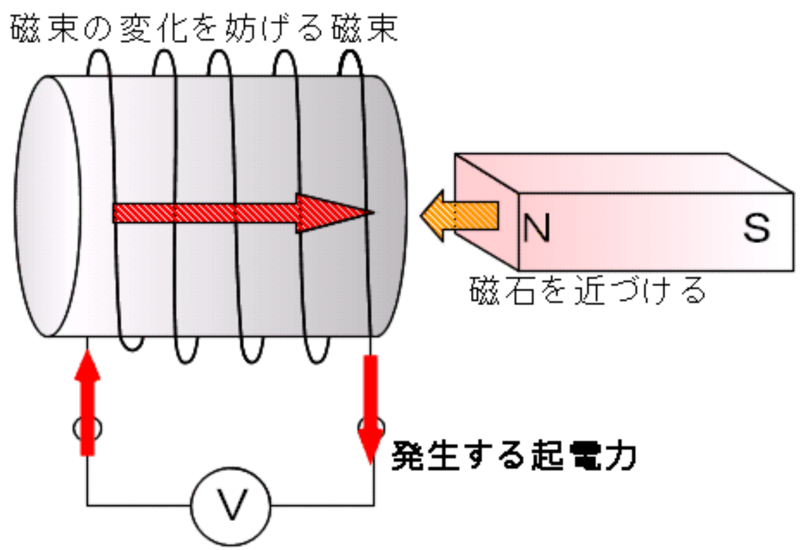
白倉　尚貴

ファラデーの法則とレンツの法則

右図の様に円形コイルの面と垂直に磁束密度Bを持つ磁石を出し入れする

円形コイルにはその動きによって電流が流れる。これを **電磁誘導** という

このときの電流を **誘導電流** 、これによって生ずる起電力（電圧）を **誘導起電力** という



ファラデーの法則とレンツの法則

磁石のつくる磁束密度$\boldsymbol{B}$ [Wb/m^2]が円形コイルでつくる面積$\boldsymbol{S}$を横切るとき、その総和の磁束$\boldsymbol{\Phi}$は

$$\Phi = BS$$

したがって、電磁誘導によってコイルに発生する起電力$\boldsymbol{V}$は横切る磁力線の数が時間変化$\boldsymbol{\Delta t}$間で大きいほど大きくなるので

$$V = \frac{S\Delta B}{\Delta t} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

-の符号は電圧が磁束の変化を妨げる方向に生ずるという意味

$\boldsymbol{n}$回の巻数をもつコイルであれば全コイルを横切る磁束も$\boldsymbol{nBS}$となるから

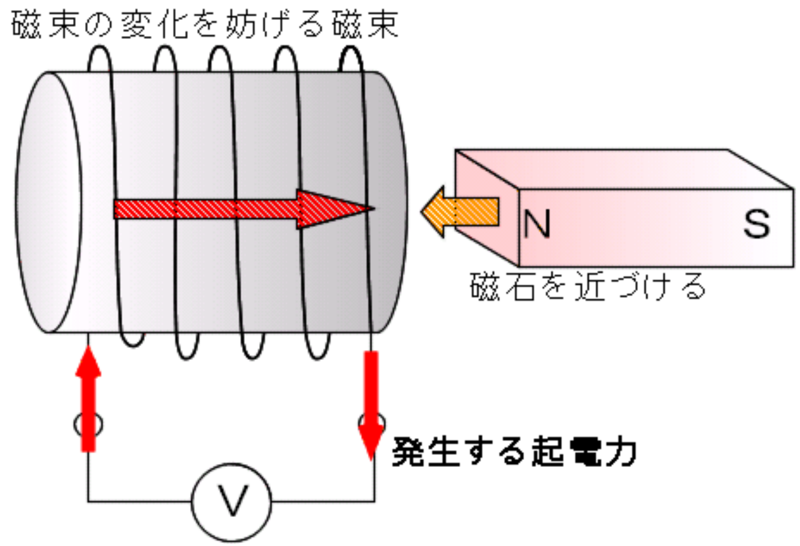
$$V = \frac{nS\Delta B}{\Delta t} = -\frac{n\Delta\Phi}{\Delta t}$$

復習1

以下の①~④の場合について、このとき発生する誘導起電力[V]を求めよ。

① コイルの円の面積5 [cm^2]、巻き数7、磁石を動かすことによってコイルを貫く磁束密度が10秒間に1 [Wb/cm^2]から9[Wb/cm^2]に増えた場合

② コイルの円の面積2 [cm^2]、巻き数4、磁石を動かすことによってコイルを貫く磁束密度が 1秒間に2 [Wb/cm^2]から8 [Wb/cm^2]に増えた場合



復習1の解答

解答

①

$$V = \frac{nS\Delta B}{\Delta t}$$

$$= \frac{7\times 5[\mathrm{cm}^2]\times(9-1)}{10[\mathrm{s}]} \quad = 28[\mathrm{V}]$$

