医用工学概論

第6回
電気の基礎３（交流回路）

今日の授業で理解したいこと

交流回路に加える電圧と電流の関係

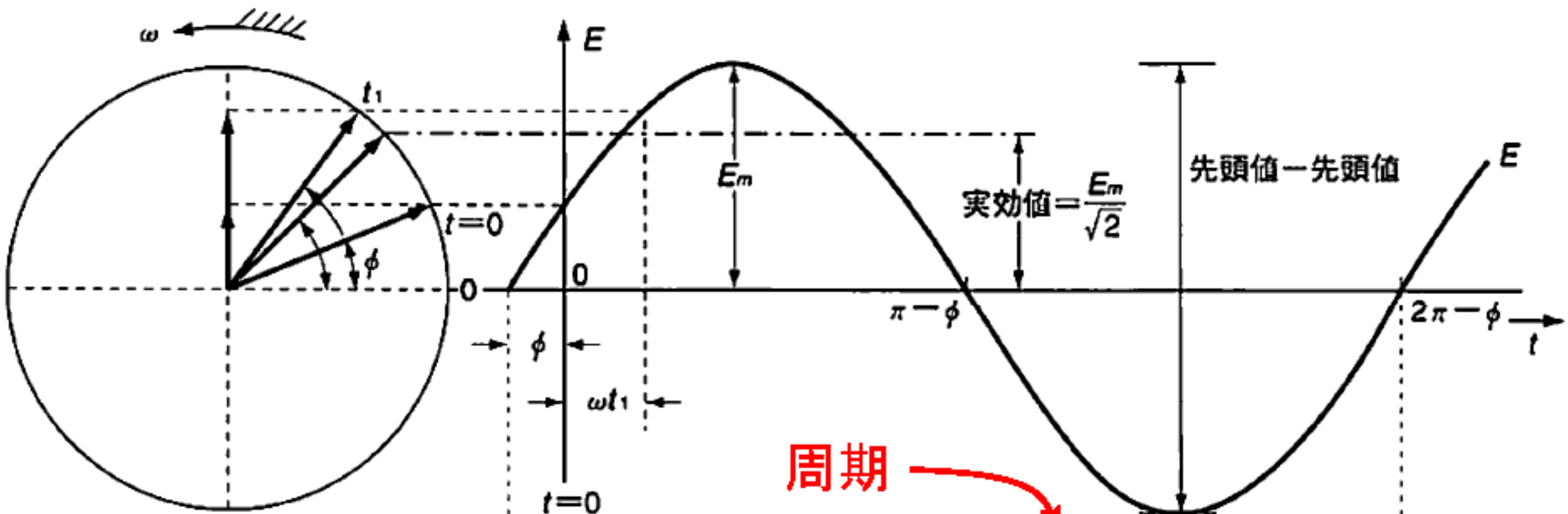
1. ある交流電圧v(t)を電気素子に加えた時に流れる電流i(t)
   - 抵抗Rに流れる電流
   - インダクタLに流れる電流、（コンデンサCに流れる電流）
2. RLC直列回路の交流特性
   - 交流回路の電流と電圧の関係を表すインピーダンス
   - インピーダンスを使った電流の計算
3. 交流回路の電力
   - 電圧、電流の実効値（直流回路と電力的に等価な電圧、電流値）
   - 3種類の電力の表現（実効電力、皮相電力、無効電力）
4. 共振、共振周波数

