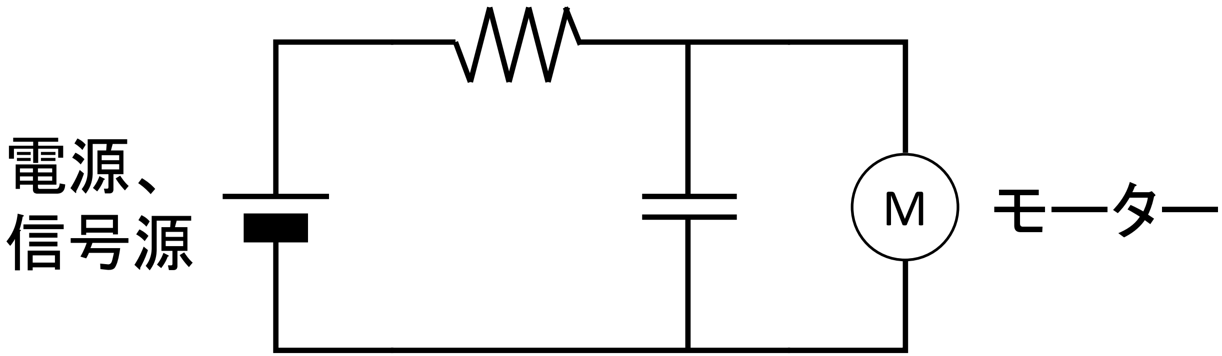
医用工学概論

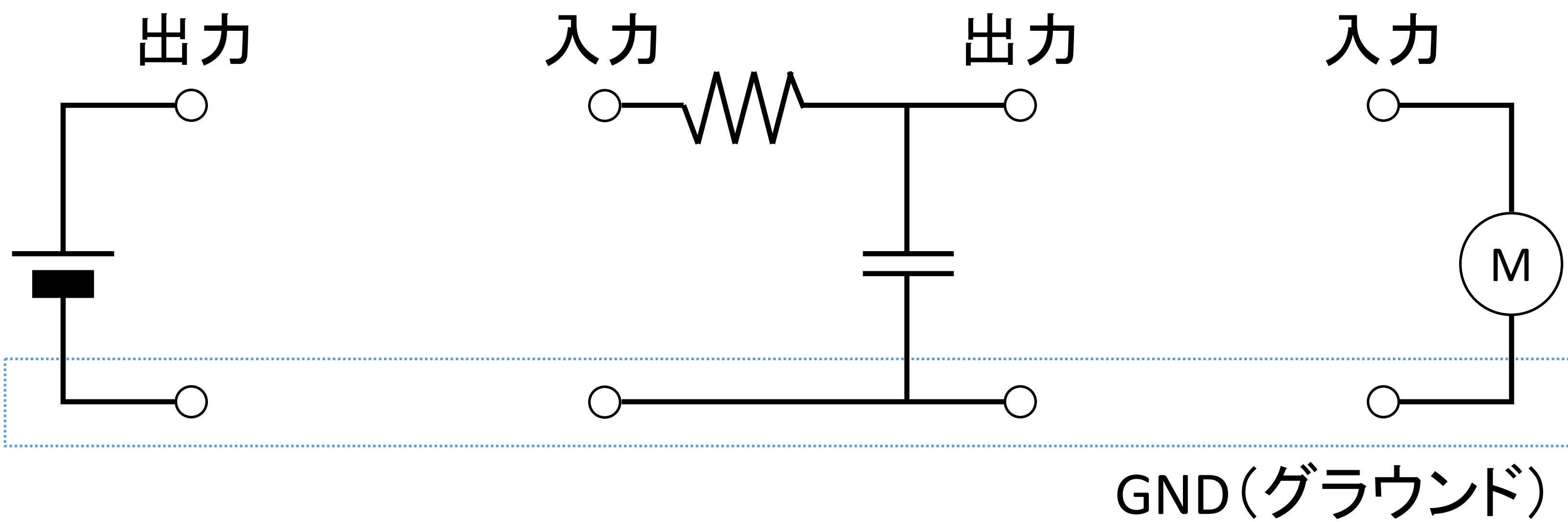
第５回
電気の基礎２（過渡現象）

目次

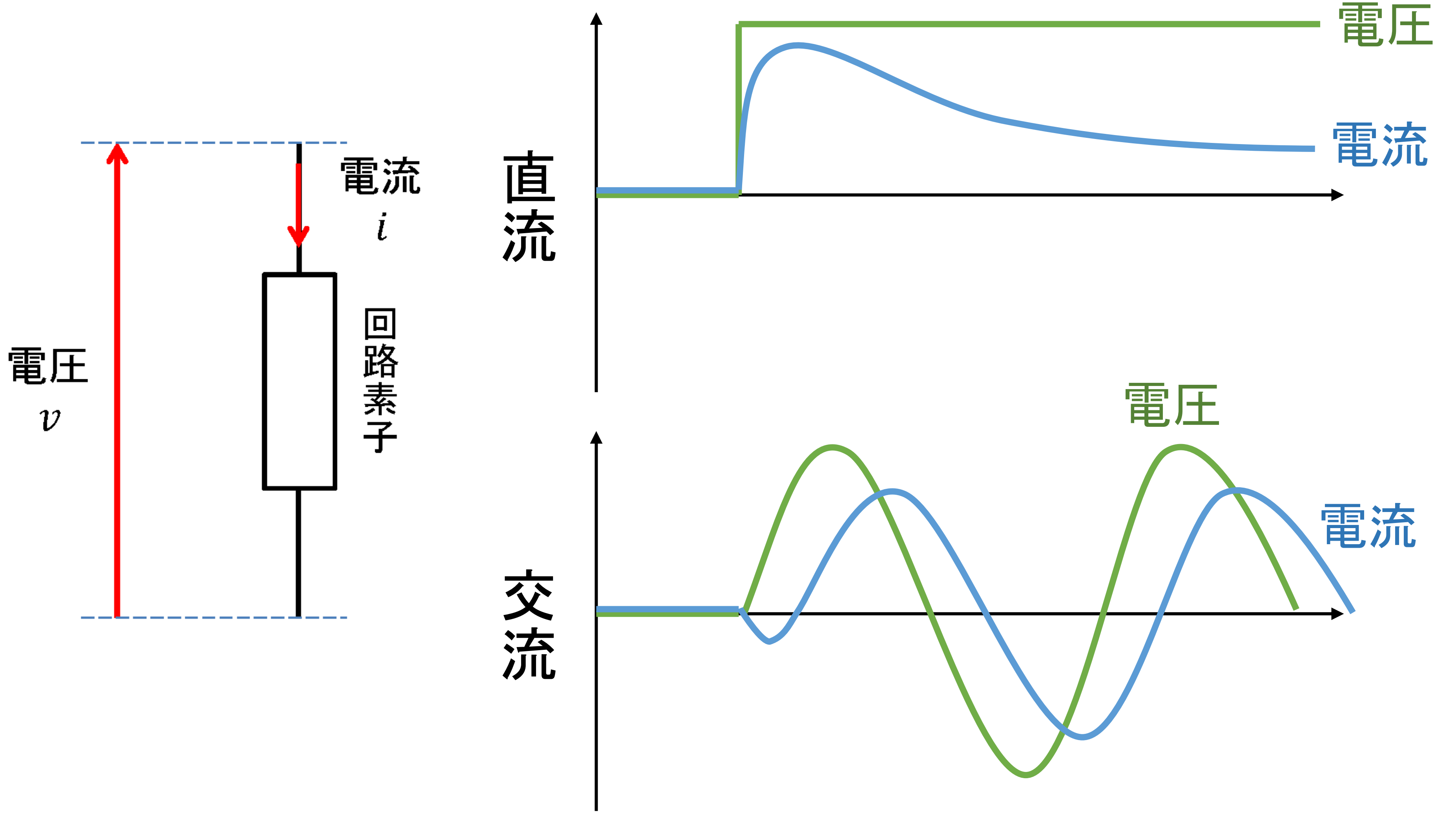
- 電気回路の表現
- 抵抗、インダクタ、コンデンサ
- 過渡現象
- 過渡現象の応用回路

回路の表現





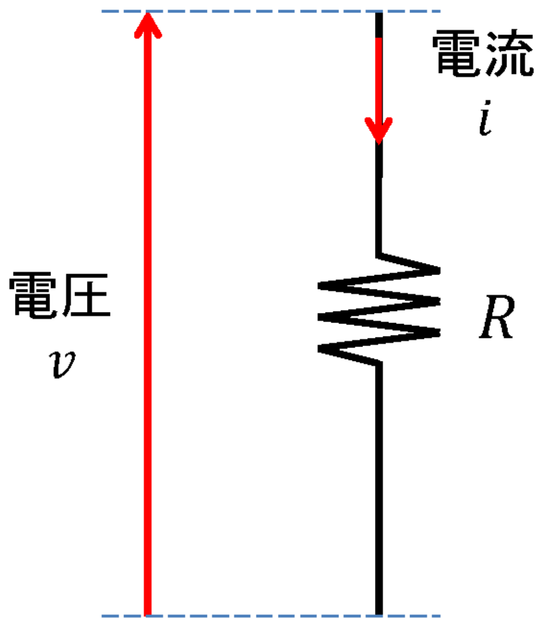
直流/交流での電圧/電流



抵抗

電圧と電流の関係は，　オームの法則　によって決まる．

記号 R で表す
単位 [Ω]（オーム）



$$V = RI$$

電圧

$$v = Ri$$

電流

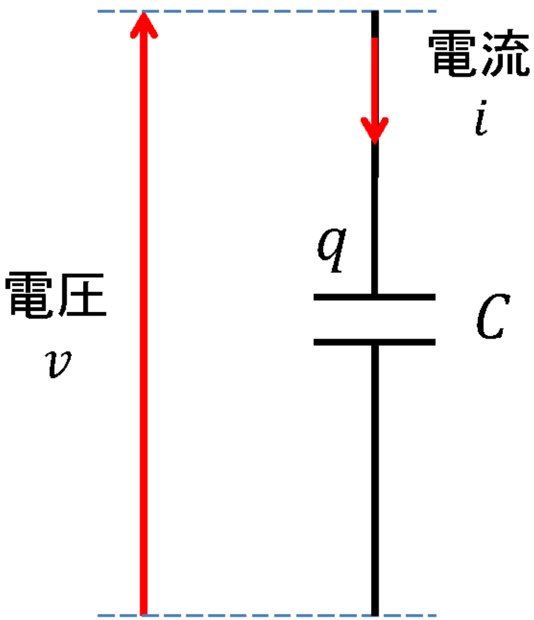
$$i = \frac{1}{R}v \qquad (i = Gv)$$

電気抵抗の逆数

コンデンサ

電圧と電流の関係は，　**誘電分極の式**　によって決まる．

記号 C で表す
単位 [F]（ファラド）



$$Q = CV$$

電圧

$$v = \frac{1}{C}\int i dt$$

電流

$$i = C\frac{dV}{dt}$$

電流は電荷の流れ

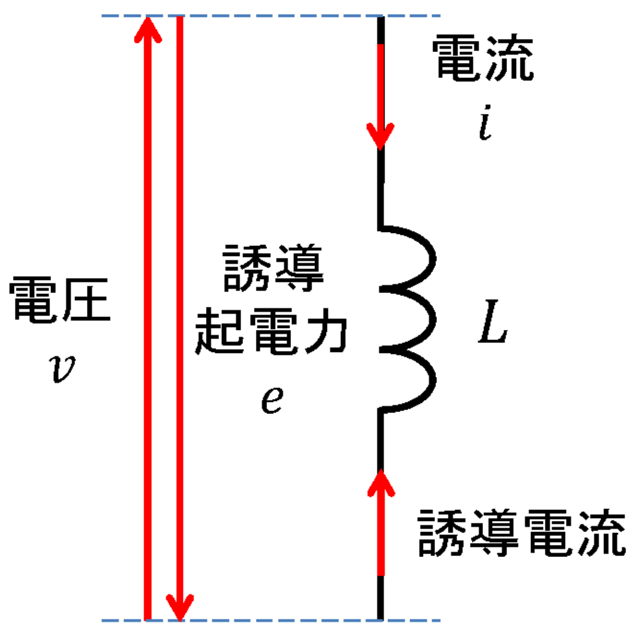
$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$q = \int i dt$$

インダクタ

電圧と電流の関係は，　電磁誘導の法則　によって決まる．

記号 L で表す
単位 [H]（ヘンリー）



$$\phi = Li$$

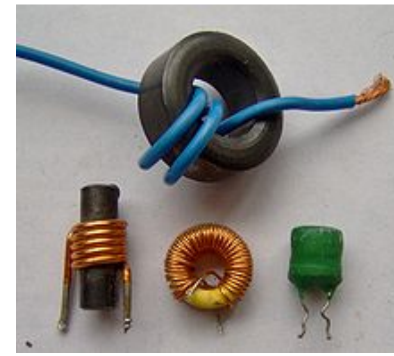
$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