②

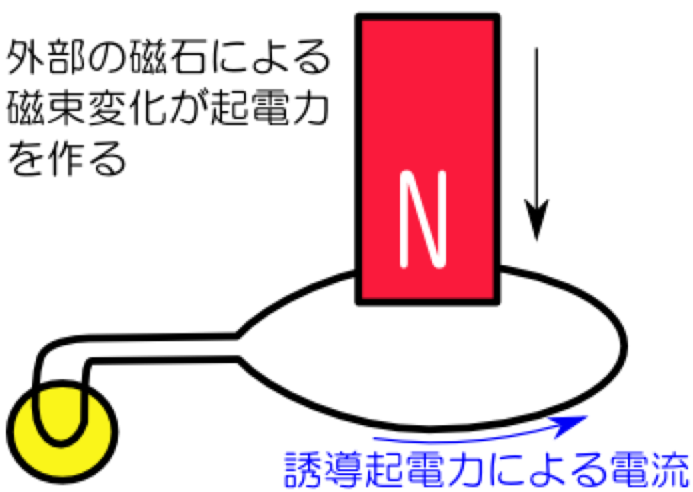
$$V = \frac{nS\Delta B}{\Delta t}$$

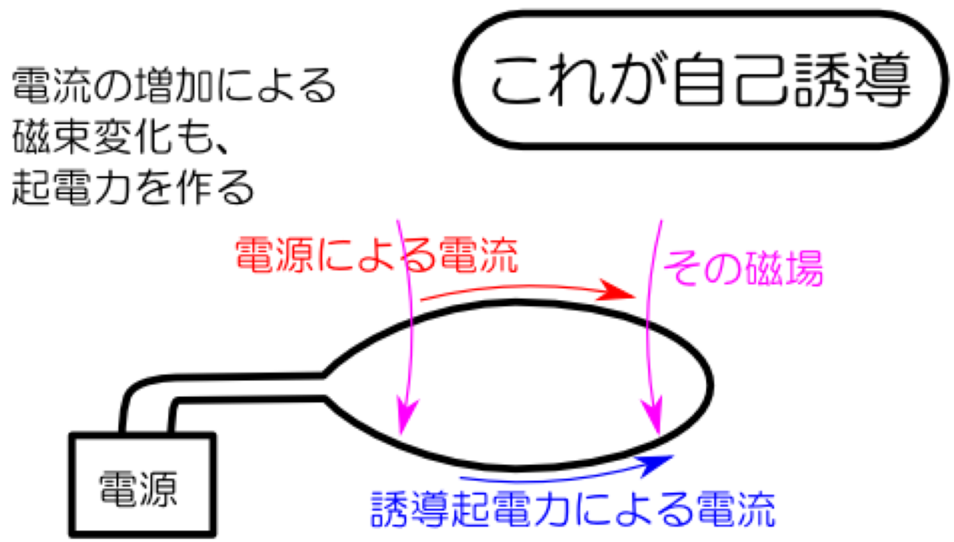
$$= \frac{4\times 2[\mathrm{cm}^2]\times(8-2)}{1[\mathrm{s}]} \quad = 48[\mathrm{V}]$$

自己誘導

コイルに流れる電流Iによって磁束Φが生じるが、電流が時間的に変化すると、コイルを貫く磁束Φも 変化し、この結果レンツの法則によって磁束を打ち消すような起電力がコイルに生じる

これを 自己誘導 という





自己誘導

磁束$\boldsymbol{\Phi}$は電流$\boldsymbol{I}$に比例し

$$\Phi = LI$$

この磁束の変化を妨げる方向に起電力が生じるから

$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{L\Delta I}{\Delta t}$$

となり、この比例定数$\boldsymbol{L}$を 自己インダクタンス という

単位はヘンリー[H]であらわす

コイルに流れる電流$\boldsymbol{I}$が、1秒間に1Aの割合で変化したときに

誘導起電力1Vを生じる自己インダクタンスを1ヘンリーという

相互誘導

下図のようにコイル1に電流を流すと磁束$\boldsymbol{\Phi}_1$が生じる

この磁束はコイル2を貫き、その磁束$\boldsymbol{\Phi}_{12}$は$\boldsymbol{I}_1$に比例して

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1$$

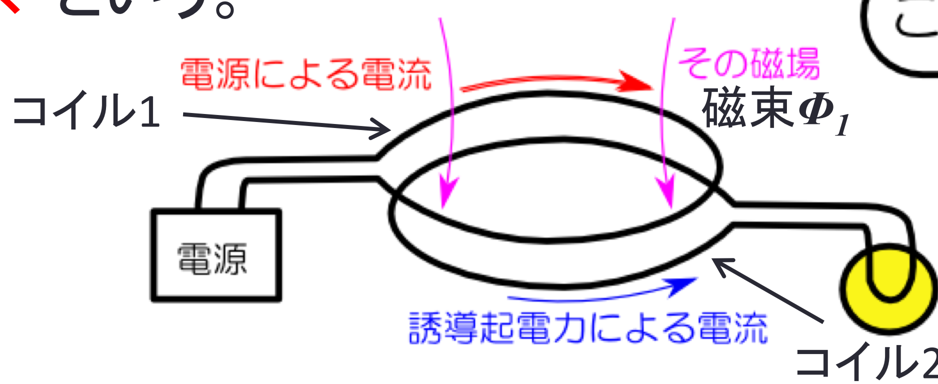
コイル1の電流をスイッチでON,OFFするごとにコイル2は

$$V = -\frac{\Delta\Phi_{12}}{\Delta t}$$

の誘導起電力が生じる。これを **相互誘導** といい、$\boldsymbol{L}_{12}$を.

