# 第 II 部 解析力学

ニュートンの運動方程式によると，力が与えられれば加速度が決まり，それを積分して速度や位置を求めることができた。直角座標系（デカルト座標系）では，運動方程式の $x$ 成分は $m\ddot{x} = F_x$ という単純な形であった。しかし，3 次元の極座標 $r, \theta, \varphi$ をとると，加速度の $r$ 成分は $\ddot{r}$ だが，それ以外の成分は $\ddot{\theta}, \ddot{\varphi}$ ではなく座標が入り混じった複雑な式になる。そのため運動方程式の形も直角座標系とは違う形になってしまった。

これに対して解析力学では，座標をどのように選んでも同じ形になる運動方程式を導き，いろいろな性質を証明していく。さらにその方程式は**最小作用の原理【時刻 $t_1$ にある点を出発し，時刻 $t_2$ にある点に到着するという条件を与えると，ある関数を時間積分したものが最小値（極値）をとるような経路をとって運動するという原理】**から導ける。このように解析力学では，運動全体を見渡した大域的な見方をする。この点でも，時々刻々の変化を積み重ねていくニュートンの運動方程式とはまったく異なっている。

## 11　仮想仕事の原理とダランベールの原理

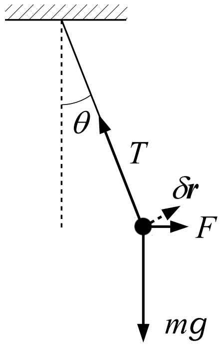


図 21　仮想仕事の原理

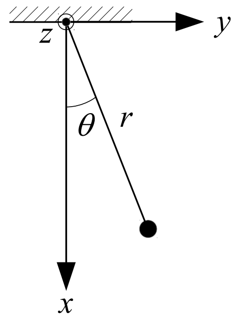


図 22　座標の選び方

例えば図 21 のように，ひもの先におもりを付けて，水平方向に力 $F$ で引いてつり合った状態を考える。ひもの張力 $T$ は他の 2 つの力とは性質が違う。おもりがひもの先に付いているという束縛条件があるために生じる力で**束縛力**と呼ばれる。ひもがたるまない場合，変位は常にひもに垂直なので束縛力は仕事をしない。これを**滑らかな束縛**という。

$N$ 個の質点系（剛体も含む）がつり合いの状態にあるとき，それぞれの質点について働く力はつり合っていなければならない。$i$ 番目の質点に働く束縛力（上の例では張力）を $\boldsymbol{S}_i$，束縛力以外の力（上の例では力 $F$ と重力）の合力を $\boldsymbol{F}_i$ と書くことにすると，

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, N \tag{11.1}$$

がつり合いの条件である。ここで，束縛条件を破らないように質点 $i$ を $\delta \boldsymbol{r}_i$ だけ微小変位させたとしよう。この変位は，あくまでも仮想的に行わせるものなので**仮想変位**とよばれる。このとき質点

系全体で力がする仕事 $\Delta W$ を**仮想仕事**という。これは (11.1) より明らかに 0 になる。

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{11.2}$$

つまり，**質点に働く力がつり合いの状態にあるとき，束縛を破らない任意の仮想変位を行っても，質点に働く力がする仮想仕事はゼロである。**これを**仮想仕事の原理**という。逆に，この式が任意の $\delta \boldsymbol{r}_i$ に対して成り立てば，つり合いの状態にあるといえる。特に，滑らかな束縛の場合には，束縛力が仕事をしないので