交流

角周波数

$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \phi)$$

振幅　　　　　　　　　　位相



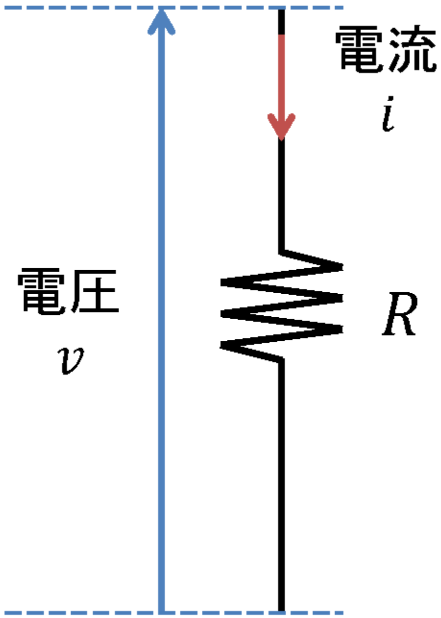
$$2\pi = \omega T$$

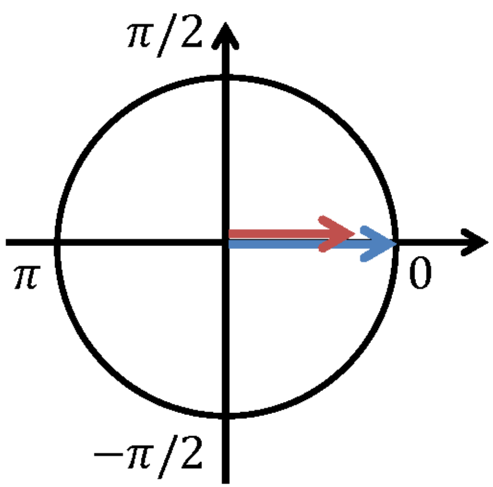
2π は，円を一周する角度

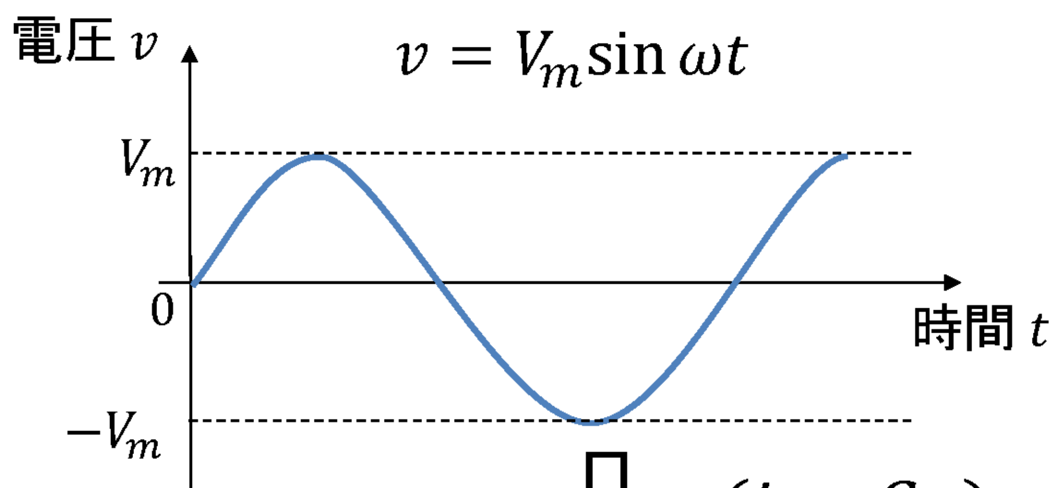
T は，円を一周する時間

周波数　$f = 1/T\,[\mathrm{Hz}]$　　$\omega = 2\pi f$

抵抗

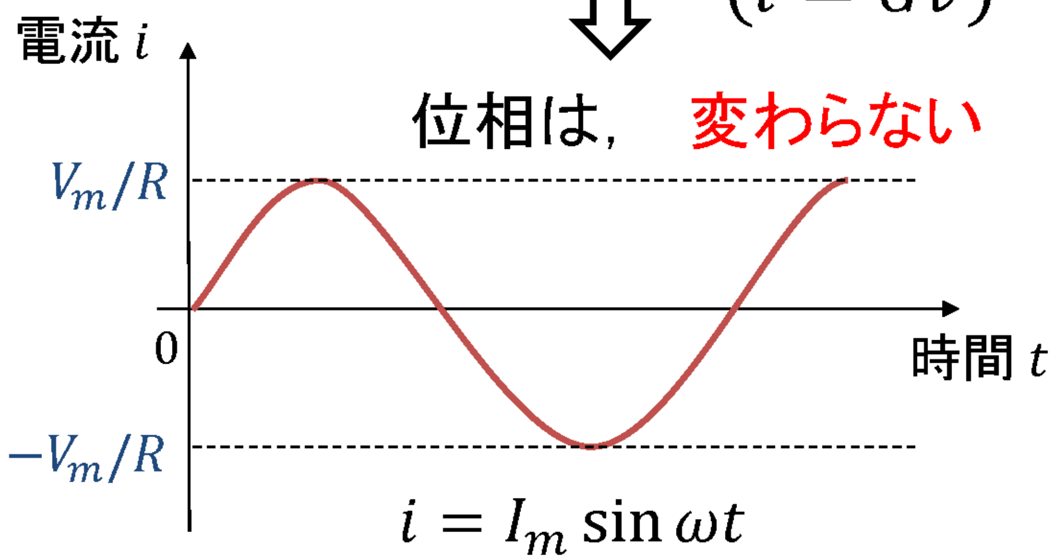




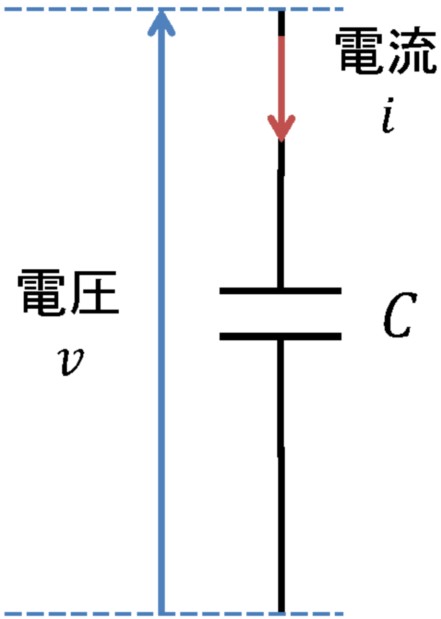


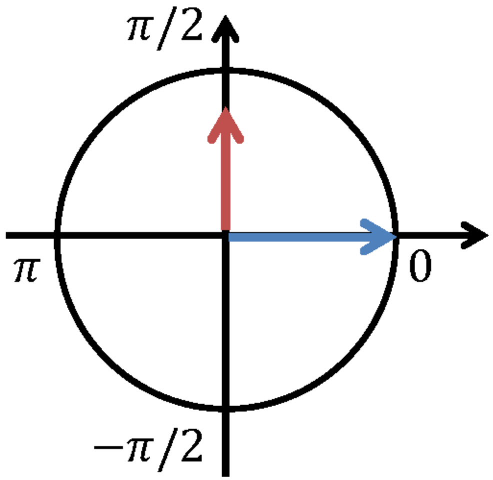
$(i = Gv)$

位相は，変わらない

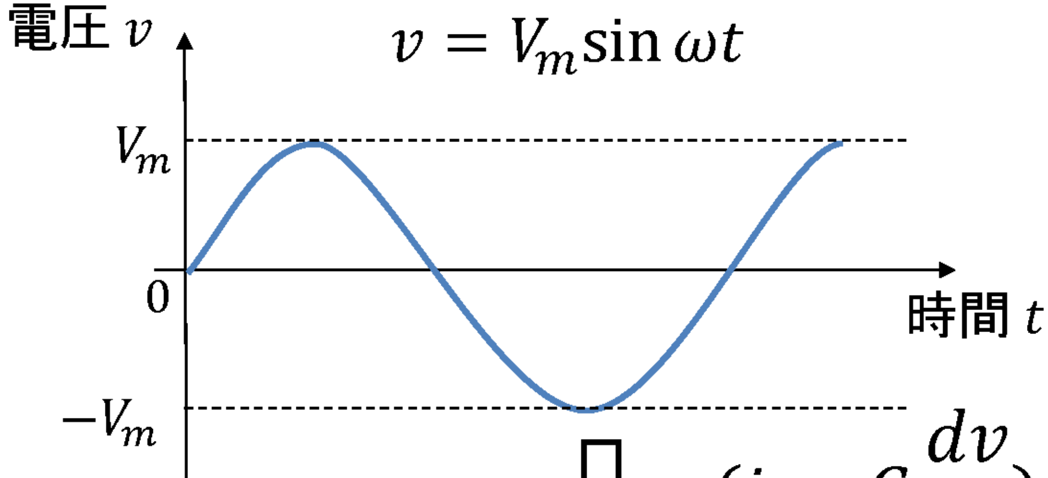


コンデンサ



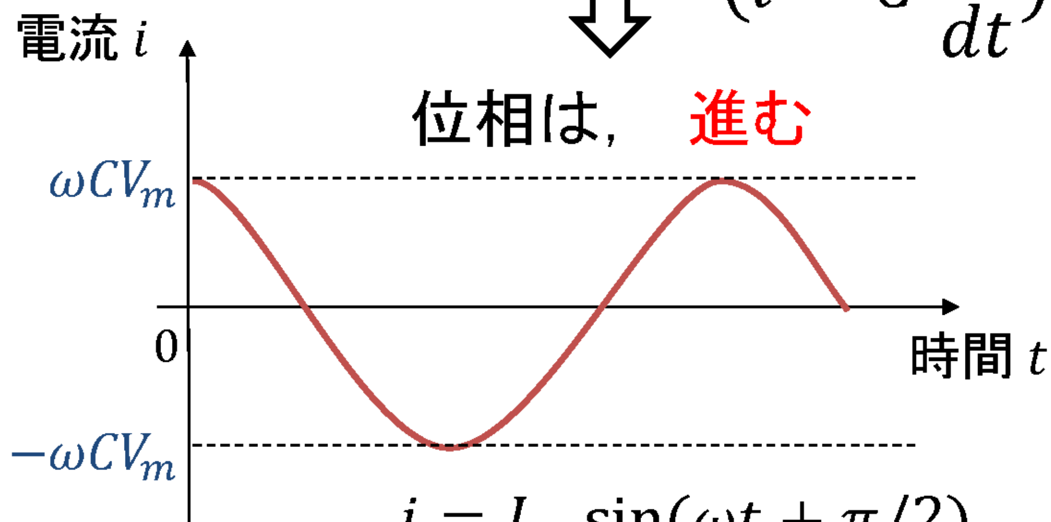


$$v = V_m \sin \omega t$$



$$\left(i = C\frac{dv}{dt}\right)$$

位相は，進む

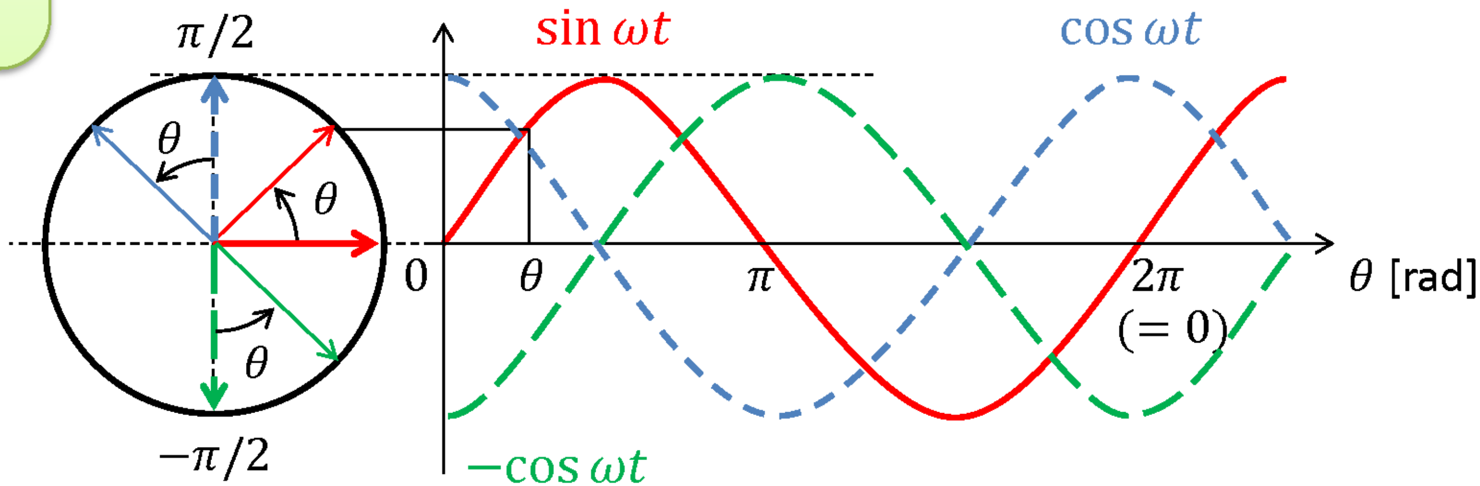


$$i = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

交流と三角関数

角周波数（角速度）とは，単位時間に進む角度

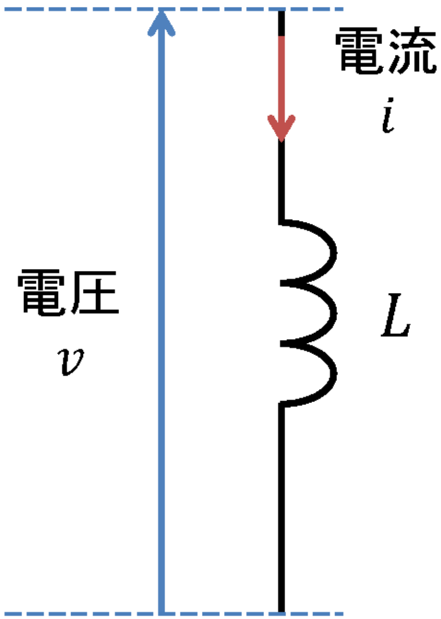
$$\omega t = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi f t$$

