医用工学概論

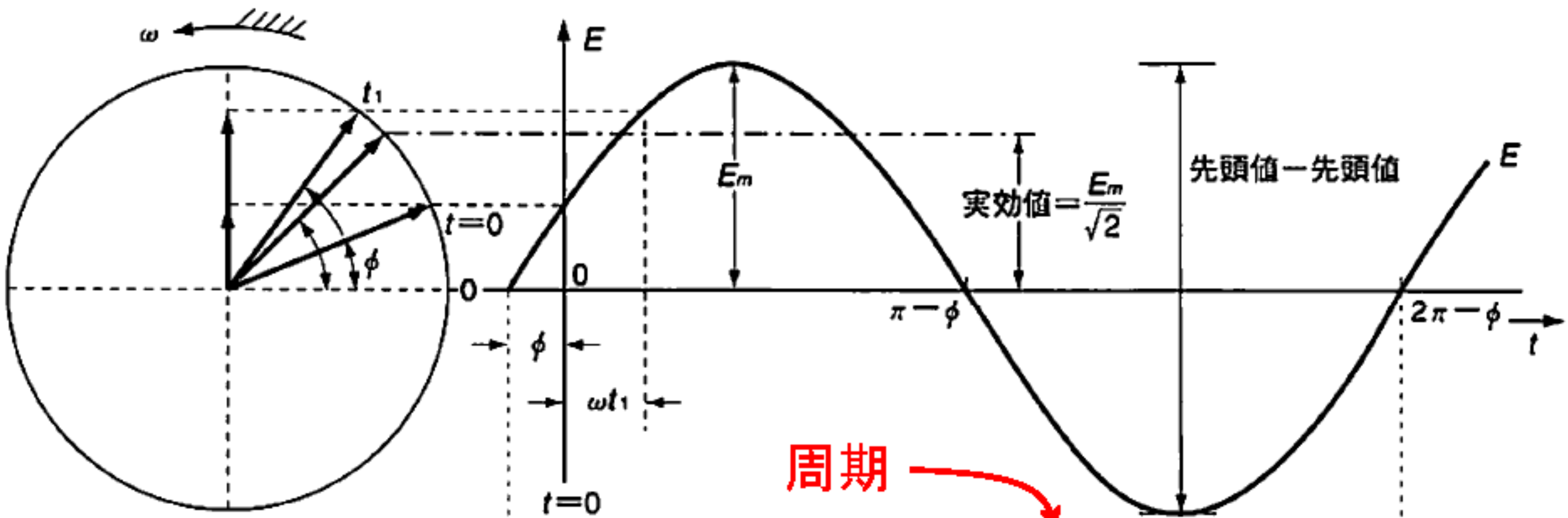
第6回
電気の基礎3（交流回路）

交流

角周波数

$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \phi)$$

振幅　　位相

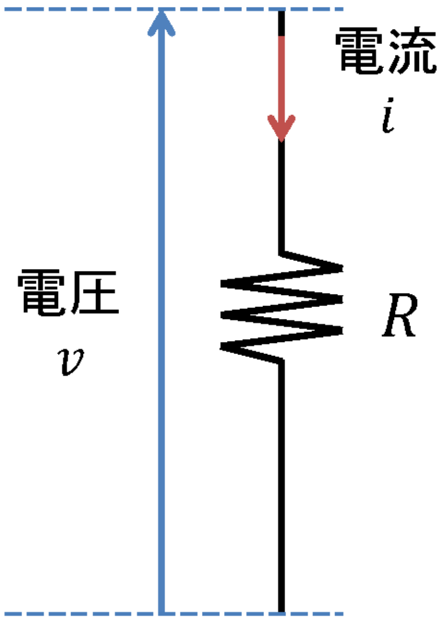


2π は，円を一周する角度　　$2\pi = \omega T$

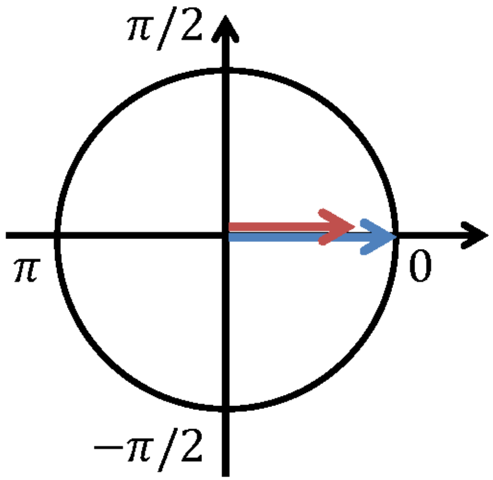
T は，円を一周する時間

周波数　$f = 1/T\,[\mathrm{Hz}]$

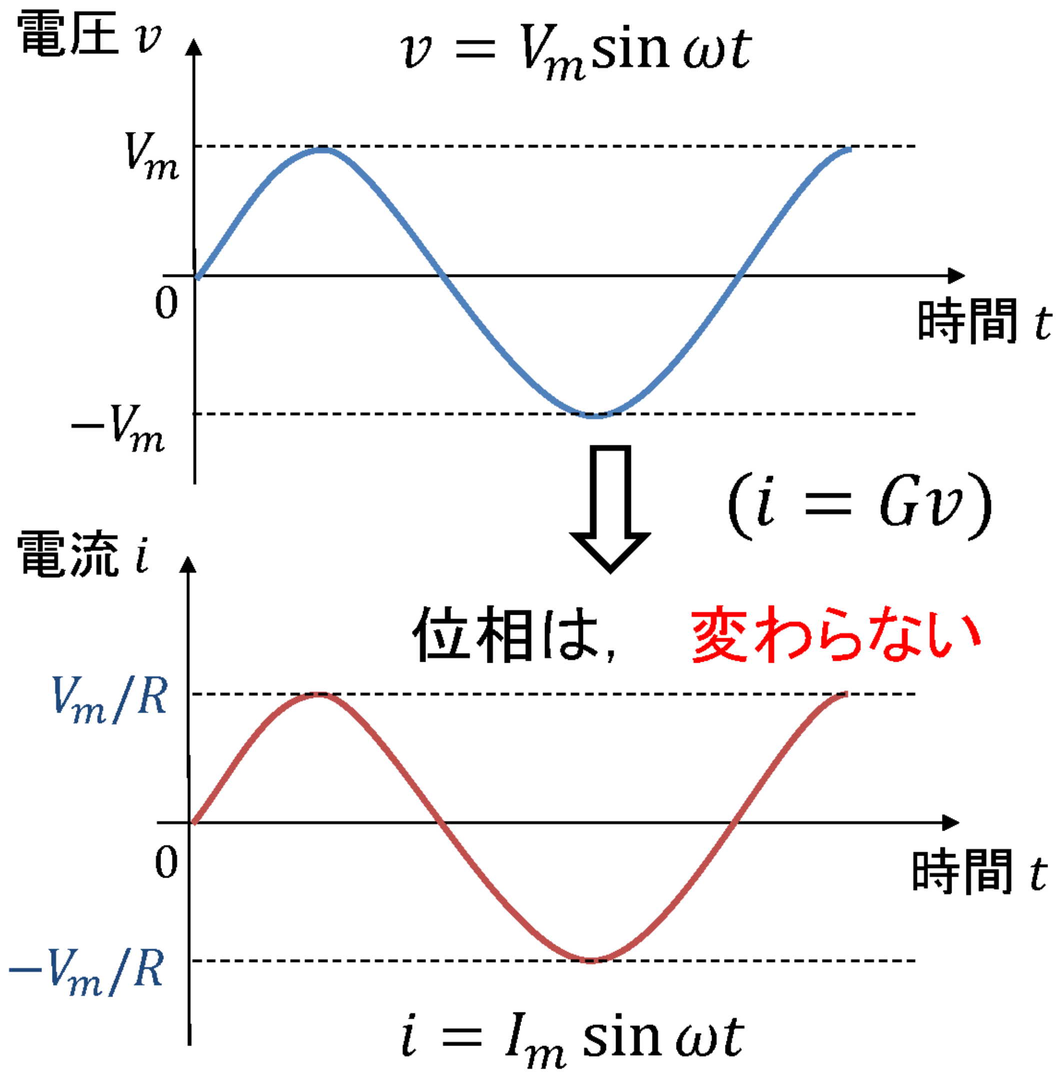
抵抗



電流
i
電圧
v
R

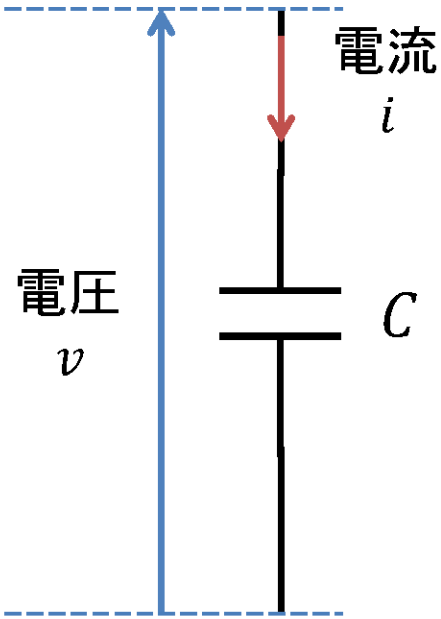


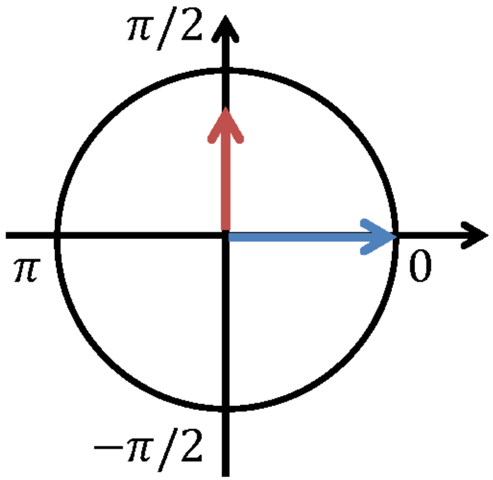
$\pi/2$
π
0
$-\pi/2$



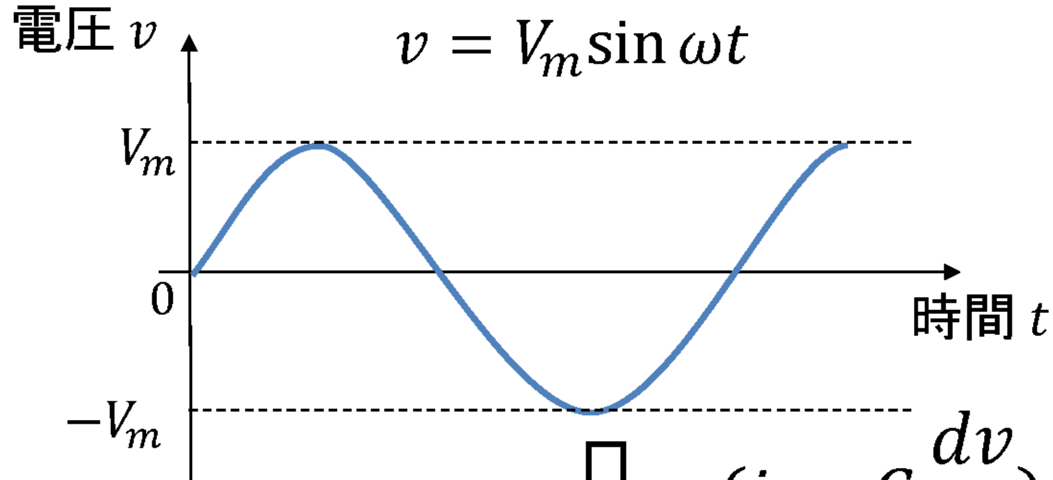
電圧 v
$v = V_m \sin \omega t$
V_m
0
$-V_m$