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{11.3}$$

となって束縛力が消える。束縛力は方程式を解かないと大きさがわからないことが多い。(11.3) は大きさがわからない束縛力が入っていない点が便利である。

例えば図 21 で，この平面内での運動だけを考えるのであれば，図 22 の平面極座標の角度 $\theta$ を座標として選ぶことが多い（$r = l =$ 一定)。$\theta$ を $\delta\theta$ だけ変化させると，$\delta \boldsymbol{r}$ は図のようになる（質点が 1 個だけなので添え字 1 は省略)。ひもの長さを $l$ とすると $|\delta \boldsymbol{r}| = l\delta\theta$ なので，(11.3) 式の仮想仕事は

$$\Delta W = (F\cos\theta - mg\sin\theta) l \delta\theta = 0 \tag{11.4}$$

となり，つり合いの条件 $F\cos\theta = mg\sin\theta$ が得られる。

質点が運動している場合には，もちろんニュートンの運動方程式

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i \tag{11.5}$$

が成り立つ。これを

$$\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{11.6}$$

と書き換えて，$-m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i$ を力の一種と考えて**慣性力**とよぶことにすれば，動力学の方程式を静力学（力のつり合い）の問題と見ることができる。これを**ダランベールの原理**という。つり合いの場合と違って，運動している場合は力も加速度も時間とともに変化する。けれどもそれぞれの瞬間に (11.6) 式が成り立つので，現実の位置から束縛を破らないように仮想変位 $\delta \boldsymbol{r}_i$ をさせたとすると

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{S}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{11.7}$$

となる。滑らかな束縛の場合には，束縛力の項が消えて次のようになる。

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0 \tag{11.8}$$

# 12　束縛がない場合のラグランジュの運動方程式

$N$ 個の質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N$ の $x, y, z$ 成分は，

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_N, y_N, z_N \tag{12.1}$$

と表すのが普通だが，成分ごとに記号が違うのは一般的な話をするのには不便である。そこで通し番号を付け，$n \equiv 3N$ と置いて，

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n \tag{12.2}$$

と表すことにする。また，力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_N$ の成分も通し番号を付けて $F_1, F_2, \cdots, F_n$ と表す。添え字の 1, 2, 3 は質点 1 に対応するので質量 $m_i$ の定義も変えて，$m_1 = m_2 = m_3 =$ (質点 1 の質量)， $m_4 = m_5 = m_6 =$ (質点 2 の質量)$, \cdots$ と定義し直す。以上をまとめると表 2 のような対応関係になる。通し番号による記号を使うと，ダランベールの原理 (11.8) はベクトル記号を使わ

表 2　通常の記号と通し番号による記号の対応関係（$n = 3N$）

| | 通常の記号 | 通し番号による記号 |
|---|---|---|
| 座標 | $x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N$ | $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n$ |
| 力 | $F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \cdots, F_{Nx}, F_{Ny}, F_{Nz}$ | $F_1, F_2, F_3, \cdots, F_{n-2}, F_{n-1}, F_n$ |
| 質量 | $m_1, \cdots, m_N$ | $m_1 = m_2 = m_3, \cdots, m_{n-2} = m_{n-1} = m_n$ |

ずに

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0 \tag{12.3}$$

という単純な形に書ける。

さて，力 $F_i$ が保存力であり，ポテンシャル $U$ を使って

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{12.4}$$

と表せるとしよう。また，系全体の運動エネルギー $K$ は次のように書ける。

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \tag{12.5}$$

ここでラグランジアン $L$ を

$$L = K - U = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - U \tag{12.6}$$

と定義すると，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{d}{dt}(m_i\dot{x}_i) = m_i\ddot{x}_i \tag{12.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i \tag{12.8}$$

が成り立つので，質点 $i$ の運動方程式 $m_i\ddot{x}_i = F_i$ を

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{12.9}$$

と表すことができる。

ここまではニュートンの運動方程式を書き換えたにすぎない。ところが驚くべきことに，座標をどのように選んでも (12.9) と同じ形になることを示せる。以下でその証明をしてみよう。証明にはダランベールの原理 (12.3) を使う。