相互インダクタンス という。

これが相互誘導



復習2

図の様にコイルを配置して、コイル1では2秒間で0 [A]から10 [A]に電流が増える。コイル1の自己インダクタンスを100 [H]とすると

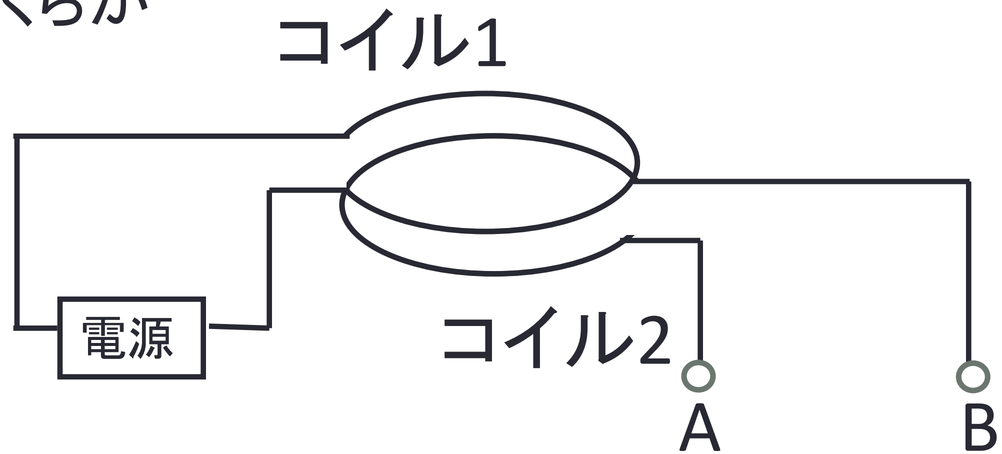
(1)10 [A]の電流によりコイル1で発生する磁束はいくらか。

(2)また自己誘導の起電力はいくらか。

コイル1と2の相互インダクタンスを150 [H]とすると、

(3) コイル1に電流10[A]が流れた瞬間コイル2を貫く磁束はいくらか。

(4)相互誘導の起電力はいくらか



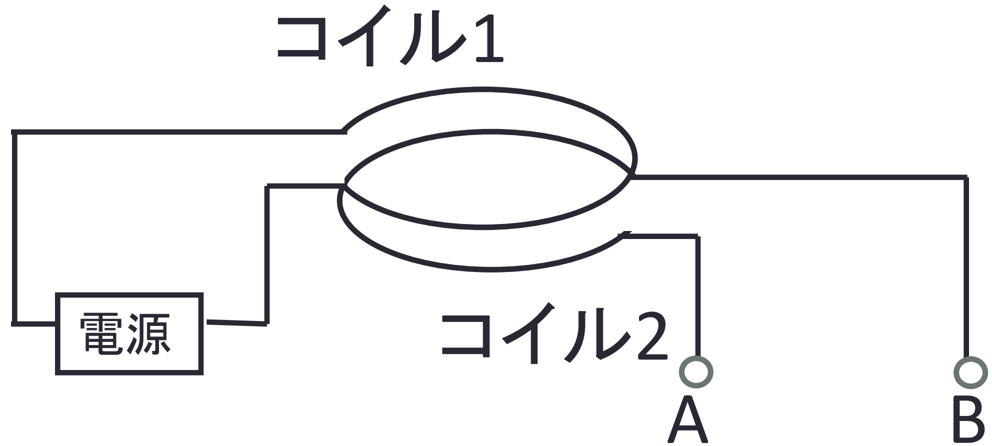
復習2の解答

(1) $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{LI} = 100\ [\mathrm{H}] \times 10\ [\mathrm{A}] = 1000\ [\mathrm{Wb}]$

(2) $\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{\Delta\Phi} / \boldsymbol{\Delta t} = (1000-0)\ [\mathrm{Wb}] / 2\ [\mathrm{s}] = 500\ [\mathrm{V}]$

(3) $\boldsymbol{\Phi_{12}} = \boldsymbol{L_{12}I_1} = 150\ [\mathrm{H}] \times 10\ [\mathrm{A}] = 1500\ [\mathrm{Wb}]$

(4) $\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{\Delta\Phi_{12}} / \boldsymbol{\Delta t} = (1500-0)\ [\mathrm{Wb}] / 2\ [\mathrm{s}] = 750\ [\mathrm{V}]$