電圧

$$v = L\frac{di}{dt}$$

電流

$$i = \frac{1}{L}\int v\,dt$$



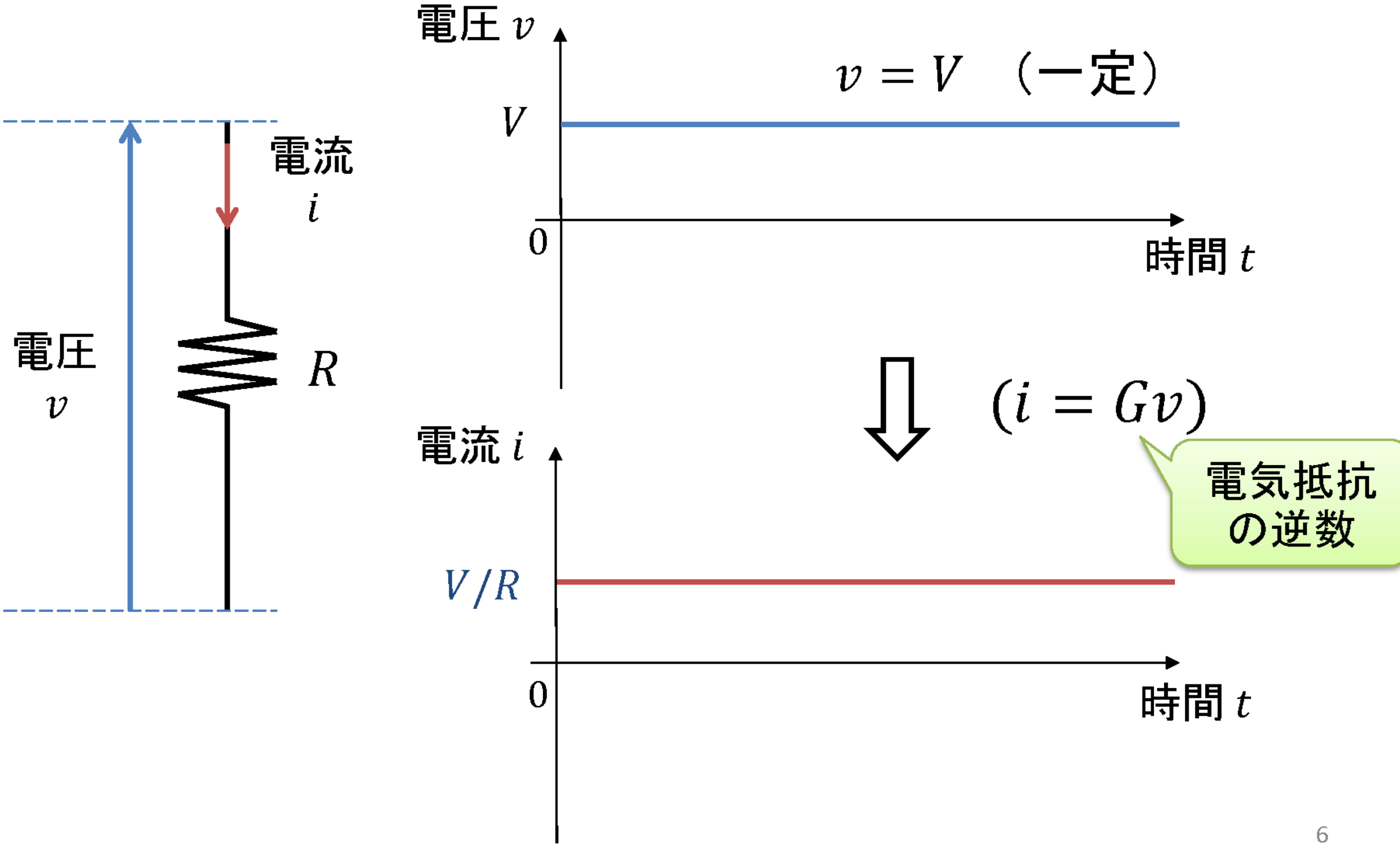
コイルの作る磁界を打ち消す向きに誘導起電力が発生する．

$$v = -e$$

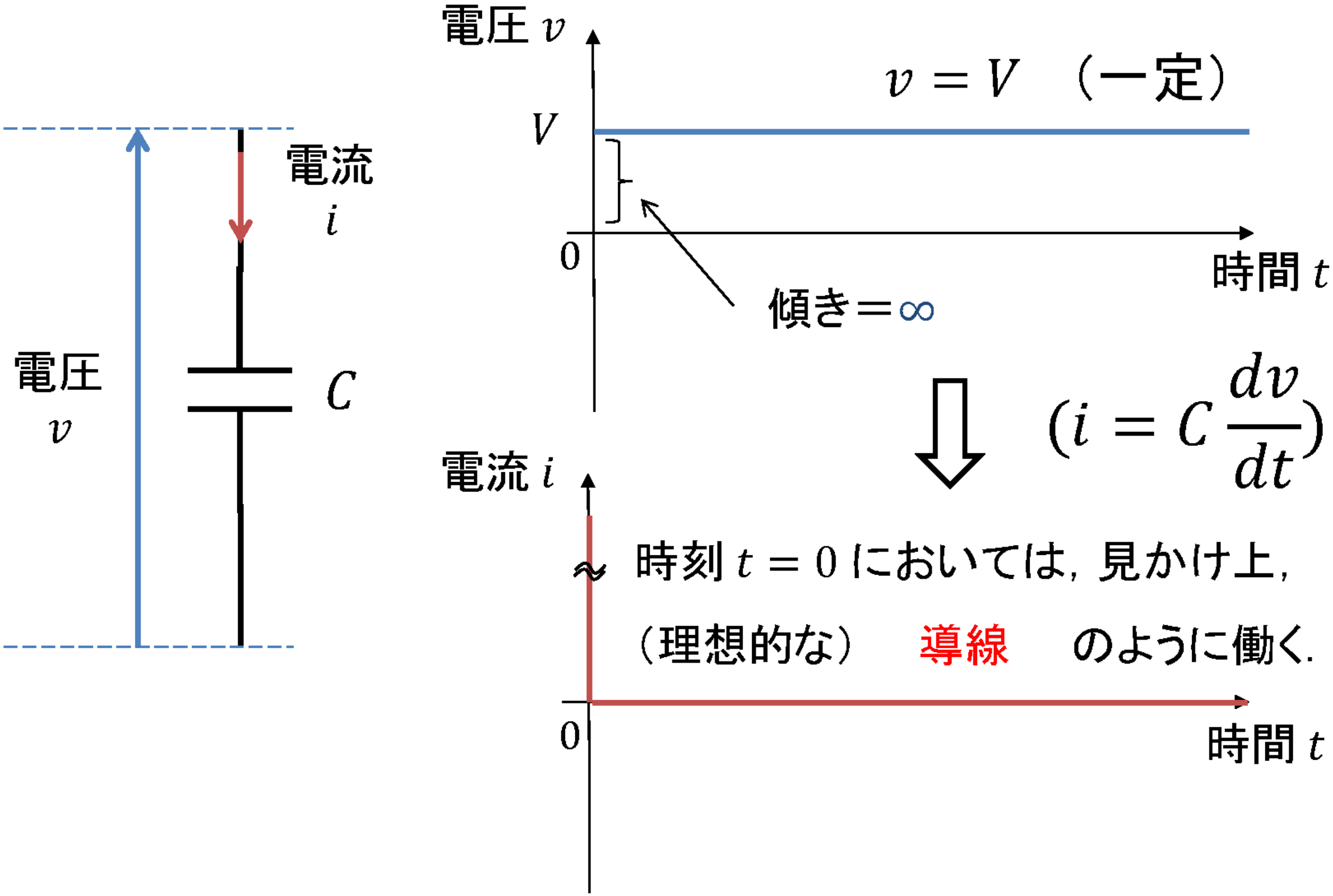
※インダクタンス：コイルなどにおいて電流の変化が誘導起電力となって現れる性質

直流回路におけるRLCの性質

抵抗



コンデンサ

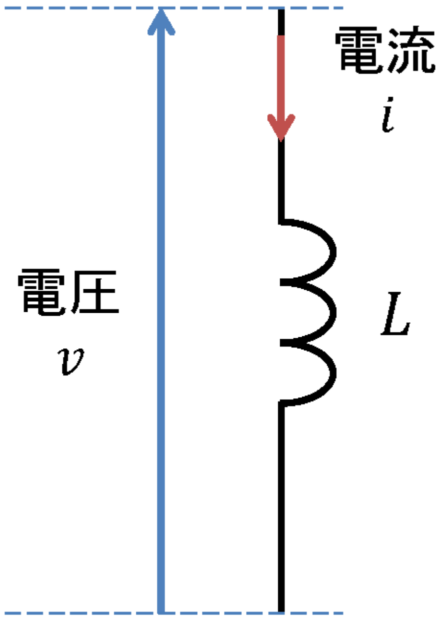


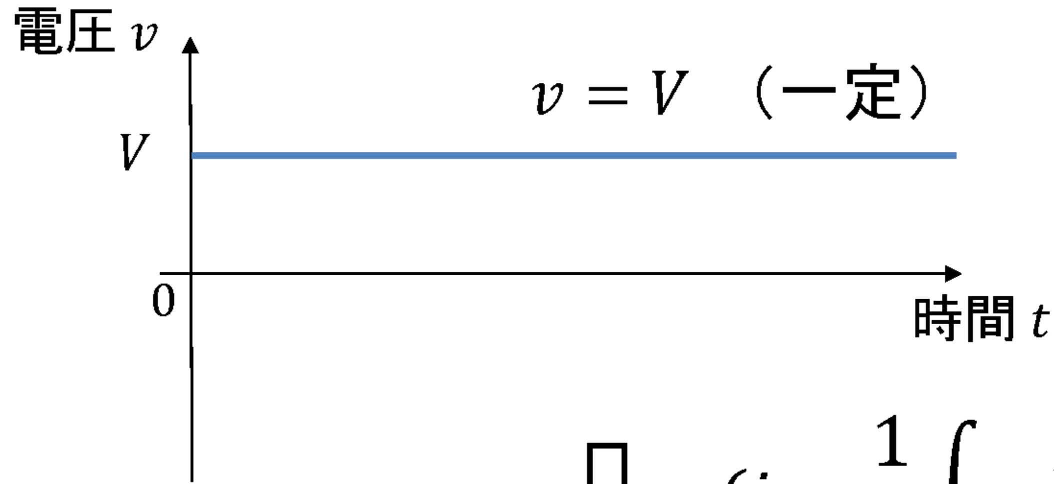
$$(i = C\frac{dv}{dt})$$

時刻 $t = 0$ においては，見かけ上，

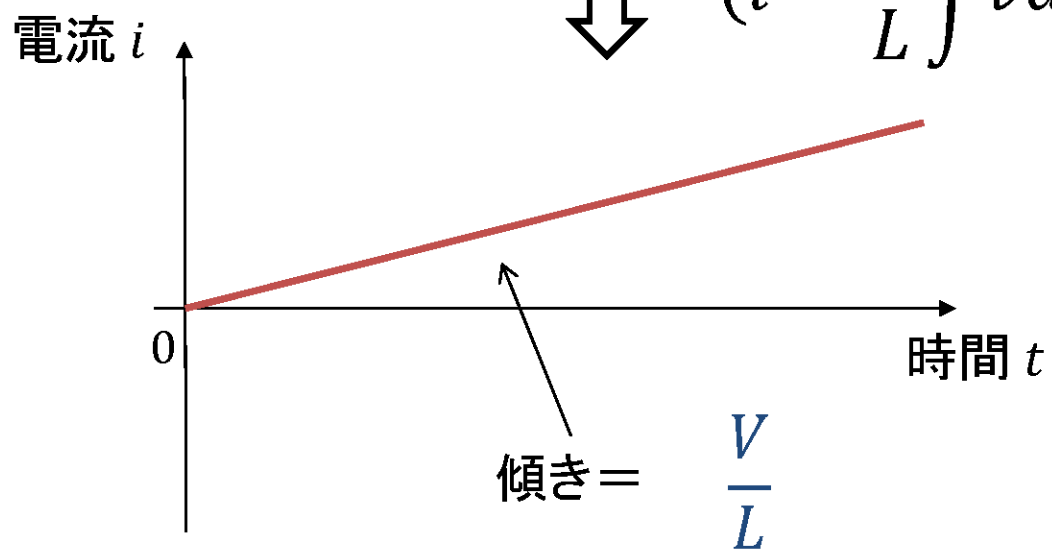
（理想的な） **導線** のように働く.

