医用工学概論

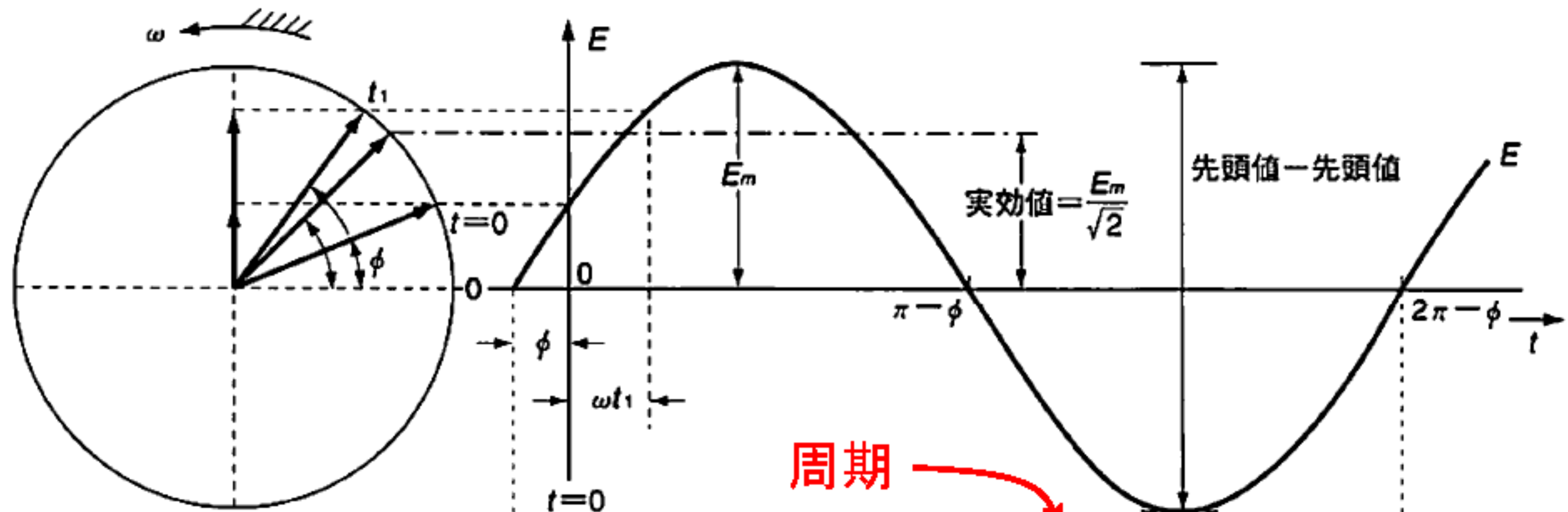
第7回
交流回路　続き

交流

角周波数

$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \phi)$$

振幅　　　位相



2π は，円を一周する角度

$$2\pi = \omega T$$

T は，円を一周する時間

周波数　$f = 1/T\,[\mathrm{Hz}]$

インピーダンス

電圧と電流の　振幅　の比

大きさ（振幅）を表す記号

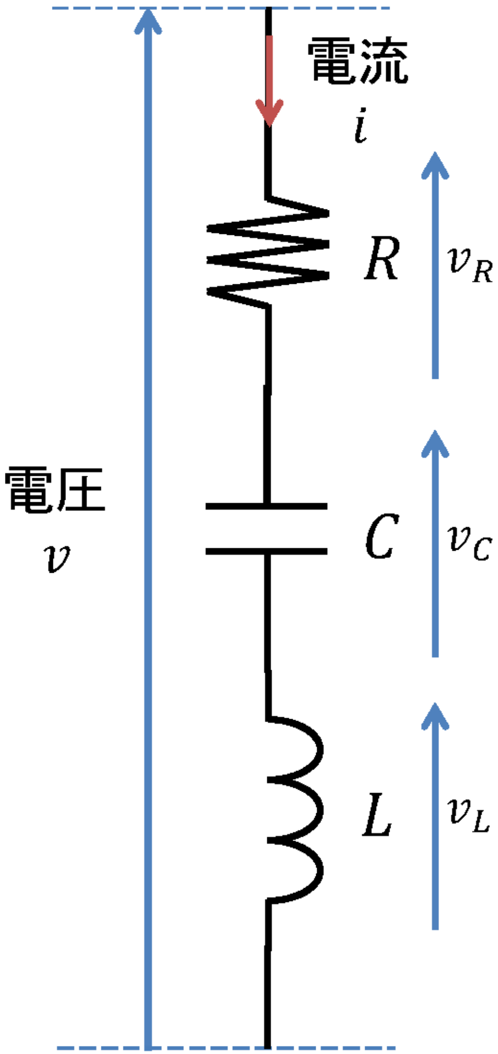
$$Z = \frac{|v|}{|i|} = \frac{V_m}{I_m}$$

例）$|\sin \omega t| = 1$

抵抗	$I_m = V_m/R$	$Z_R = R$
コンデンサ	$I_m = \omega C V_m$	$Z_C = 1/\omega C$
インダクタ	$I_m = V_m/\omega L$	$Z_L = \omega L$

