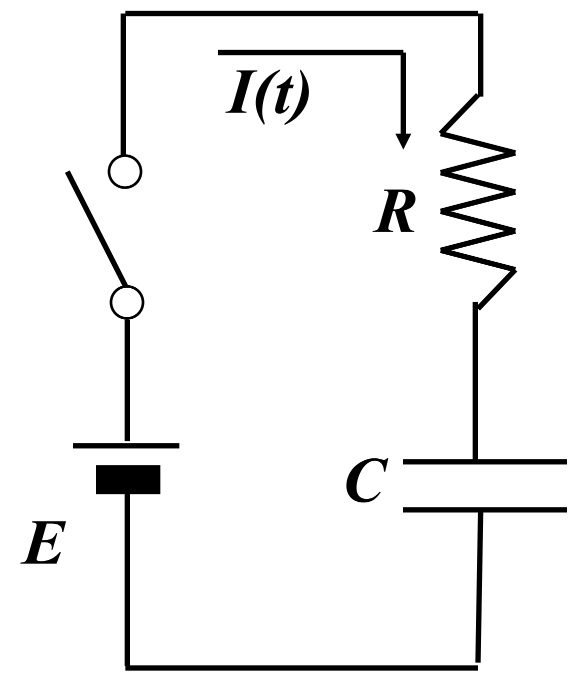
医用工学概論

第6回
電気の基礎3（交流回路）

確認問題1

電池の起電力E=32 [V]、抵抗R=4 [Ω]

コンデンサの静電容量C=5 [F]



(1)時定数τの値を求めよ。

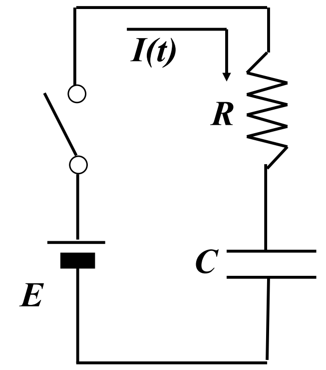
(2)抵抗に加わる電圧、電流のグラフを描け。グラフには電圧、電流の最大値、時定数、時定数の時の電圧、電流の値を明確に示せ。

確認問題1　解答

E=32 [V]

R=4 [Ω]

C=5 [F]



(1)時定数τの値を求めよ。

$$\color{red}{\tau = CR} = 5\times 4 = 20\ [\mathrm{s}]$$

(2) 電圧、電流のグラフ

$$v(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

電圧

$t = 0$の時抵抗に加わる電圧は$E[V]$

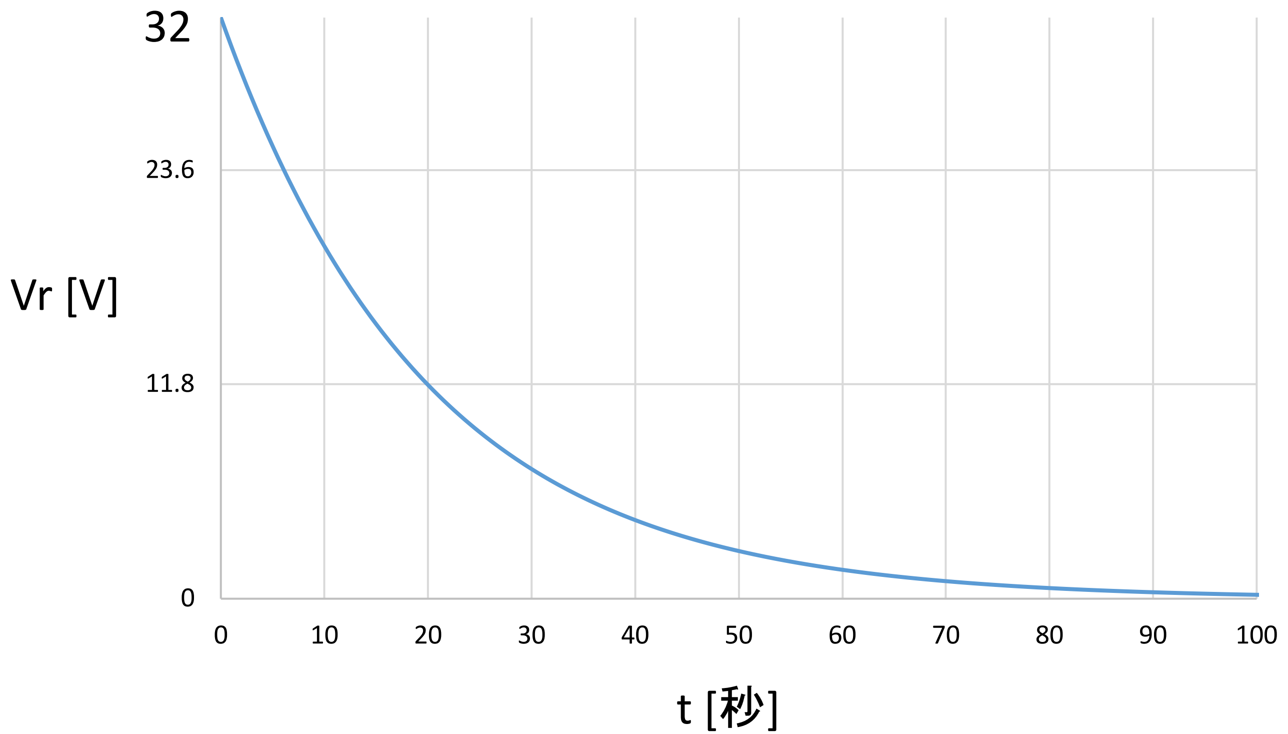
$t \to \infty$の時、抵抗に加わる電圧は$0[V]$

電流

$t = 0$の時　$i(t) = \dfrac{E}{R}$　　　$t \to \infty$の時　$i(t) = 0$

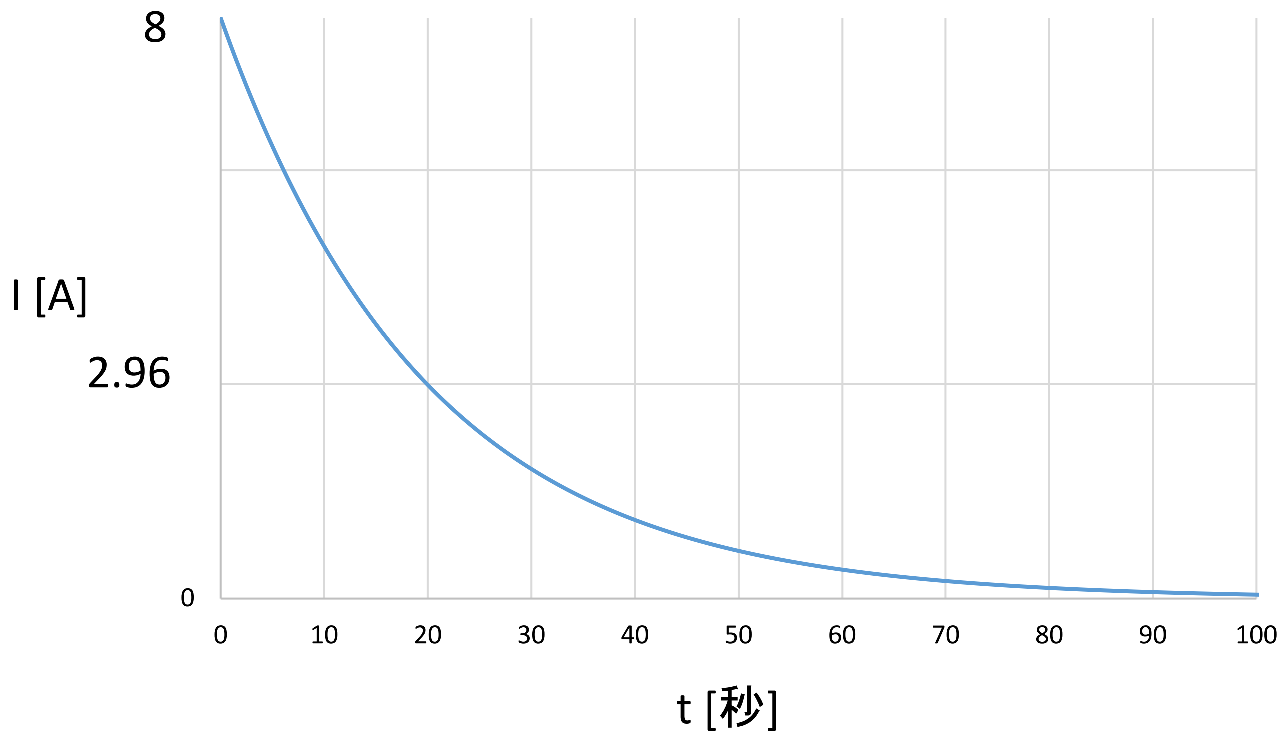
確認問題1　解答

$$\tau = 20, \qquad v(\tau) = 32 \times 0.37 = 11.84$$



確認問題1　解答

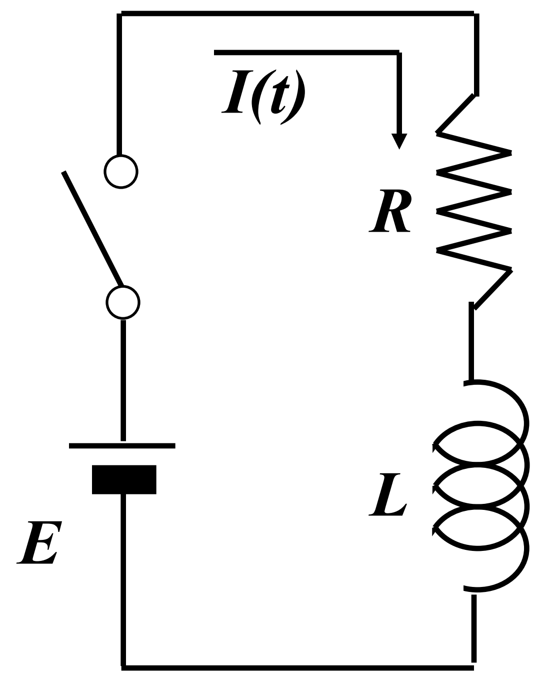
$$\tau = 20, \qquad i(\tau) = \frac{11.84}{R} = \frac{11.84}{4} = 2.96$$