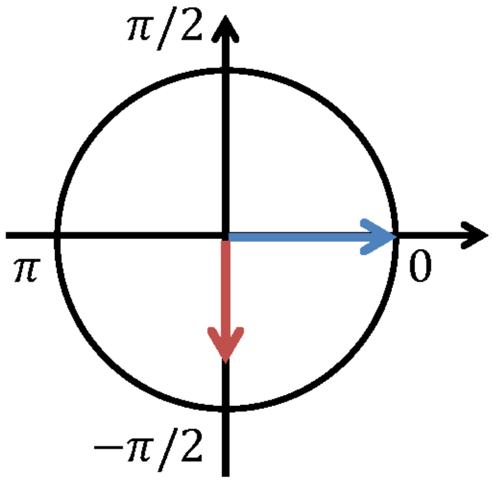


$$\frac{d}{dt}\sin \omega t = \omega \cos \omega t = \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

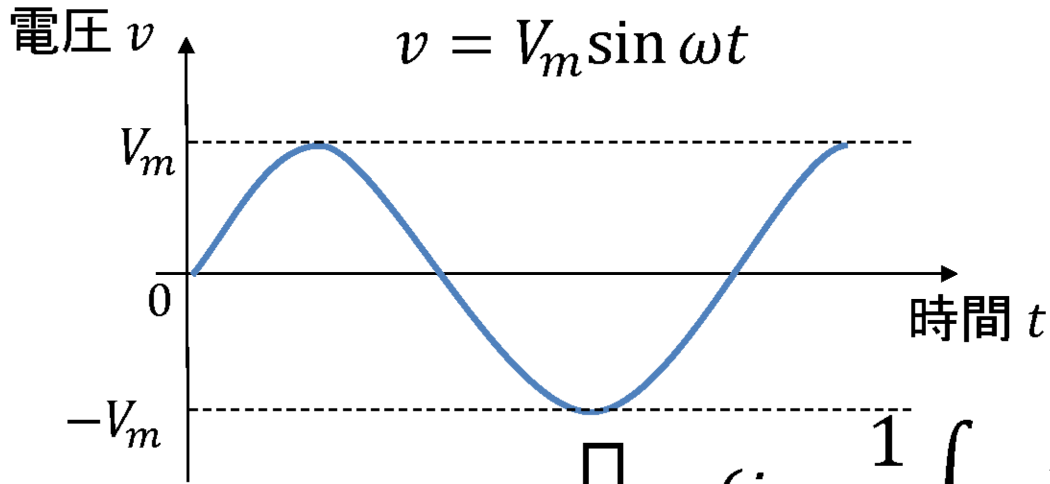
$$\int \sin \omega t = -\frac{1}{\omega}\cos \omega t = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

インダクタ



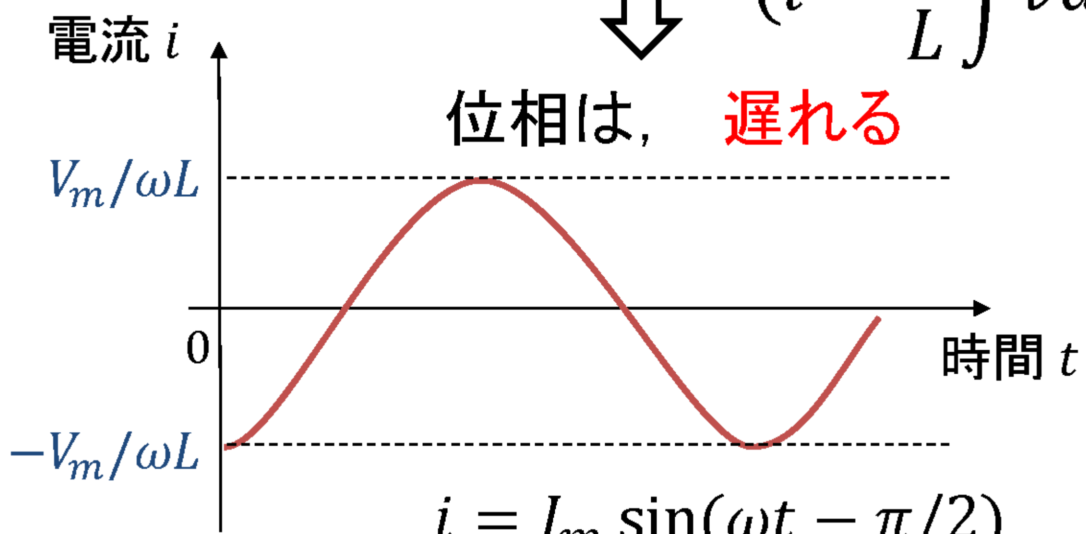


$$v = V_m \sin \omega t$$



$$\left(i = \frac{1}{L}\int v dt\right)$$

位相は，遅れる



$$i = I_m \sin(\omega t - \pi/2)$$

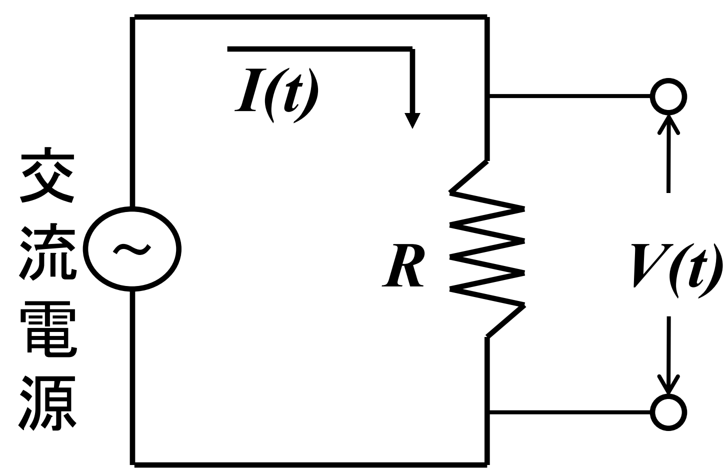
例題1-1 抵抗に流れる電流

交流電源の最大値V_mを10[V]、周波数fを1/2π[Hz]とし、抵抗Rを5[Ω]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流をのグラフをかけ

（３） π/6[s]後の電流の瞬時値を求めよ



例題1-1 解答

抵抗のみの場合、 $\omega = 2\pi f$
振幅だけが変わる

解答

（１） $I(t) = \boxed{\frac{V_m}{R}} \sin \omega t = \frac{10}{5} \sin\left(\frac{2\pi}{2\pi} \times t\right) = 2\sin(t)$

（２）

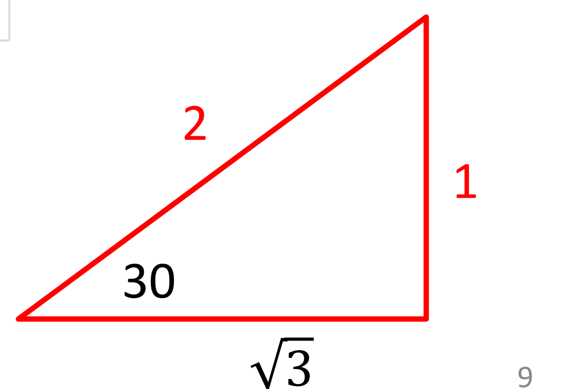
ラジアンから度

$\frac{\pi}{6} \div \pi \times 180$
$= 30$

（３）

$I\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1[\mathrm{A}]$

sin ： $\frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}}$



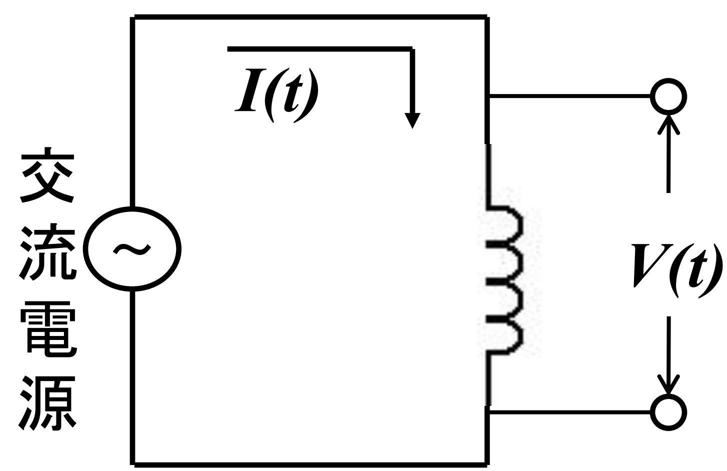
例題1-2 インダクタに流れる電流

交流電源の最大値V_mを6[V]、周波数fを1/2π[s]とし、自己インダクタンスLを2[H]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流をのグラフをかけ