コンデンサとインダクタのインピーダンスは，　周波数　によって変化する．

合成インピーダンス（R-C-L回路）

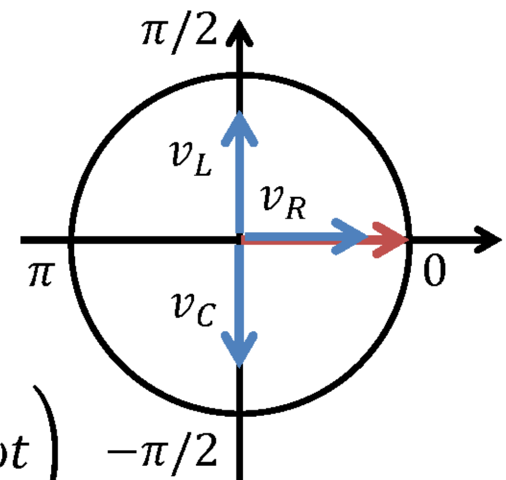


$$i = I_m \sin \omega t$$

$$v = Ri + \frac{1}{C}\int i dt + L\frac{di}{dt}$$

$$= I_m \left(R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \omega t \right)$$

$$= \underbrace{I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}_{V_m} \sin \left(\omega t + \underbrace{\tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\mathrm{R}} \right)}_{\phi} \right)$$



$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

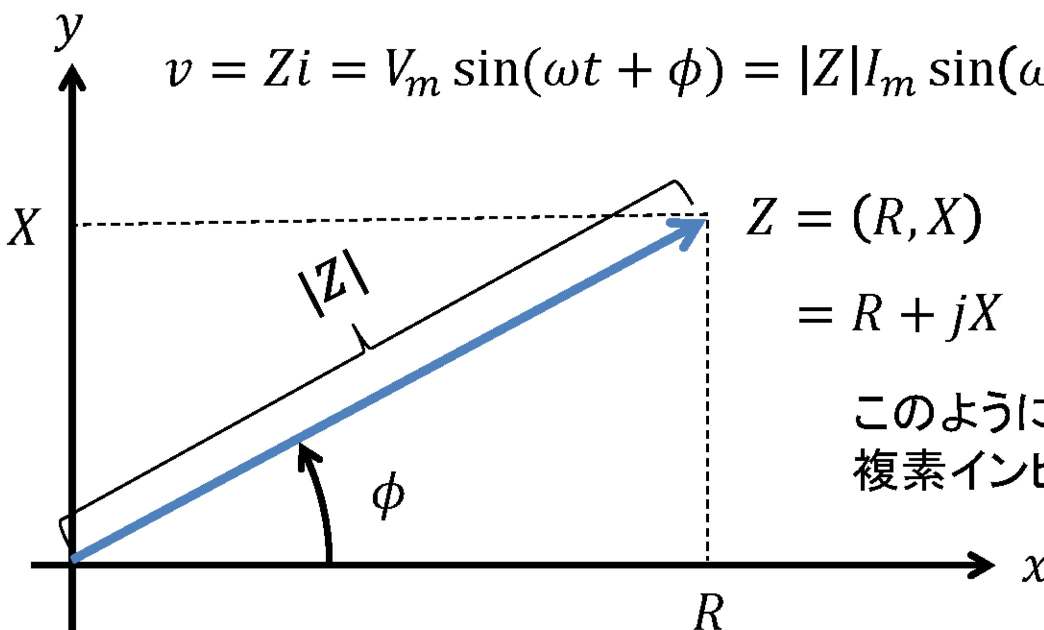
$$\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

参照）補助資料（数学）

ベクトルインピーダンス

インピーダンスの大きさと位相のずれを同時に表現する方法

$$v = Zi = V_m \sin(\omega t + \phi) = |Z| I_m \sin(\omega t + \angle Z)$$



$$Z = (R, X)$$
$$= R + jX \qquad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

このように表記したとき，
複素インピーダンスと呼ぶ．

大きさ

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

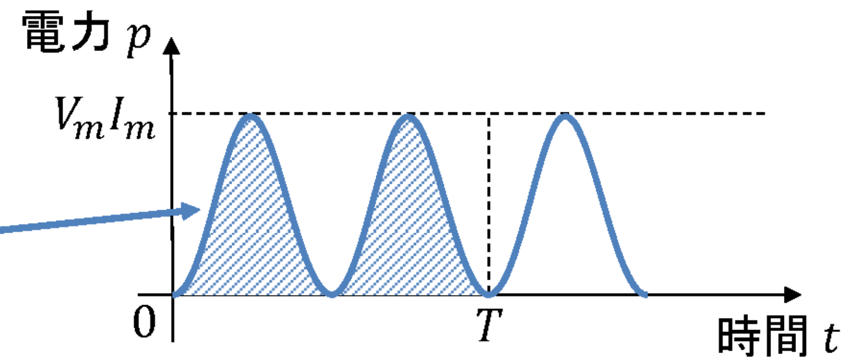
角度

$$\phi = \angle Z = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

平均電力（位相ずれなしの場合）

負荷（抵抗）に伝達される（平均的な）エネルギー

瞬間電力　$p = vi = V_m I_m \sin^2 \omega t$



平均電力　$P = \dfrac{1}{T} \boxed{\displaystyle\int_0^T p dt}$

単位時間あたりの電力量

$$= \frac{V_m I_m}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt$$

$$= \frac{V_m I_m}{2T} \left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t \, dt \right)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}$$

$$\int_0^T dt = T$$

$$\int_0^T \cos 2\omega t \, dt = 0$$

平均電力（位相ずれありの場合）

負荷（抵抗）に伝達される（平均的な）エネルギー

$$\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T vi dt$$

$$\because R = |Z|\cos\phi$$

瞬間電力　$p = vi = V_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t + \phi)$

平均電力　$P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt$

単位時間あたりの電力量

$$= \frac{V_m I_m}{T}\int_0^T \frac{\cos\phi + \cos(2\omega t + \phi)}{2}$$

$$= \frac{V_e I_e}{T}\left(\cos\phi \int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t + \phi) dt\right)$$