今回の授業

5/7　交流回路1（教科書 p.116-118）

- 交流回路

- 抵抗だけの交流回路

- インダクタだけの交流回路

今回の授業

5/7　交流回路1

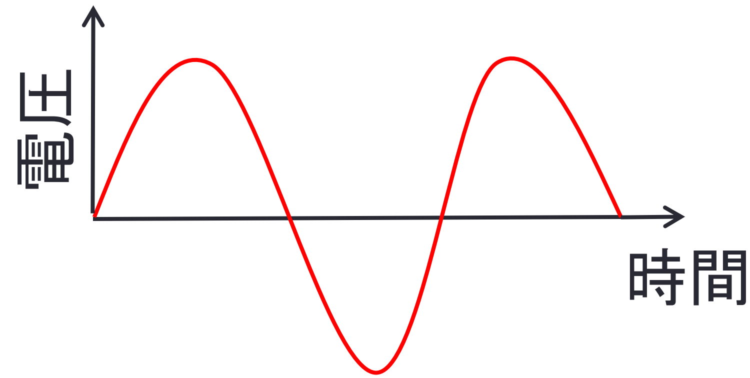
- 交流回路
- 抵抗だけの交流回路
- インダクタだけの交流回路

交流回路

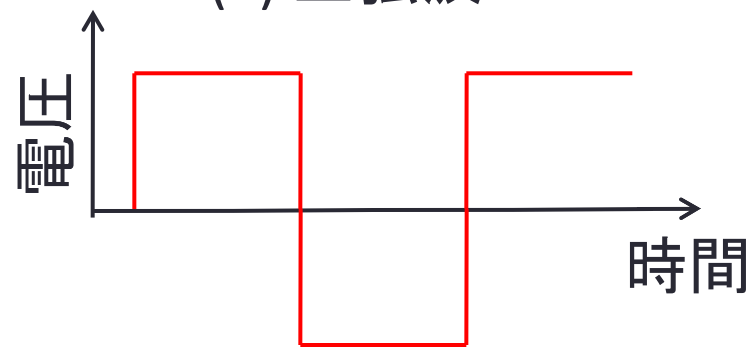
時間的に変化する電圧や電流を交流という

右図はいろいろな交流電圧波形であり、方形波はデジタル出力など、三角波は音の出力などに使われる

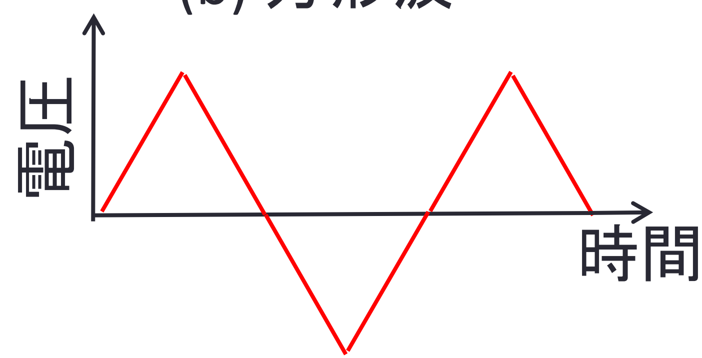
一般的な交流とは正弦波を意味し、すべての波形は正弦波の代数和であらわされる



(a) 正弦波



(b) 方形波



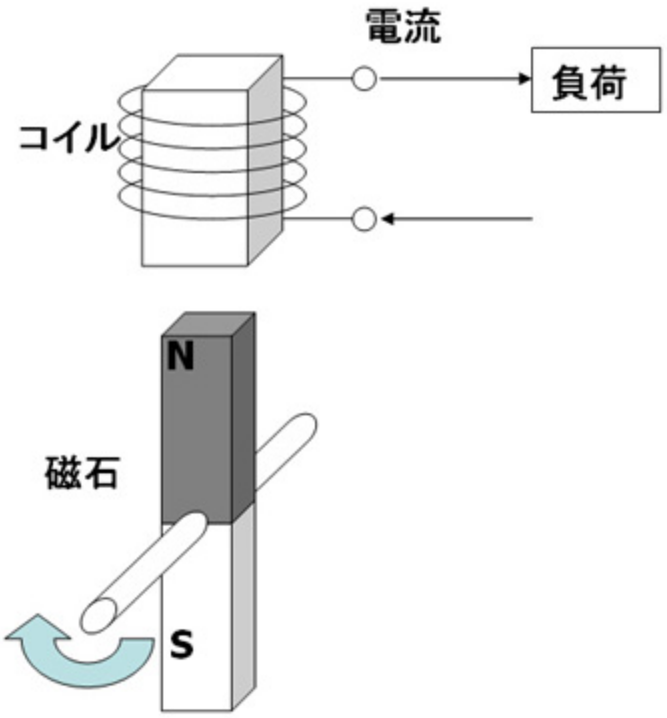
(c) 三角波

交流回路

交流を発生させるためには右図や
教科書図11-35の発電機を用いる

磁石を回転させると、コイルを貫く
磁束が増減し、**誘導起電力**が発生する

磁石のN極とS極が **交互に入れ替わる**
ため、コイルには交流電流が流れ、
負荷には交流電圧がかかる



http://www.mhi.co.jp/products/expand/wind_kouza_0104.html

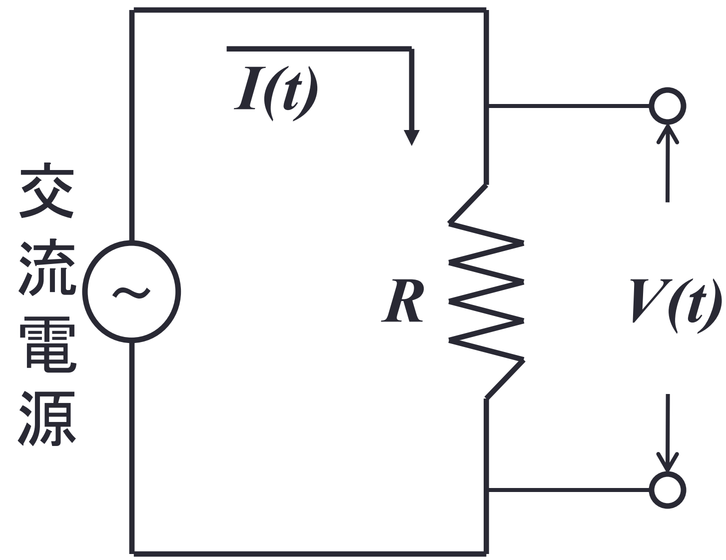
今回の授業

5/7　交流回路1

- 交流回路
- 抵抗だけの交流回路
- インダクタだけの交流回路

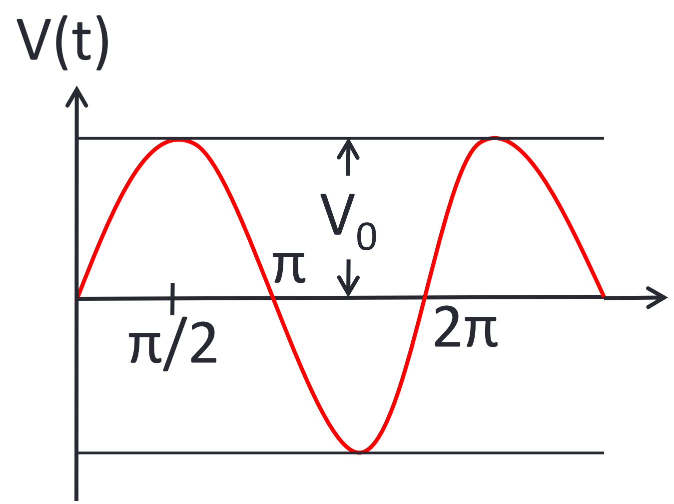
抵抗だけの交流回路

交流発電機によって得られた
交流電源を ~ であらわし、抵抗R
を接続した回路を右図に示す



このときRの両端の電圧$V(t)$は

$$V(t) = V_0 \sin \omega t$$



抵抗Rに流れる電流$I(t)$は
オームの法則より

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t$$

抵抗だけの交流回路　電圧

交流電源の式

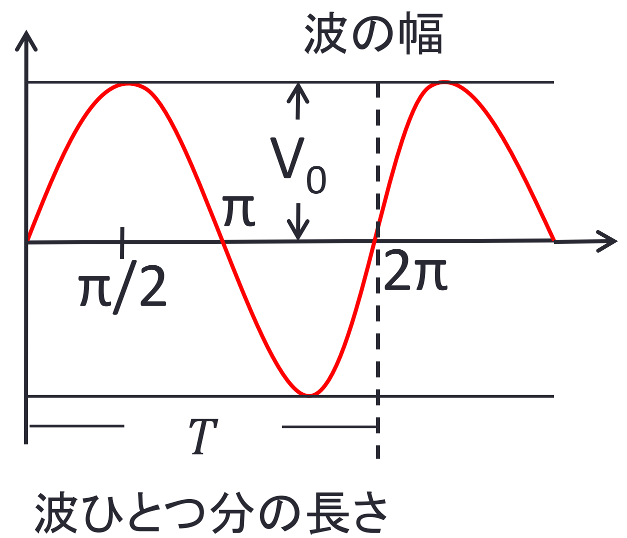
$$V(t) = V_0 \sin \omega t$$

V_0: 振幅
ω: 角周波数

T: 周期 [秒]
f: 周波数 [Hz]