（３） π/6[s]後の電流の瞬時値を求めよ



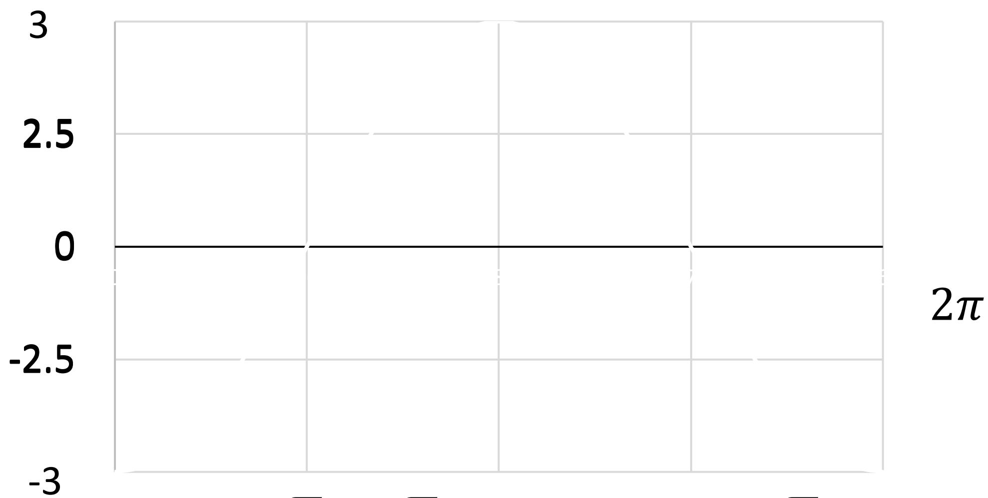
例題1-2 解答

解答

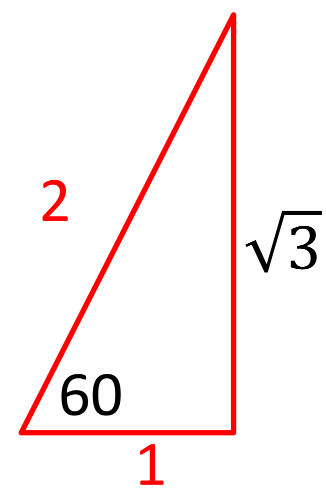
（1）

（2）

$$i(t) = \boxed{\frac{V_m}{\omega L}} \sin \omega t = \frac{6}{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin(t - \frac{\pi}{2})$$



（3）



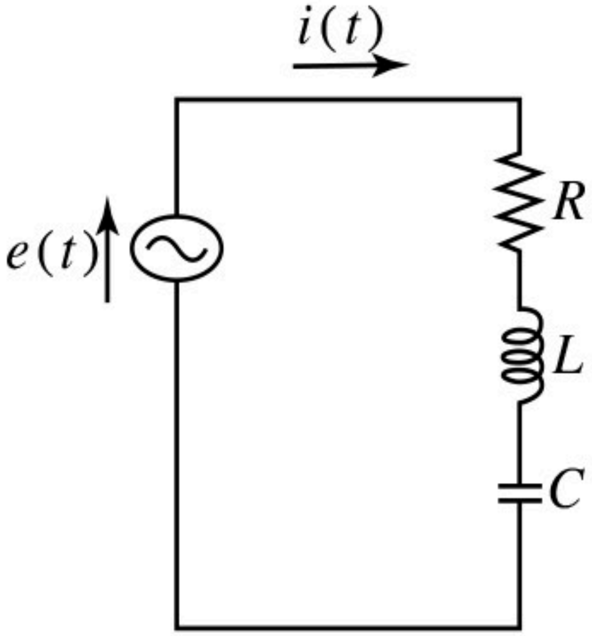
$$i\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\,[\mathrm{A}]$$

RLC直列回路

抵抗、コンデンサ、インダクタを直列に接続した回路。

RLC直列回路に流れる電流



- 振幅 が変化
  - どのくらい変わる？
- 位相 が変化
  - 遅れる？ or 進む？

振幅 と 位相 が、RLCの値によって変わる？

インピーダンス

電圧と電流の　振幅　の比

大きさ(振幅)を表す記号

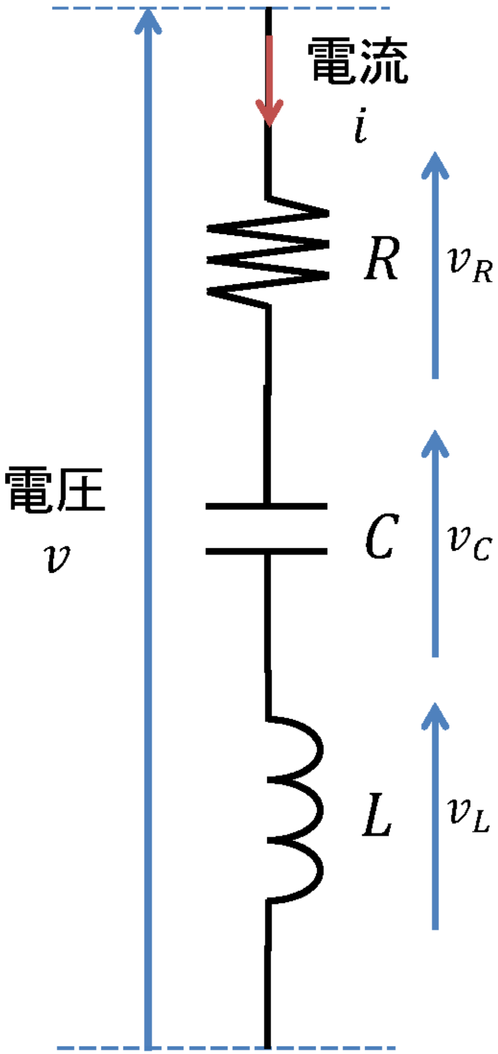
$$Z = \frac{|v|}{|i|} = \frac{V_m}{I_m}$$

例)$|\sin \omega t| = 1$

抵抗	$I_m = V_m/R$	$Z_R = R$	オームの法則
コンデンサ	$I_m = \omega C V_m$	$Z_C = 1/\omega C$	
インダクタ	$I_m = V_m/\omega L$	$Z_L = \omega L$	

コンデンサとインダクタのインピーダンスは,　周波数　によって変化する.

合成インピーダンス（R-C-L回路）

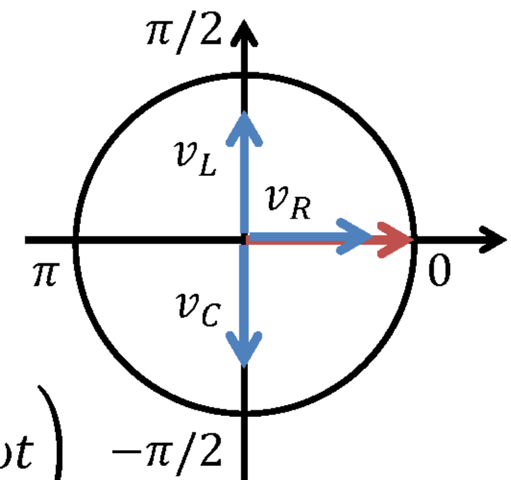


$$i = I_m \sin \omega t$$

$$v = Ri + \frac{1}{C}\int i dt + L\frac{di}{dt}$$

$$= I_m \left(R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \omega t \right)$$

$$= \underbrace{I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}_{V_m} \sin \left(\omega t + \underbrace{\tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\mathrm{R}} \right)}_{\phi} \right)$$