確認問題2

電池の起電力$\boldsymbol{E}$=20 [V]、抵抗$\boldsymbol{R}$=5 [Ω]

コイルの自己インダクタンス$\boldsymbol{L}$=15 [H]

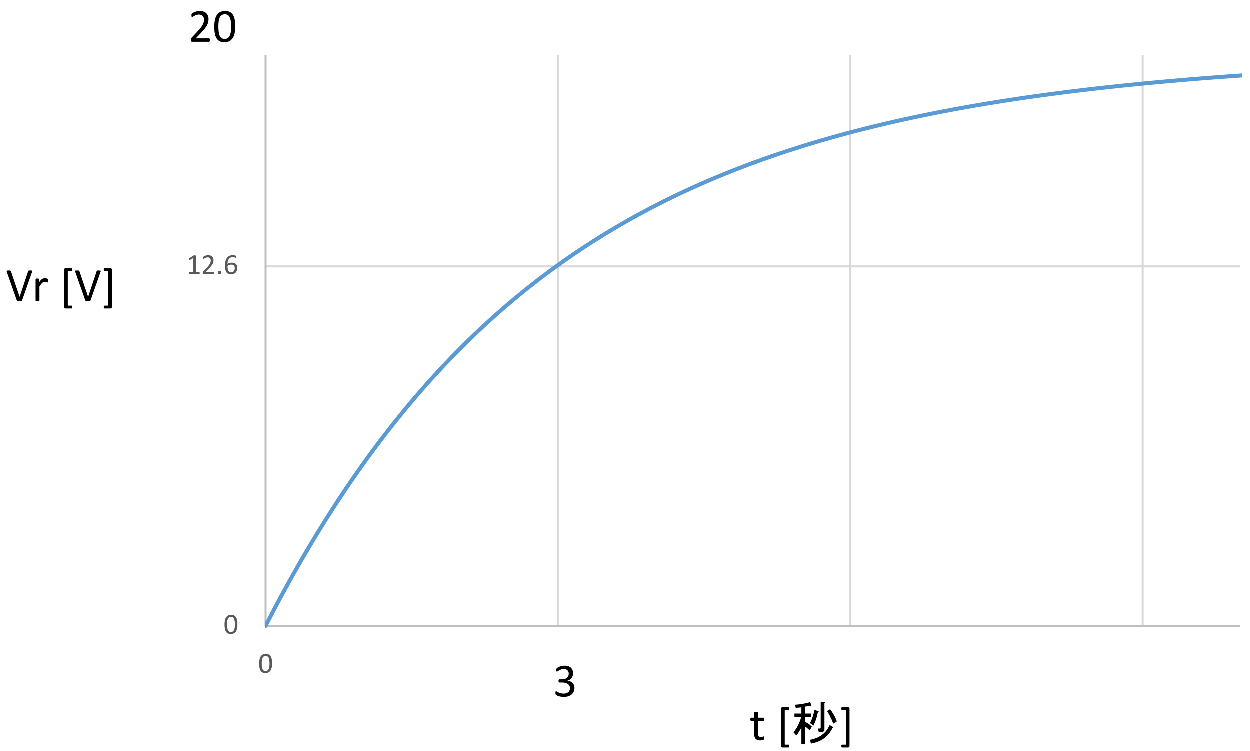


(1)時定数$\boldsymbol{\tau}$の値

(2)抵抗に加わる電圧、電流のグラフを描け。グラフには電圧、電流の最大値、時定数、時定数の時の電圧、電流の値を明確に示せ。

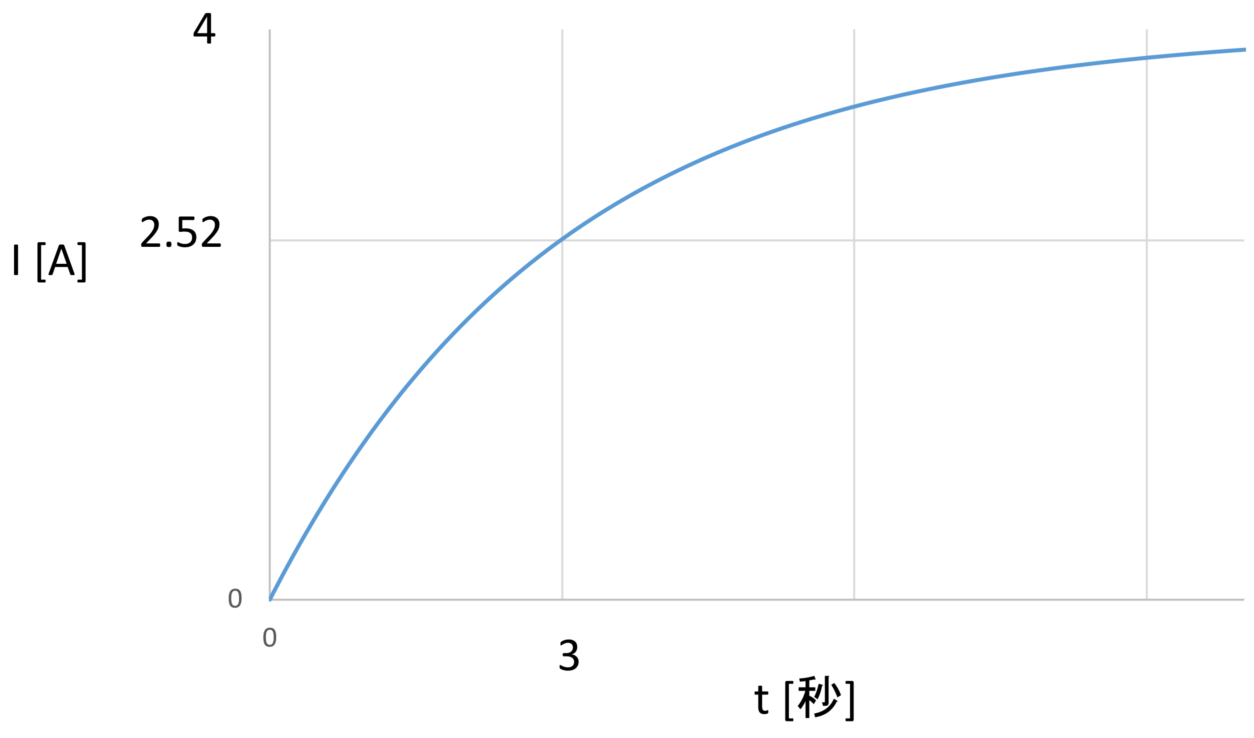
確認問題2　解答

$$\tau = \frac{L}{R} = 3, \qquad v(\tau) = 20\times 0.63 = 12.6$$



確認問題2　解答

$$\tau = \frac{L}{R} = 3, \qquad i(\tau) = 4 \times 0.63 = 2.52$$



確認問題3

右図の様な回路を作成した。

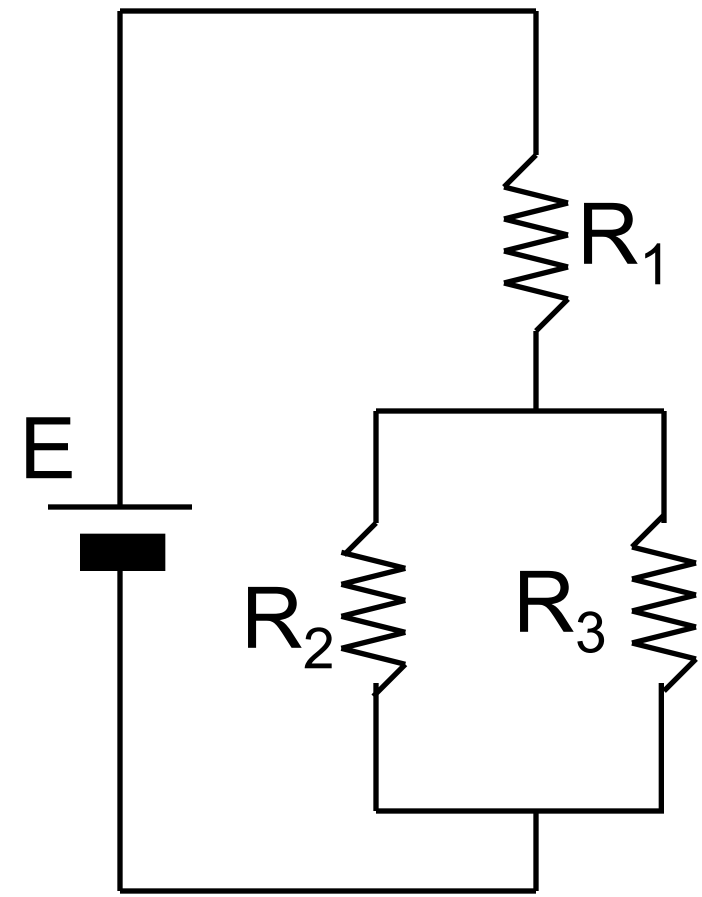
全体の合成抵抗Rを求めよ。

$R_1=20$, $R_2=10$, $R_3=10[\Omega]$

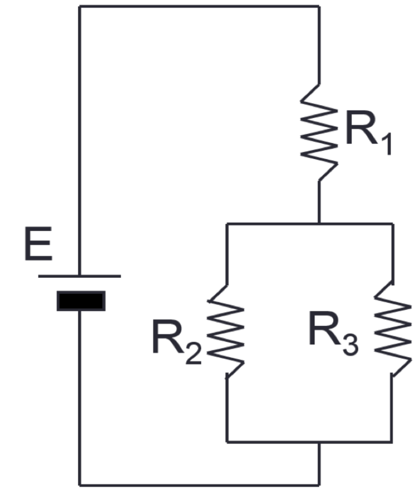
電池電圧を$E = 100[V]$として、

（1）全体の電力Pを求めよ。

（2）R_2で1000 [J]の熱量を発生させるには何秒間電流を流せば良いか。



確認問題3　解答



（1）消費電力

$$P = VI$$

①並列部分（下半分）

$$R_{23} = \frac{積}{和} = \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10 \times 10}{10 + 10} = \frac{100}{20} = 5$$

②直列部分（全体）

$$R_{123} = R_1 + R_{23} = 20 + 5 = 25$$

消費電力

$$I = \frac{V}{R} = \frac{E}{R_{123}} = \frac{100}{25} = 4, \qquad P = VI = EI = 100 \times 4 = 400\ [W]$$

確認問題３　解答

（２）熱量

$$\mathrm{H} = P \times t = VI \times t$$

$$V_2 = V_3 = E - V_1 = E - R_1 I = 100 - 20 \times 4 = 100 - 80 = 20$$

R1の消費電力