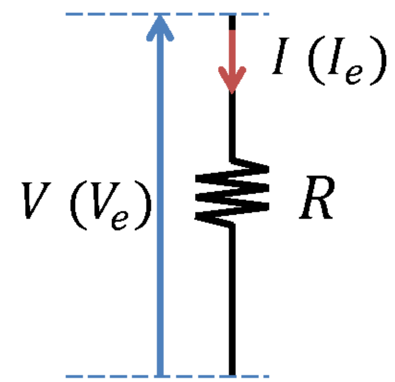
$$= V_e I_e \cos\phi$$

実効値

抵抗負荷において，平均電力が　直流の場合　と同じになるような電流（電圧）値

直流　$P = VI = I^2R = V^2/R$

交流　$P = V_e I_e = \dfrac{V_m I_m}{2}$



電圧の実効値　$V_e = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}$

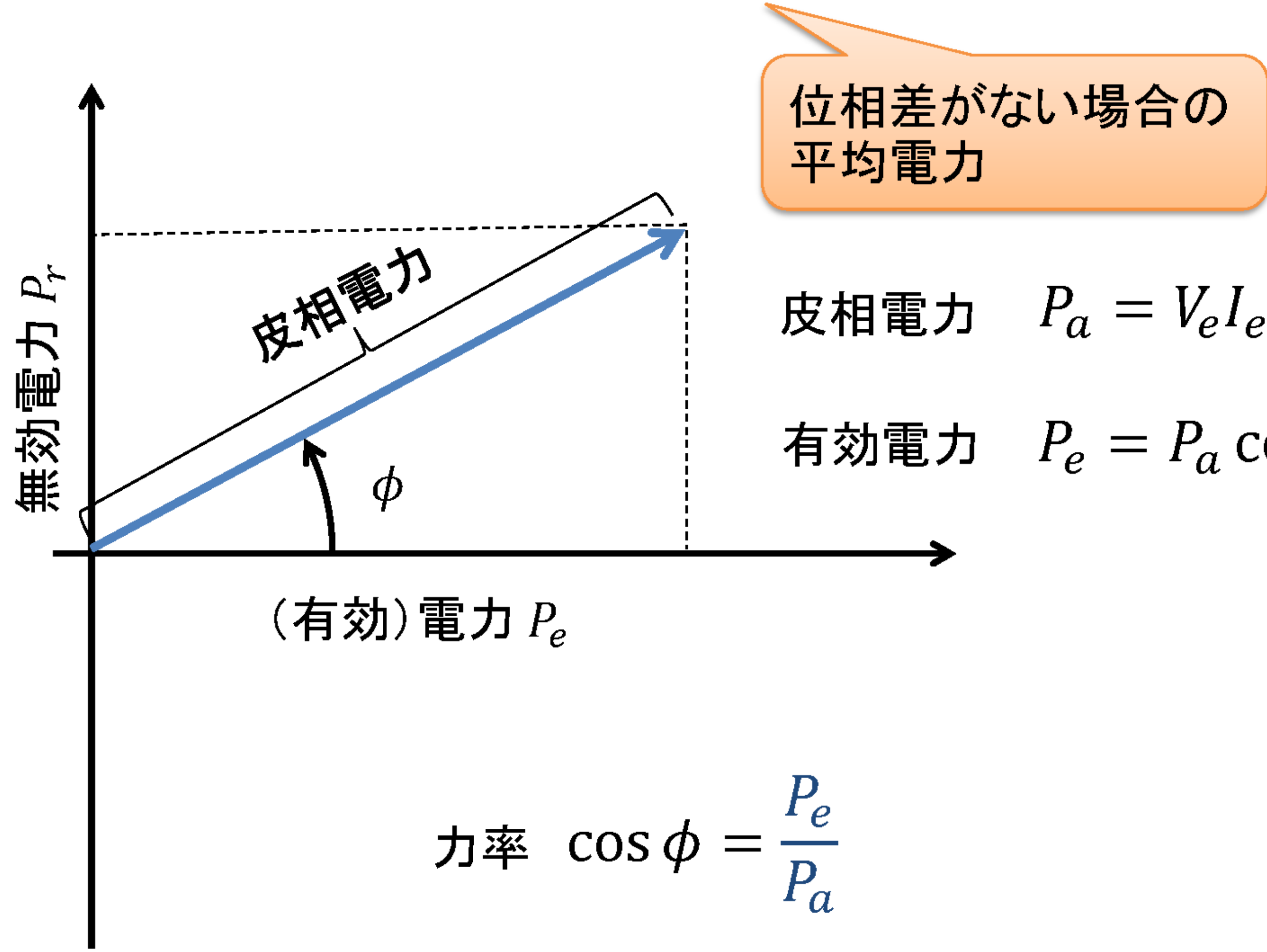
電流の実効値　$I_e = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

商用交流は、実効値で表示される.