質点系の位置を表す適当な座標を $q_1, q_2, \cdots, q_n$ とし，これらを**一般座標**とよぶ。例えば 3 次元の極座標や円柱座標でもよいし，その他のもっと複雑な座標でもよい。必要な座標の個数は系の自由度で決まっているので，座標の個数 $n$ は変わらない。一般座標を時間で微分した $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ を**一般速度**とよぶ。（一般速度の次元は必ずしも【長さ/時間】にならないことに注意。例えば，一般座標として角度（無次元量）をとると，一般速度の次元は【1/時間】となる。）これまで使ってきたデカルト座標（直角座標）$x_i$ は $q_j$ の関数であるし，逆に $q_j$ は $x_i$ の関数である。一般的には時間 $t$ にも依存する可能性があるので，

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, t), \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{12.10}$$

$$q_j = q_j(x_1, x_2, \cdots, x_n, t), \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{12.11}$$

と書ける。(12.10) から仮想変位 $\delta x_i$ は一般座標の仮想変位 $\delta q_j$ によって

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{12.12}$$

と表せる。例えば $q_1, q_2$ として平面極座標 $r, \theta$ をとった場合には，

$$x = r\cos\theta \longrightarrow \delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\delta\theta = \cos\theta \cdot \delta r - r\sin\theta \cdot \delta\theta \tag{12.13}$$

$$y = r\sin\theta \longrightarrow \delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\delta\theta = \sin\theta \cdot \delta r + r\cos\theta \cdot \delta\theta \tag{12.14}$$

となる。ただし $x_1, x_2$ の代わりに $x, y$ を使った。(12.12) の関係を使うと (12.3) の $F_i$ を含む項は

$$\sum_{i=1}^{n} F_i\delta x_i = \sum_{i=1}^{n} F_i\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = \sum_{j=1}^{n} -\frac{\partial U}{\partial q_j}\delta q_j \tag{12.15}$$

となる。$-\partial U/\partial q_j$ を**一般化力**という。これはポテンシャル $U$ を一般座標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ の関数と見て，$q_j$ について偏微分したものである。力という名前が付いてはいるが，力の次元を持つとは限らない。例えば $q_j$ が角度（無次元量）であればエネルギーの次元になる。

ここで，(12.3) の残りの項を計算するための準備をする。(12.10) を時間で微分すると

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \tag{12.16}$$

となる。(12.10) の形から，上の式中の $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}, \dfrac{\partial x_i}{\partial t}$ の中には $\dot{q}_j$ が含まれないので，

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{12.17}$$

という関係が成り立つ。例えば $q_1, q_2$ として平面極座標 $r, \theta$ をとった場合には，(12.13) と (12.14) に (12.16) を適用して

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\dot{\theta} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \to \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{r}} = \cos\theta = \frac{\partial x}{\partial r},\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} = -r\sin\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \tag{12.18}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\dot{\theta} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \to \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{r}} = \sin\theta = \frac{\partial y}{\partial r},\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}} = r\cos\theta = \frac{\partial y}{\partial \theta} \tag{12.19}$$

となって，確かに (12.17) の関係が成り立っている。(12.3) の残りの項は，まず (12.12) を使って

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \left( \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \tag{12.20}$$

となる。式 (12.20) の右辺の括弧の中は，(12.17) を利用して

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \frac{d}{dt}\left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt}\left( \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \\ &= \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\frac{\dot{x}_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{\dot{x}_i^2}{2} = \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right)\frac{\dot{x}_i^2}{2} \end{aligned} \tag{12.21}$$

と書ける。これを (12.20) に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} \right)\left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right)\delta q_j = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right)\delta q_j \tag{12.22}$$

となる。

(12.15) と (12.22) を (12.3) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{n} \left\{ -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \left( \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} \right) \right\}\delta q_j = -\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}(K-U) \right\}\delta q_j \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(K-U) - \frac{\partial}{\partial q_j}(K-U) \right\}\delta q_j \end{aligned} \tag{12.23}$$