$$I_2 = V_2 / R_2 = \frac{20}{10} = 2\ [A]$$

$$P_2 = V_2 I_2 = 20 \times 2 = 40\ [W]$$

R1の発熱量

$$H_2 = P_2 \times t$$

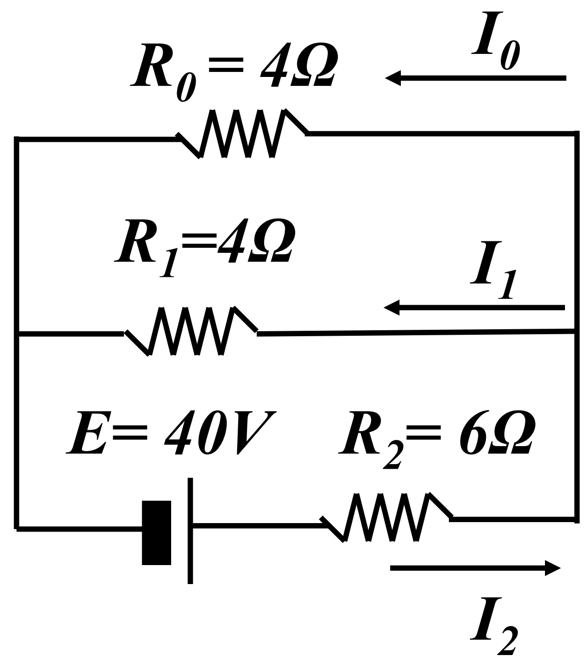
$$1000 = 40t$$

$$t = 25\ [秒]$$

確認問題4

キルヒホッフの法則を使って

抵抗R_0を流れる電流I_0を求めよ。



確認問題4　解答

キルヒホッフの法則から、方程式を3つたてる

$$I_2 = I_0 + I_1 \qquad (1)$$
$$E = I_1R_1 + I_2R_2 \rightarrow 40 = 4I_1 + 6I_2 \qquad (2)$$
$$E = I_0R_0 + I_2R_2 \rightarrow 40 = 4I_0 + 6I_2 \qquad (3)$$

3つの変数に対して方程式が3つあるので解ける

(1)より$I_0 = I_2 - I_1$を(3)に代入

$$40 = 10I_2 - 4I_1 \quad (4)$$

$(4) + (2)$

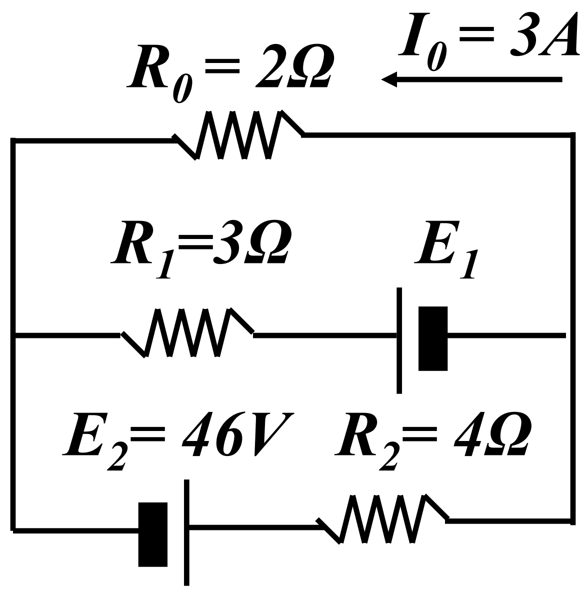
$$40 + 40 = 10I_2 + 6I_2 \rightarrow I_2 = 5\ [\mathrm{A}]$$

I_2を(3)に代入

$$40 = 4I_0 + 5\times 6 \rightarrow I_0 = 2.5\ [\mathrm{A}]$$

確認問題5

電池の起電力 E_1 は何Vか？



確認問題５　解答

キルヒホッフの法則から、方程式を3つたてる

$$I_2 = I_0 + I_1 = 3 + I_1 \qquad (1)$$

$$E_1 + E_2 = I_1 R_1 + I_2 R_2 \rightarrow E_1 + 46 = 3I_1 + 4I_2 \quad (2)$$

$$E_2 = I_0 R_0 + I_2 R_2 \rightarrow 46 = 3\times 2 + 4I_2 \qquad (3)$$

(3)より

$$I_2 = 10\ [\mathrm{A}]$$

(1)に代入

$$I_1 = 7\ [\mathrm{A}]$$

(2)に代入

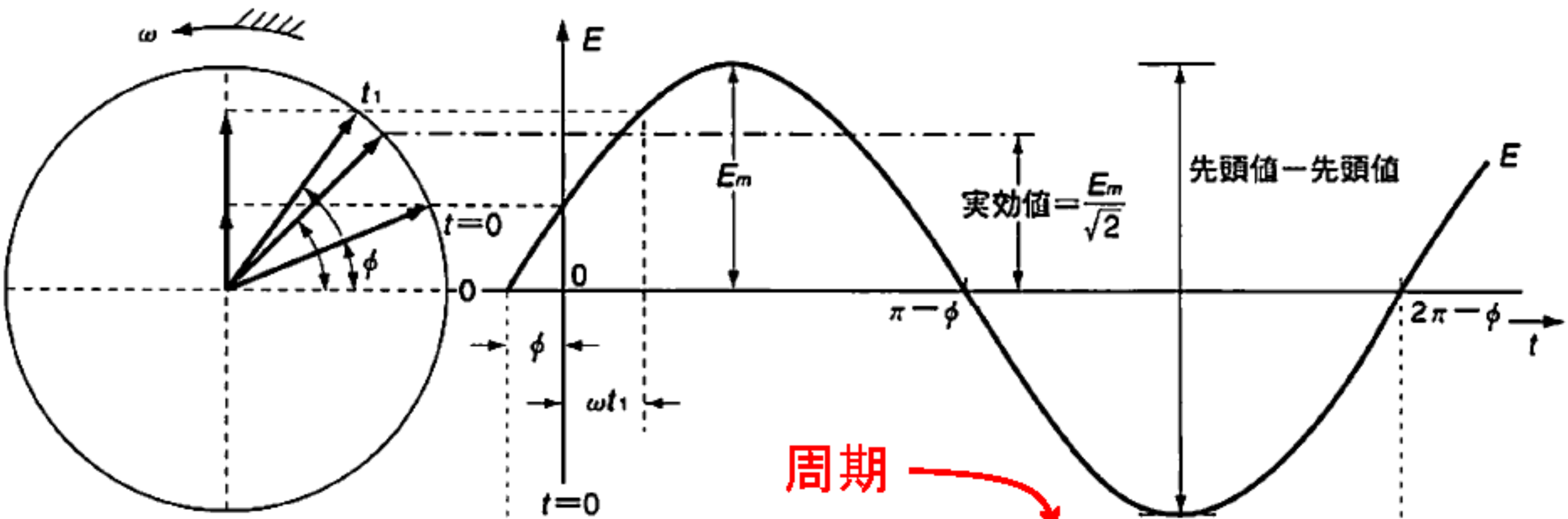
$$E_1 + 46 = 3\times 7 + 4\times 10 \rightarrow E_1 = 15\ [\mathrm{V}]$$