インダクタ





$$\Downarrow \quad \left(i = \frac{1}{L}\int v\,dt\right)$$



おさらい

・抵抗 R ： 単位[Ω（ オーム ）]

I = V / R（オームの法則）

・コンデンサ（キャパシタ）C ： 単位[F（ ファラド ）]

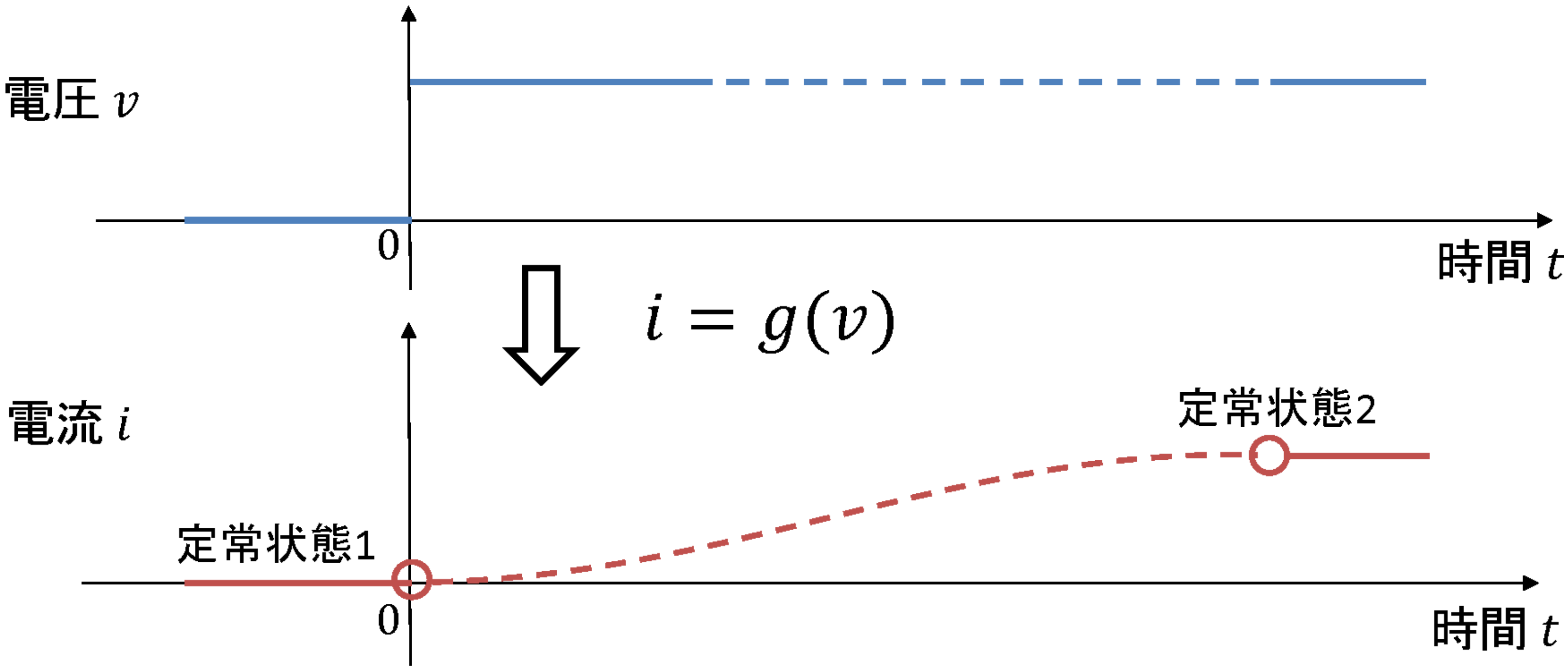
I = 電圧の 微分（電圧に時間変化があるとき、電流を流す。直流電流は 通さない 。）

・インダクタ（コイル）L ： 単位[H（ヘンリー）]

I = 電圧の 積分（電圧を加えた時間に応じて電流が流れる。）

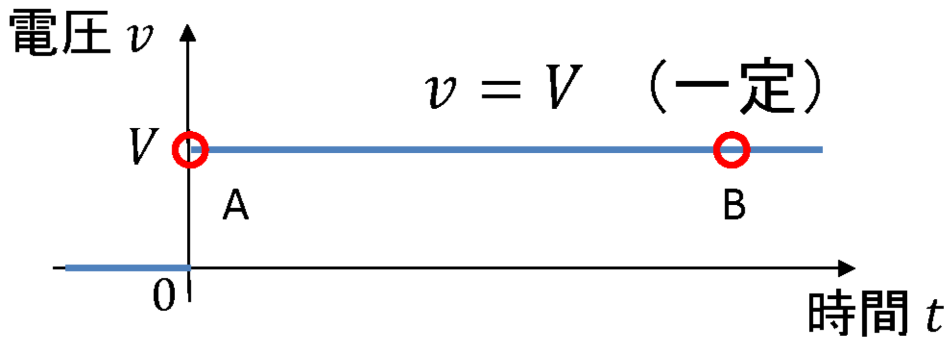
過渡現象

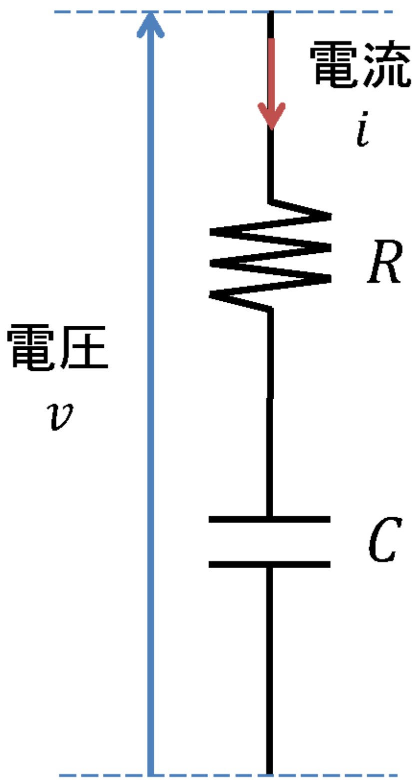
ある定常状態（安定な状態）から別の定常状態に移る現象



どのように変化するかを調べる ⟺ 微分方程式を解く

C-R 結合回路





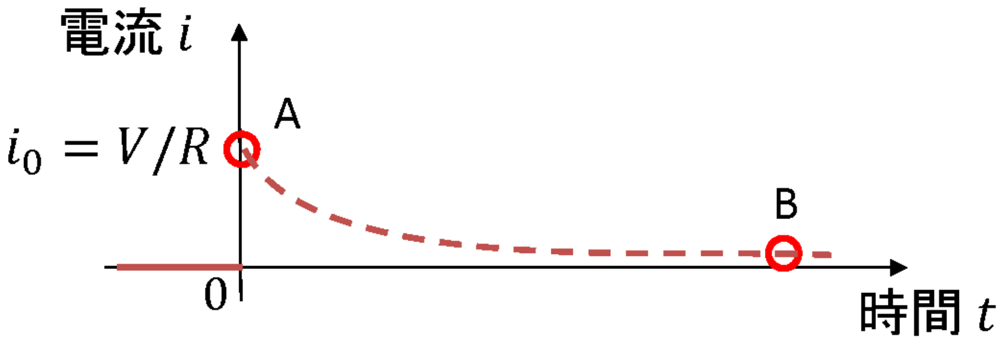
A 見かけ上，抵抗のみに電流が流れる．

$$i\Big|_{t=0} = \frac{V}{R}$$

B 十分に時間が経てば，電流は流れなくなる．

$$i\Big|_{t\gg 0} \approx 0$$

C-R 結合回路



$$\frac{dv}{dt} = R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i$$

$$\left(v = Ri + \frac{1}{C}\int idt\right)$$

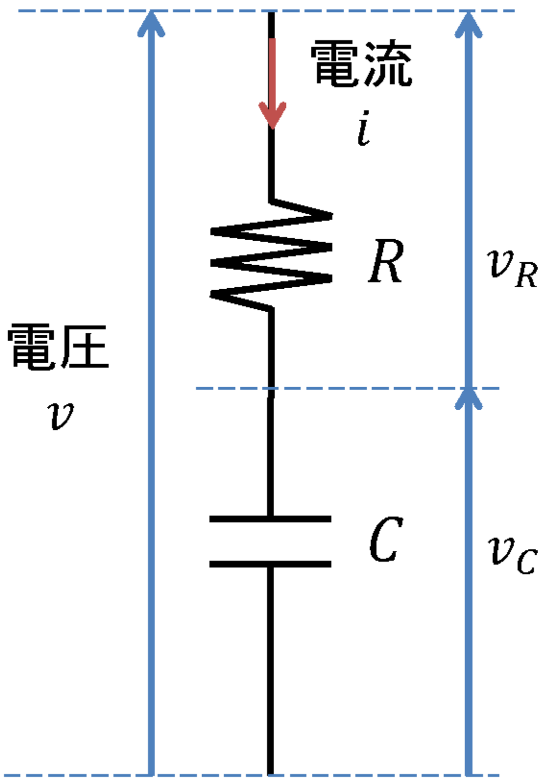
直列接続だから，
流れる電流は同じ

$v = V$ だから，　$\frac{dv}{dt} = 0$.　⇨　$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{CR}i$$

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{CR}}$$

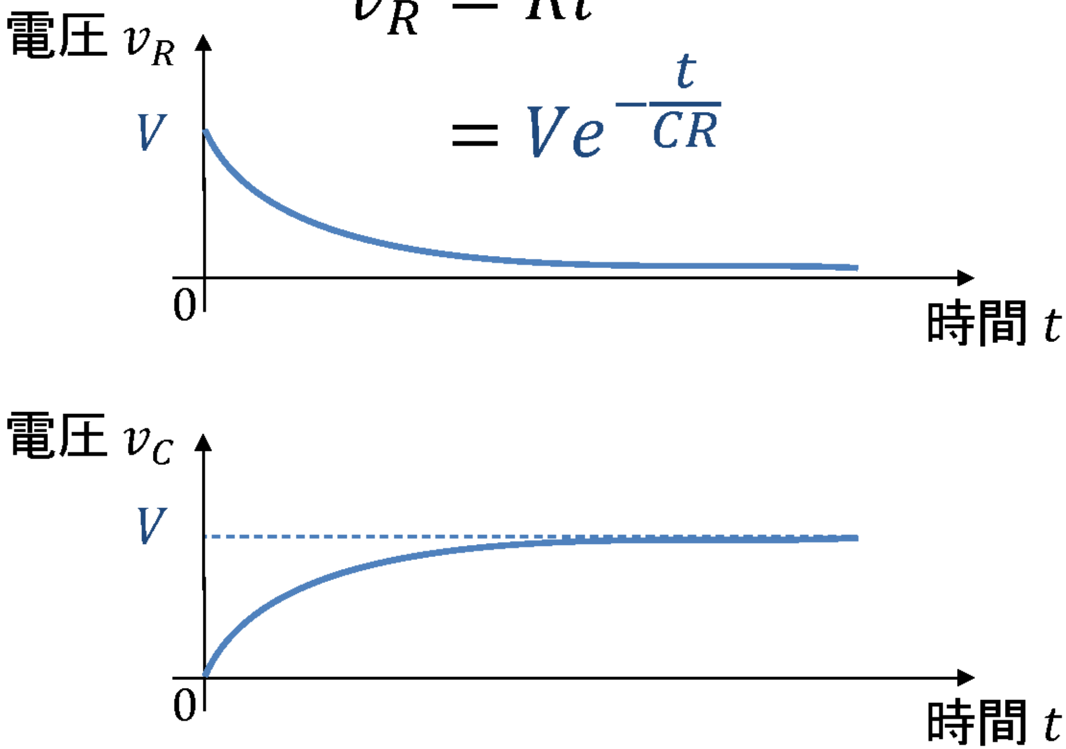
参照）補助資料（数学）

C-R 結合回路



$$v_R = Ri$$

$$= Ve^{-\frac{t}{CR}}$$



$$v_C = V - Ri$$

$$= V\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

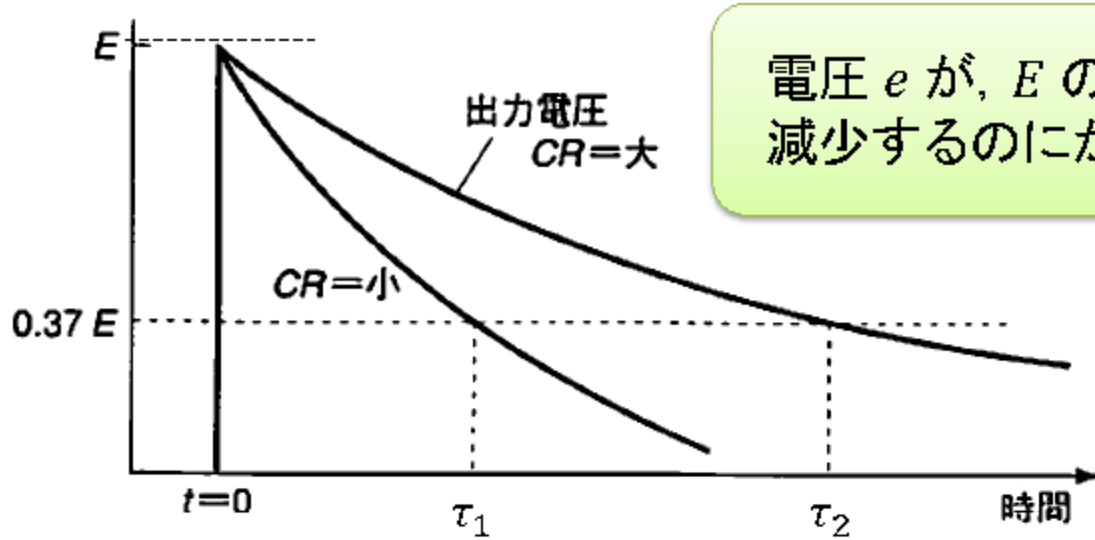
時定数

過渡現象の　変化にかかる時間　を特徴づける指標

$$e = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$ ← CR結合回路では，$\tau = CR$.