時間 t
$(i = Gv)$
電流 i
位相は，変わらない
V_m/R
0
$-V_m/R$
時間 t
$i = I_m \sin \omega t$

コンデンサ



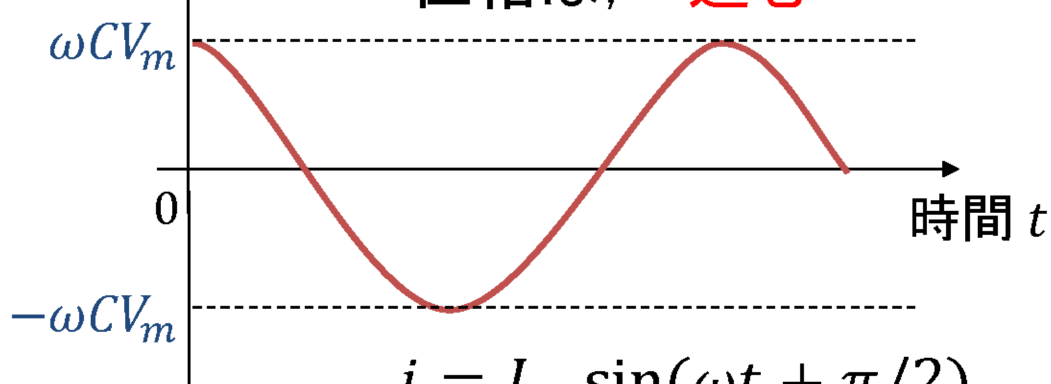


$$v = V_m \sin \omega t$$



$$\left(i = C\frac{dv}{dt}\right)$$

位相は, 進む

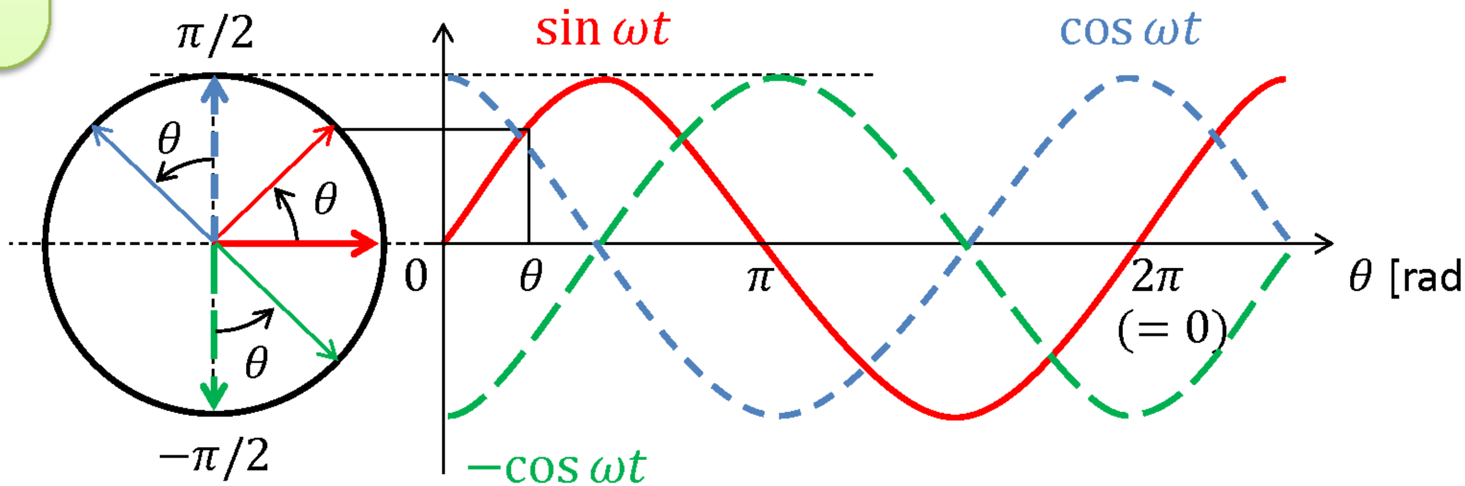


$$i = I_m \sin(\omega t + \pi/2)$$

交流と三角関数

角周波数
（角速度）とは，
単位時間に
進む角度

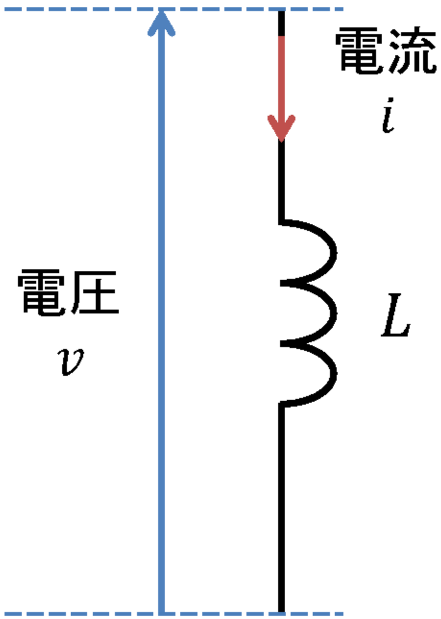
$$\omega t = \frac{2\pi}{T} t$$
$$= 2\pi f t$$

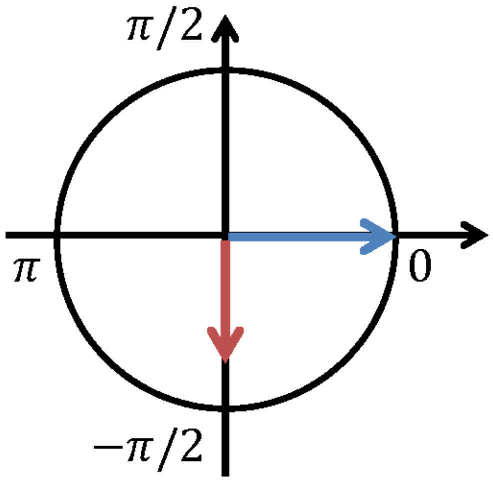


$$\frac{d}{dt}\sin \omega t = \omega \cos \omega t = \omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