交流

角周波数

$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \phi)$$

振幅　　位相

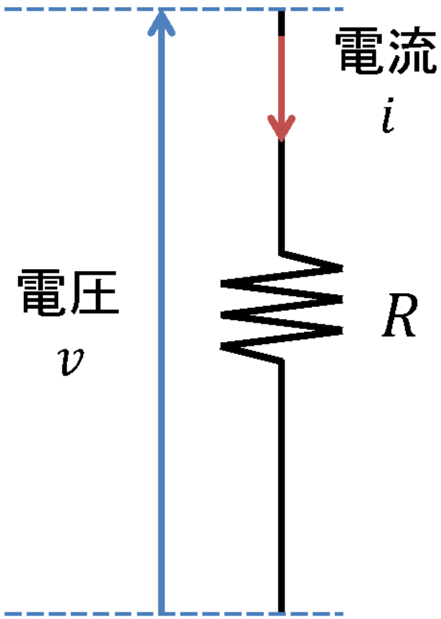


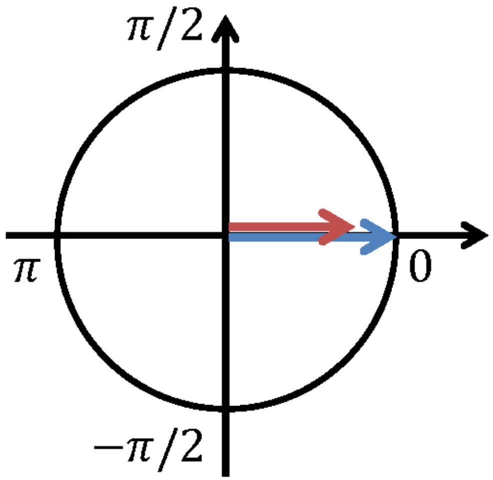
2π は，円を一周する角度　　$2\pi = \omega T$

T は，円を一周する時間

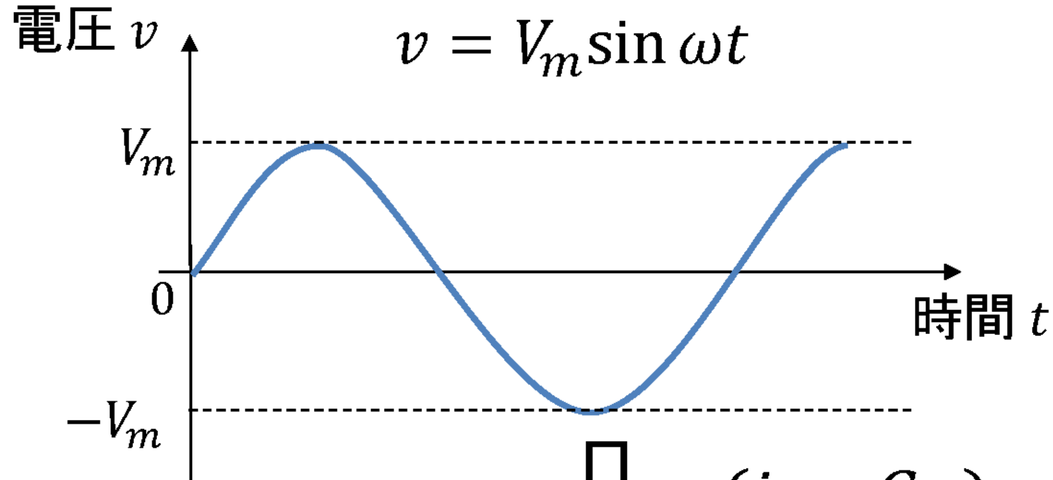
周波数　$f = 1/T\,[\mathrm{Hz}]$

抵抗



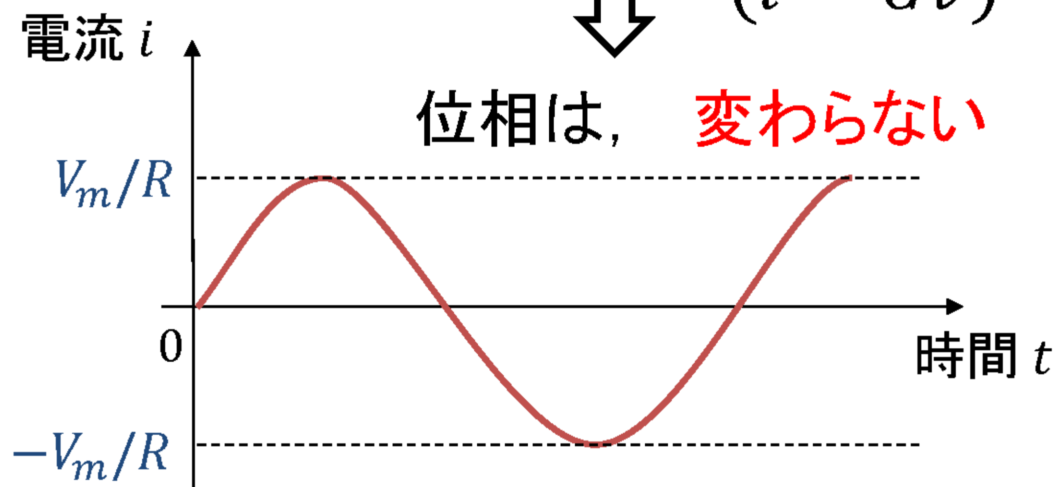


$$v = V_m \sin \omega t$$



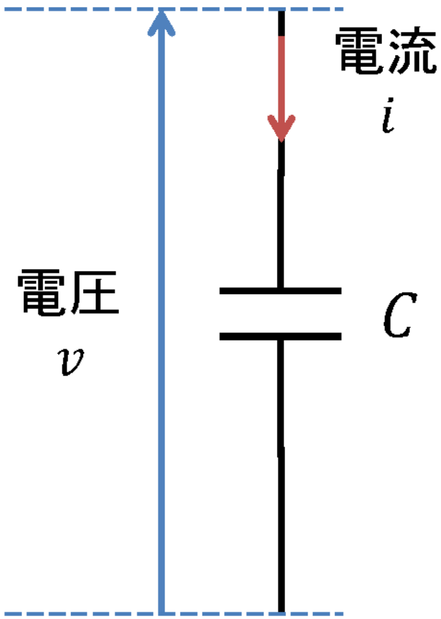
$$(i = Gv)$$

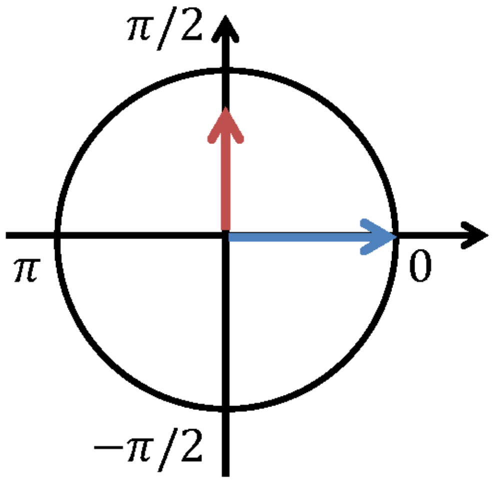
位相は，変わらない

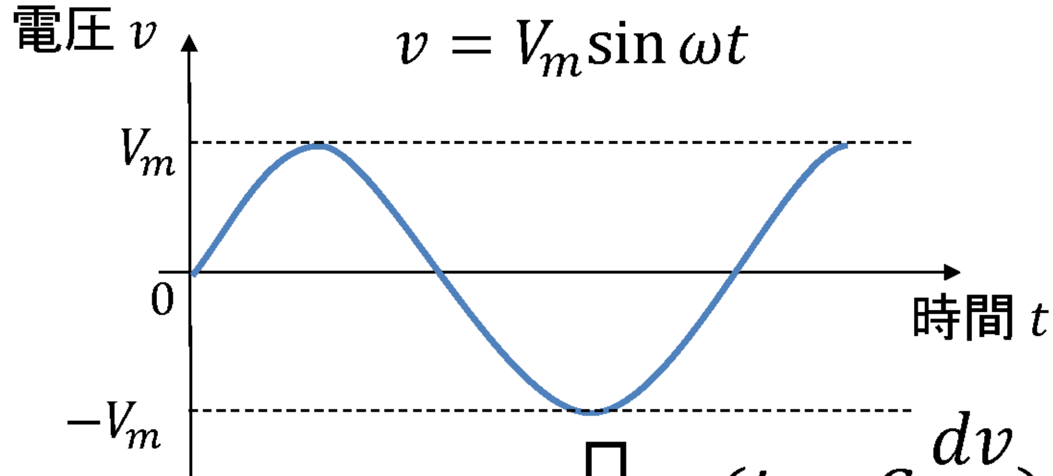


$$i = I_m \sin \omega t$$

コンデンサ

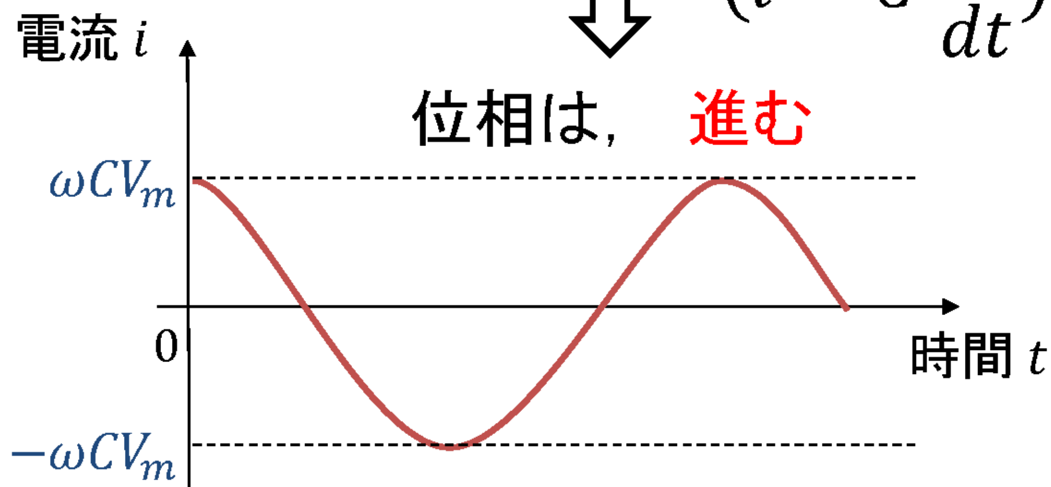






$$\left(i = C\frac{dv}{dt}\right)$$

位相は，進む

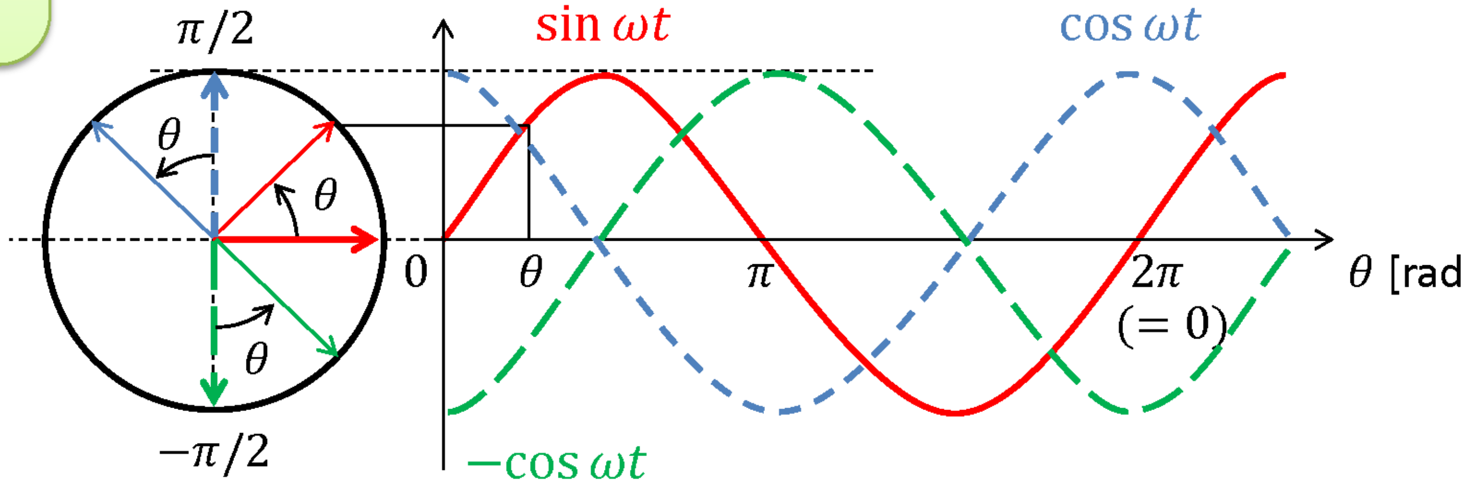


$$i = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

交流と三角関数