自然対数の底
$e \approx 2.72$

$t = \tau$ の時
$e^{-1} \approx 0.37$

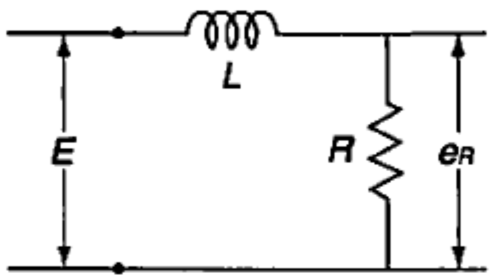


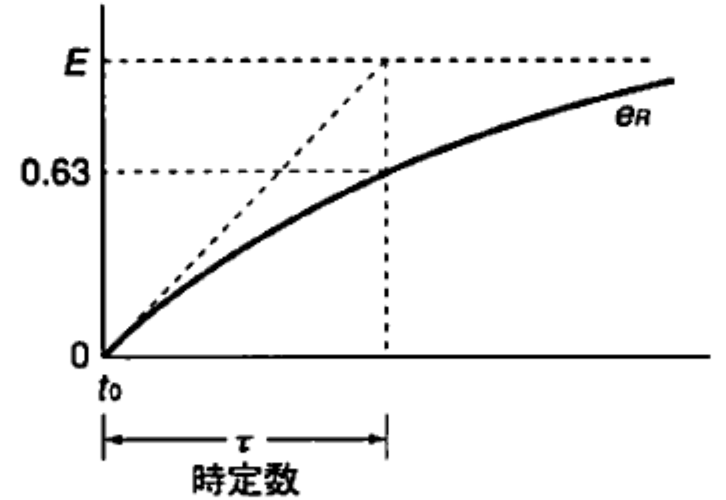
電圧 e が，E の約37%まで減少するのにかかる時間

時定数 $\tau = CR$ の単位　$[\Omega\mathrm{F}] = \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}\right] = \left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{A}}\right] = [\mathrm{s}]$

第2章 p.51 図2-41

L-R 結合回路





$$E = Ri + L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} - \frac{R}{L}i \quad \Leftrightarrow \quad i = i_0\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$$

時定数 $\tau = L/R$ の単位　$[\mathrm{H}/\Omega] = \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A/s}}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}\right] = \left[\frac{1}{1/\mathrm{s}}\right] = [\mathrm{s}]$

第2章 p.52 図2-44

おさらい

過渡現象：　ある状態から別の状態に変化する過程

RC直列回路：

　スイッチを入れた瞬間：　I = E/R で計算される電流が流れる

　十分に時間が経過：　電流は0（流れない）

RL直列回路：

　スイッチを入れた瞬間：　電流は0（流れない）

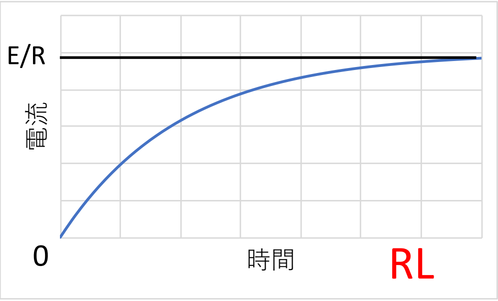
　十分に時間が経過：　I = E/R で計算される電流が流れる

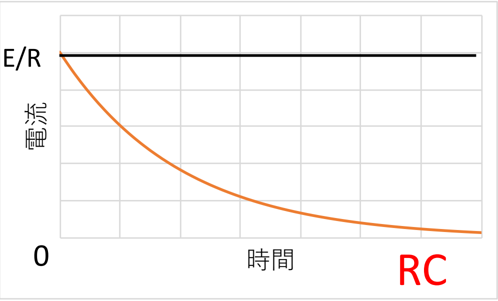
時定数：　過渡現象における、状態変化の早さを表す。単位：秒

　（具体的には、63% 変化が完了するまでの秒数を表す。）

　RC直列回路: τ = RC

　RL直列回路: τ = L/R

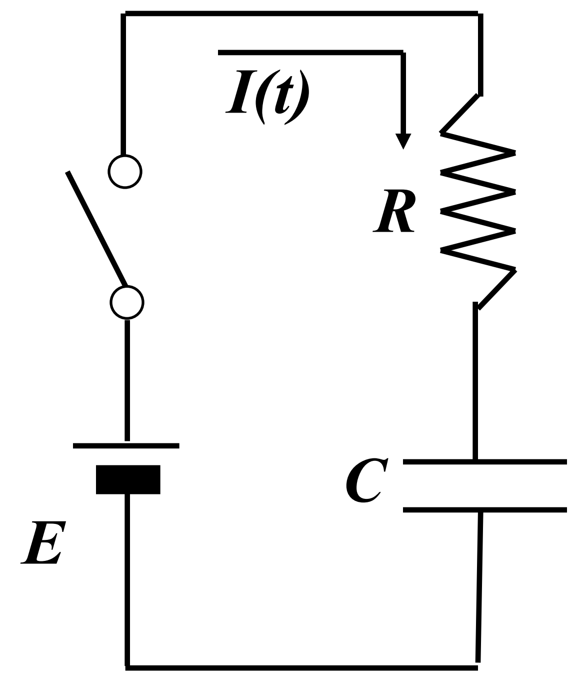




練習問題1

電池の起電力E=32 [V]、抵抗R=4 [Ω]

コンデンサの静電容量C=5 [F]



(1)時定数τの値を求めよ。

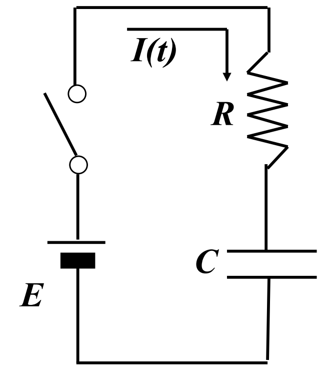
(2)抵抗に加わる電圧、電流のグラフを描け。グラフには電圧、電流の最大値、時定数、時定数の時の電圧、電流の値を示せ。

練習問題1　解答

E=32 [V]

R=4 [Ω]

C=5 [F]



(1)時定数τの値を求めよ。

$$\color{red}{\tau = CR} = 5\times 4 = 20\ [\mathrm{s}]$$

(2) 電圧、電流のグラフ

$$v(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

電圧

$t = 0$の時抵抗に加わる電圧は$E[V]$

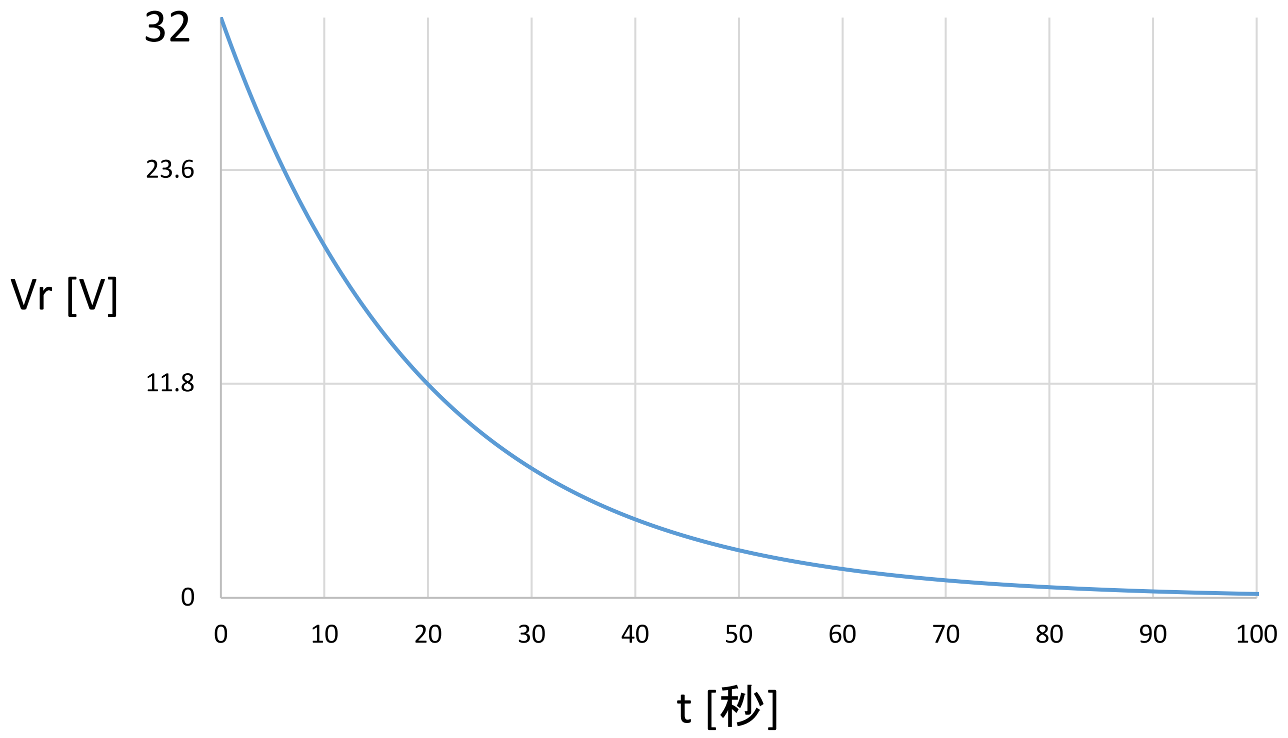
$t \to \infty$の時、抵抗に加わる電圧は$0[V]$

電流

$t = 0$の時　$i(t) = \dfrac{E}{R}$　　$t \to \infty$の時　$i(t) = 0$

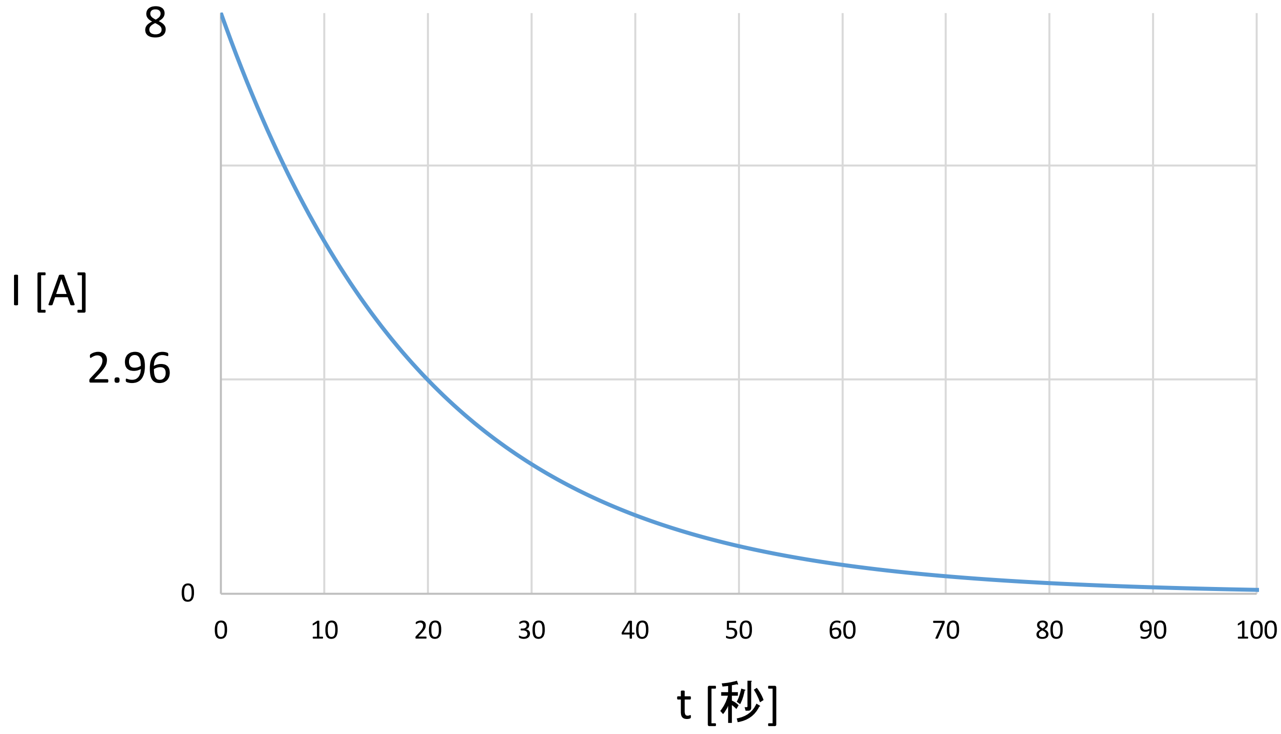
練習問題1　解答

$$\tau = 20, \qquad v(\tau) = 32\times 0.37 = 11.84$$



練習問題1　解答

$$\tau = 20, \qquad i(\tau) = \frac{11.84}{R} = \frac{11.84}{4} = 2.96$$



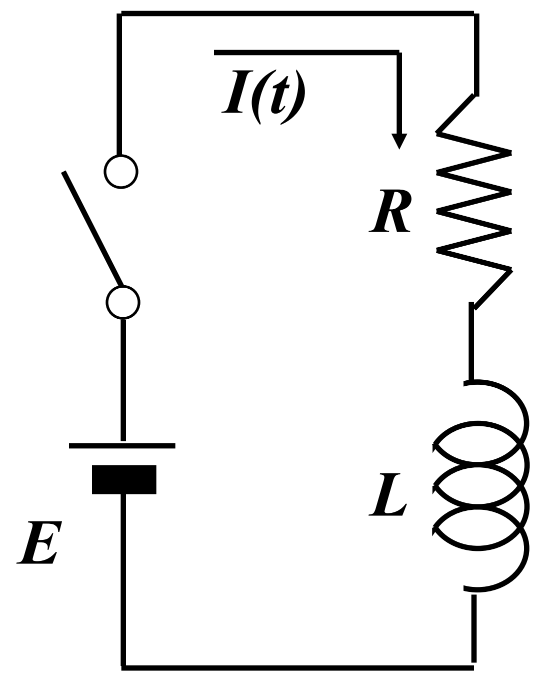
練習問題2

電池の起電力E=20 [V]、抵抗R=5 [Ω]