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{1}{T}$$



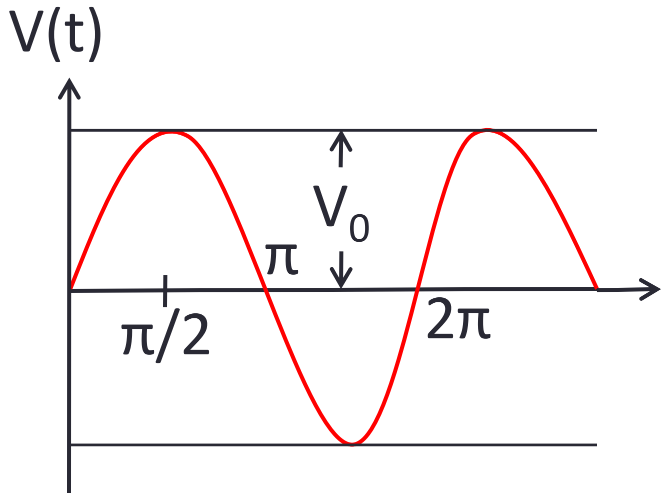
周波数は1秒間に何回振動するか（何個波が入るか）を表している。単位[Hz]（ヘルツ）

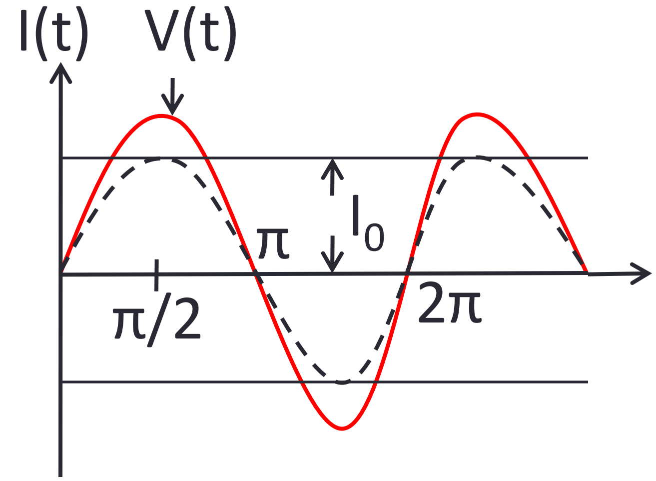
抵抗だけの交流回路　電流

抵抗Rのみを接続した回路では、右図のように電圧(赤線)と電流(破線)の波形は**振幅のみが変わった波形**になる。

周波数が変わったり、左右にずれたりすることはない。

$$電流の振幅 I_0 = \frac{電圧の振幅 V_0}{抵抗 R}$$





抵抗だけの交流回路　消費電力

抵抗のみの交流回路において抵抗で消費される電力（平均電力）は次のようになる。

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)I(t) = \frac{V_0 I_0}{2} = V_e I_e$$

この時のV_eとI_eそれぞれ電流と電圧の実効値と呼ぶ。

$$V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad \text{および} \quad I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71\right)$$

全体としてのエネルギーの大きさを表す場合、振幅（最大値）ではなく、実効値の方が都合が良いため、多くの電化製品では実効値表示が用いられる。

おさらい

交流回路における電圧

$$V(t) = V_0 \sin \omega t \quad \left(\omega = 2\pi f, f = \frac{1}{T}\right)$$

交流回路の抵抗$\boldsymbol{R}$に流れる電流

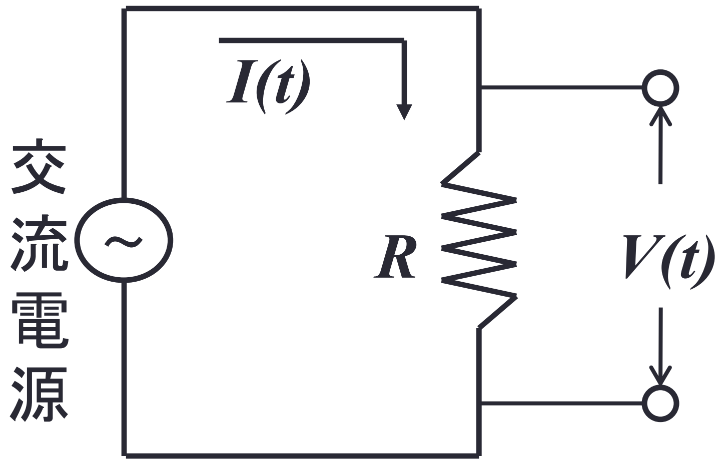
$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t$$

交流電圧および交流電流の実効値

$$V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71\right)$$

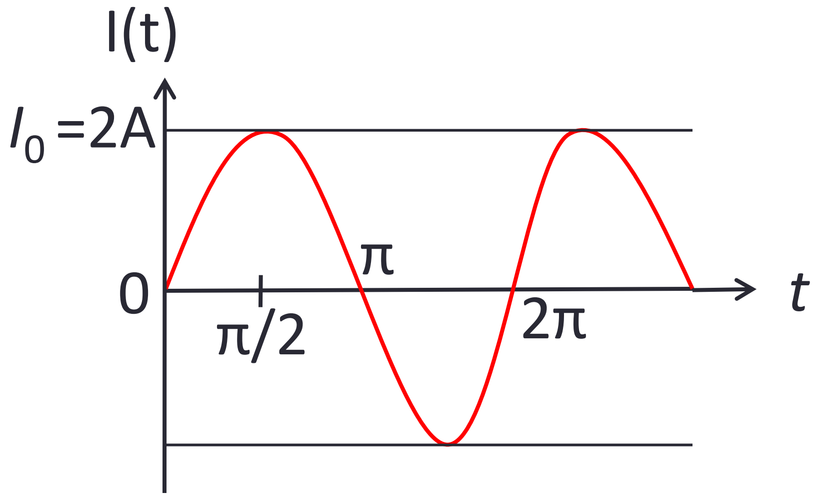
例題1

右図のような回路に、交流電源が接続されている。交流電源の最大値V_0を10[V]、周波数fを1/2π[Hz]とし、抵抗Rを5[Ω]とする。抵抗Rに流れる電流$I(t)$を図示せよ。また時刻が開始点よりπ/6[s]進んだ時の電流の値はいくらか。