角周波数（角速度）とは，単位時間に進む角度

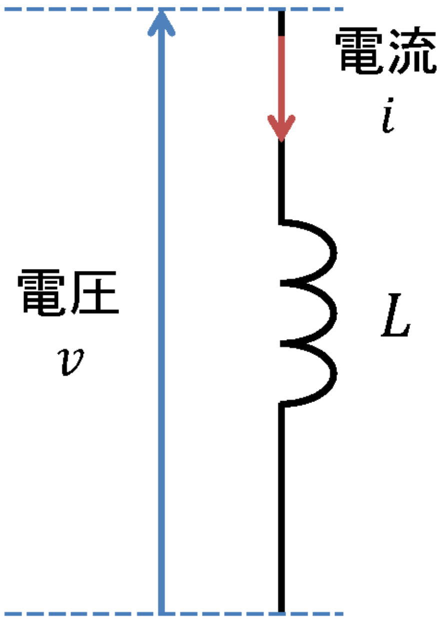
$$\omega t = \frac{2\pi}{T} t$$
$$= 2\pi f t$$

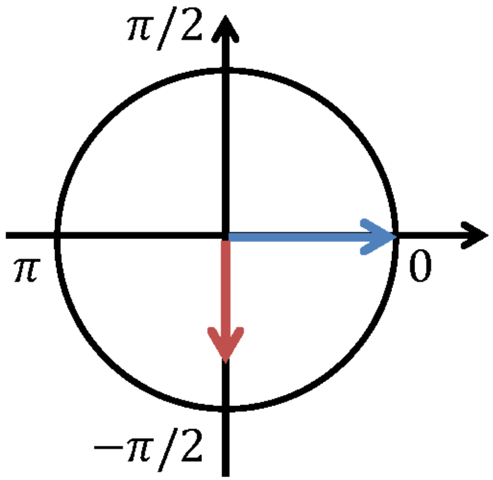


$$\frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega\cos\omega t = \omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

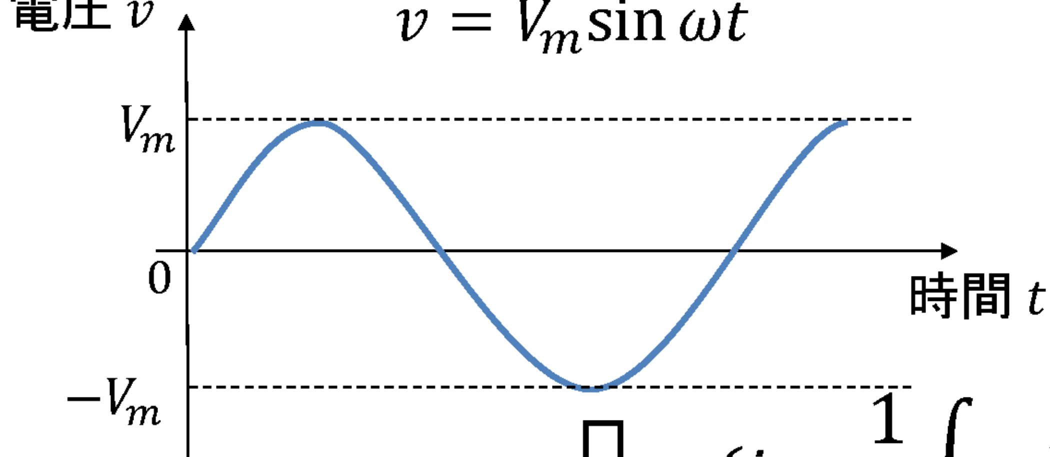
$$\int \sin\omega t = -\frac{1}{\omega}\cos\omega t = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

インダクタ



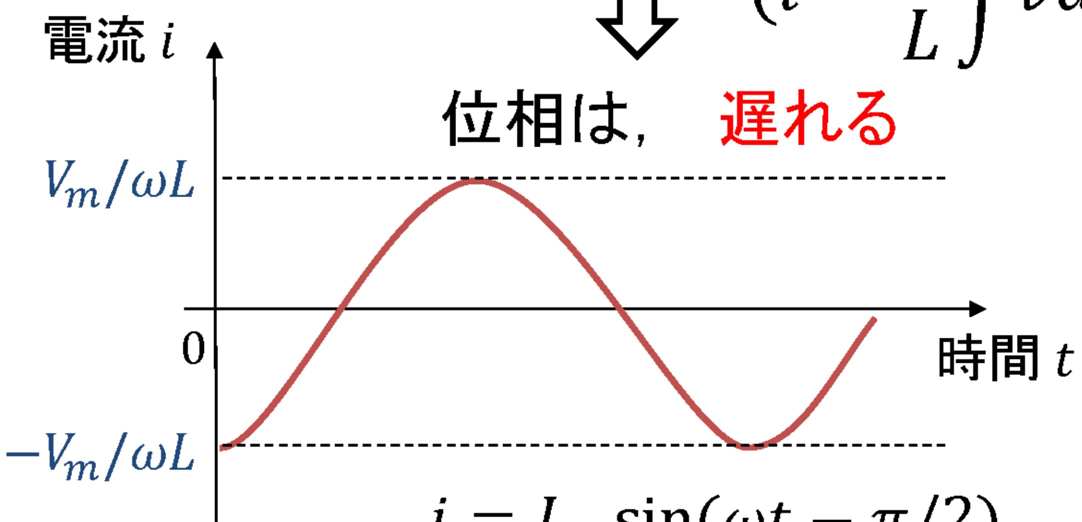


$$v = V_m \sin \omega t$$



$$\left(i = \frac{1}{L}\int v dt\right)$$

位相は，遅れる



$$i = I_m \sin(\omega t - \pi/2)$$

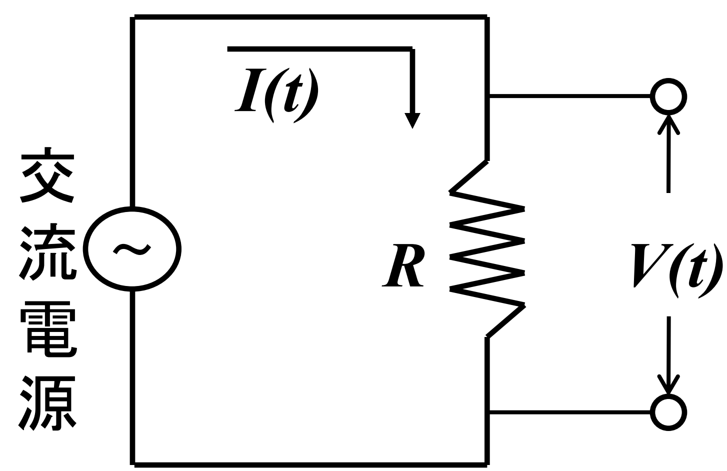
例題１

交流電源の最大値V_0を10[V]、周波数fを1/2π[Hz]とし、抵抗Rを5[Ω]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流をのグラフをかけ