コイルの自己インダクタンスL=15 [H]

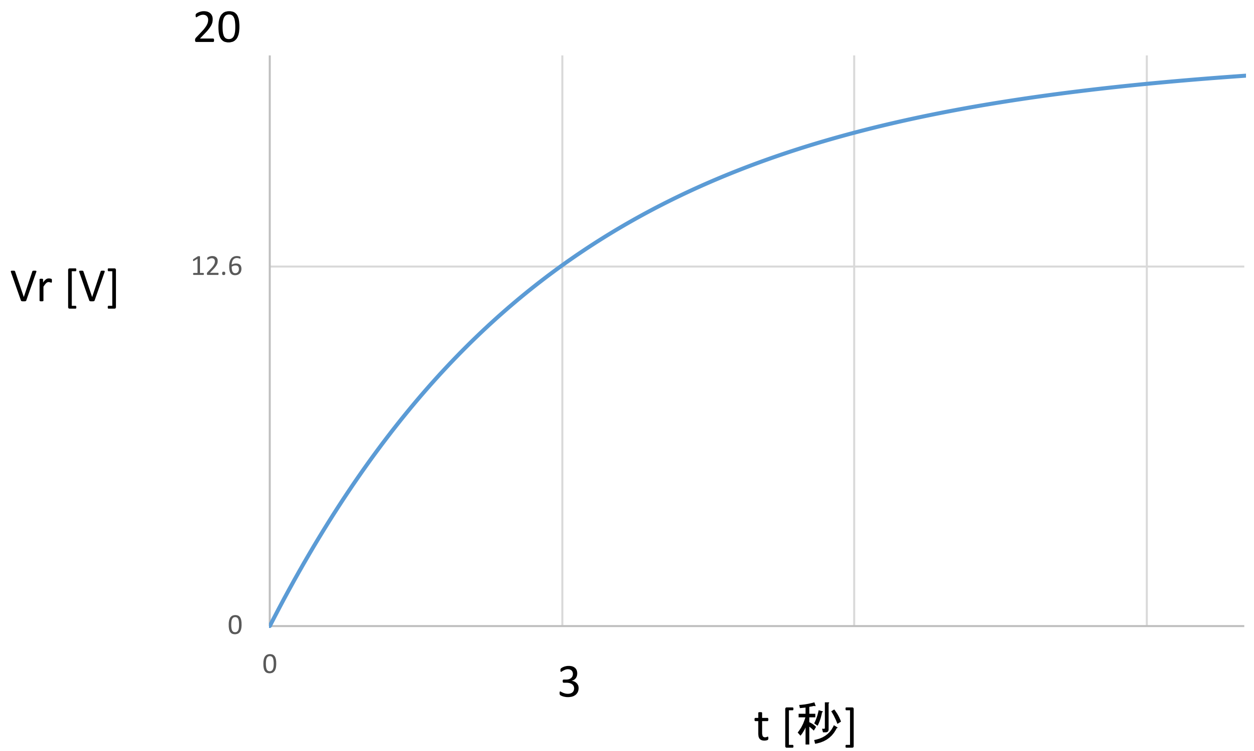
(1)時定数τの値を求めよ。

(2)抵抗に加わる電圧、電流のグラフを描け。グラフには電圧、電流の最大値、時定数、時定数の時の電圧、電流の値を示せ。



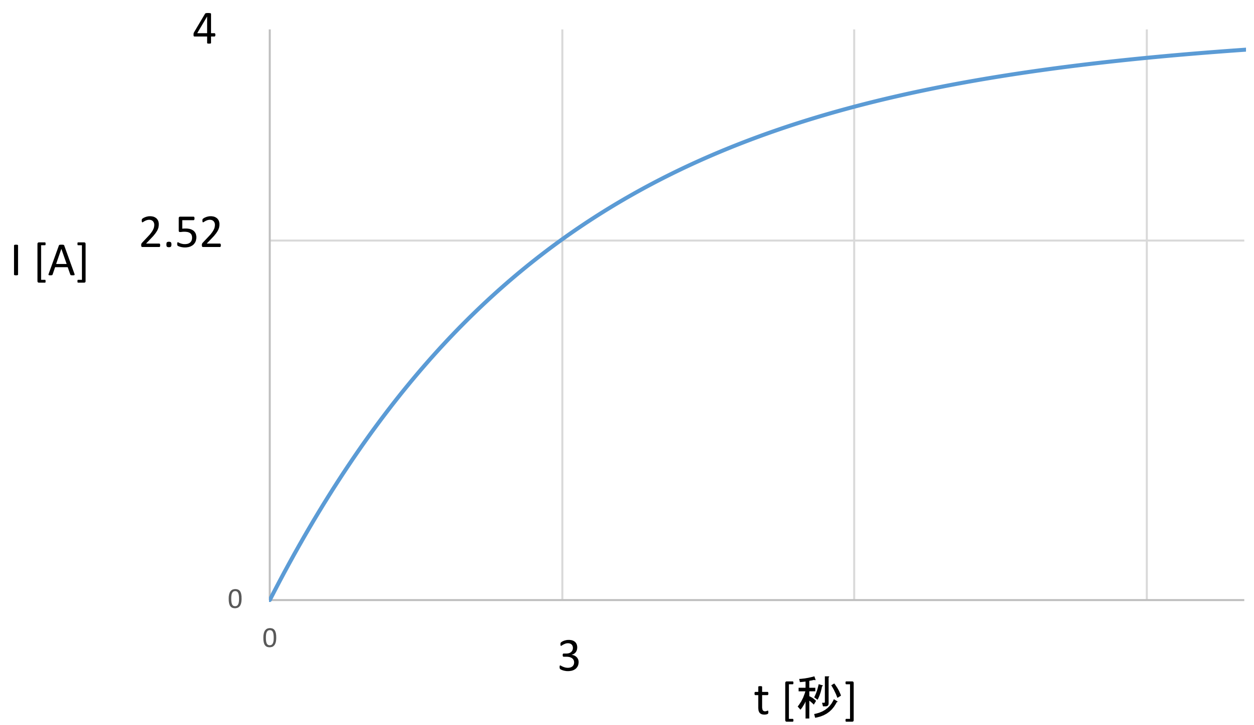
練習問題2　解答

$$\tau = \frac{L}{R} = 3, \qquad v(\tau) = 20 \times 0.63 = 12.6$$



練習問題2　解答

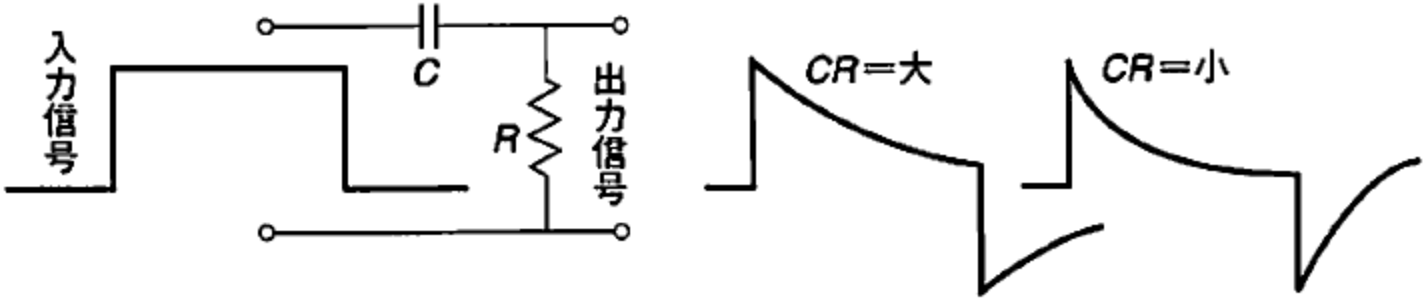
$$\tau = \frac{L}{R} = 3, \qquad i(\tau) = 4 \times 0.63 = 2.52$$



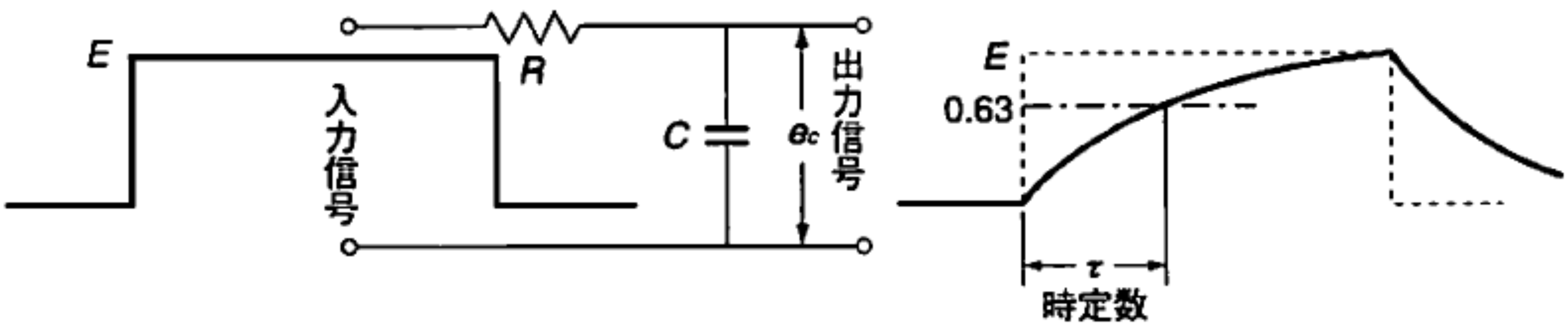
過渡現象の応用回路

微分回路･積分回路

微分回路　　入力信号の　変化分　を出力信号に変換する.



積分回路　　入力信号の　累積分　を出力信号に変換する.