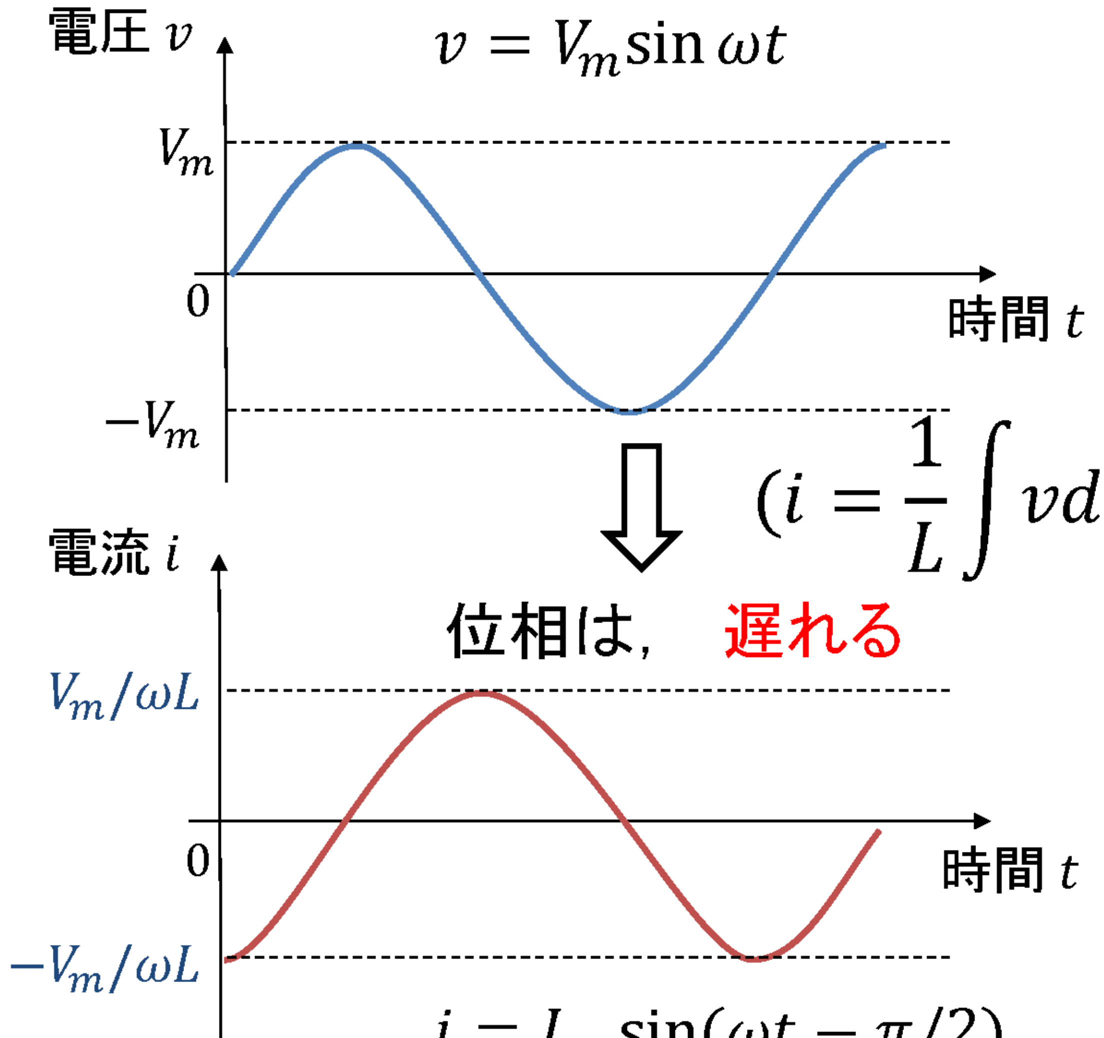
$$\int \sin \omega t = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t = \frac{1}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

インダクタ





$$v = V_m \sin \omega t$$



$$\left(i = \frac{1}{L}\int v dt\right)$$

位相は，遅れる

$$i = I_m \sin(\omega t - \pi/2)$$

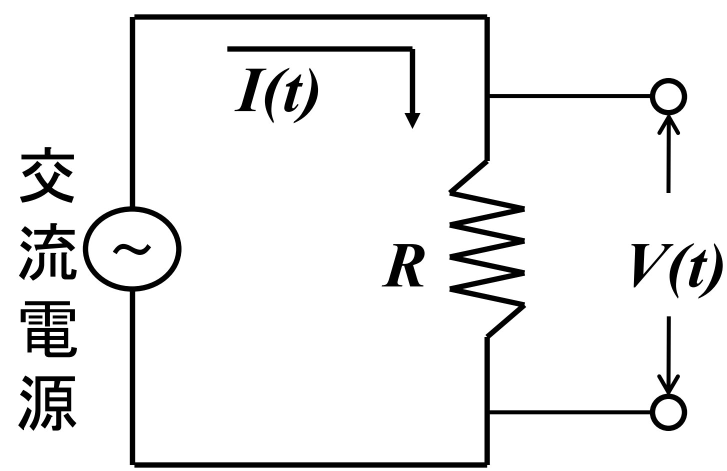
例題1

交流電源の最大値V_0を10[V]、周波数fを1/2π[Hz]とし、抵抗Rを5[Ω]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流をのグラフをかけ

（３）π/6[s]後の電流の瞬時値を求めよ



例題1 解答

単位円において
ω：　一秒間に進む角度
T：　一周にかかる時間
2π：　一周の角度

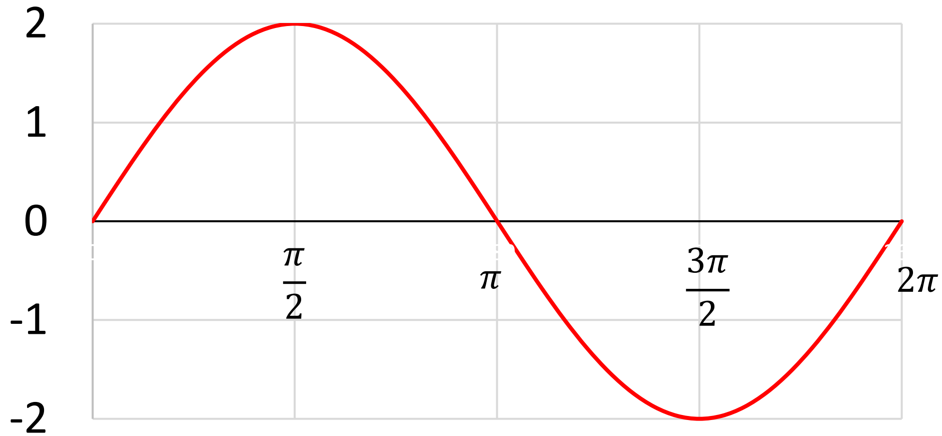
解答　抵抗のみの場合、振幅だけが変わる

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

（1）　$I(t) = \boxed{\frac{V_0}{R}} \sin \omega t = \frac{10}{5} \sin\left(\frac{2\pi}{2\pi} \times t\right) = 2\sin(t)$

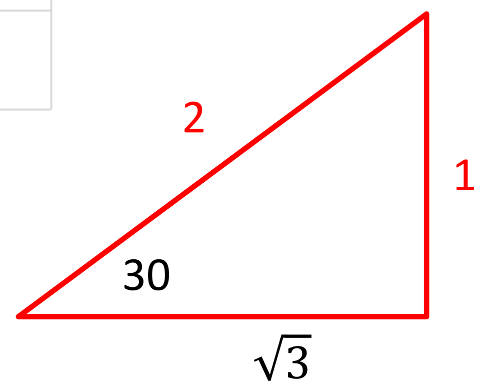
位相は変わらない

（2）



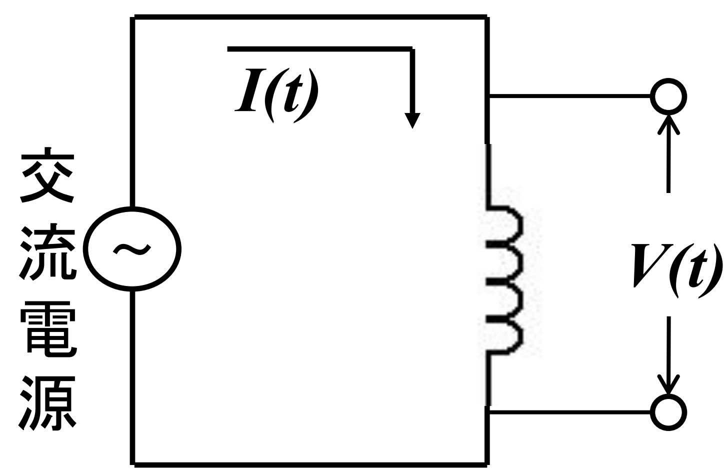
（3）

$$I\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1[\mathrm{A}]$$



例題２

交流電源の最大値V_0を6[V]、周波数fを1/2π[s]とし、
自己インダクタンスLを2[H]とする。
（１）電流の式を求めよ
（２）電流をのグラフをかけ
（３） π/6[s]後の電流の瞬時値を求めよ