電源電圧 100V の場合，波形の最大値（振幅）V_m はおよそ 141V

力率

電流と電圧に位相差があるときの最大値に対する平均電力の割合



皮相電力 $P_a = V_e I_e$ [VA]

有効電力 $P_e = P_a \cos\phi$ [W]

力率 $\cos\phi = \dfrac{P_e}{P_a}$

例題1

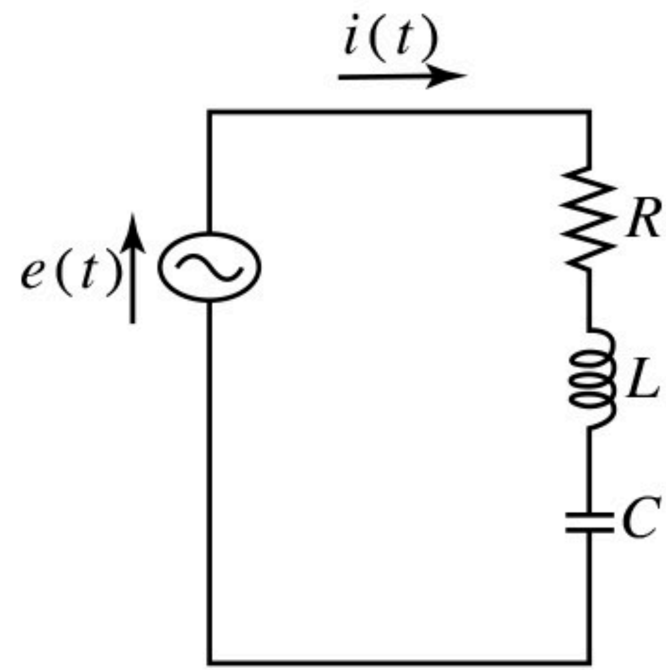
交流電源の最大値を$16\sqrt{2}$[V]を1 [Hz]、R=8[Ω]、L=15/2π[H]、C=1/14π[F]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。

（２）電流の式を求めよ。

（３）電流のグラフをかけ。

（４）有効電力、皮相電力を
　それぞれ求めよ。



例題1　解答

（1）インピーダンス

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + \left(2\pi \times \frac{15}{2\pi} - \frac{1}{2\pi \frac{1}{14\pi}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{64 + (15 - 7)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 64}$$

$$= 8\sqrt{2}\ [\Omega]$$

$$\phi = Tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}\ [rad]$$

例題1　解答

（2）電流

$$\frac{E_m}{|Z|}\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

（3）電力

皮相電力 $P_a=\frac{I_m V_m}{2}=\frac{2\times 16\sqrt{2}}{2}=16\sqrt{2}$ [VA]

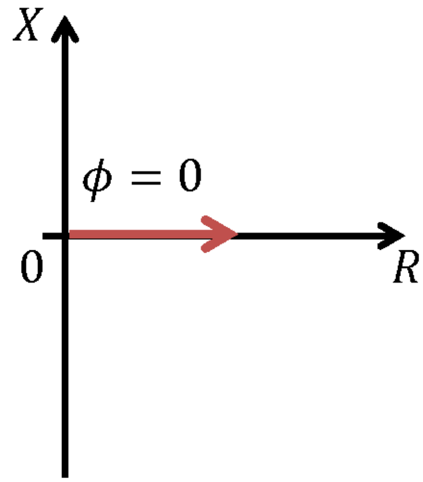
有効電力 $P_e=P_a\cos(\phi)=16\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=16\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=16\ [W]$

共振

交流電圧(電流)の　**周波数**　が変化することによって,

伝達される(平均)エネルギーが最大(最大電力)になる現象

⇒ 力率 $\cos\phi$ が最大$(=1)$になるとき



$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$\omega = 2\pi f$

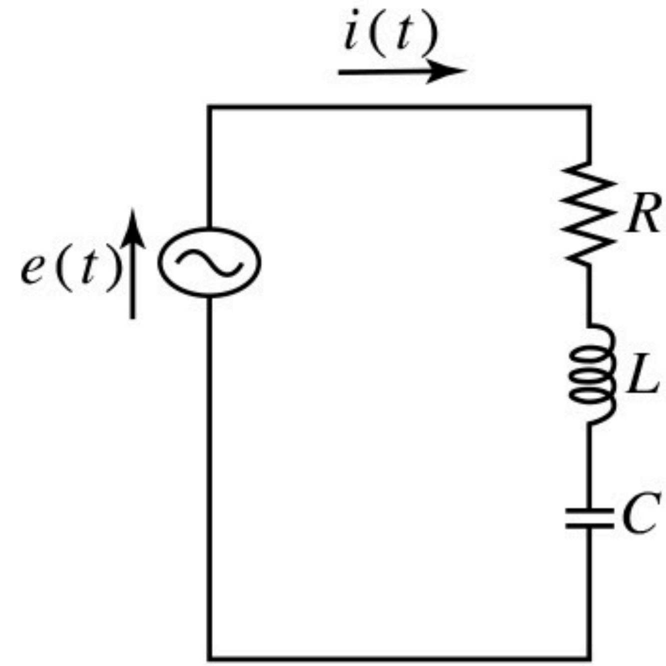
共振周波数　$f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

例題3

図の交流回路で R=8[Ω]、
L=40[H]、C=0.1[F]とする。

（1）共振周波数を求めよ

（2）共振周波数の時のインピーダンス$|Z|$を求めよ。



例題3　解答

図の交流回路で R=8[Ω]、L=40[H]、C=0.1[F]とする。

（1）共振周波数

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{40\times 0.1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4}} = \frac{1}{4\pi}$$

（2）インピーダンス

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{64 + \left(\frac{1}{2}\times 40 - \frac{1}{\frac{1}{2}\times 0.1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{64 + \left(20 - \frac{2}{0.1}\right)^2} = \sqrt{64 + (20-20)^2} = \sqrt{64} = 8$$