例題1解答

解答

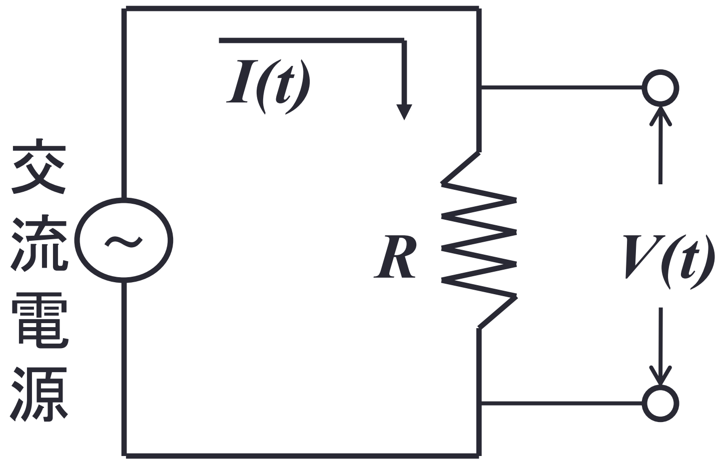


時刻が$\frac{\pi}{6}$のとき、

$$I(t) = \frac{V_0 \sin \omega t}{R} = \frac{10 \sin\left(\frac{2\pi}{2\pi} \times \frac{\pi}{6}\right)}{5} = 2 \times \frac{1}{2} = 1[\mathrm{A}]$$

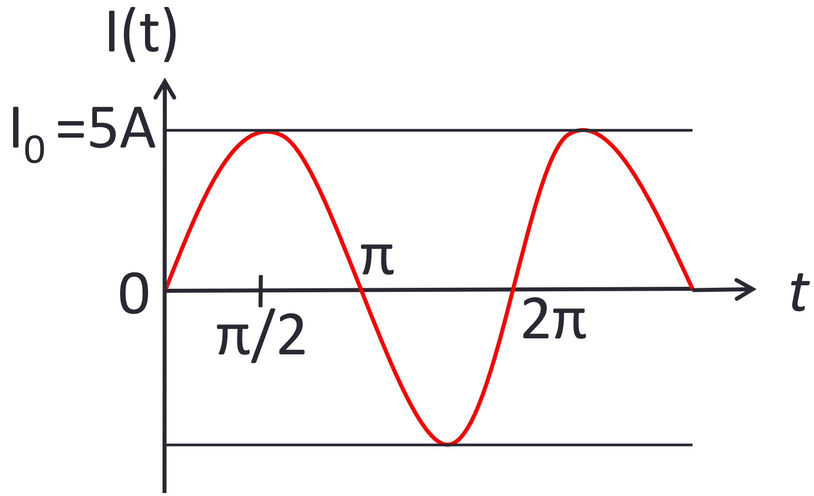
演習1

右図のような回路に、交流電源が接続されている。交流電源の最大値V_0を40[V]、周波数fを1/2π[Hz]とし、抵抗Rを8[Ω]とする。抵抗Rに流れる電流$I(t)$を図示せよ。また時刻が開始点よりπ/6[s]進んだ時の電流の値はいくらか。



演習1解答

解答



時刻が$\frac{\pi}{6}$のとき、

$$I(t) = \frac{V_0 \sin \omega t}{R} = \frac{40 \sin\left(\frac{2\pi}{2\pi} \times \frac{\pi}{6}\right)}{8} = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5[\mathrm{A}]$$

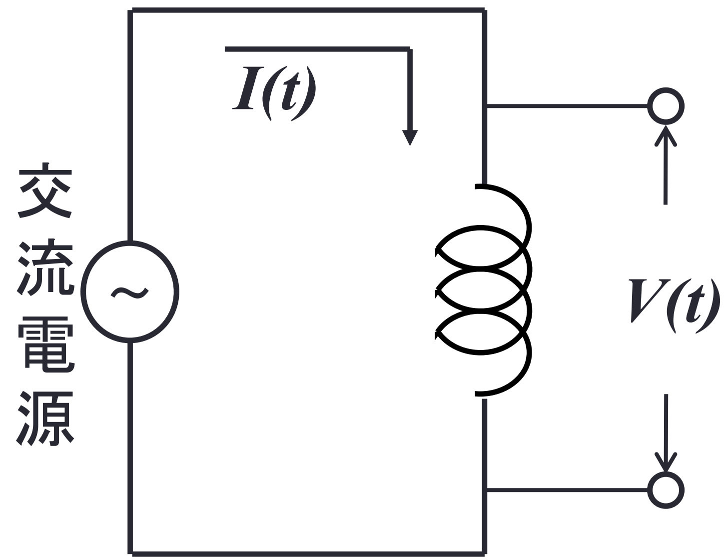
今回の授業

5/7　交流回路1

- 交流回路
- 抵抗だけの交流回路
- インダクタだけの交流回路

インダクタだけの交流回路

右図のように交流電源にインダクタ（コイル）が接続されている



インダクタの抵抗 ⇒ 周波数に依存

$|Z| = \omega L = 2\pi f L$　　L : 自己インダクタンス

|Z|は **インピーダンス** と呼ばれ、交流回路における抵抗のようなものである。

インピーダンスを使って電流の**振幅**を求めることができる。

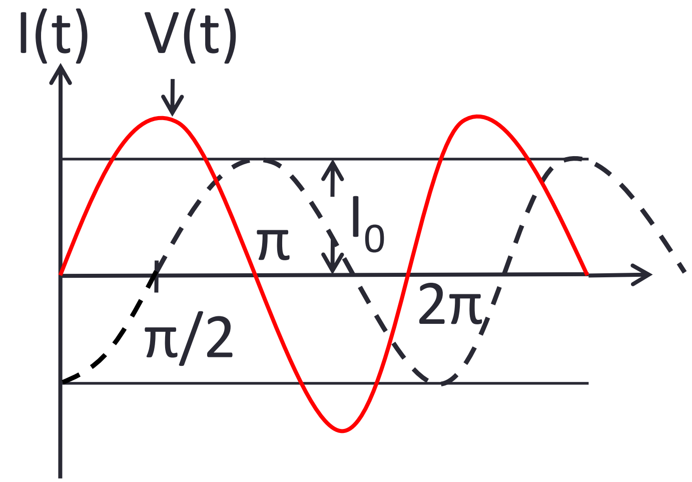
$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|}$$

周波数fが大きくなるとインダクタのインピーダンス$|Z|$は増加する

インダクタだけの交流回路　電流

電圧　$V(t) = V_0 \sin \omega t\ \ (\omega = 2\pi f)$
がインダクタの両端にかかったとき
電流***I(t)***は次のようになる。

$$I(t) = I_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_0}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