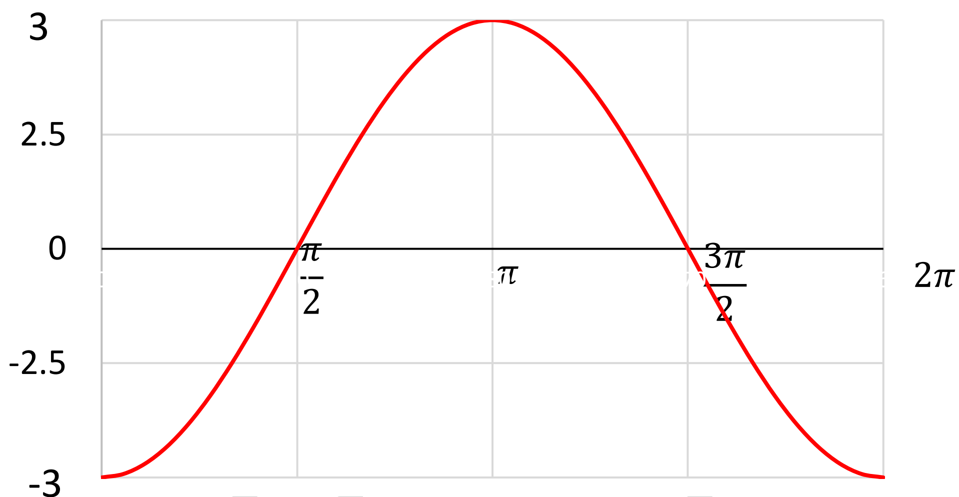


例題2 解答

解答

（1） $i(t) = \boxed{\frac{V_0}{\omega L}} \sin \omega t = \frac{6}{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin(t - \frac{\pi}{2})$

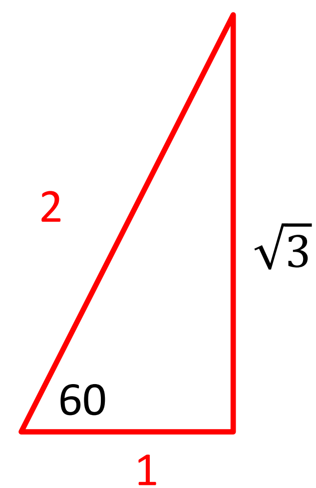
（2）



（3）

$$i\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\,[\mathrm{A}]$$



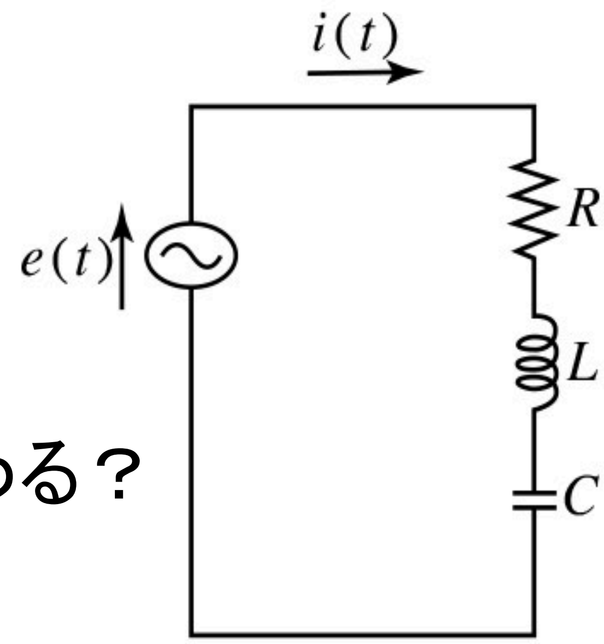
RLC直列回路

抵抗、コンデンサ、インダクタを直列に接続した回路。

RLC直列回路に流れる電流

振幅 $I_0 = V_0 \times x$
位相のズレ $\theta = ?$

振幅と位相が、RLCの値によって変わる？



インピーダンス

電圧と電流の　**振幅**　の比

$$Z = \frac{|v|}{|i|} = \frac{V_m}{I_m}$$

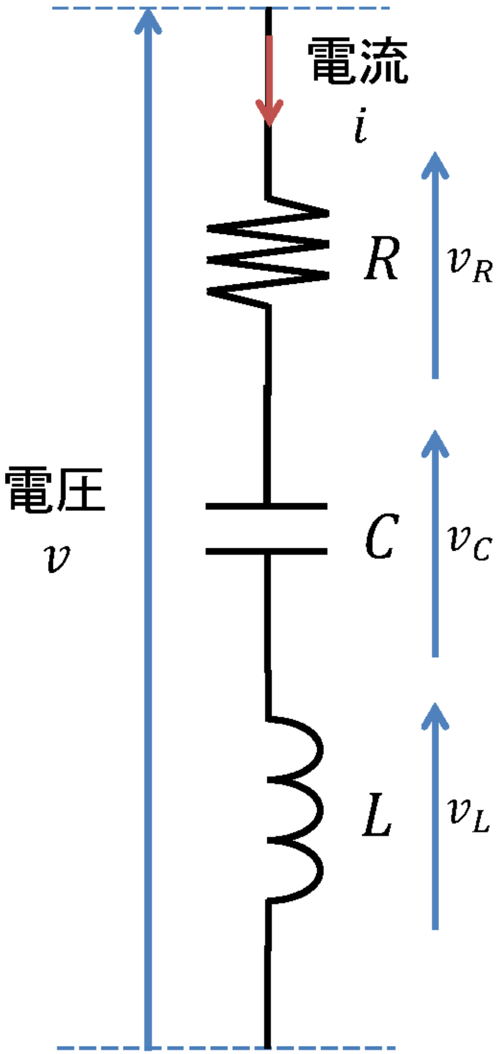
大きさ（振幅）を表す記号

例）$|\sin\omega t| = 1$

抵抗	$I_m = V_m/R$	$Z_R = R$
コンデンサ	$I_m = \omega C V_m$	$Z_C = 1/\omega C$
インダクタ	$I_m = V_m/\omega L$	$Z_L = \omega L$

コンデンサとインダクタのインピーダンスは，　**周波数**　によって変化する．

合成インピーダンス（R-C-L回路）

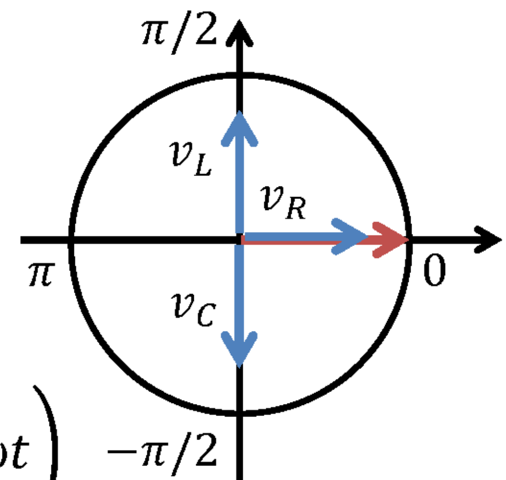


$$i = I_m \sin \omega t$$

$$v = Ri + \frac{1}{C}\int i dt + L\frac{di}{dt}$$

$$= I_m\left(R \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos \omega t\right)$$

$$= \underbrace{I_m\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}_{V_m} \sin\left(\omega t + \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\mathrm{R}}\right)}_{\phi}\right)$$