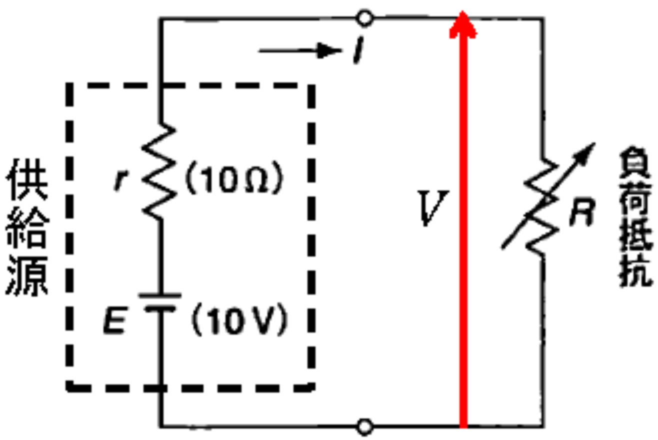
Rのみのインピーダンス
と等しくなる

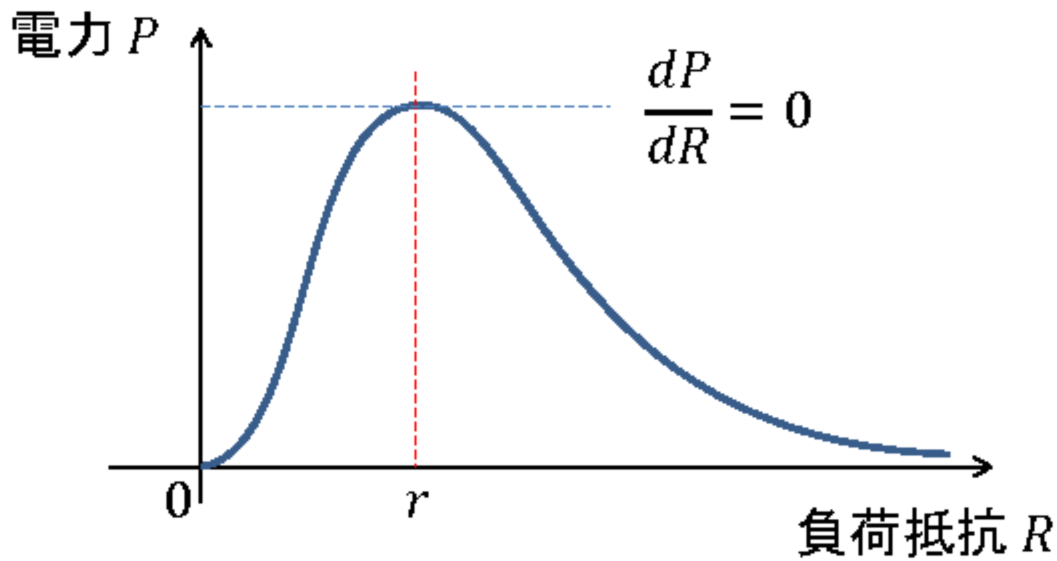
電気回路の補足

補足：インピーダンスマッチング

負荷に，　**最大電力**　を供給するための方法

負荷抵抗 R に供給される電力　$P=VI=\dfrac{R}{(R+r)^2}E^2$





関数の微分

$$\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right)$$

$g(x) = u$とおく

$$\boxed{\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right) = \frac{d}{du}f(u)\times\frac{d}{dx}g(x)}$$

例

$$\frac{d}{dx}(10+2x)^3$$

$u = 10 + 2x^2$とおく

$$\frac{d}{dx}(10+2x)^3 = \frac{d}{du}u^3\times\frac{d}{dx}(10+2x) = 3u^2\times 2 = 6u^2$$
$$= 6(10+2x)^2$$

積の微分

$$\boxed{\left(f(x)g(x)\right)' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'}$$

例

$$(\mathrm{x} \cdot \ln x)' = x' \cdot \ln x + x \cdot \ln x' = \ln x + x\frac{1}{x}$$

$$= \ln x + 1$$

商の微分（分数関数の微分）

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g(x)'}{g(x)^2}}$$

例

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{x\ln x' - x'\ln x}{x^2} = \frac{x\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

問題　次の導関数を求めよ

（１）$\sin(2x)$

（２）$x\cos(x)$

（３）$\tan(x)$

解答

（１）$\sin(2x)' = \frac{d}{du}\sin(u) \times \frac{d}{dx}2x$

$$= \cos(u) \times 2 = 2\cos(2x)$$

（２）$x\cos(x)' = \mathrm{x}'\cos(\mathrm{x}) + \mathrm{x}\cos(\mathrm{x})'$

$$= \cos(\mathrm{x}) - \mathrm{x}\sin(\mathrm{x})$$

（３）$\tan(x)' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin(x)'\cos(x) - \sin(x)\cos(x)'}{\cos^2(x)}$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