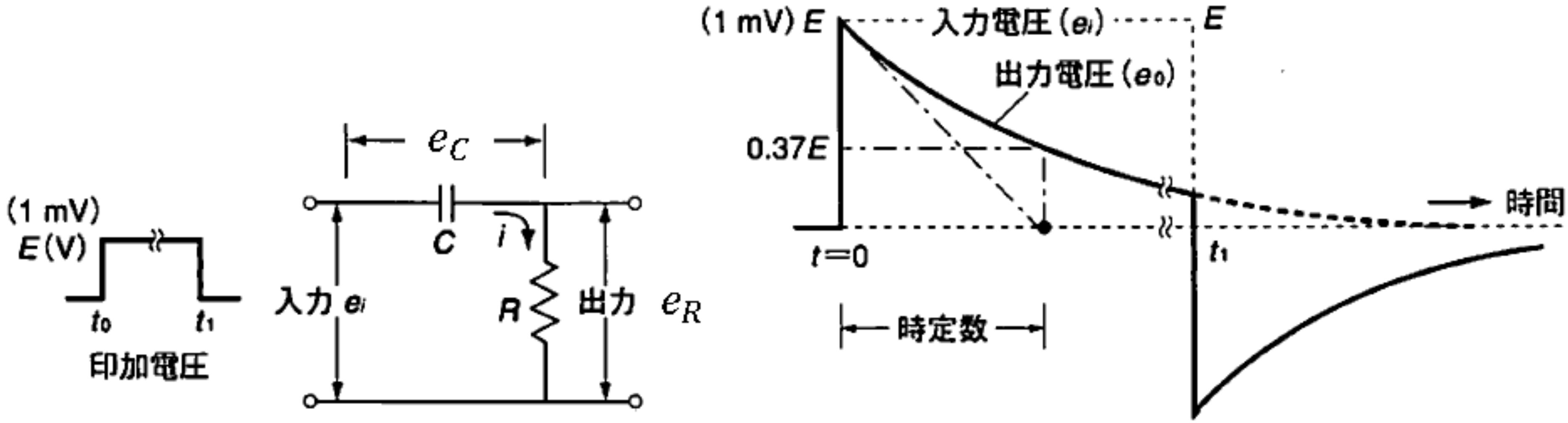


微分回路は 高 周波成分、
積分回路は 低 周波成分の抽出に利用できる。

第2章 p.52　図2-42
第2章 p.52　図2-43

（計算例）

$R = 6\mathrm{M}\Omega, \quad C = 0.1\mu\mathrm{F}$ としたとき，時定数はいくらか．



時定数 $\tau =$ 0.6 [s]

第2章 p.50 図2-40

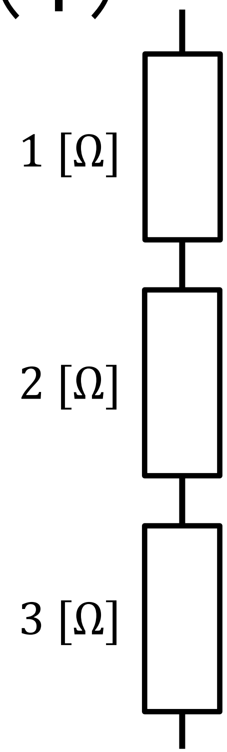
電気回路(直流回路)の復習

- 合成抵抗
- キルヒホッフの法則
- ホイートストンブリッジ
- 電力、熱量

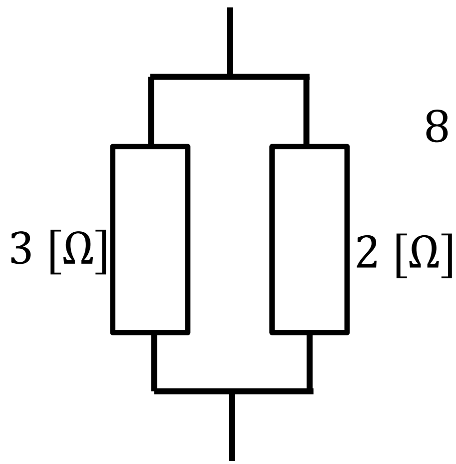
例題1　合成抵抗

次の合成抵抗を求めよ。

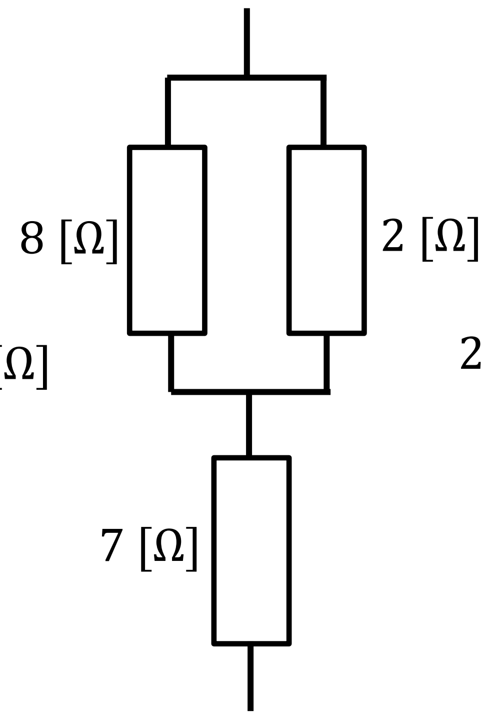
（１）



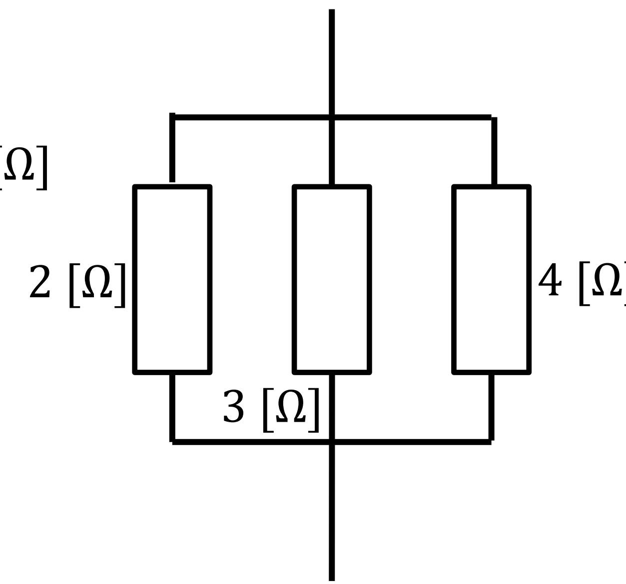
（２）



（３）



（４）

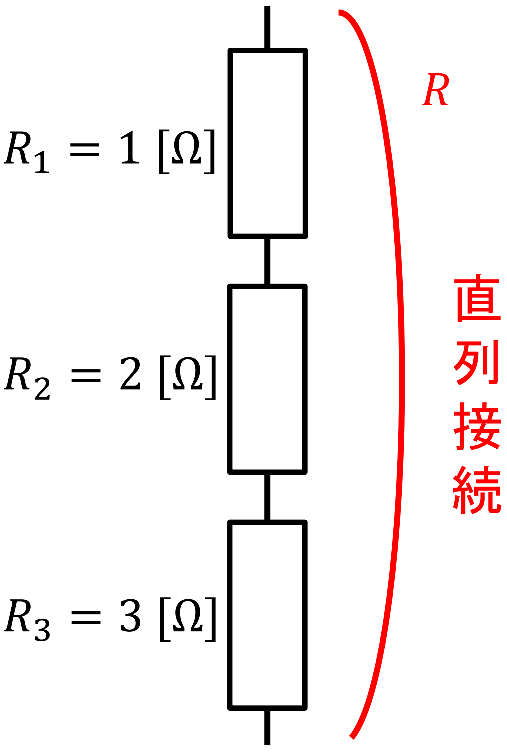


例題1　解答(1)

(1)

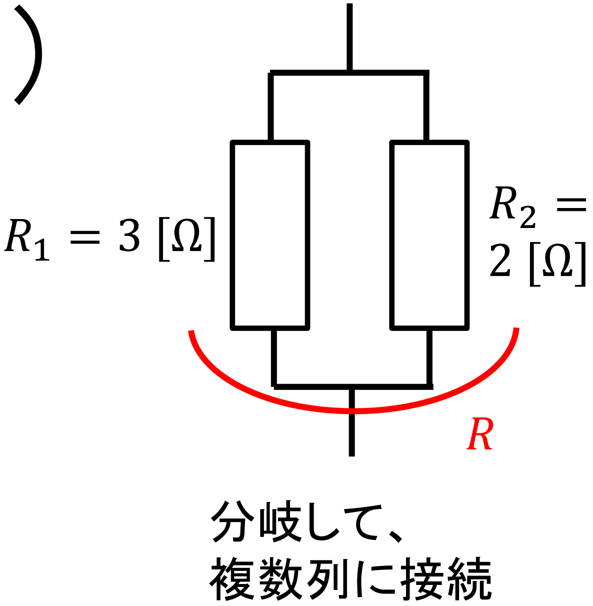
$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 1 + 2 + 3$$
$$= 6$$

正解:　6 [Ω]



分岐せず、
一列に接続

例題1　解答(2)



（2）

抵抗2つの並列接続の合成抵抗は

$$R = \frac{積}{和} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$$
$$= \frac{3 \times 2}{3 + 2} = \frac{6}{5} = 1.2$$

<u>正解：　1.2 [Ω]</u>

例題1　解答(3)

(3)並列部分と直列部分に分けて考える

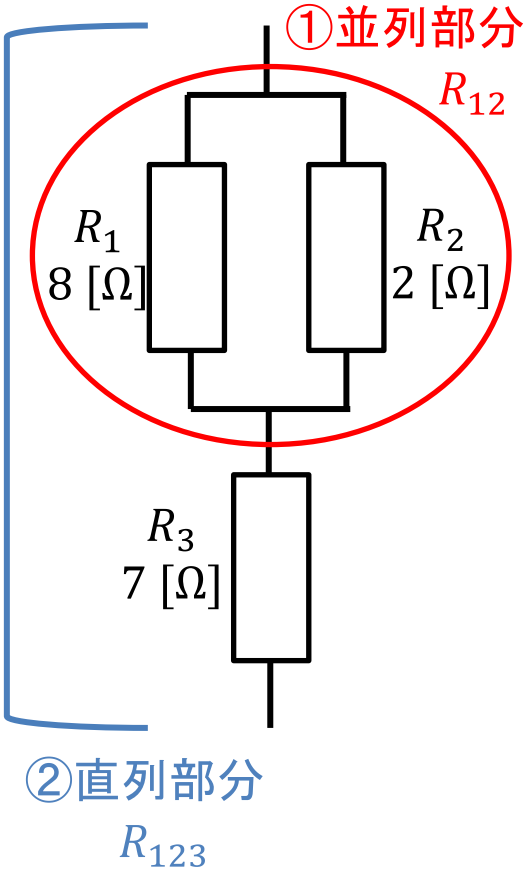
①並列部分(上半分)

$$R_{12} = \frac{積}{和} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8 \times 2}{8 + 2} = \frac{16}{10} = 1.6$$

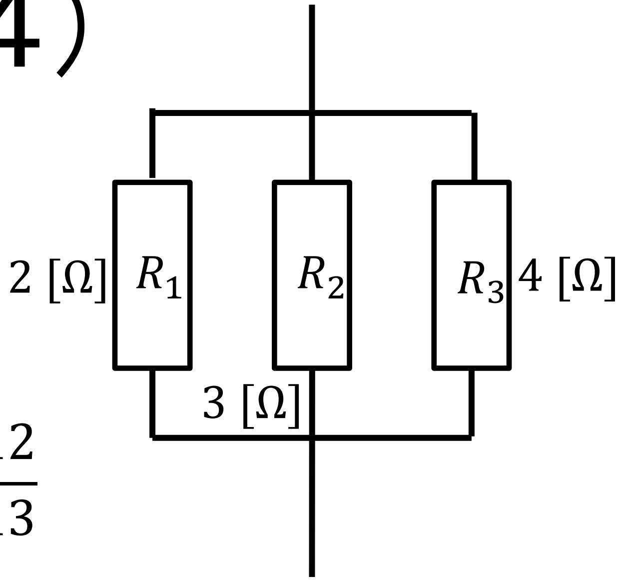
②直列部分(全体)

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 1.6 + 7 = 8.6$$

正解：　8.6 [Ω]



例題1　解答(4)



（4）解き方1

$$R_{12}=\frac{2\times3}{2+3}=\frac{6}{5}$$

$$R_{123}=\frac{\frac{6}{5}\times4}{\frac{6}{5}+4}=\frac{\frac{24}{5}}{\frac{26}{5}}=\frac{24}{26}=\frac{12}{13}$$

解き方２

1.抵抗の逆数を全部たす

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{1\times6}{12}+\frac{1\times4}{12}+\frac{1\times3}{12}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{13}{12}$$

2.↑で求めた値の逆数を求める

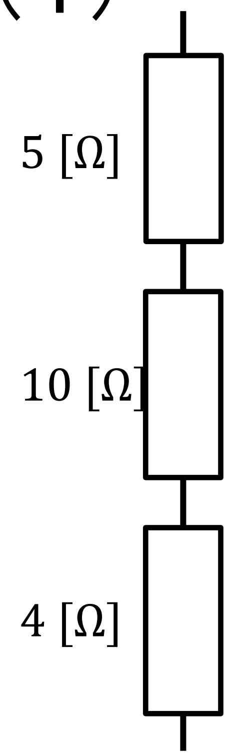
$$\frac{13}{12}\text{の逆数}=\frac{12}{13}$$

正解: $\frac{12}{13}$ [Ω]