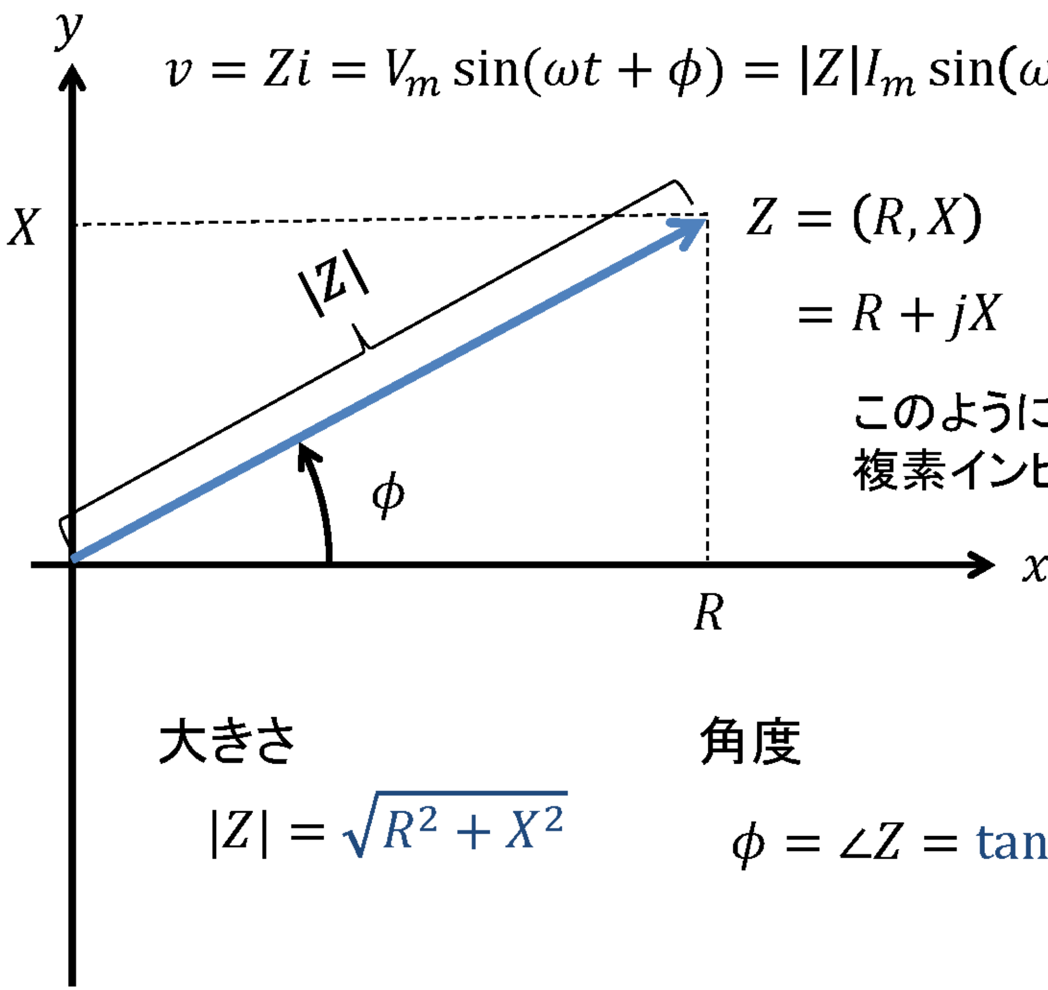
$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

インピーダンスのフェーザ表示

インピーダンスの大きさと位相のずれを同時に表現する方法

$$v = Zi = V_m \sin(\omega t + \phi) = |Z| I_m \sin(\omega t + \angle Z)$$



$$Z = (R, X)$$

$$= R + jX \qquad X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

このように表記したとき，
複素インピーダンスと呼ぶ．

大きさ

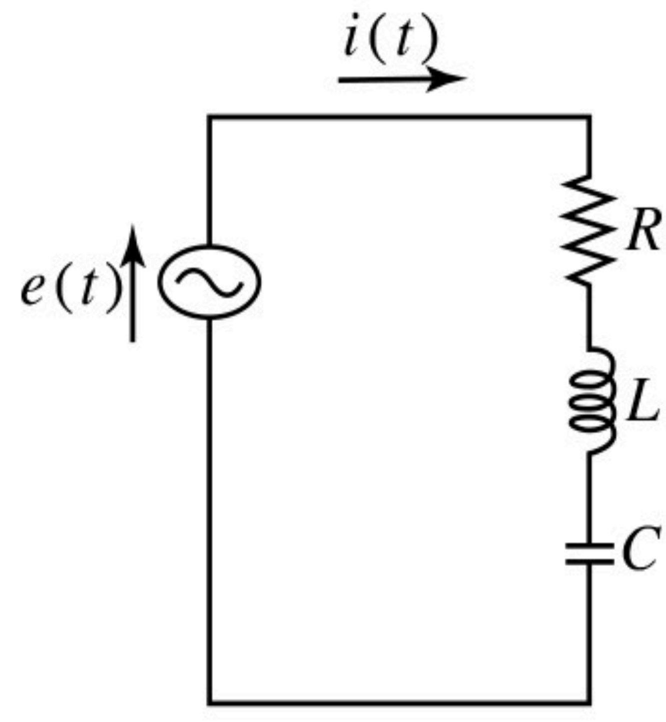
$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

角度

$$\phi = \angle Z = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

例題

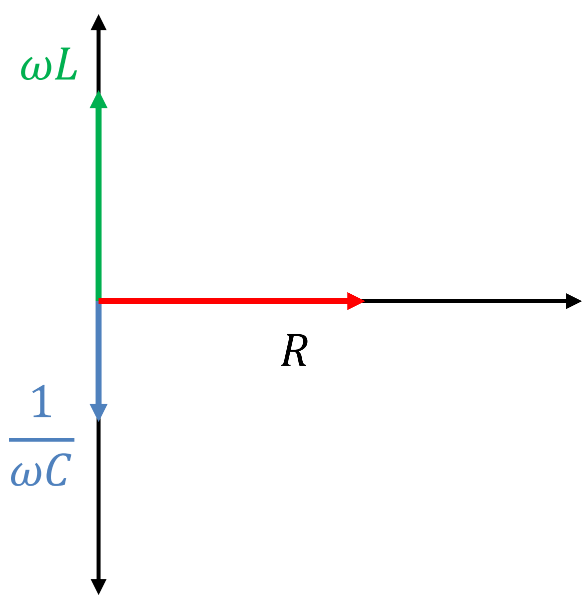
図の回路のインピーダンスを求めよ。ただし、R = 3 [Ω], L = 4 [H], C = 1 [F]、電源の周波数f=1/2πとする。