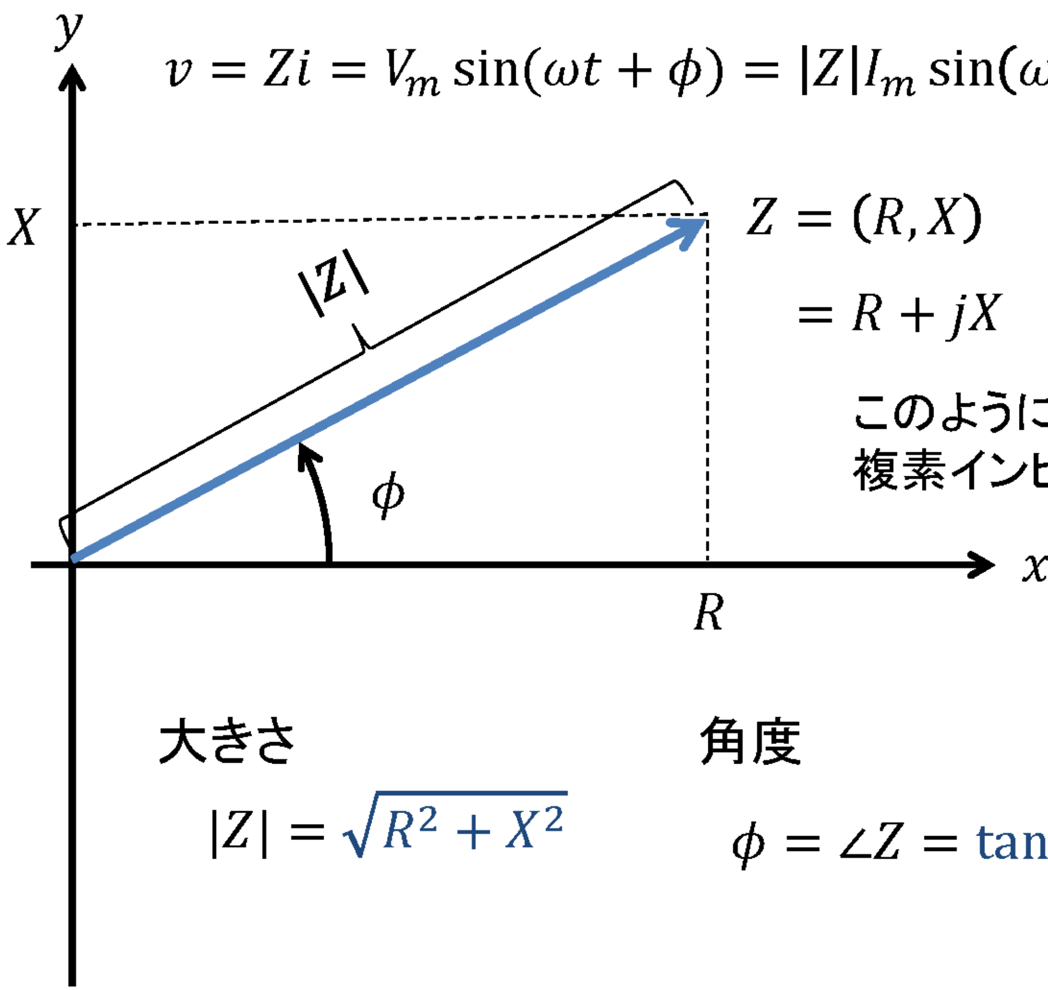
$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

インピーダンスのフェーザ表示

インピーダンスの大きさと位相のずれを同時に表現する方法

$$v = Zi = V_m \sin(\omega t + \phi) = |Z| I_m \sin(\omega t + \angle Z)$$



$$Z = (R, X)$$
$$= R + jX \qquad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