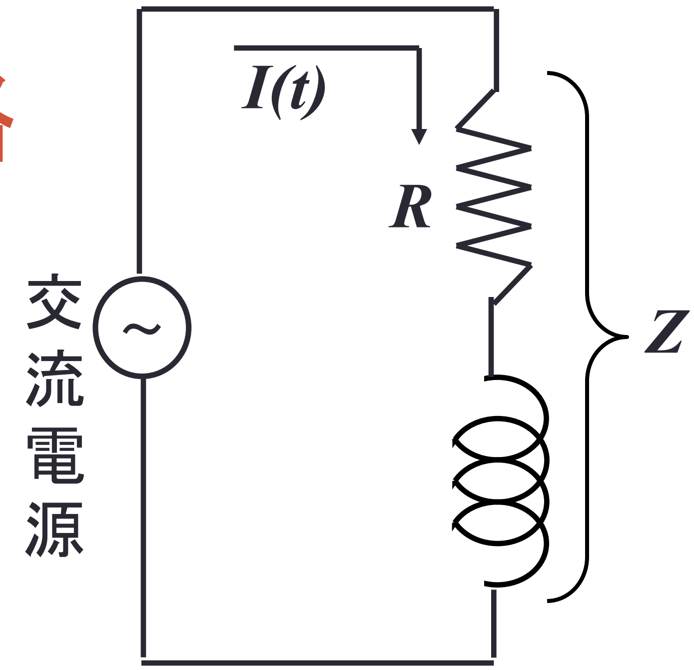


$-\frac{\pi}{2}$は 位相差（左右のずれ）を表している。

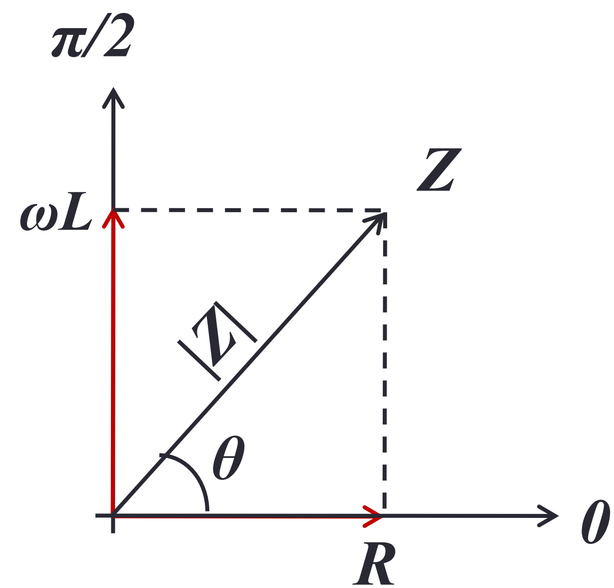
インダクタのみの交流回路の場合、
電流は電圧より**π/2**だけ 位相が遅れる

コイルと抵抗の交流回路

右図のように交流電源に抵抗Rと自己インダクタンスLが接続



この回路におけるインピーダンスは電流と電圧の比$|Z|$と位相差θからなるベクトルとして表される。



$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

コイルと抵抗の交流回路

電源電圧 $V(t) = V_0 \sin\omega t \quad (\omega=2\pi f)$

に対して電流の振幅は次のようになる

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

位相差は次のようになる

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

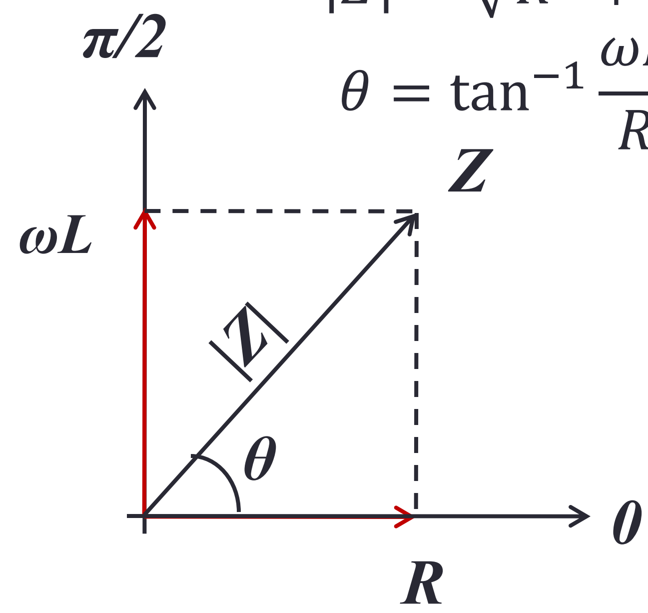
従って、電流は次のようになる

$$I(t) = I_0 sin(\omega t - \theta)$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - Tan^{-1}\frac{\omega L}{R})$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$



おさらい

インダクタのインピーダンスの大きさ$|Z|$

$$|Z| = \omega L = 2\pi f L$$

インダクタに流れる電流$I(t)$

$$I(t) = \frac{V_0}{|Z|}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

抵抗とインダクタの合成インピーダンス

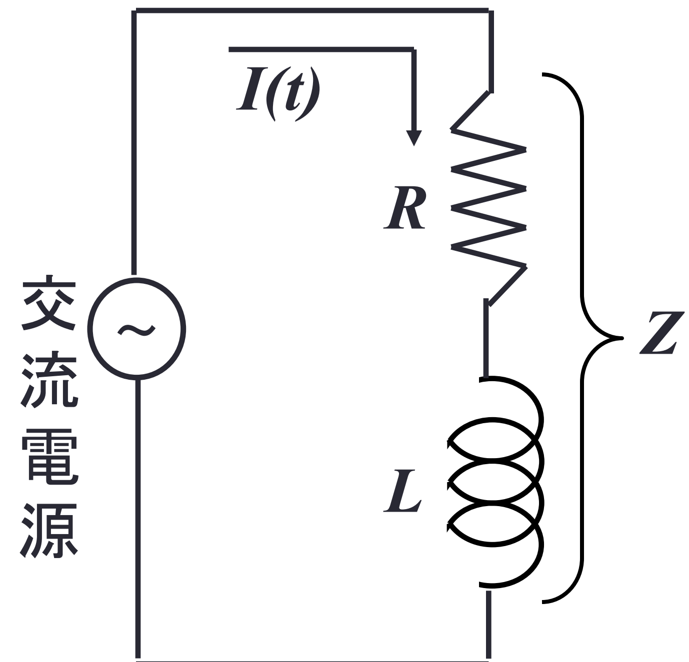
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \qquad \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