となる。最後の変形では，ポテンシャル $U$ が座標のみの関数なので $\partial U/\partial \dot{q}_j = 0$ であることを使った。任意の $\delta q_j$ に対してこれが成り立つためには，括弧内が 0 でなければならない。したがって，**ラグランジアン** $L$ を

$$L = K - U = \text{【運動エネルギー】} - \text{【ポテンシャル（位置エネルギー）】} \tag{12.24}$$

と定義すると，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{12.25}$$

という (12.9) と同じ形の方程式が任意の座標に対して成り立つことがわかる。これを**ラグランジュの運動方程式**という。

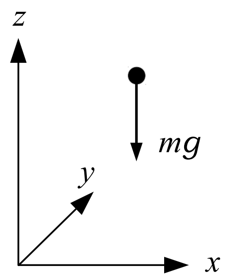

図23 重力のもとでの運動

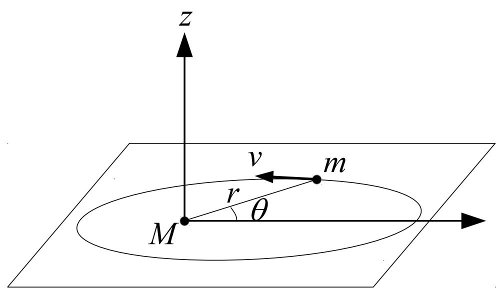

図24 太陽と惑星

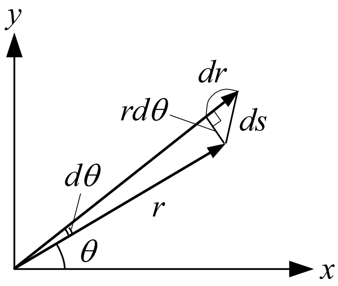

図25 平面極座標での変位

**【例 1】** 質量 $m$ の質点が重力 $mg$ を受けて 3 次元空間の中を運動する場合を考える。図 23 のように鉛直上向きに $z$ 軸，水平面内に $x, y$ 軸をとると，ラグランジアンは

$$L = K - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{12.26}$$

である。このように具体的な問題を解く場合には，通し番号の記号を使わずに，普通の記号を使うことの方が多い。ラグランジュの運動方程式は

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = 0, \qquad m\ddot{z} - (-mg) = 0 \tag{12.27}$$

となる。これは，重力がある場合のニュートンの運動方程式と同じである。

**【例 2】** 太陽のまわりを回る惑星の運動。図 24 のように太陽（質量 $M$）を原点にとり，惑星（質量 $m$）とその初速度を含む平面を考える。その平面上の平面極座標を $r, \theta$ とし，平面に垂直に $z$ 軸をとる。$r$ 方向の速度は $\dot{r}$，$\theta$ 方向の速度は $r\dot{\theta}$ である。万有引力が働くとき，$z = 0$ の面上を運動するのは明らかだとすると，ラグランジアンは

$$L = K - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + G\frac{Mm}{r} \tag{12.28}$$

である（$G$ は万有引力定数）。ラグランジュの運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + G\frac{Mm}{r^2} = 0 \tag{12.29}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \tag{12.30}$$

となる。1 番目の方程式は $r$ 成分についての運動方程式であり，2 番目の方程式は $\theta$ 成分についての運動方程式と等価な角運動量保存則を表している。

【補足】一般座標を使って運動エネルギーためには，速さ $v$ の 2 乗を一般座標で表せばよい。その方法を例 2 の場合について説明しよう。微小時間 $dt$ の間の移動距離を $ds$ とすると，$v^2 = (ds)^2/(dt)^2$ である（右辺は微分ではなく，単純な割り算であることに注意）。図 25 の平面極座標の場合，微小時間 $dt$ の間の座標の変化をそれぞれ $dr, d\theta$ とすると，$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2$ なので，

$$v^2 = \frac{(ds)^2}{(dt)^2} = \frac{(dr)^2}{(dt)^2} + \frac{(rd\theta)^2}{(dt)^2} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \tag{12.31}$$