このように表記したとき，
複素インピーダンスと呼ぶ．

大きさ

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

角度

$$\phi = \angle Z = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

RLC直列回路に流れる電流

- フェーザ図を書く
- インピーダンスの大きさ$|Z|$を求める
- 位相差θを求める

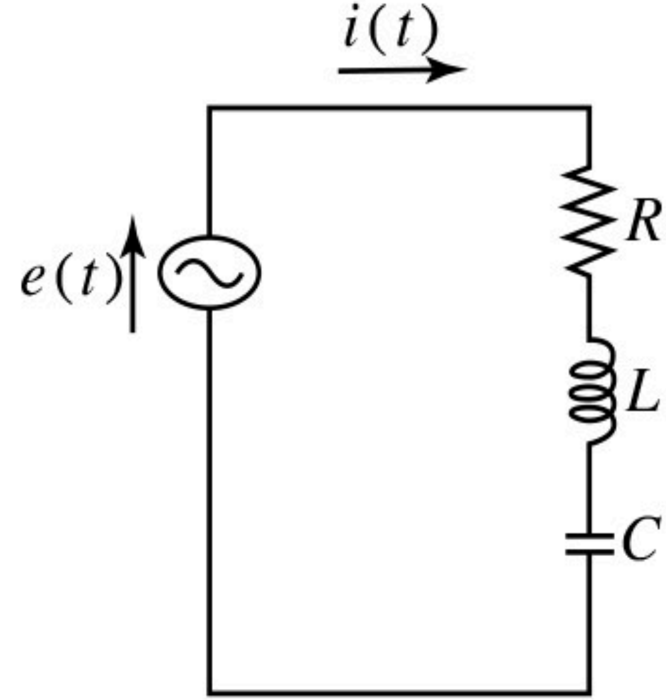
- $|Z|$とθを使って電流の式を計算する。

例題2 RLC直列回路

R = 3 [Ω], L = 4 [H], C = 1 [F]、電源の周波数f=1/2π、振幅$6\sqrt{2}$の時、

（1）回路のインピーダンスを求めよ。

（2）回路に流れる電流の式を求めよ。



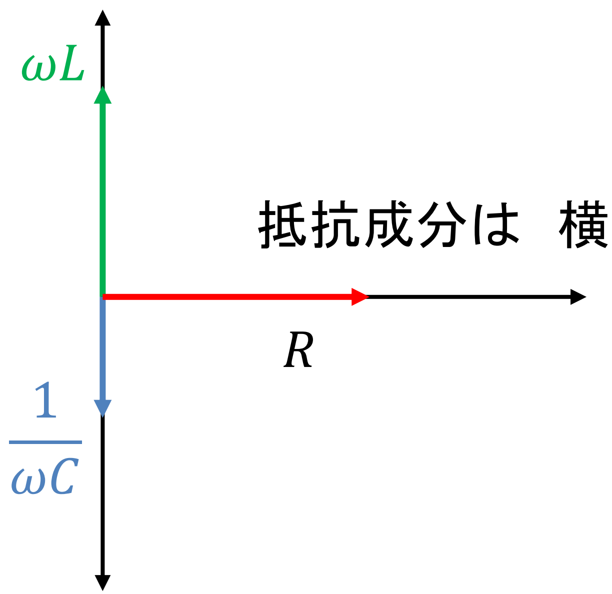
例題2　解答

（1） 回路のインピーダンスを求めよ。

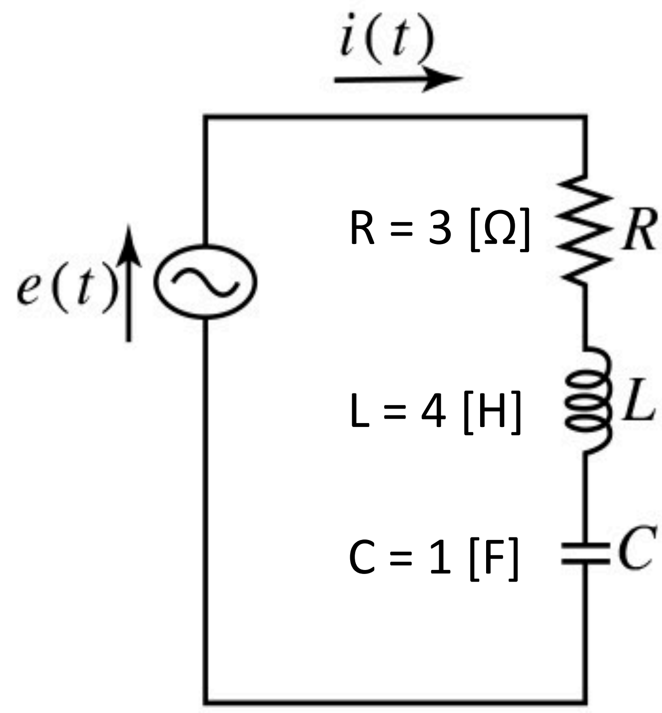
まず、フェーザ図を描く

電源の周波数f=1/2π

インダクタ成分が　上



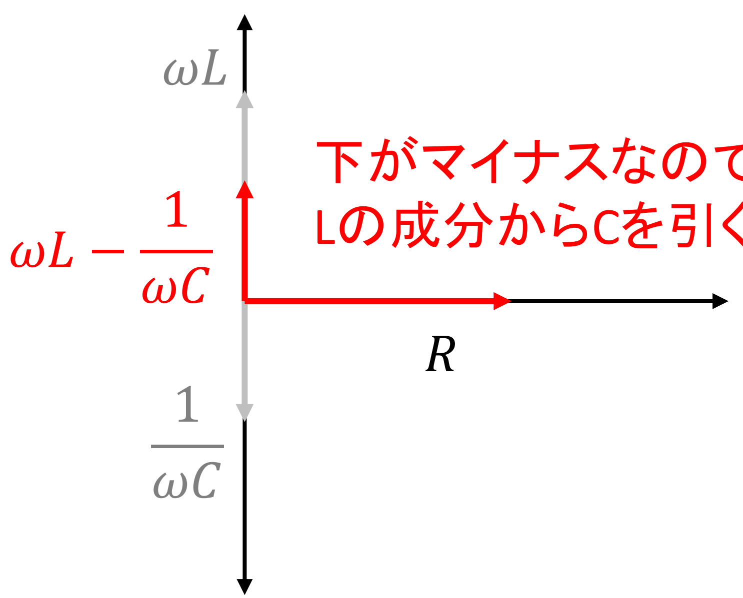
コンデンサ成分は　下



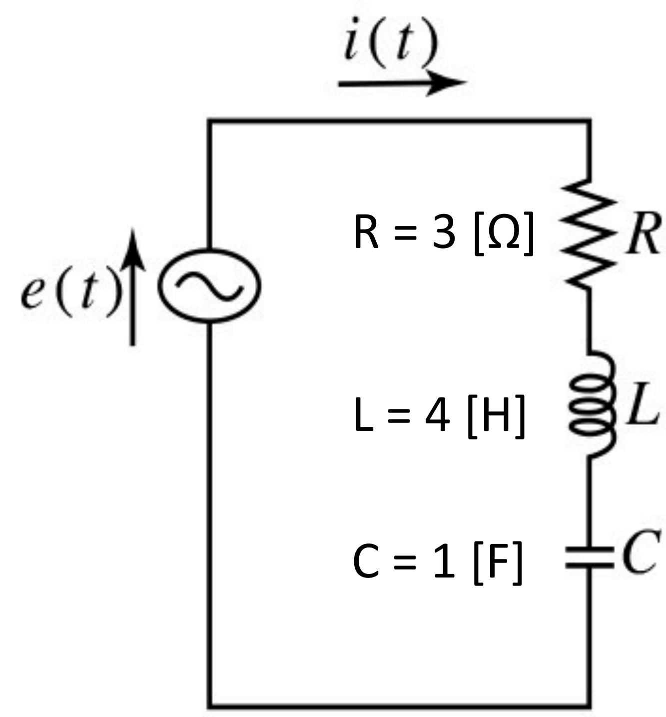
例題2　解答

（1）　回路のインピーダンスを求めよ。

次に、縦軸（LとCの成分）の差を求める。



電源の周波数f=1/2π

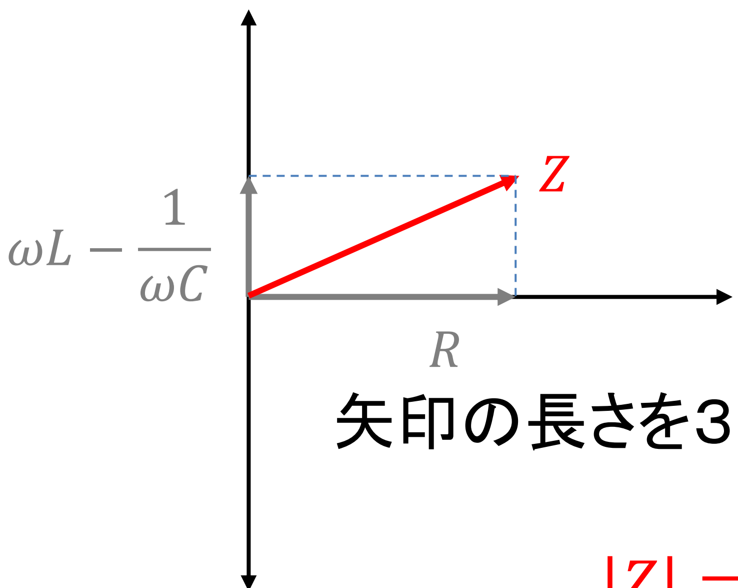


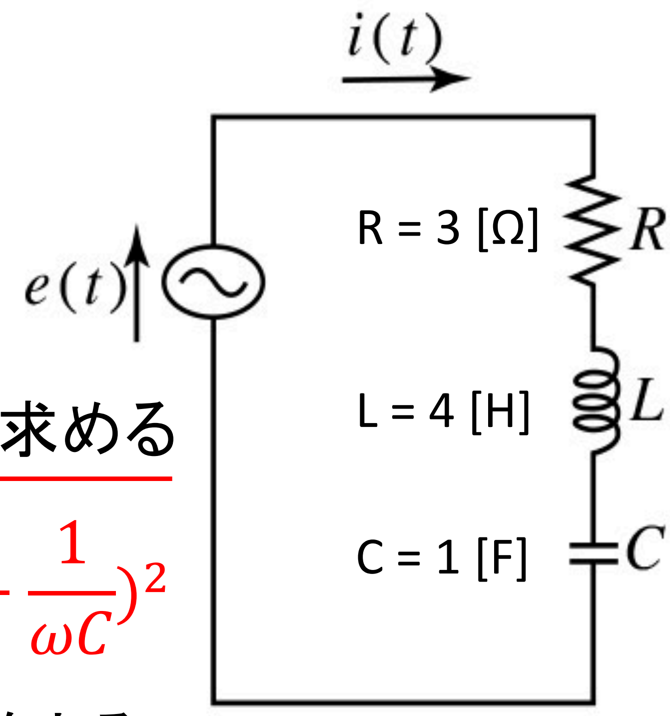
例題2　解答

（1）　回路のインピーダンスを求めよ。

合成ベクトル（縦と横の矢印を組み合わせてできる矢印）を求める。

電源の周波数f=1/2π





矢印の長さを3平方の定理で求める

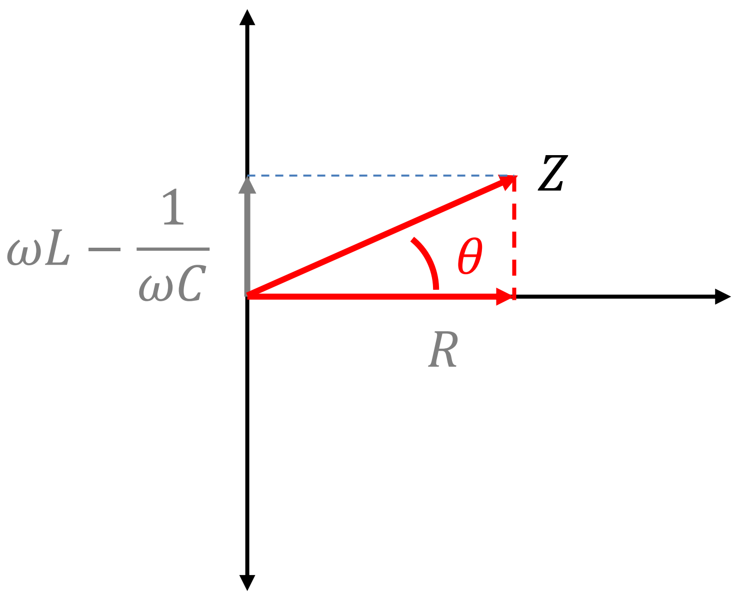
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

縦と横を2乗して足してルートをとる

例題2　解答

（1）　回路のインピーダンスを求めよ。

合成ベクトル（縦と横の矢印を組み合わせてできる矢印）を求める。



矢印の角度θを求める

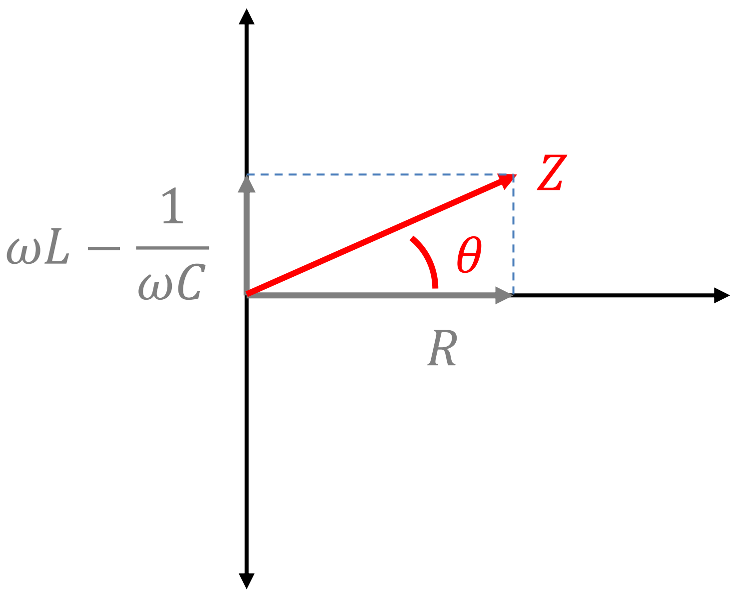
$$tan\theta = \frac{高さ}{底辺} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