（３）π/6[s]後の電流の瞬時値を求めよ



例題1 解答

単位円において
ω：　一秒間に進む角度
T：　一周にかかる時間
2π：　一周の角度

解答

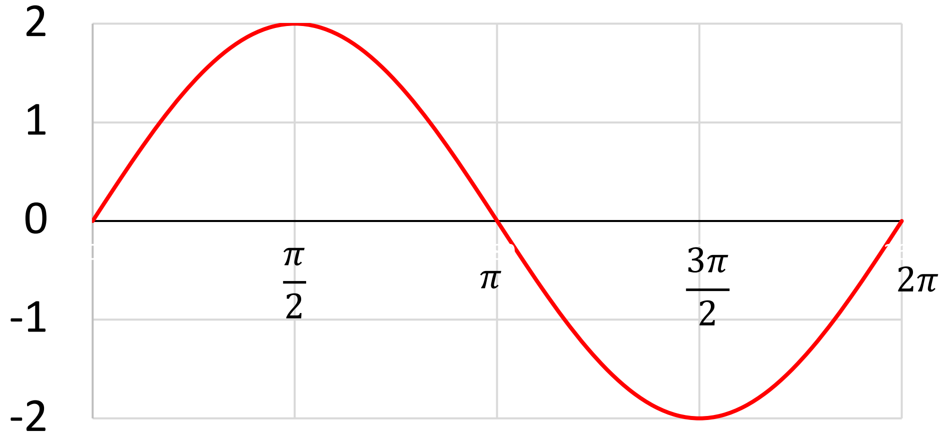
抵抗のみの場合、
振幅だけが変わる

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

（1）　$I(t) = \boxed{\dfrac{V_0}{R}} \sin \omega t = \dfrac{10}{5} \sin\left(\dfrac{2\pi}{2\pi} \times t\right) = 2\sin(t)$

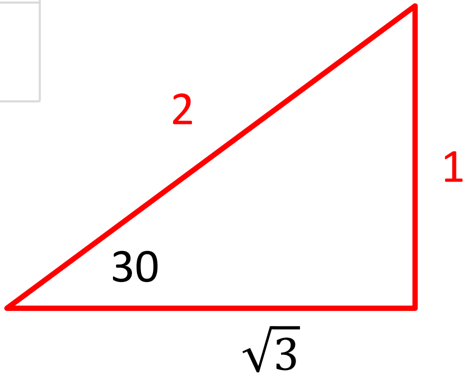
位相は変わらない

（2）



（3）

$I\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\sin(\dfrac{\pi}{6}) = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1[\mathrm{A}]$



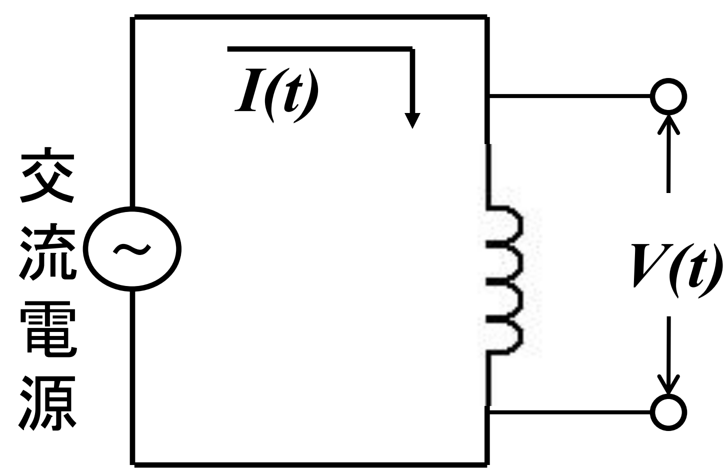
例題２

交流電源の最大値V_0を6[V]、周波数fを1/2π[s]とし、自己インダクタンスLを2[H]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流をのグラフをかけ

（３） π/6[s]後の電流の瞬時値を求めよ

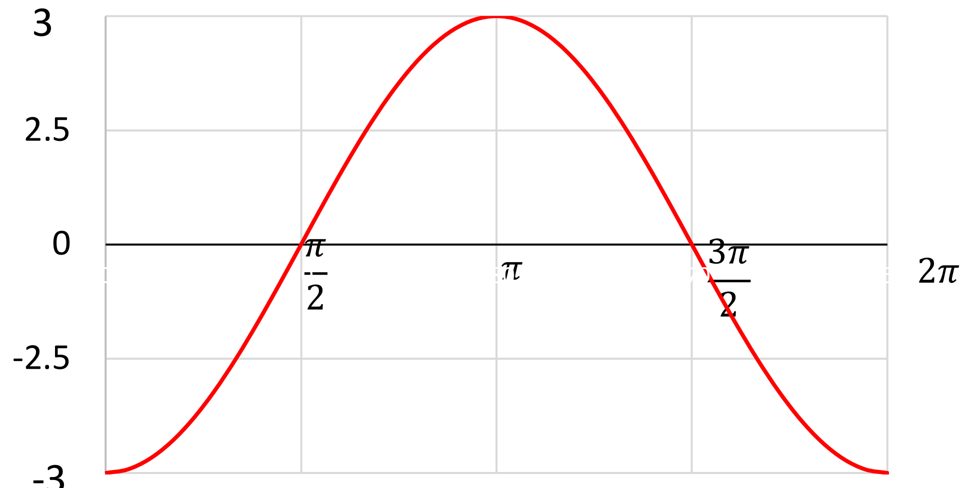


例題2 解答

解答

（1） $i(t) = \boxed{\dfrac{V_0}{\omega L}} \sin \omega t = \dfrac{6}{2} \sin\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right) = 3\sin(t - \dfrac{\pi}{2})$

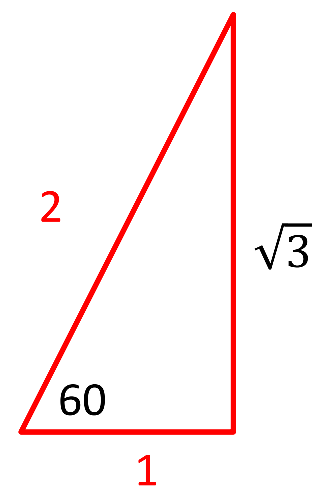
（2）



（3）

$$i\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\,[\mathrm{A}]$$



インピーダンス

電圧と電流の　**振幅**　の比

$$Z = \frac{|v|}{|i|} = \frac{V_m}{I_m}$$

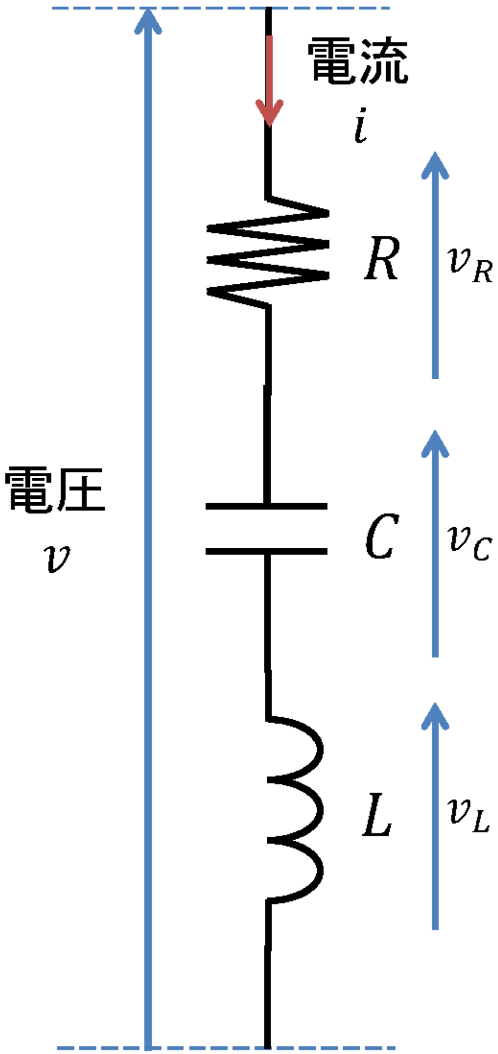
大きさ（振幅）を表す記号

例）$|\sin \omega t| = 1$

抵抗	$I_m = V_m/R$	$Z_R = R$
コンデンサ	$I_m = \omega C V_m$	$Z_C = 1/\omega C$
インダクタ	$I_m = V_m/\omega L$	$Z_L = \omega L$