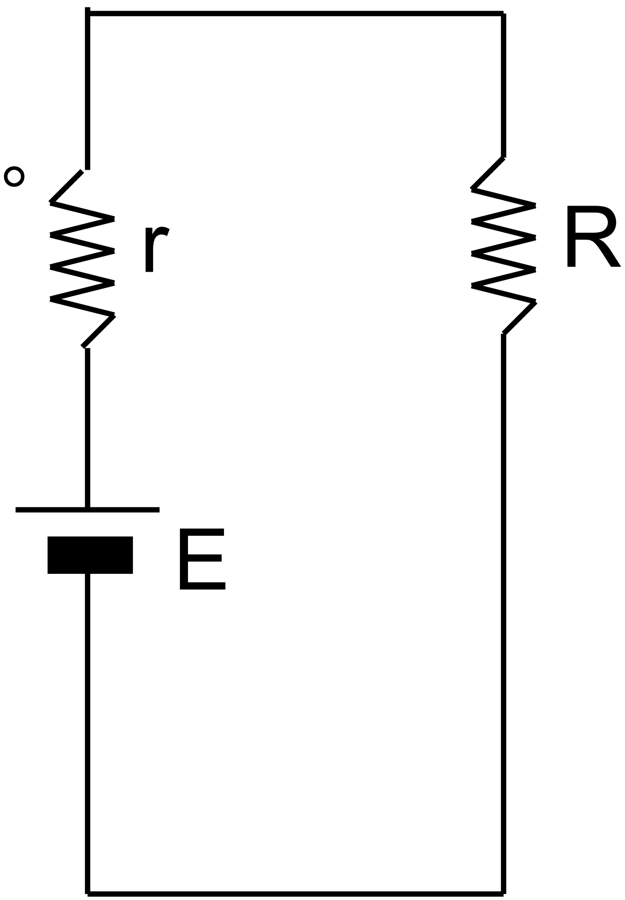
例題

図の回路においてrは電源Eの内部抵抗、Rは回路に接続された負荷を表す。

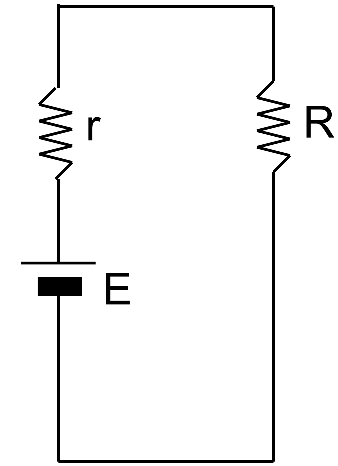
（１）負荷Rの消費電力の式を求めよ

（２）負荷Rに最大電力が供給される時のRの式を求めよ。

（３）r=1、E=10とした時の負荷Rにおける最大電力を求めよ。



例題　解答



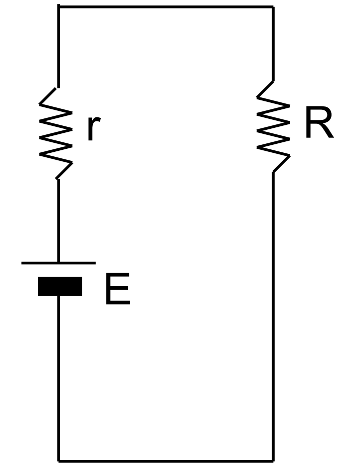
（1）

$$P = VI = RI\,I = RI^2$$

$$I = \frac{E}{r + R}$$

$$P = RI^2 = R\frac{E^2}{(r + R)^2} = E^2\frac{R}{(r + R)^2}$$

例題　解答



（2）最大電力を得る負荷抵抗R_{max}は

$$\frac{\partial P}{\partial R}=0$$

を解くことで求めることができる。

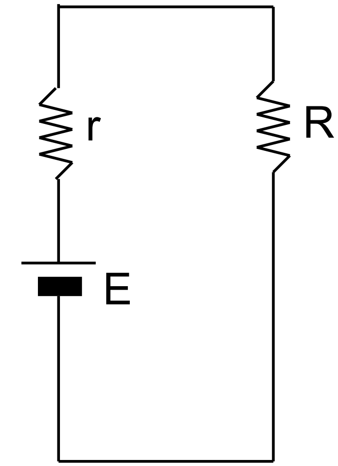
$$\frac{\partial P}{\partial R}=\frac{\partial}{\partial R}\left(E^2\frac{R}{(r+R)^2}\right)=E^2\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{R}{(r+R)^2}\right)$$

$$=E^2\left(\frac{(r+R)^2\frac{\partial}{\partial R}R-R\frac{\partial}{\partial R}(r+R)^2}{(r+R)^4}\right)$$

$$=E^2\left(\frac{(r+R)^2-2R(r+R)}{(r+R)^4}\right)$$

$$=E^2\left(\frac{(r+R)-2R}{(r+R)^3}\right)=E^2\left(\frac{r-R}{(r+R)^3}\right)=\frac{(r-R)}{(r+R)^3}E^2$$

例題　解答



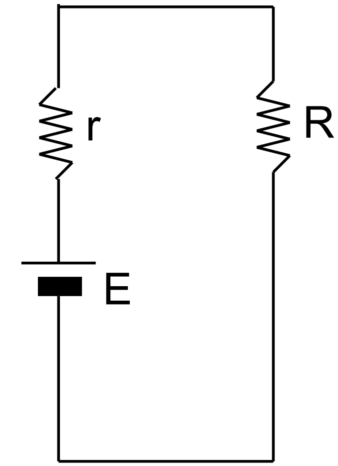
$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{(r - R)}{(r + R)^3} E^2 = 0$$

$$(r - R)E^2 = 0$$

$$(r - R) = 0$$

$$r = R$$

例題　解答



（3）

$$P = E^2 \frac{R}{(r+R)^2} = E^2 \frac{r}{(r+r)^2}$$

$$= E^2 \frac{r}{(2r)^2} = E^2 \frac{r}{4r^2} = E^2 \frac{1}{4r} = \frac{10^2}{4 \times 1} = \frac{100}{4}$$

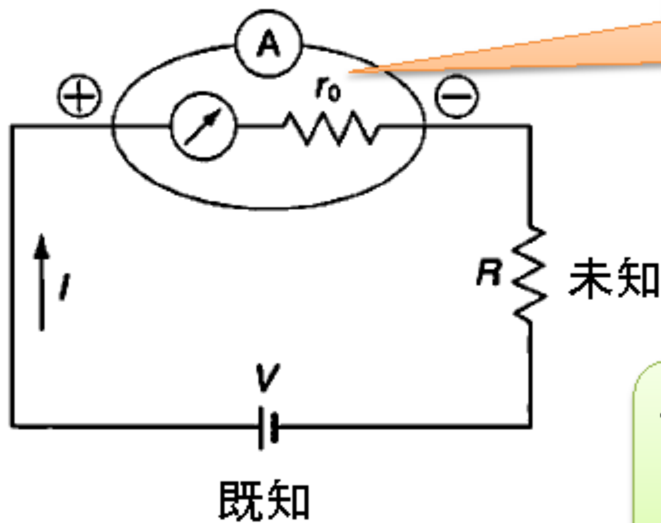
$$= 25[W]$$

電流計

測りたい電流が流れる区間に　**直列**　に接続する.