抵抗とインダクタに流れる電流

$$I(t) = \frac{V_0}{|Z|}\sin(\omega t - \theta)$$

例題2

右図のように抵抗Rと自己インダクタンスLを交流電源に接続する。
抵抗Rを8 [Ω]自己インダクタンスLを9 [H]とし、交流電源の周波数
fを1/2π [Hz]、最大電圧V_0を50 [V]とする。
回路の合成インピーダンス$|Z|$を求めよ。
（ルートのまま答えて良いこととする）
電流$I(t)$の式を記述せよ。



例題2解答

解答

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + \left(\frac{2\pi}{2\pi} \times 9\right)^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$$

$$I(t) = \frac{V_0 \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

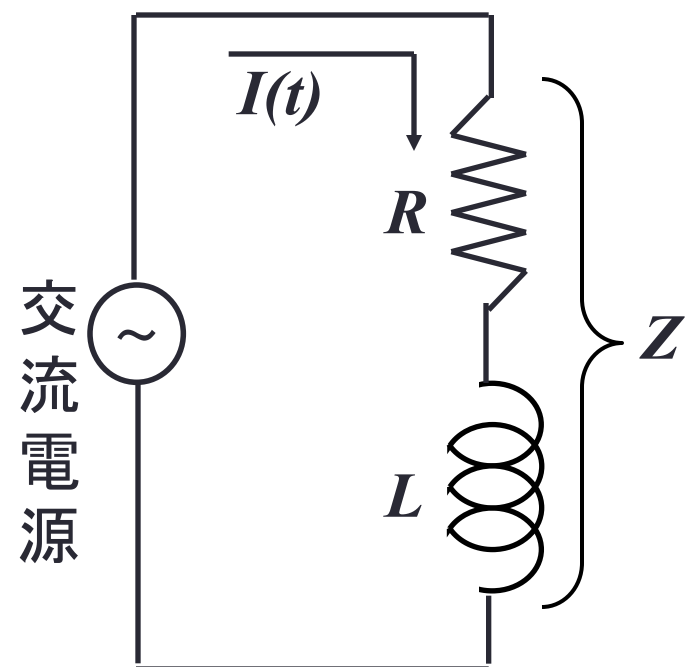
$$= \frac{50 \sin\left(\frac{2\pi}{2\pi} t - \theta\right)}{\sqrt{145}} = \frac{50}{\sqrt{145}} \sin(t - \theta)$$

ただし

$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{\omega L}{R} = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{9}{8}$$

演習2

右図のように抵抗Rと自己インダクタンスLを交流電源に接続する。
抵抗Rを4 [Ω]自己インダクタンスLを3 [H]とし、交流電源の周波数fを1/2π [Hz]、最大電圧V_0を10 [V]とする。
回路の合成インピーダンス$|Z|$を求めよ。
電流$I(t)$はどのようになるか（式で書ける）



演習2解答

解答

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + \left(\frac{2\pi}{2\pi} \times 3\right)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$I(t) = \frac{V_0 \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$= \frac{10 \sin\left(\frac{2\pi}{2\pi} t - \theta\right)}{5} = 2\sin(t - \theta)$$

ただし

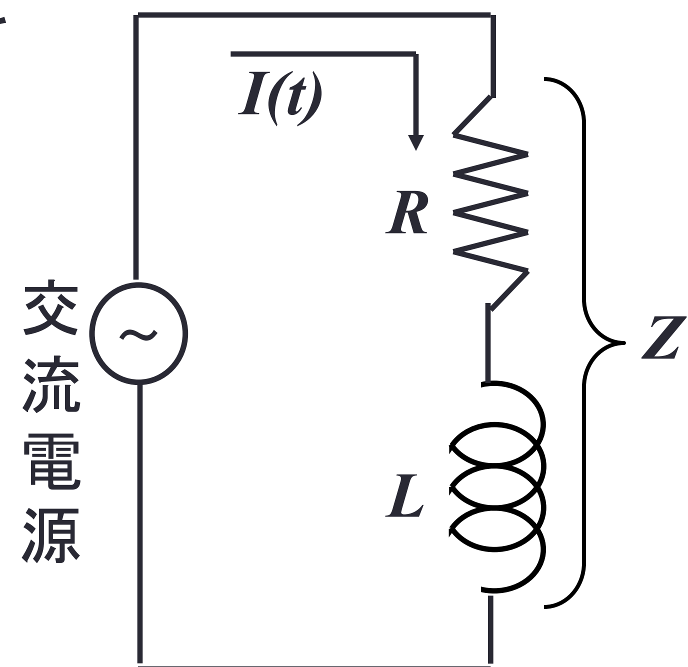
$$\theta = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{\omega L}{R} = \mathrm{Tan}^{-1} \frac{3}{4}$$

練習問題

右図のような回路に、抵抗Rと自己インダクタンスLを交流電源に接続する。(1)回路の合成インピーダンス$|Z|$ (2)電流$I(t)$の式を記述せよ。

① 交流電源の最大値V_0を26[V]、周波数fを1/2π[Hz]、抵抗Rを 5[Ω]、自己インダクタンスLを12[H]

② 交流電源の最大値V_0を25[V]、周波数fを1/2π[Hz]、抵抗Rを4 [Ω]、自己インダクタンスLを3 [H]



練習問題解答

①

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + \left(\frac{2\pi}{2\pi} \times 12\right)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

②

$$I(t) = \frac{V_0 \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{25\sin(\frac{2\pi}{2\pi}t - \theta)}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{25\sin(t - \theta)}{\sqrt{25}} = \frac{25\sin(t - \theta)}{5} = 5\sin(t - \theta)$$

ただし　$\theta = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{\omega L}{R} = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{3}{4}$