縦と横の比が$\omega L - \frac{1}{\omega C}$： R　になる三角形の角度は？

例題2　解答

（1） 回路のインピーダンスを求めよ。

合成ベクトルの計算（長さ）



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (1\times 4 - \frac{1}{1\times 1})^2}$$

$$= \sqrt{9 + (4-1)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 3^2}$$

これで電圧の振幅をわれば、
電流の振幅が得られる　→

$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = \mathbf{3\sqrt{2}}$$

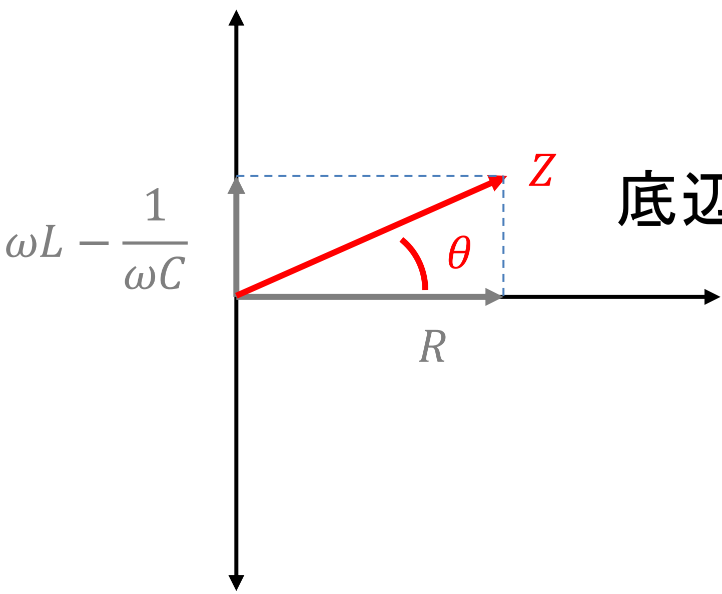
例題2　解答

（1）　回路のインピーダンスを求めよ。

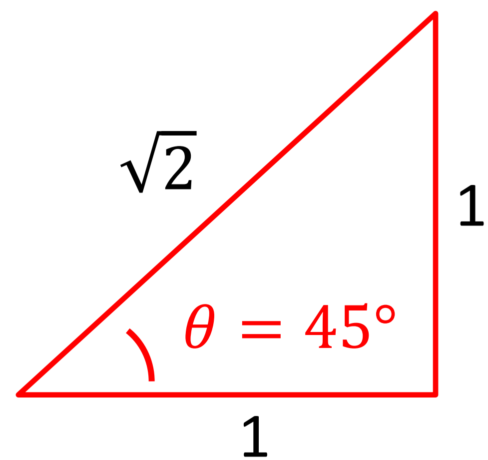
合成ベクトルの計算（角度）

$$\tan\theta = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}} = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$$

$$= \frac{1\times 4 - \dfrac{1}{1\times 1}}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = \mathbf{\frac{1}{1}}$$



底辺と高さの比が　1:1　になるような三角形



この角度で電圧の位相をひくと電流の位相になる

例題2　解答

（1）　回路のインピーダンスを求めよ。

合成ベクトルの計算（角度）

$$\text{インピーダンスの大きさ}\ |Z| = 3\sqrt{2}\ [\Omega]$$

$$\text{電圧と電流の位相差}\ \theta = 45^\circ\ (\text{または}\ \frac{\pi}{4}\ \mathrm{rad})$$

または、

$$3\sqrt{2}\angle 45^\circ$$

電流の振幅が電圧の $\dfrac{1}{\mathbf{3\sqrt{2}}}$ になり、

電流の位相が電圧に比べて　45°　遅れることを表す。

例題2　解答

（2）回路に流れる電流の式を求めよ。

電流の式

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \theta)$$

- 角周波数

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1$$ （電圧と同じ）

- 振幅

$$I_m = \frac{V_m}{|Z|} = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 2$$

度→ラジアンの変換

$$45 \div 180 \times \pi = \frac{\pi}{4}$$

- 位相

$$45° = \frac{\pi}{4}\ [\mathrm{rad}]$$ （ラジアン）

答え：

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \theta) = 2\ \sin(\ t - \frac{\pi}{4}\ )$$

交流回路の電力

交流回路の電流、電圧

- 時間によって変化する。 → 電力も同様

瞬間電力 $p(t) = v(t)\times i(t)$

ある時刻における瞬間的な電力（あまり意味はない）

平均電力

1周期分で平均した電力 $P = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T p(t)\,dt = \dfrac{V_m I_m}{2}$

この時、$P = V_e I_e$(直流回路の電力と同じ形)で表した時のV_e, I_eをそれぞれ電流、電圧の 実効値 とよび、以下で表す。

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}},\ I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$ （正弦波の場合）

商用交流100Vは実効値を表す。
振幅は約141Vになる。

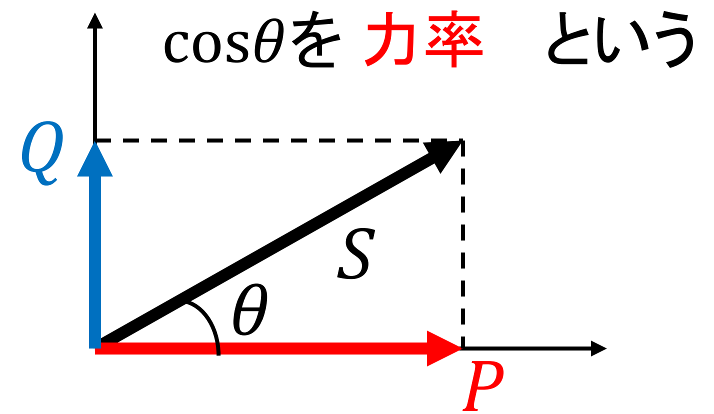
交流回路の電力

交流回路の電力

$S = V_e I_e$ [VA]　（ボルトアンペア）

$P = V_e I_e \cos\theta$ [W]　（ワット）

$Q = V_e I_e \sin\theta$ [var]　（バール）



S:　皮相電力　ベクトル図における見かけ上の電力

P:　有効電力　実際に負荷によって消費される電力

Q:　無効電力　電源と負荷を往復するだけの電力

交流回路において単に消費電力という時は 有効電力 をさす

θを 力率角 とよび、インピーダンスの位相角と同じである

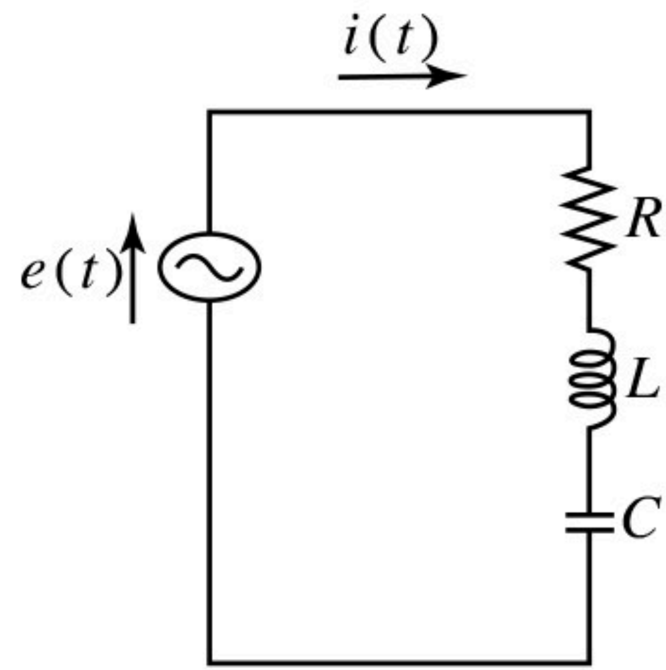
例題3 交流回路の電力

交流電源の最大値を$16\sqrt{2}$[V]を1/2π [Hz]、R=8[Ω]、L=15[H]、C=1/7[F]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。

（２）電流の式を求めよ。

（３）有効電力を求めよ。



例題３　解答

（１）インピーダンス

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{2\pi} = 1$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + \left(1\times 15 - \frac{1}{1\times \frac{1}{7}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{64 + (15-7)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 64}$$

$$= 8\sqrt{2}\ [\Omega]$$

$$tan\theta = \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \left(\frac{8}{8}\right) = \left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}\ [rad]$$

例題3　解答

（2）電流

$$\frac{E_m}{|Z|}\sin(t-\theta)=\frac{16\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

（3）電力

皮相電力 $P_a=\frac{I_m V_m}{2}=\frac{2\times 16\sqrt{2}}{2}=16\sqrt{2}$ [VA]