メータの示す電流値

$$I_A = \frac{1}{r_0 + R} V$$



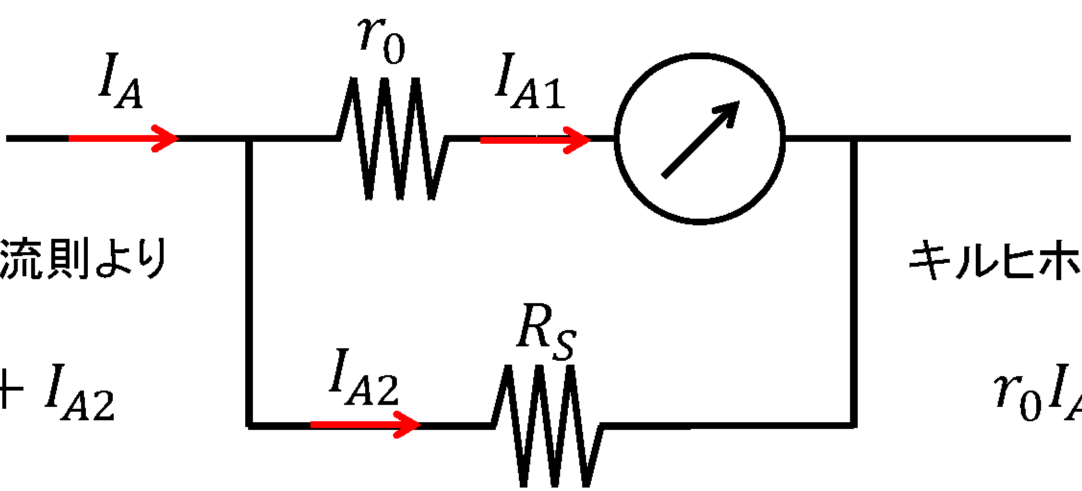
内部抵抗

例）電圧が既知の場合，電流が分かれば抵抗も分かる.

電流を正しく測るためには，$r_0 \ll R$ であることが必要.
（＝動作を邪魔しない）

分流器

電流計　の測定範囲を広げるために用いる抵抗器



分流器

キルヒホッフの電流則より

$$I_A = I_{A1} + I_{A2}$$

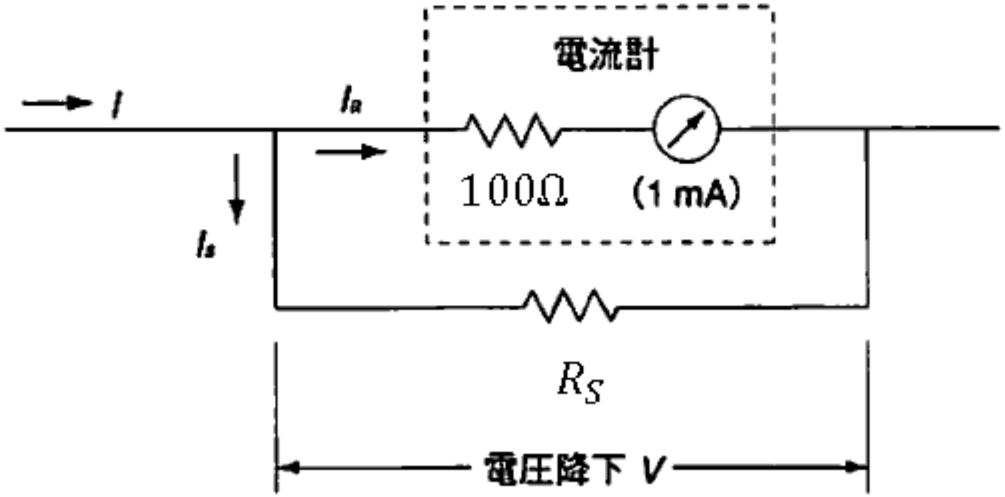
キルヒホッフの電圧則より

$$r_0 I_{A1} = R_S I_{A2}$$

$$(\text{倍率}) = \frac{I_A}{I_{A1}} = \frac{I_{A1} + I_{A2}}{I_{A1}} = 1 + \frac{r_0}{R_S}$$

（計算例）

100mAの電流まで測れるようにする分流器は何Ωか．



分流器 $R_S = \frac{100}{99}\Omega$

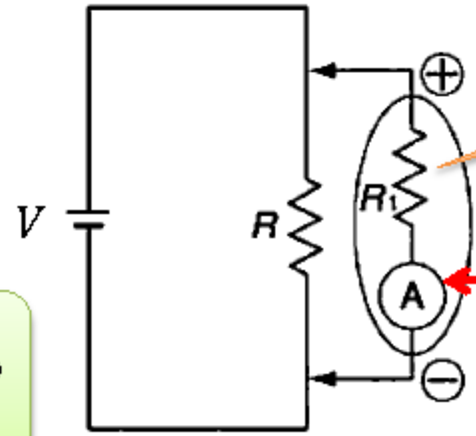
電圧計

測りたい電圧が加わる区間に　**並列**　に接続する.