コンデンサとインダクタのインピーダンスは，　**周波数**　によって変化する．

合成インピーダンス（R-C-L回路）

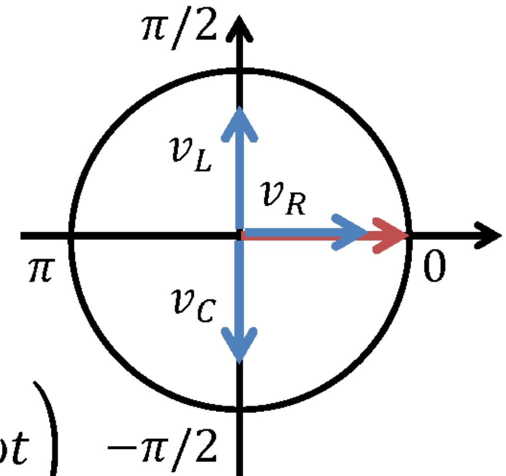


$$i = I_m \sin \omega t$$

$$v = Ri + \frac{1}{C}\int i dt + L\frac{di}{dt}$$

$$= I_m\left(R\sin\omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\omega t\right)$$

$$= \underbrace{I_m\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{V_m} \sin\left(\omega t + \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\mathrm{R}}\right)}_{\phi}\right)$$



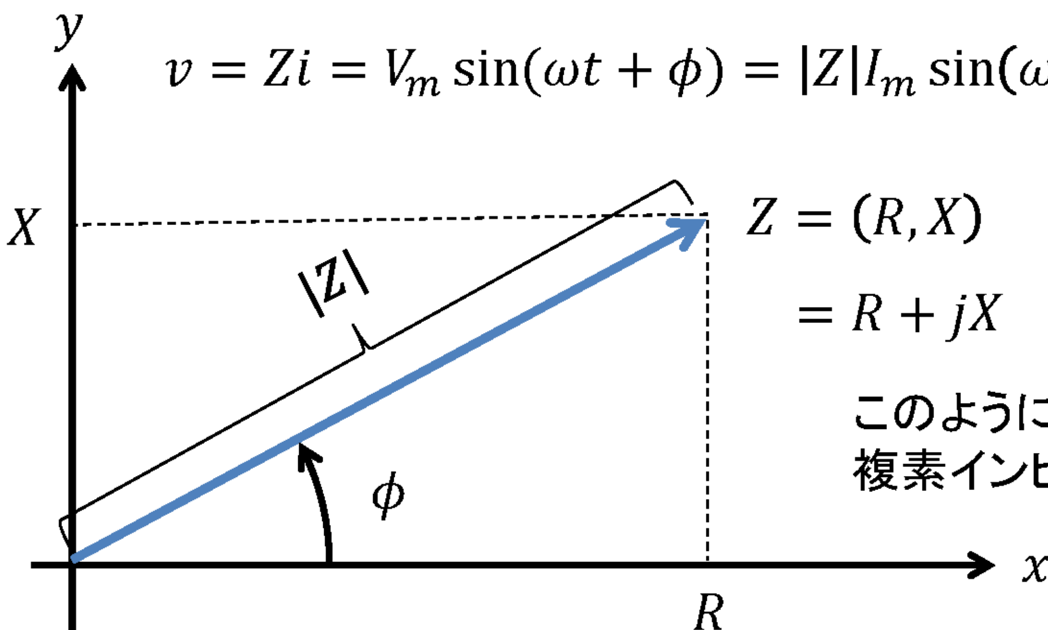
$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

ベクトルインピーダンス

インピーダンスの大きさと位相のずれを同時に表現する方法

$$v = Zi = V_m \sin(\omega t + \phi) = |Z| I_m \sin(\omega t + \angle Z)$$



$$Z = (R, X)$$

$$= R + jX \qquad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

このように表記したとき，
複素インピーダンスと呼ぶ．

大きさ

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

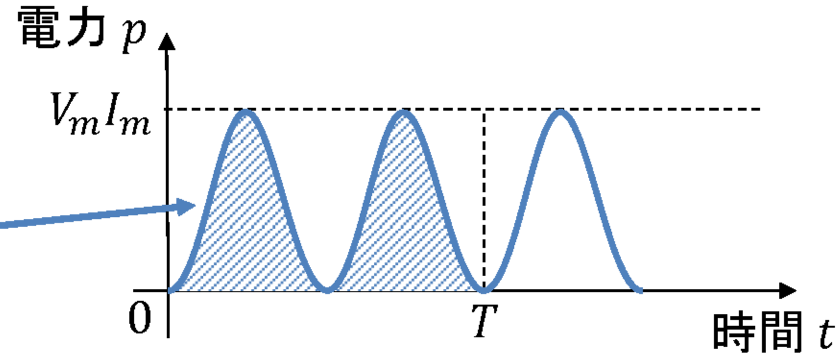
角度

$$\phi = \angle Z = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

平均電力（位相ずれなしの場合）

負荷（抵抗）に伝達される（平均的な）エネルギー

瞬間電力　$p = vi = V_m I_m \sin^2 \omega t$



平均電力　$P = \frac{1}{T} \boxed{\int_0^T p dt}$

単位時間あたりの電力量

$$= \frac{V_m I_m}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt$$

$$= \frac{V_m I_m}{2T} \left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t \, dt \right)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2}$$

$$\int_0^T dt = T$$

$$\int_0^T \cos 2\omega t \, dt = 0$$

平均電力（位相ずれありの場合）

負荷（抵抗）に伝達される（平均的な）エネルギー

$$\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T vidt$$

$$\because R = |Z|\cos\phi$$

瞬間電力 $p = vi = V_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t + \phi)$

平均電力 $P = \frac{1}{T}\int_0^T pdt$

単位時間あたりの電力量

$$= \frac{V_m I_m}{T}\int_0^T \frac{\cos\phi + \cos(2\omega t + \phi)}{2}$$

$$= \frac{V_e I_e}{T}\left(\cos\phi \int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t + \phi)dt\right)$$

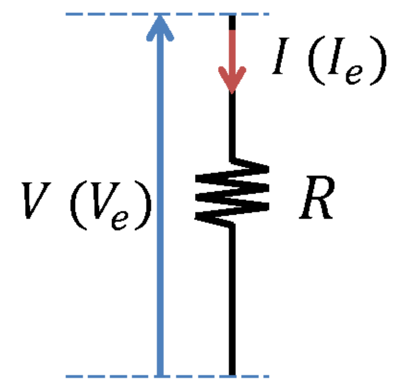
$$= V_e I_e \cos\phi$$

実効値

抵抗負荷において，平均電力が　**直流の場合**　と同じになるような電流（電圧）値

直流　$P = VI = I^2R = V^2/R$

交流　$P = V_e I_e = \dfrac{V_m I_m}{2}$



電圧の実効値　$V_e = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}$

電流の実効値　$I_e = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

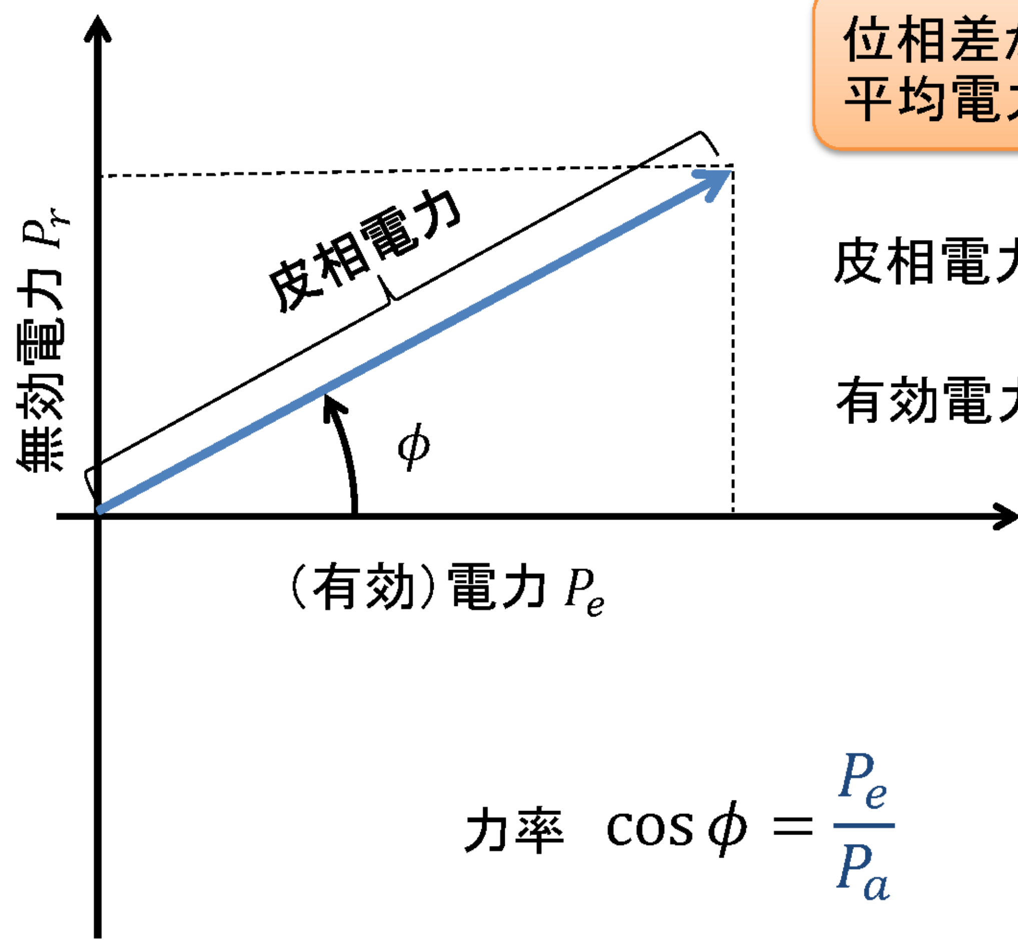
商用交流は、実効値で表示される．

電源電圧 100V の場合，波形の最大値（振幅）V_m はおよそ 141V

力率

電流と電圧に位相差があるときの最大値に対する平均電力の割合

位相差がない場合の平均電力



皮相電力　$P_a = V_e I_e$　[VA]