となる。3 次元の極座標 $r, \theta, \phi$ の場合にも同様にして

$$\begin{aligned} v^2 &= \frac{(ds)^2}{(dt)^2} = \frac{(dr)^2}{(dt)^2} + \frac{(rd\theta)^2}{(dt)^2} + \frac{(r\sin\theta d\phi)^2}{(dt)^2} \\ &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(r\sin\theta\cdot\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta \end{aligned} \tag{12.32}$$

がわかる。

# 13　束縛がある場合の運動方程式

もう一度，デカルト座標（直角座標）に戻ろう。$h$ 個の束縛条件

$$f_l(x_1, x_2, \cdots x_n, t) = 0, \qquad l = 1, 2, \cdots, h \tag{13.1}$$

がある場合には，どうすればよいだろうか？ $x_i$ を $\delta x_i$ だけ変化させるとき，束縛条件 (13.1) があるので，すべての $\delta x_i$ を自由に変化させることはできず，前節の議論はそのままでは成立しない。そこで，以下で述べるような**ラグランジュの未定乗数法**（または未定係数法ともいう）を使う。

$x_i$ が $\delta x_i$ だけ変化しても，関数 $f_l$ は 0 のままでなければならないので，その変化 $\delta f_l$ について次の式が成り立つ。

$$0 = \delta f_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial x_i}\delta x_i, \qquad l = 1, 2, \cdots, h \tag{13.2}$$

この式は 0 なので，適当な乗数 $\lambda_l$ を掛けて，さらに $l$ について和をとっても 0 である。これを (12.3) 式に加えると

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - m_i\ddot{x}_i + \sum_{l=1}^{h}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial x_i})\delta x_i = 0 \tag{13.3}$$

となる。$n$ 個の $\delta x_i$ に $h$ 個の束縛条件 (13.1) が付いているので，自由に動かせて独立に選べる $\delta x_i$ は $n-h$ 個だけである。残りの $h$ 個は (13.2) の連立方程式で決まり，独立には選べない。そこで番号を付け替えて，独立でない $h$ 個を $i = 1, 2, \cdots, h$ とする。さらに，未定であった $\lambda_l$ を

$$F_i - m_i\ddot{x}_i + \sum_{l=1}^{h}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, h \tag{13.4}$$

となるように選ぶ。（**注意**：$\lambda_l$ は，ある時間 $t$ での $F_i$，$\ddot{x}_i$，$\partial f_l/\partial x_i$ に応じて決まる。したがって

$\lambda_l$ は定数ではなく時間とともに変化する。） そうすると (13.3) の和で $i = 1, 2, \cdots, h$ が消えて

$$\sum_{i=h+1}^{n} (F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{l=1}^{h} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i}) \delta x_i = 0 \tag{13.5}$$

となる（$i$ についての和が $h+1$ から $n$ までになったことに注意）。$\delta x_{h+1}, \cdots, \delta x_n$ は自由に動かせるので，どんな $\delta x_{h+1}, \cdots, \delta x_n$ に対しても 0 になるためには，括弧の中が 0 でなければならない。

$$F_i - m_i \ddot{x}_i + \sum_{l=1}^{h} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i} = 0, \qquad i = h+1, \cdots, n \tag{13.6}$$

(13.4) と (13.6) より，すべての $i$ に対して

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{l=1}^{h} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{13.7}$$