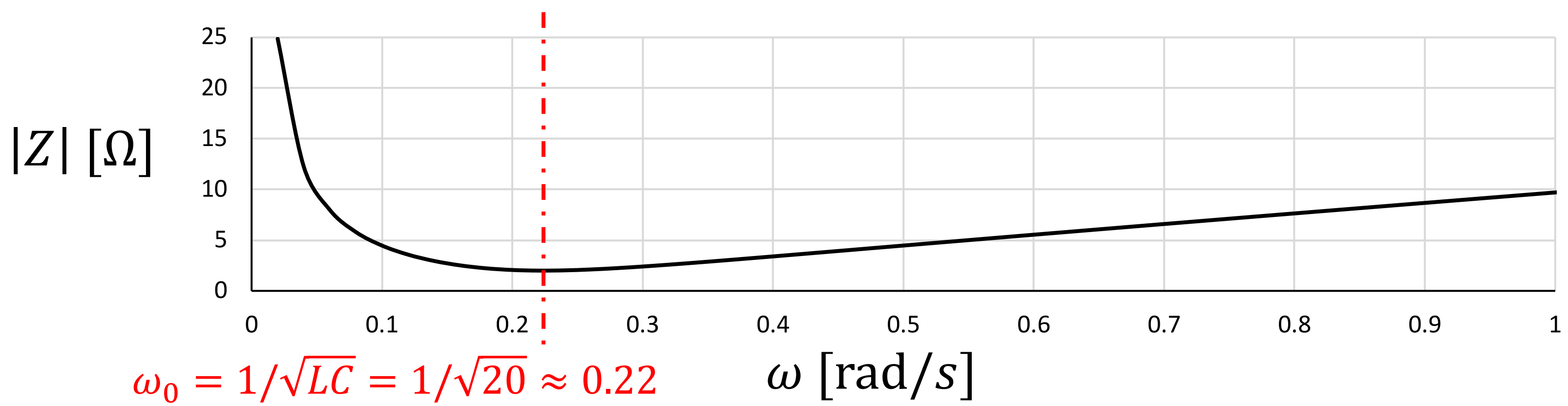
有効電力 $P_e=P_a\cos(\phi)=16\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=16\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=16\ [W]$

共振

RLC直列回路で、角周波数ωを変化させていったとき、
インピーダンスが最小となる瞬間がある。
この時の角周波数を 共振角周波数 、
周波数を 共振周波数 といい、それぞれ次の式で表す

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

共振周波数の時、交流回路の消費電力は 最大 になる



$R = 2, L = 10, C = 2$の時のRLC直列回路のインピーダンス

共振周波数とインピーダンス

共振周波数の時、インピーダンスのLとCの成分が打ち消し合い、0になる

そのため、共振周波数の時のインピーダンスは抵抗Rの成分のみとなる

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{C}\right)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{LC}}\frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{C}\frac{L}{L}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L\sqrt{LC}}{LC} - \frac{L\sqrt{LC}}{LC}\right)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + 0^2} = \sqrt{R^2} = R$$

また、位相差も

$$\theta = Tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = Tan^{-1}\frac{0}{R} = 0$$ になる

例題4　共振

L=5, C =0.1となっていたので修正しました。

RLC直列回路において、$R = 10[\Omega]$、$L = 8[H]$、$C = 0.5[F]$の時、次の問いに答えよ。

①消費電力が最大となる時の電源の周波数を答えよ

②　①の時のインピーダンスの大きさ$|Z|$を答えよ

例題4 解答

①消費電力が最大となる時の電源の周波数を答えよ

消費電力が最大となる時の周波数とは共振周波数のことである

したがって

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{8\times0.5}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4}} = \frac{1}{2\pi\times2} = \frac{1}{4\pi}\,[\mathrm{Hz}]$$

② ①の時のインピーダンスの大きさ$|Z|$を答えよ

$$|Z| = \mathrm{R} = 10\ [\Omega]$$

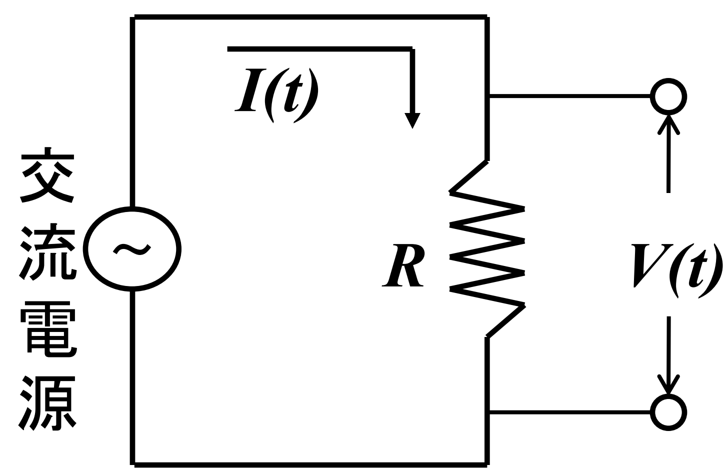
練習問題1

交流電源の最大値V_0を30[V]、周波数fを1/2π[s]とし、抵抗Rを10[Ω]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流のグラフをかけ

（３） π/4[s]後の電流の瞬時値を求めよ



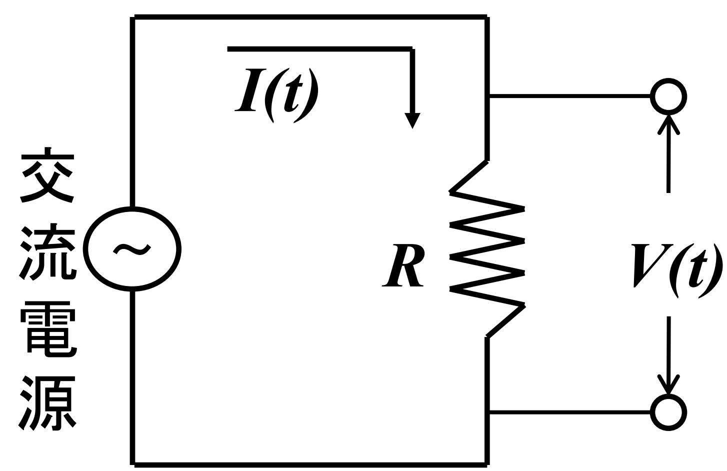
練習問題2

交流電源の最大値V_0を10[V]、周波数fを1/4π[s]とし、抵抗Rを6[Ω]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流のグラフをかけ

（３）π/4[s]後の電流の瞬時値を求めよ



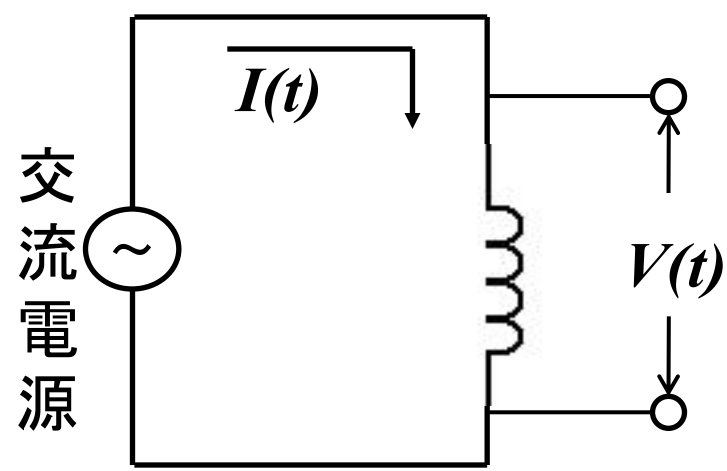
練習問題3

交流電源の最大値V_0を12[V]、周波数fを1/2π[s]とし、自己インダクタンスLを6[H]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流のグラフをかけ

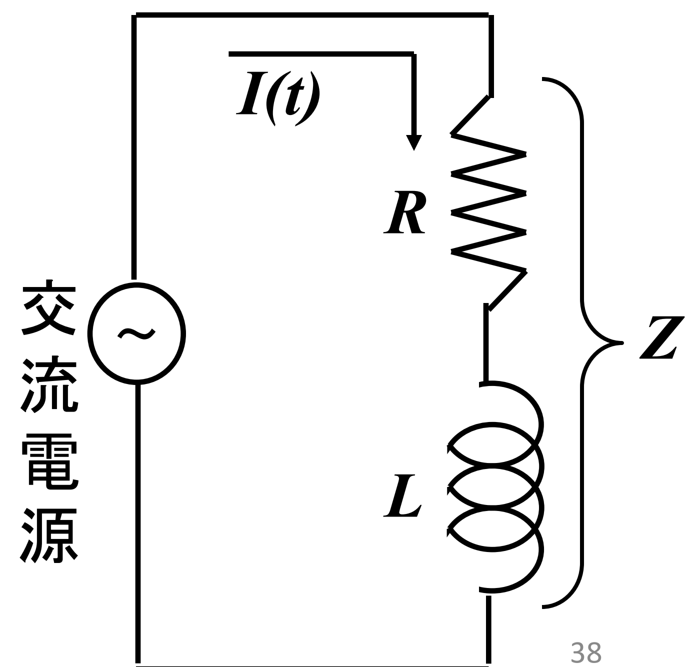
（３）π/6[s]後の電流の瞬時値を求めよ



練習問題4

抵抗Rを8 [Ω]自己インダクタンスLを9 [H]とし、
交流電源の周波数fを$1/2\pi$、最大電圧V_0を50 [V]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。
（２）電流の式をかけ。



練習問題５

交流電源の最大値を20 [V]周波数を1/2π[Hz]、R=10[Ω]、L=4[H]、C=1/8[F]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。

（２）電流の式を求めよ。

（３）電流の式を求めよ。

（４）有効電力を求めよ。

（５）共振周波数を求めよ。