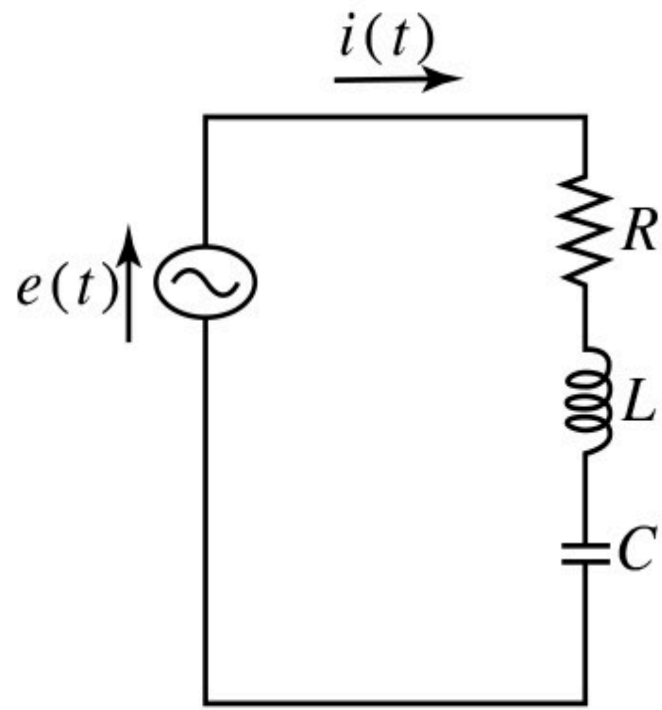


例題　解答

図の回路のインピーダンスを求めよ。ただし、R = 3 [Ω], L = 4 [H], C = 1 [F]、電源の周波数f=1/2πとする。

フェーザ図を描く

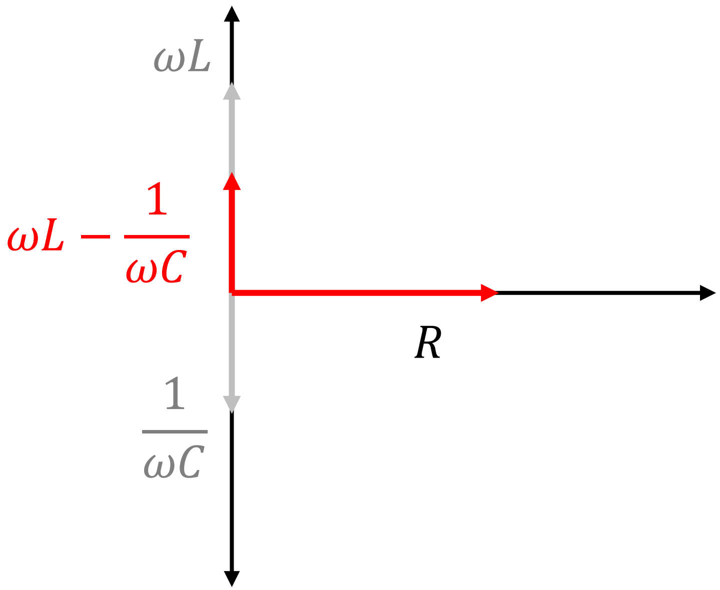


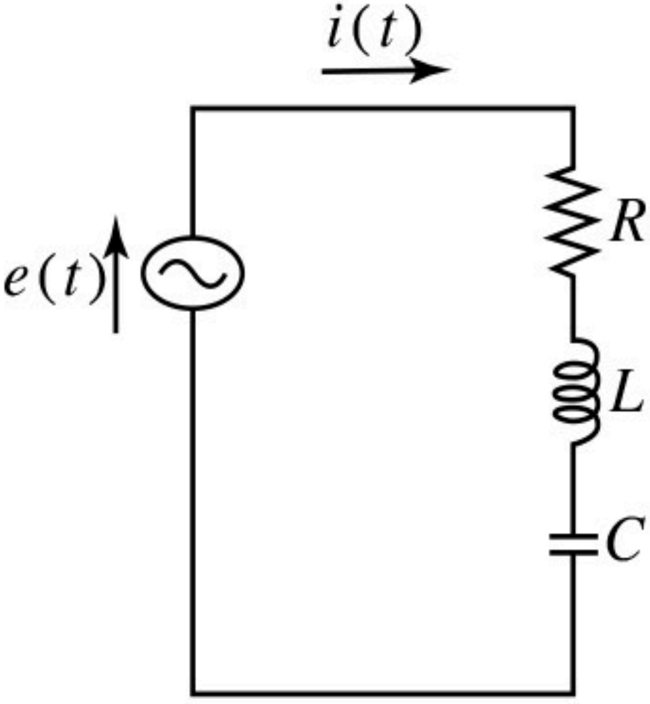


例題　解答

図の回路のインピーダンスを求めよ。ただし、R = 3 [Ω], L = 4 [H], C = 1 [F]、電源の周波数f=1/2πとする。

合成ベクトルを求める。

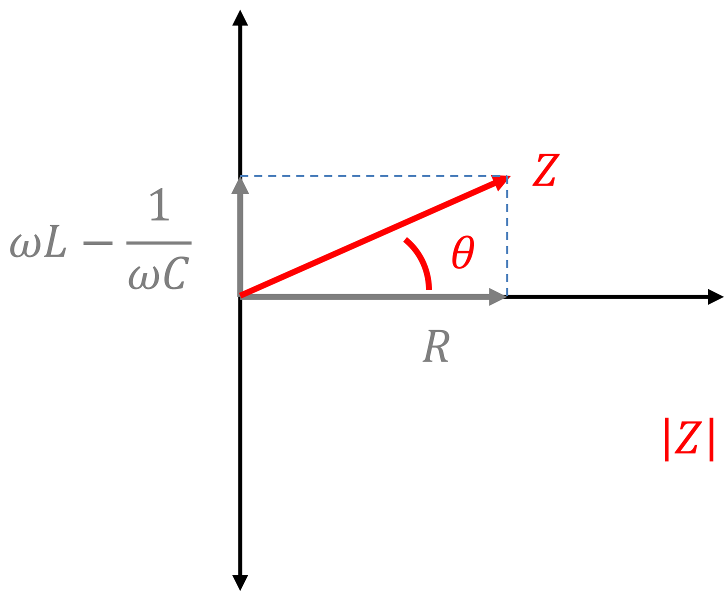


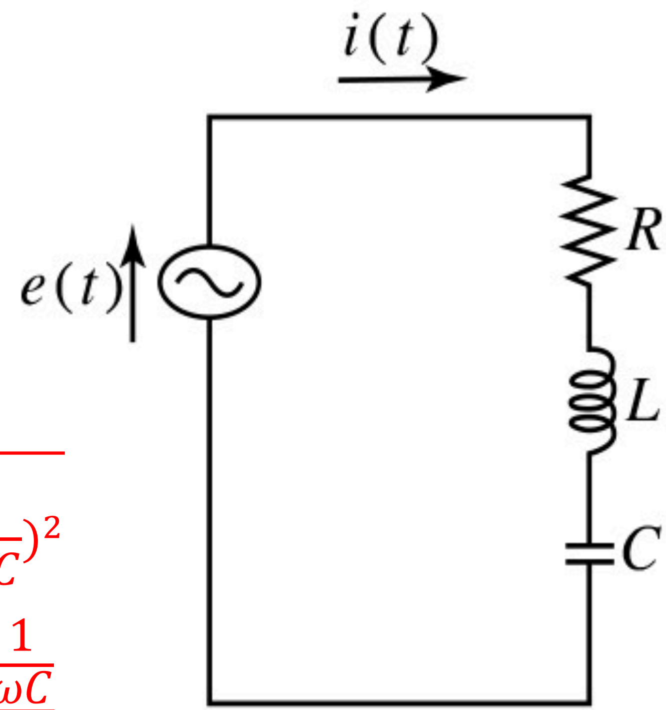


例題　解答

図の回路のインピーダンスを求めよ。ただし、R = 3 [Ω], L = 4 [H], C = 1 [F]、電源の周波数f=1/2πとする。

合成ベクトルを求める。





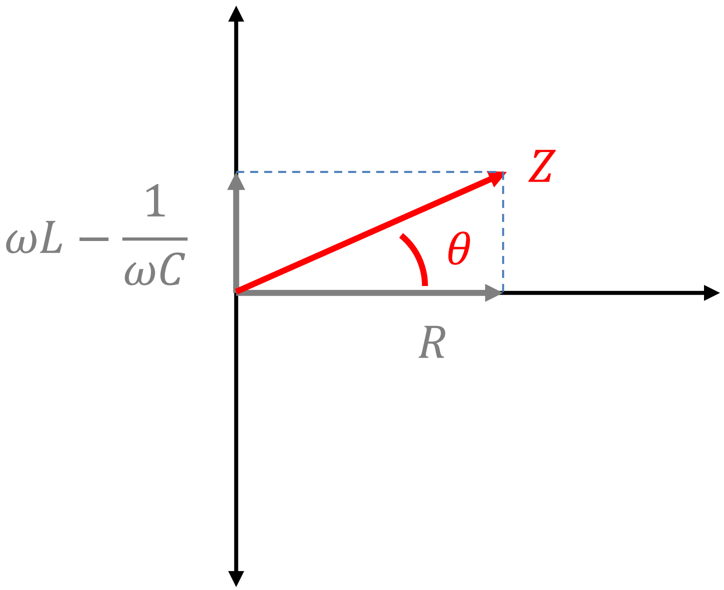
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$tan\theta = \frac{高さ}{底辺} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

例題　解答

図の回路のインピーダンスを求めよ。ただし、R = 3 [Ω], L = 4 [H], C = 1 [F]、電源の周波数f=1/2πとする。

合成ベクトルを求める。



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi \times \frac{1}{2\pi} = 1$$

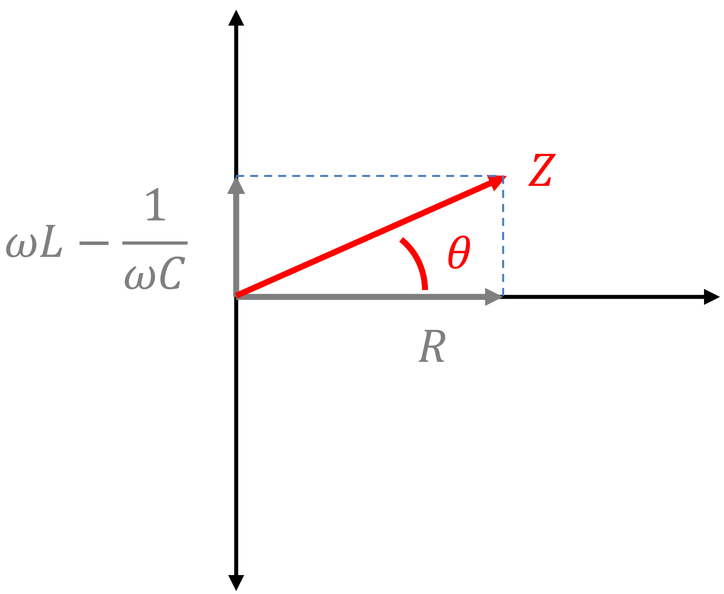
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + (1\times 4 - \frac{1}{1\times 1})^2}$$
$$= \sqrt{9 + (4-1)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 3^2}$$
$$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