有効電力　$P_e = P_a \cos\phi$　[W]

力率　$\cos\phi = \dfrac{P_e}{P_a}$

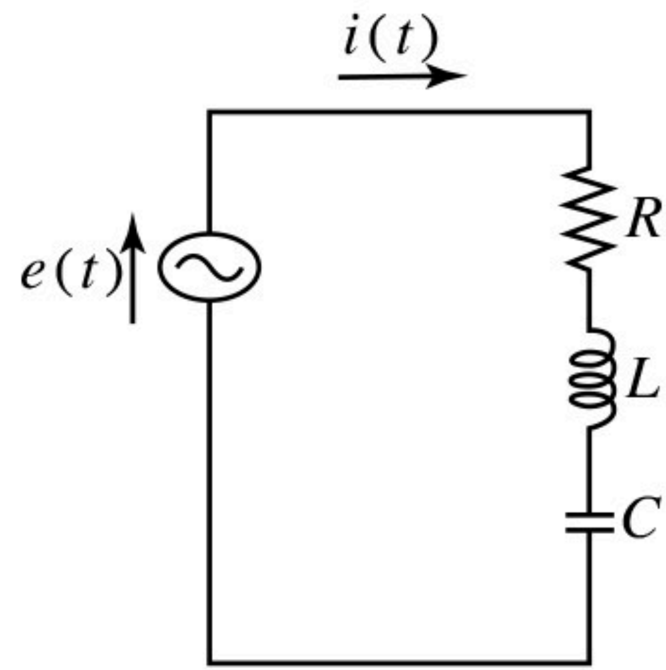
例題3

交流電源の最大値を$16\sqrt{2}$[V]を1 [Hz]、R=8[Ω]、L=15/2π[H]、C=1/14π[F]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。

（２）電流の式を求めよ。

（３）有効電力、皮相電力をそれぞれ求めよ。



例題３　解答

（１）インピーダンス

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + \left(2\pi \times \frac{15}{2\pi} - \frac{1}{2\pi \frac{1}{14\pi}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{64 + (15 - 7)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 64}$$

$$= 8\sqrt{2}\ [\Omega]$$

$$\phi = Tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}\ [rad]$$

例題３　解答

（２）電流

$$\frac{E_m}{|Z|}\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

（３）電力

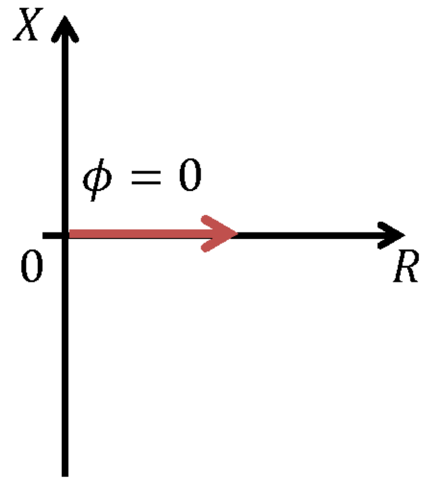
皮相電力 $P_a=\frac{I_mV_m}{2}=\frac{2\times16\sqrt{2}}{2}=16\sqrt{2}$ [VA]

有効電力 $P_e=P_a\cos(\phi)=16\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=16\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=16\ [W]$

共振

交流電圧(電流)の　**周波数**　が変化することによって，
伝達される(平均)エネルギーが最大(最大電力)になる現象

力率 $\cos\phi$ が最大($= 1$)になるとき



$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$\omega = 2\pi f$

共振周波数　$f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

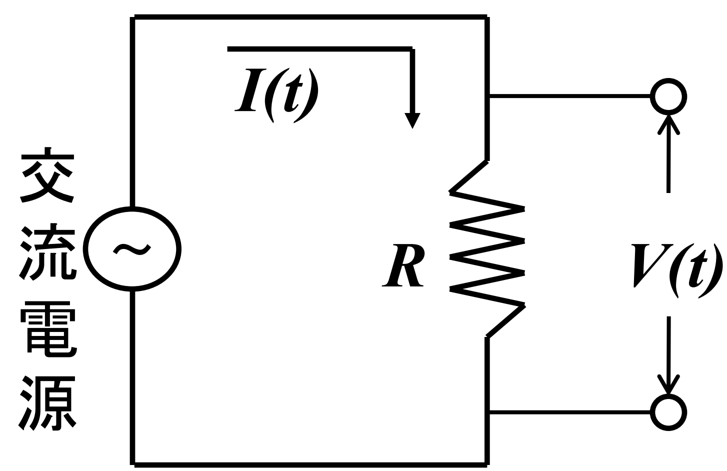
練習問題1

交流電源の最大値V_0を30[V]、周波数fを1/2π[s]とし、抵抗Rを10[Ω]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流をのグラフをかけ

（３） π/4[s]後の電流の瞬時値を求めよ



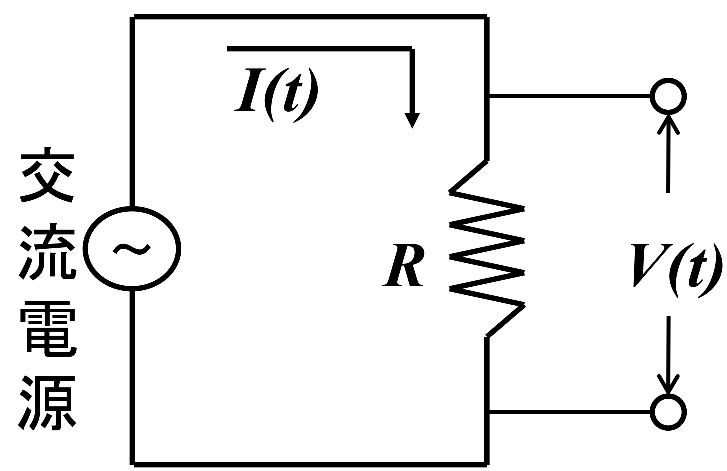
練習問題2

交流電源の最大値V_0を10[V]、周波数fを1/4π[s]とし、抵抗Rを6[Ω]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流をのグラフをかけ

（３）π/4[s]後の電流の瞬時値を求めよ



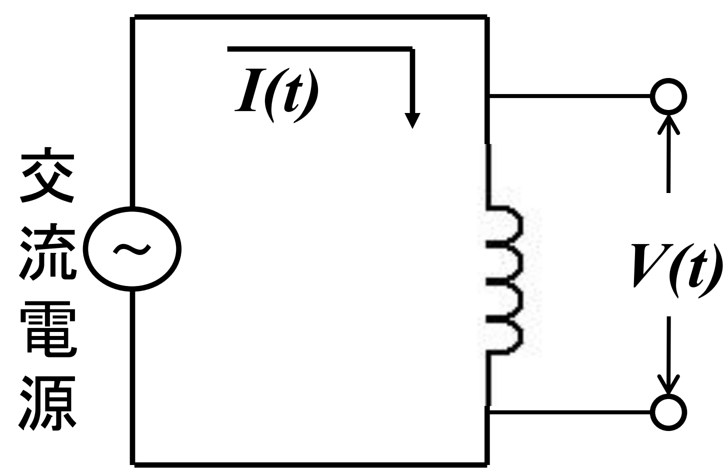
練習問題3

交流電源の最大値V_0を12[V]、周波数fを1/2π[s]とし、自己インダクタンスLを6[H]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流をのグラフをかけ

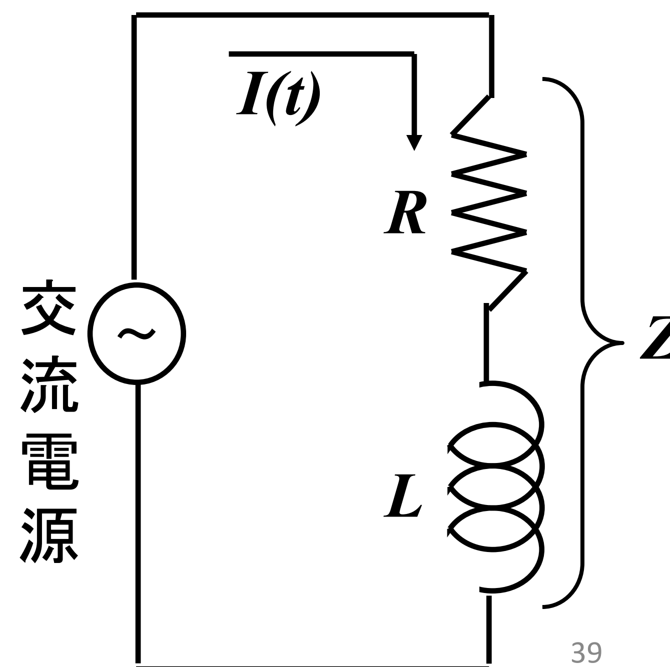
（３）π/6[s]後の電流の瞬時値を求めよ



練習問題4

抵抗Rを8 [Ω]自己インダクタンスLを9 [H]とし、
交流電源の周波数fを1/2π、最大電圧V_0を50 [V]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。
（２）電流の式をかけ。



練習問題5

交流電源の最大値を20 [V]周波数を1/4π[Hz]、R=10[Ω]、L=4/π[H]、C=1/16π[F]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。

（２）電流の式を求めよ。

（３）電流のグラフをかけ。

（４）有効電力、皮相電力をそれぞれ求めよ。