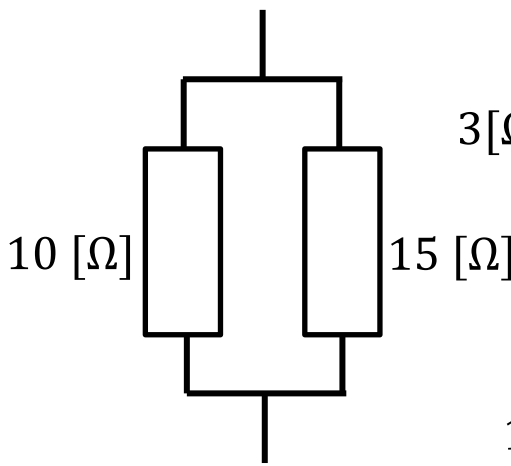
練習問題1

次の合成抵抗を求めよ。

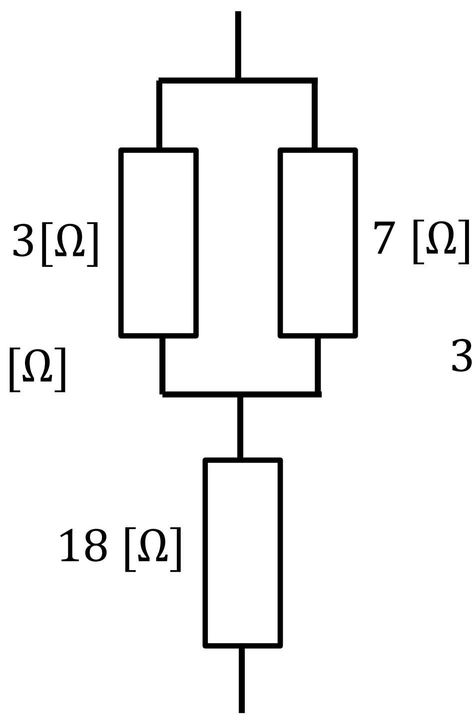
（１）



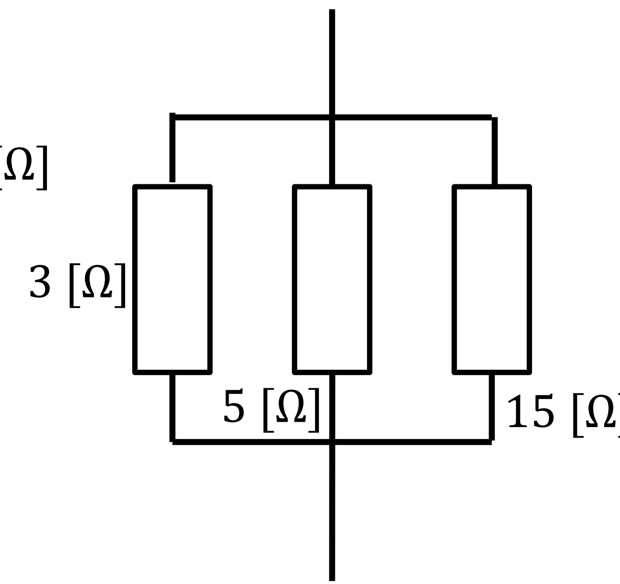
（２）



（３）



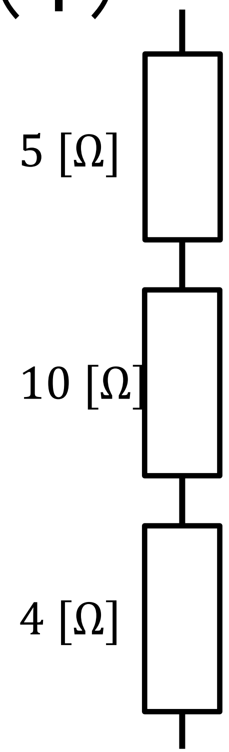
（４）



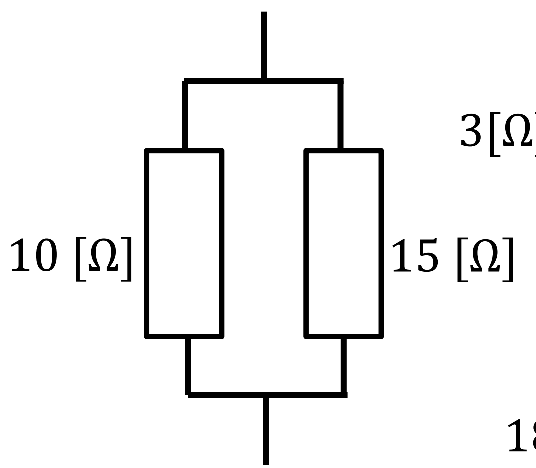
練習問題1 解答

次の合成抵抗を求めよ。

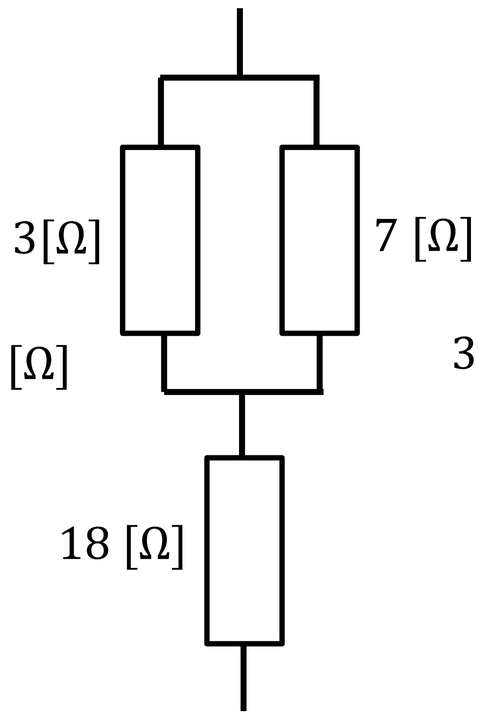
（１）



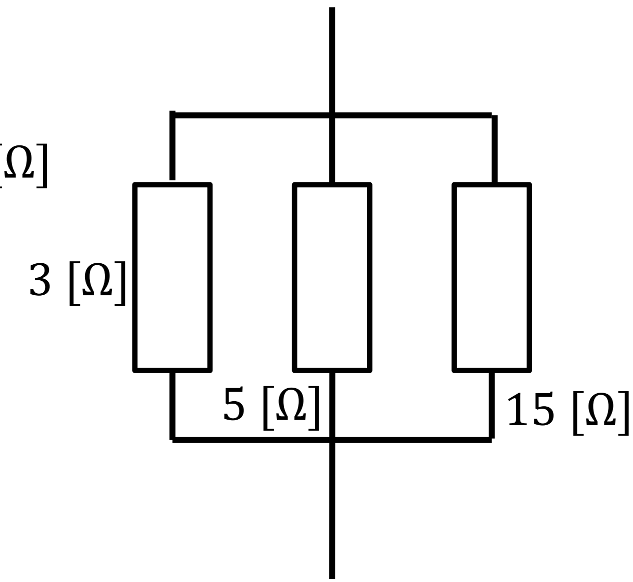
（２）



（３）



（４）



19

6

20.1

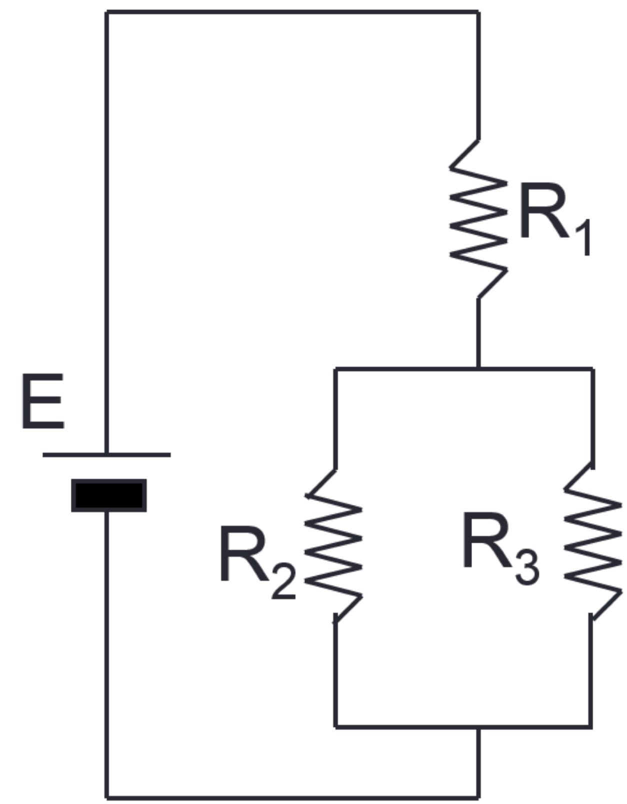
5/3[Ω]

例題2　消費電力

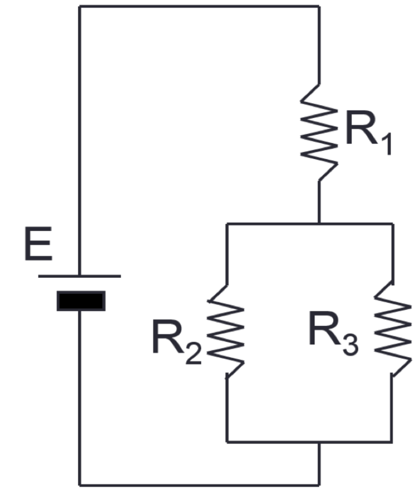
R_1=1, R_2=8, R_3 = 12[Ω], E=58[V]となる以下のような回路を作製したとき

（１）回路全体の消費電力を求めよ。

（２）5秒間電流を流した時、R_1で発生する熱量を求めよ。



例題2　解答



（1）消費電力

$$P = VI$$

→　全体の消費電力を知るには、全体の電流が必要

　→　全体の電流を知るには、全体の抵抗（合成抵抗）が必要

まず合成抵抗を求める

①並列部分（下半分）

$$R_{23} = \frac{積}{和} = \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = \frac{8 \times 12}{8 + 12} = \frac{96}{20} = 4.8$$

②直列部分（全体）

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 1 + 4.8 = 5.8$$

消費電力

$$I = \frac{V}{R} = \frac{E}{R_{123}} = \frac{58}{5.8} = 10, \qquad P = VI = EI = 58 \times 10 = 580\ [W]$$