内部抵抗

メータの示す電圧値

$$V_A = (R_1 + r_0)I_A$$



電流計
（内部抵抗 r_0）

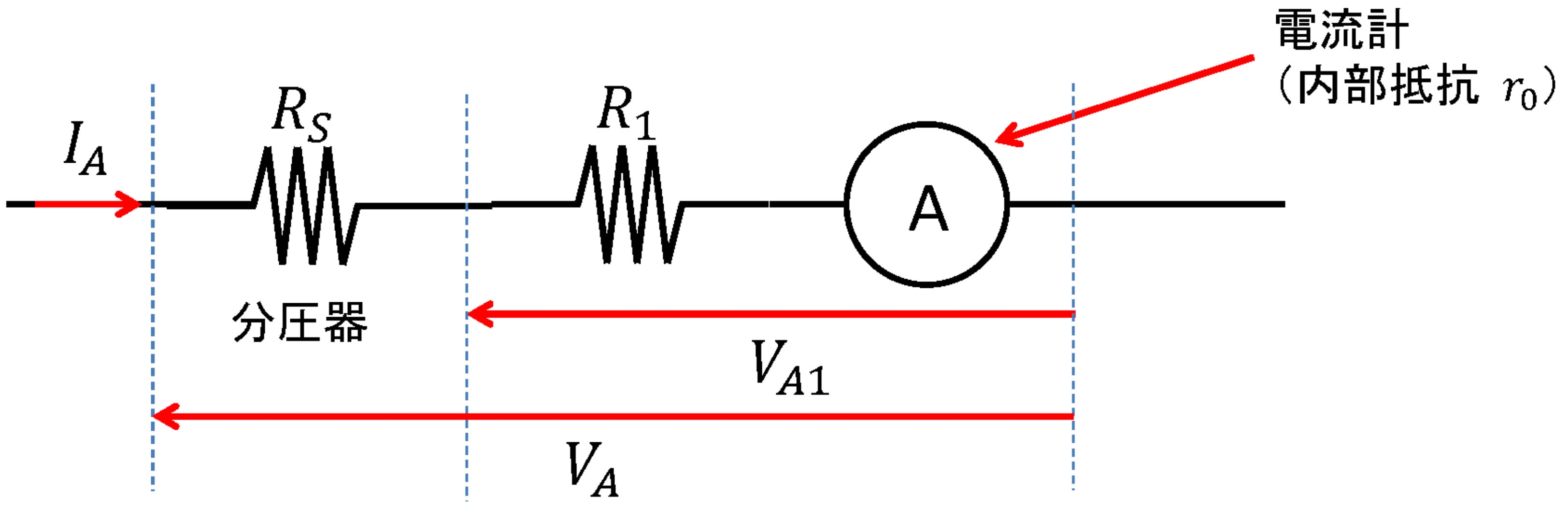
メータに流れる電流はできる限り小さいほうがよい.

電圧を正しく測るためには,　$R_1 \gg r_0$　であることが必要.

動作を邪魔しないためには,　$R_1 \gg R$　であることが必要.

分圧器

電圧計　の測定範囲を広げるために用いる抵抗器



$$(\text{倍率}) = \frac{V_A}{V_{A1}} = 1 + \frac{R_S}{R_1 + r_0}$$

練習問題1

（１）交流電源$e = 5\sin(\omega t + \phi)$の実効値を求めよ。

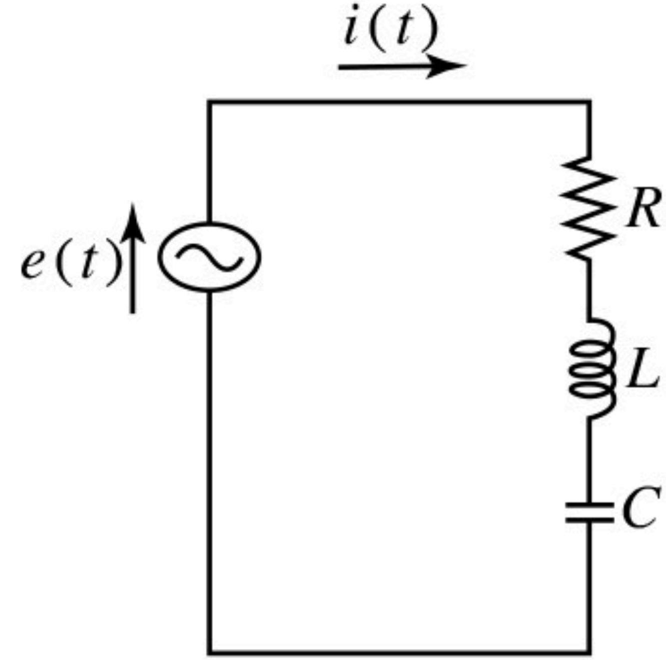
（２）商用電源100Vは電圧の実効値を表している。この時振幅はいくつになるか。

練習問題2

図の交流回路で R=10[Ω]、L=80[H]、C=0.2[F]とする。

（1）共振周波数を求めよ

（2）共振周波数の時のインピーダンス|Z|を求めよ。



練習問題3

図の回路においてrは電源Eの内部抵抗、可変抵抗Rは回路に接続された負荷を表す。

（１）r=10、E=100とした時の負荷Rにおける最大電力を求めよ。

（２）負荷抵抗Rに並列で固定抵抗R_fを取り付けた。RとR_fの合成抵抗をR_xとした時、R_xで消費される最大電力を求めよ。ただし、Rf=20とする。