例題　解答

図の回路のインピーダンスを求めよ。ただし、R = 3 [Ω], L = 4 [H], C = 1 [F]、電源の周波数f=1/2πとする。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = 2\pi\times\frac{1}{2\pi} = 1$$

合成ベクトルを求める。

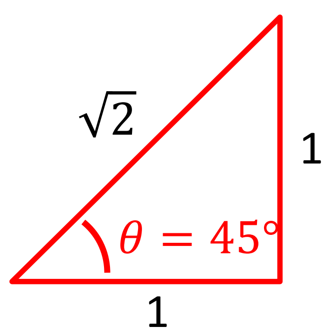


$$tan\theta = \frac{高さ}{底辺} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$= \frac{1\times4 - \frac{1}{1\times1}}{3}$$

$$= \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1}$$

底辺と高さの比が1:1になるような三角形は？



$$(45° = \frac{\pi}{4})$$

例題　解答

図の回路のインピーダンスを求めよ。ただし、R = 3 [Ω], L = 4 [H], C = 1 [F]、電源の周波数f=1/2πとする。

$$\text{インピーダンスの大きさ}\ |Z| = 3\sqrt{2}\ [\Omega]$$

$$\text{電圧と電流の位相差}\ \theta = \frac{\pi}{4}[\mathrm{rad}]\ \ (or\ 45°)$$

または、

$$3\sqrt{2}\angle 45°$$

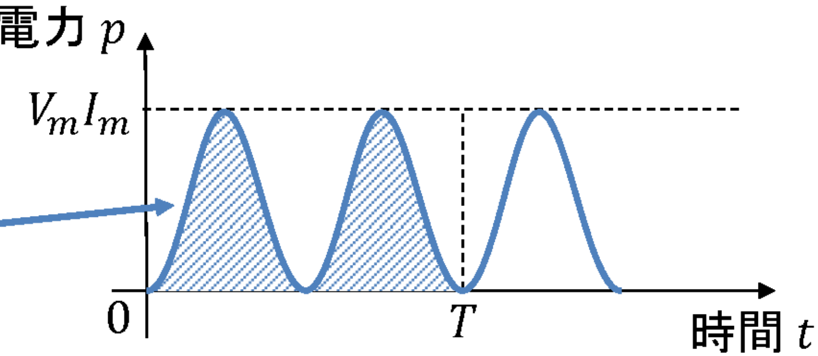
電流の振幅が電圧の$\frac{1}{3\sqrt{2}}$になり、

電流の位相が電圧に比べて45°遅れることを表す。

平均電力(位相ずれなしの場合)

負荷(抵抗)に伝達される(平均的な)エネルギー

瞬間電力 $p = vi = V_m I_m \sin^2 \omega t$



平均電力 $P = \frac{1}{T}\boxed{\int_0^T p dt}$

単位時間あたりの電力量

$$= \frac{V_m I_m}{T}\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2} dt$$

$$= \frac{V_m I_m}{2T}\left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t \, dt\right)$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} = V_e I_e$$

$$\int_0^T dt = T$$

$$\int_0^T \cos 2\omega t \, dt = 0$$

平均電力（位相ずれありの場合）

負荷（抵抗）に伝達される（平均的な）エネルギー

$$\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T vi dt$$

$$\because R = |Z|\cos\phi$$

瞬間電力 $p = vi = V_m I_m \sin\omega t \sin(\omega t + \phi)$

平均電力 $P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt$

単位時間あたりの電力量

$$= \frac{V_m I_m}{T}\int_0^T \frac{\cos\phi + \cos(2\omega t + \phi)}{2}$$

$$= \frac{V_e I_e}{T}\left(\cos\phi \int_0^T dt - \int_0^T \cos(2\omega t + \phi) dt\right)$$

$$= V_e I_e \cos\phi$$

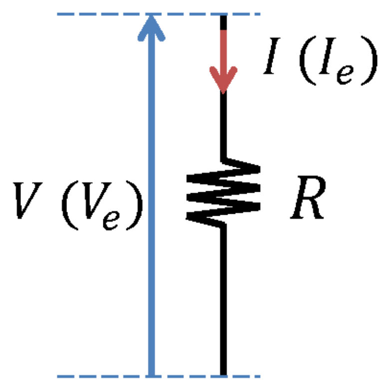
= 有効電力

実効値

抵抗負荷において，平均電力が　直流の場合　と同じになるような電流（電圧）値

直流　$P = VI = I^2R = V^2/R$

交流　$P = V_eI_e = \dfrac{V_mI_m}{2}$



電圧の実効値　$V_e = \dfrac{V_m}{\sqrt{2}}$

電流の実効値　$I_e = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

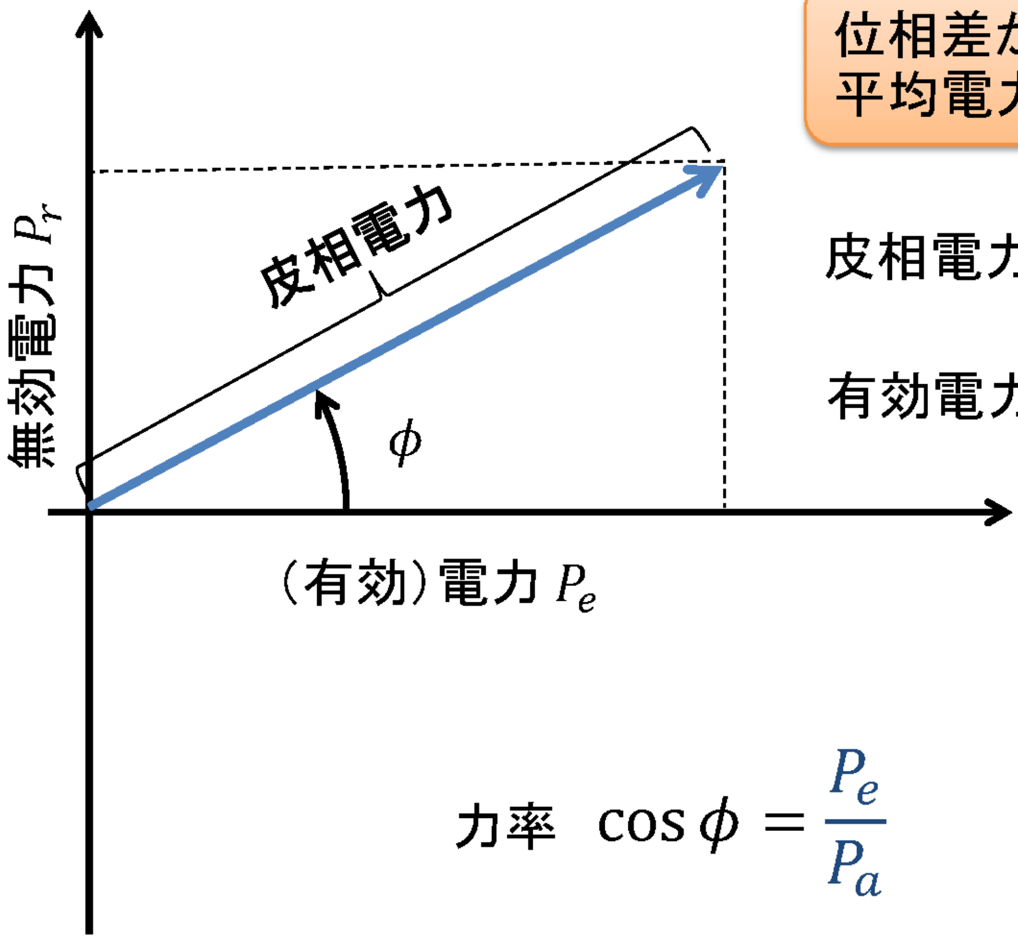
商用交流は、実効値で表示される.