例題2　解答

（2）発熱量

$$\mathrm{H} = P\times t = VI\times t$$

R_1の消費電力を知るにはR_1の電流と電圧がいる

→　R_1の電流は全体の電流と等しい　＆　抵抗はわかっている

→　R_1の電圧はオームの法則で求められる

$$V_1 = R_1 I = 1\times 10 = 10$$

R1の消費電力

$P_1 = V_1 I = 10\times 10 = 100$

R1の発熱量

$H_1 = P_1\times t = 100\times 5 = 500\ [Ws] = 500[J]$

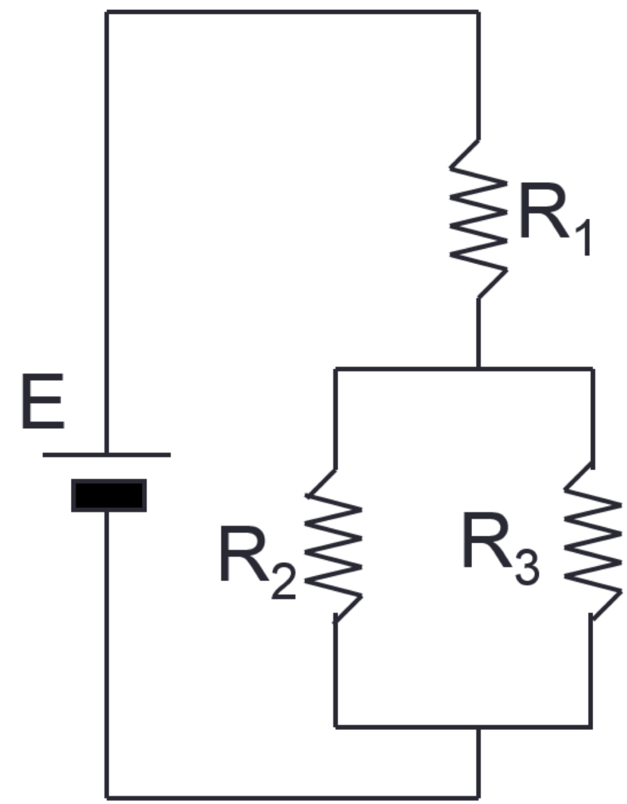
練習問題2

R_1=0.1, R_2=1, R_3 = 9[Ω], E=30[V]となる以下のような回路を作製したとき

（１）消費電力を求めよ。

（２）10秒間電流を流した時のR1で発生する熱量を求めよ。

＊（３）R_1において300[J]の熱量を得るためには何秒間電流を流せば良いか。



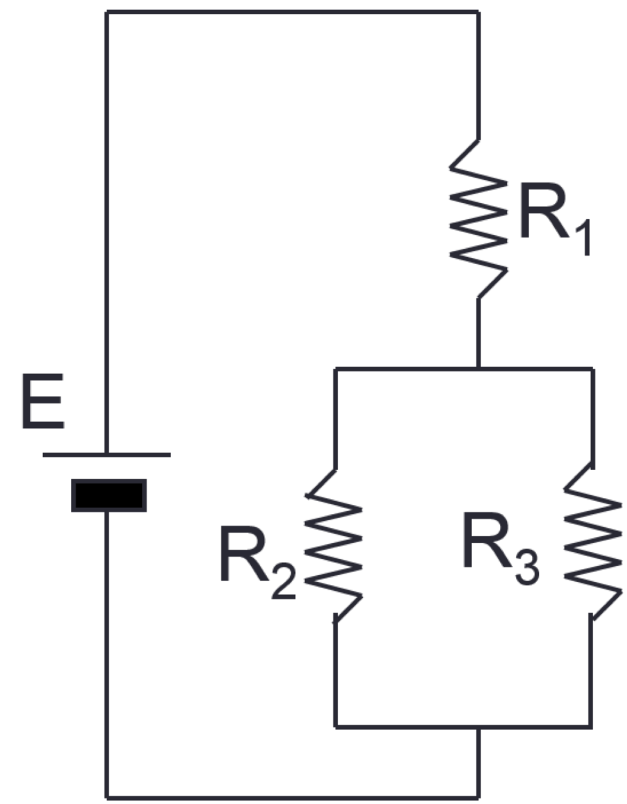
練習問題2

R_1=0.1, R_2=1, R_3 = 9[Ω], E=30[V]となる以下のような回路を作製したとき

（1）消費電力を求めよ。

（2）10秒間電流を流した時のR1で発生する熱量を求めよ。

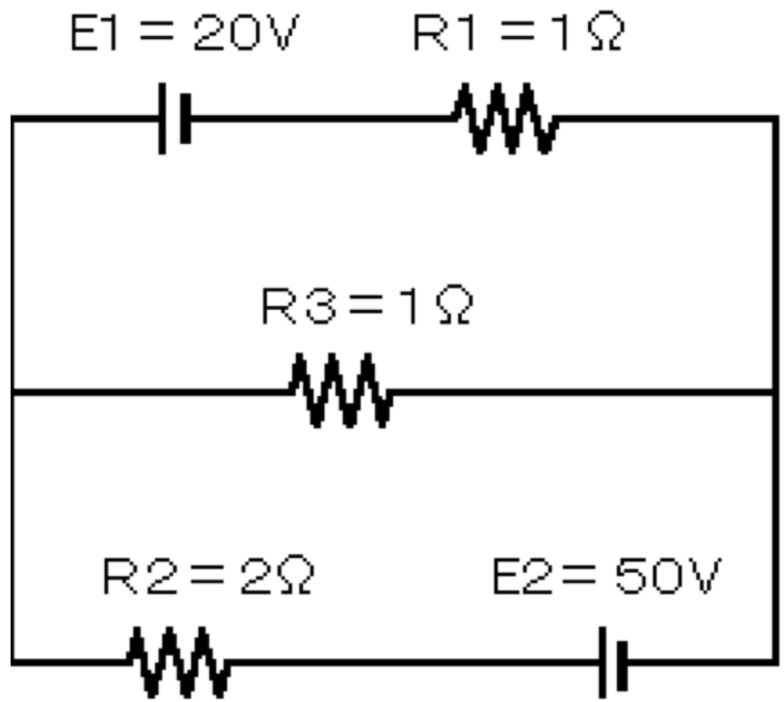
✴（3）R_1において300[J]の熱量を得るためには何秒間電流を流せば良いか。



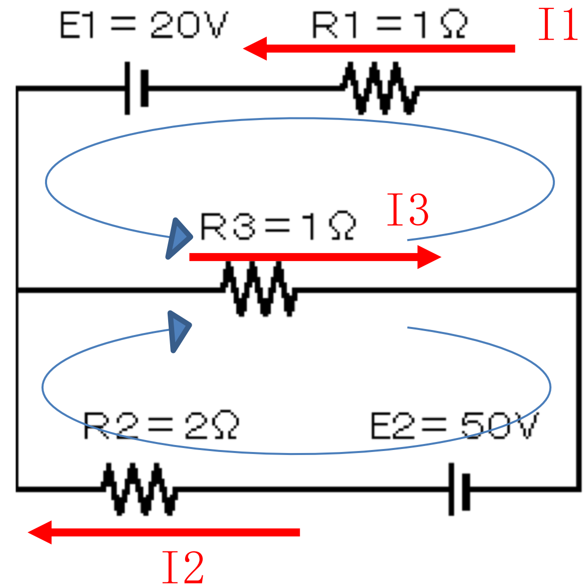
答え
（1）900[W]
（2）900[J]
（3）10/3[s]

例題3　キルヒホッフの法則

図の回路の各抵抗に流れる
電流の大きさを求めよ。



例題3　解答



点Aでキルヒホッフの第一法則より

$$I_1 + I_2 = I_3$$

上の回路で

起電力: E_1，電圧降下: $R_1 I_1$，$R_3 I_3$

キルヒホッフの第二法則より

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$$

$$20 = I_1 + I_3$$

下の回路で

起電力: E_2，電圧降下: $R_2 I_2$，$R_3 I_3$

キルヒホッフの第二法則より

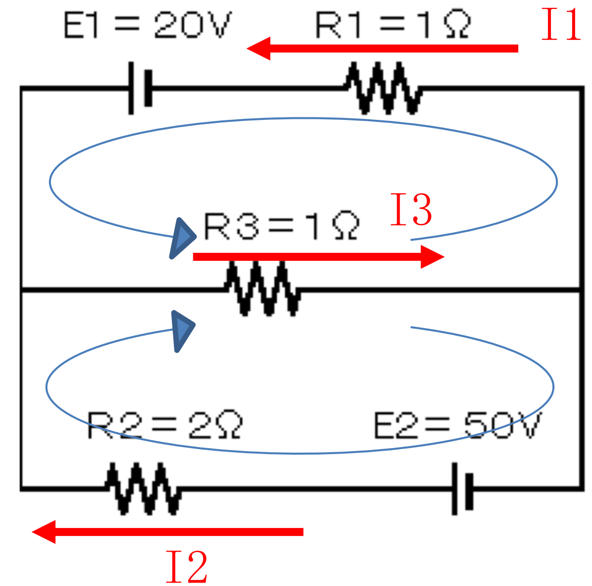
$$E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3$$

$$50 = 2I_2 + I_3$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 20 = I_1 + I_3 \\ 50 = 2I_2 + I_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 + I_3 = 20 \\ 2I_2 + I_3 = 50 \end{cases}$$

例題3　解答



$$
\begin{cases}
I_1 + I_2 - I_3 = 0 \cdots ① \\
I_1 + I_3 = 20 \cdots ② \\
2I_2 + I_3 = 50 \cdots ③
\end{cases}
$$

② − ①

$$I_1 \quad + I_3 = 20$$
$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$-I_2 + 2I_3 = 20 \cdots ②'$$

③ + ②′ × 2

$$2I_2 + I_3 = 50$$
$$-2I_2 + 4I_3 = 40$$
$$5I_3 = 90$$
$$I_3 = 18$$

$I_3 = 18$を②′に代入

$$-I_2 + 36 = 20$$
$$-I_2 = -16$$
$$I_2 = 16$$

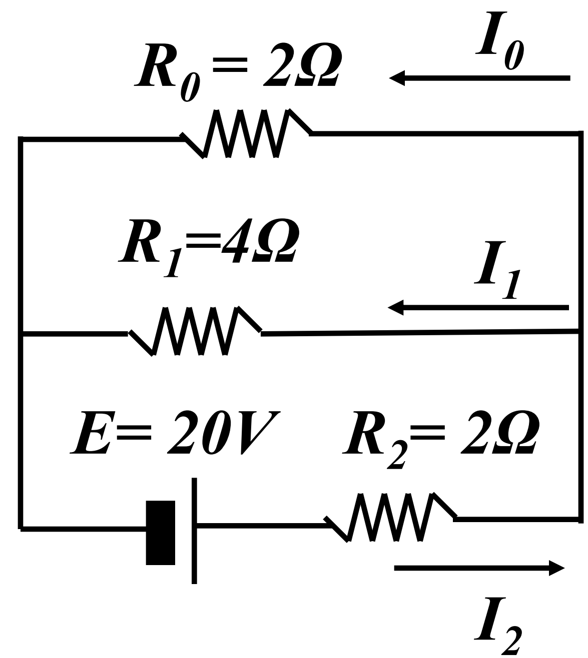
①に$I_2 = 16,\ I_3 = 18$を代入

$$I_1 + 16 - 18 = 0$$
$$I_1 - 2 = 0$$
$$I_1 = 2$$

$$I_1 = 2, \qquad I_2 = 16, \qquad I_3 = 18\ [A]$$

練習問題3

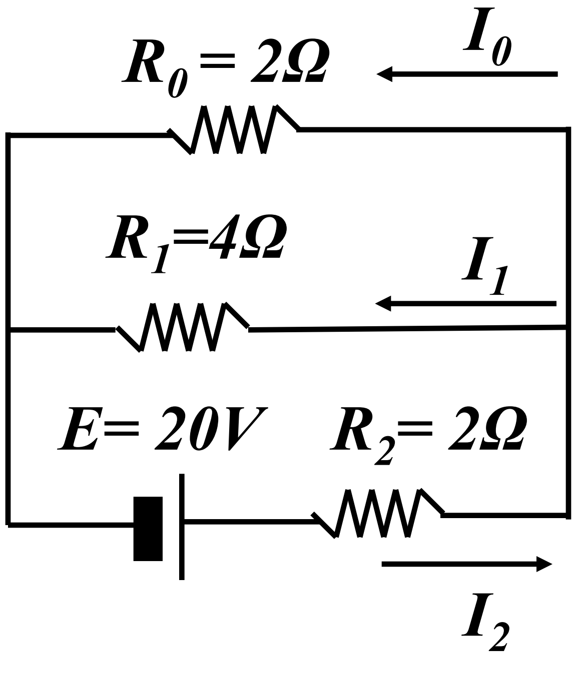
キルヒホッフの法則を使って
各抵抗を流れる電流を求めよ。



練習問題3

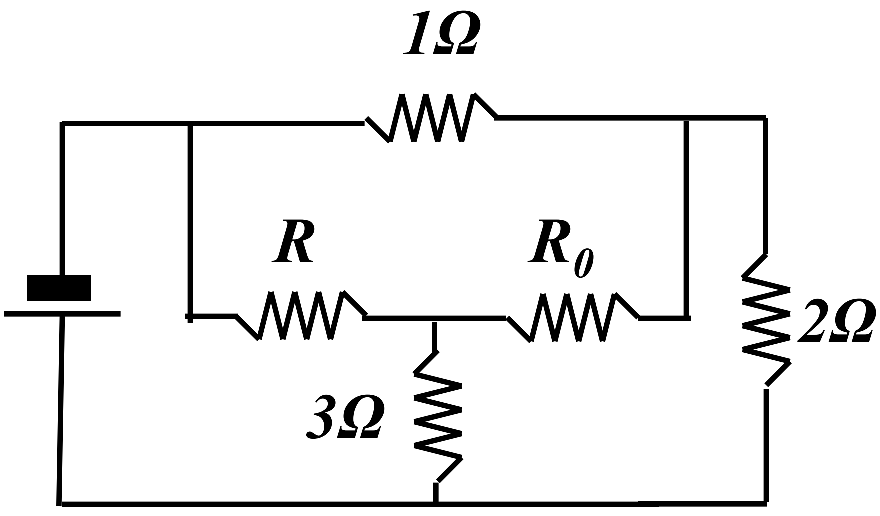
キルヒホッフの法則を使って
各抵抗を流れる電流を求めよ。

答え
I_0 = 4 [A]
I_1 = 2 [A]
I_2 = 6 [A]



例題4

抵抗R_0に流れる電流が0[A]になるとき、
抵抗Rの値はいくらか



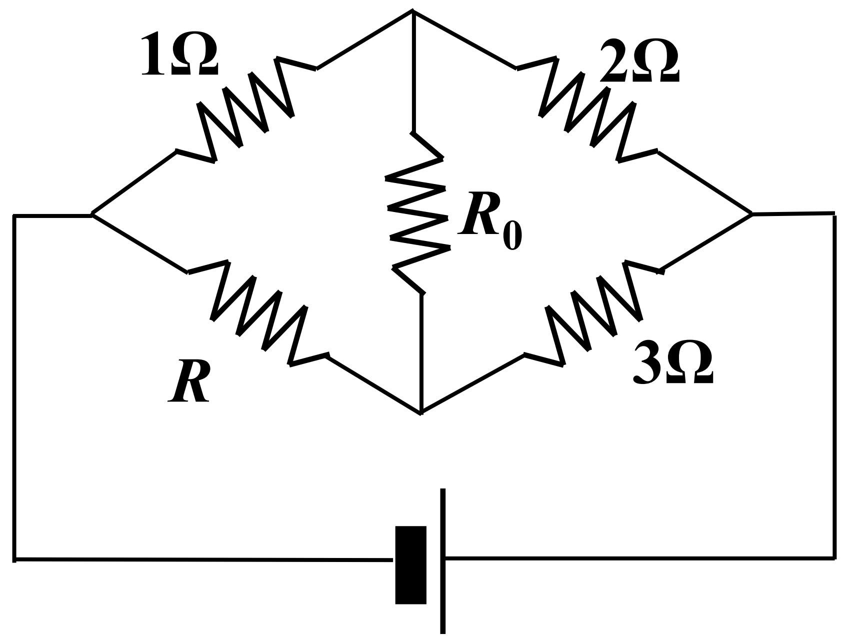
例題4 解答

図の回路はホイートストンブリッジである。
問題から、平衡条件が成り立っているので、次の式が成り立つ。

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{3}$$

$$R = \frac{3}{2}$$

$$= 1.5\ [\Omega]$$



練習問題4

図の回路において抵抗R_0に流れる電流が0[A]になるとき、
抵抗Rの値 を求めよ。

答え
R = 2.5 [Ω]