電源電圧 100V の場合，波形の最大値（振幅）V_m はおよそ 141V

力率

電流と電圧に位相差があるときの最大値に対する平均電力の割合

位相差がない場合の
平均電力



皮相電力 $P_a = V_e I_e$ [VA]

有効電力 $P_e = P_a \cos\phi$ [W]

力率 $\cos\phi = \frac{P_e}{P_a}$

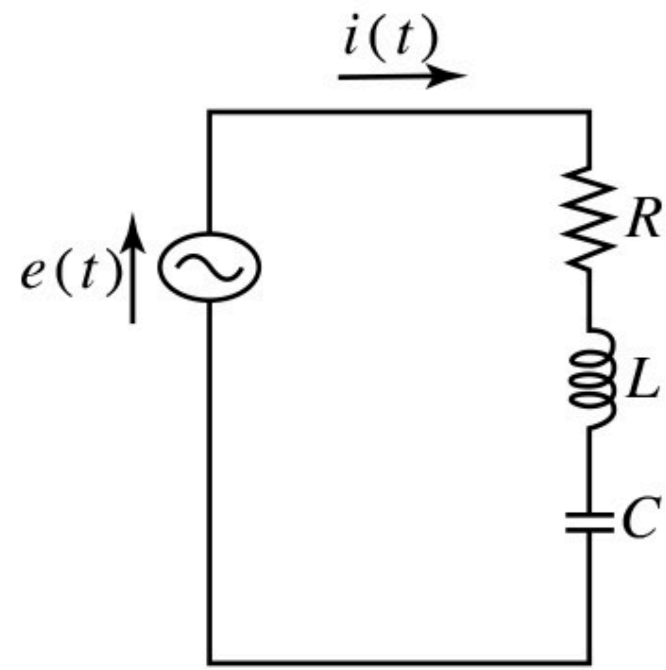
例題3

交流電源の最大値を$16\sqrt{2}$[V]を1/2π [Hz]、
R=8[Ω]、L=15[H]、C=1/7[F]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。

（２）電流の式を求めよ。

（３）有効電力、皮相電力を
　それぞれ求めよ。



例題3　解答

（1）インピーダンス

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{2\pi} = 1$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + \left(1\times 15 - \frac{1}{1\times \frac{1}{7}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{64 + (15 - 7)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 64}$$

$$= 8\sqrt{2}\ [\Omega]$$

$$\phi = Tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{8}{8}\right) = Tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}\ [rad]$$

例題３　解答

（２）電流

$$\frac{E_m}{|Z|}\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

（３）電力

皮相電力 $P_a=\frac{I_mV_m}{2}=\frac{2\times16\sqrt{2}}{2}=16\sqrt{2}$ [VA]

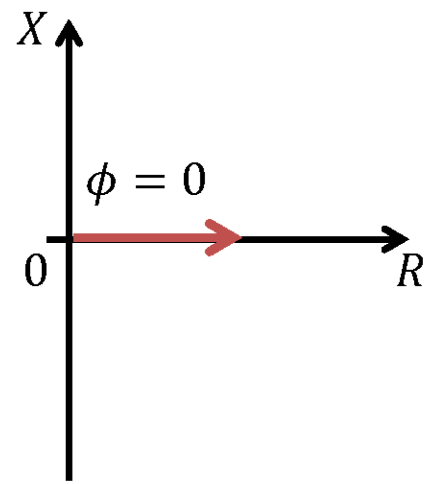
有効電力 $P_e=P_a\cos(\phi)=16\sqrt{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=16\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=16\ [W]$

共振

交流電圧(電流)の　**周波数**　が変化することによって，

伝達される(平均)エネルギーが最大(最大電力)になる現象

⇨ 力率 $\cos\phi$ が最大($=1$)になるとき



$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$\omega = 2\pi f$

共振周波数　$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

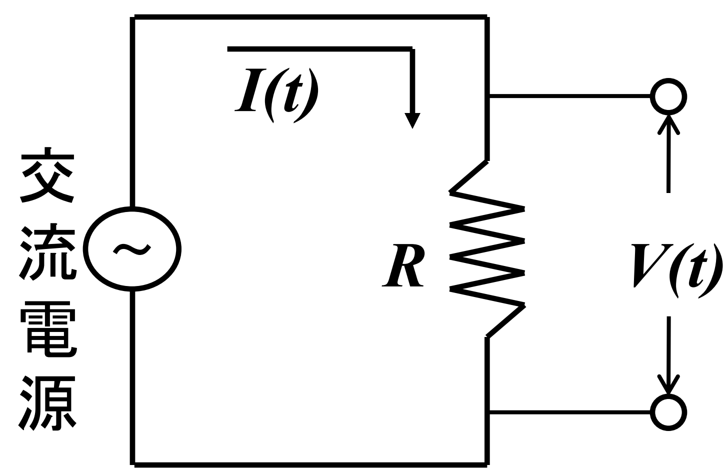
練習問題1

交流電源の最大値V_0を30[V]、周波数fを1/2π[s]とし、抵抗Rを10[Ω]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流のグラフをかけ

（３） π/4[s]後の電流の瞬時値を求めよ



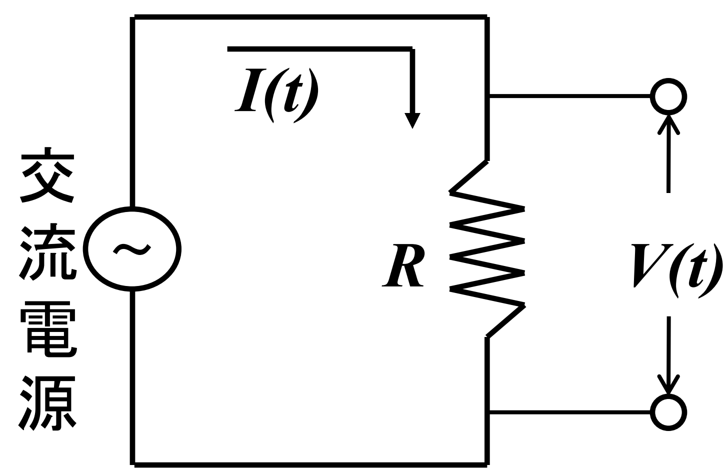
練習問題2

交流電源の最大値V_0を10[V]、周波数fを1/4π[s]とし、抵抗Rを6[Ω]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流のグラフをかけ

（３） π/4[s]後の電流の瞬時値を求めよ



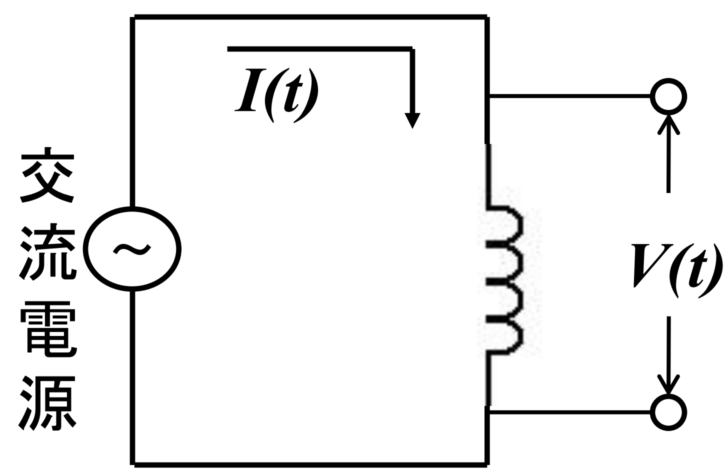
練習問題3

交流電源の最大値V_0を12[V]、周波数fを1/2π[s]とし、自己インダクタンスLを6[H]とする。

（１）電流の式を求めよ

（２）電流のグラフをかけ

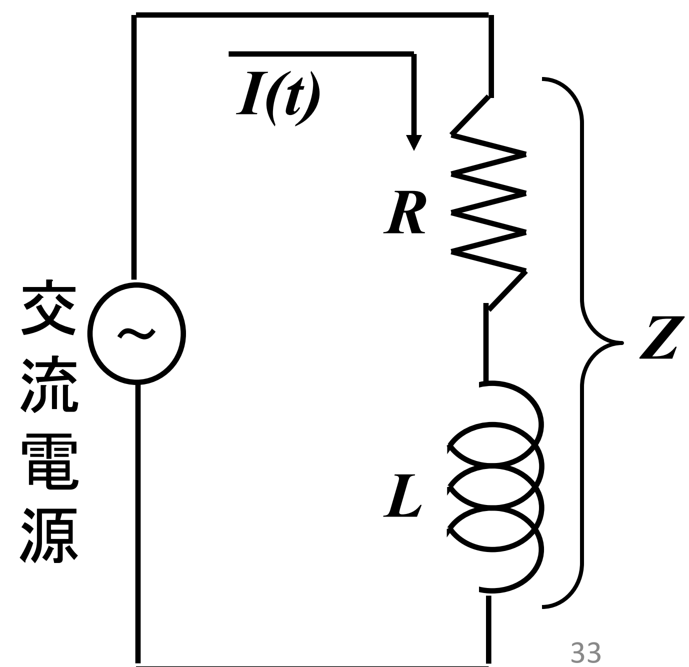
（３） π/6[s]後の電流の瞬時値を求めよ



練習問題4

抵抗Rを8 [Ω]自己インダクタンスLを9 [H]とし、
交流電源の周波数fを1/2π、最大電圧V_0を50 [V]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。
（２）電流の式をかけ。



練習問題５

交流電源の最大値を20 [V]周波数を1/2π[Hz]、R=10[Ω]、L=4[H]、C=1/8[F]とする。

（１）インピーダンスを求めよ。

（２）電流の式を求めよ。

（３）電流の式を求めよ。

（４）有効電力を求めよ。

（５）共振周波数を求めよ。