が成り立つ。これを**第一種のラグランジュ運動方程式**という。$\lambda_l$ をパラメータとして方程式を解いて $x_i(t, \lambda_1, \cdots, \lambda_h)$ が得られる。これを束縛条件 (13.1) に代入して $\lambda_l$ を決め，その $\lambda_l$ を $x_i(t, \lambda_1, \cdots, \lambda_h)$ に代入して $x_i(t)$ が求められる。(13.7) 式はニュートンの運動方程式である。右辺は力で，第 1 項 $F_i$ は束縛力以外の力だから，第 2 項は束縛力である。仮想変位 $\delta x_i$ に対して束縛力がする仮想仕事をすべての $i$ について合計すると

$$\sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{l=1}^{h} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \right) \delta x_i = \sum_{l=1}^{h} \lambda_l \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \delta x_i \right) = 0 \tag{13.8}$$

となる（(13.2) を使った）。したがって，(13.1) のように座標の関係式で表される束縛（**ホロノームな束縛**とよばれる）は，束縛力が仕事をしない滑らかな束縛であることがわかる。（非ホロノームな束縛はここでは扱わない。非ホロノームな束縛の例としては，箱の中に閉じ込められた粒子や，平面上をすべらずに転がる球や円板などがある。）

一般座標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ に束縛条件

$$g_l(q_1, q_2, \cdots q_n, t) = 0, \qquad l = 1, 2, \cdots, h \tag{13.9}$$

がある場合にも (13.2) と同様にして，

$$0 = \delta g_l = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_l}{\partial q_j} \delta q_j, \qquad l = 1, 2, \cdots, h \tag{13.10}$$

となる。これにラグランジュの未定乗数 $\lambda_l$ を掛けて $l$ について和をとったものを (12.23) に加えると，

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (K - U) - \frac{\partial}{\partial q_j} (K - U) - \sum_{l=1}^{h} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \\ &= -\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{l=1}^{h} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_j} \right\} \delta q_j \end{aligned} \tag{13.11}$$

となる。(13.3) から (13.7) を導いたのと同様にして，

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^{h} \lambda_l \frac{\partial g_l}{\partial q_j}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{13.12}$$

が得られる。これを**ラグランジュの第二種運動方程式**という。(13.7) と同様，右辺は一般化された束縛力である。

$h$ 個の束縛条件がある場合，それに合わせて $h$ 個の一般座標 $q_1, \cdots, q_h$ が一定になるように選ぶことが多い。束縛条件は $c_l$ を定数として，$g_l = q_l - c_l = 0$, $(l = 1, \cdots, h)$ となるので，$q_1, \cdots, q_h$ に対する運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \lambda_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, h \tag{13.13}$$

となる。一方，束縛条件のない $n - h$ 個の一般座標 $q_{h+1}, \cdots, q_n$ は，束縛条件の式 $g_l$ に含まれない。したがって，$q_{h+1}, \cdots, q_n$ についての運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \qquad j = h+1, h+2, \cdots, n \tag{13.14}$$

となる。これは束縛がない場合の (12.25) と同じである。$q_l = c_l =$ 一定，$(l = 1, \cdots, h)$ は解かなくても明らかなので，束縛力を求める必要が無ければ，$q_l$ $(l = 1, \cdots, h)$ は定数 $c_l$ に置き換えてラグランジアンを書き，(13.14) を解けばよい。**ラグランジュの運動方程式というと，(13.14) 式を指すことが多い。**

**【例題】**図 21 のように長さ $l$ の糸に質点が吊るされた振子が鉛直面内で振動する場合，図 22 の $x, y, z$ の代わりに $q_1, q_2, q_3$ として $z, r, \theta$ を選ぶのがよい。束縛条件は $g_1 = z = 0$ と $g_2 = r - l = 0$ である。力学 I で学んだように，$r$ 方向の速度は $\dot{r}$，$\theta$ 方向の速度は $r\dot{\theta}$ なので運動エネルギー $K$ は

$$K = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \tag{13.15}$$

である。一方，位置エネルギー $U$ は

$$U = -mgx = -mgr\cos\theta \tag{13.16}$$

であり，ラグランジアンは，

$$L = K - U = \frac{m}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta \tag{13.17}$$

となる。(13.13), (13.14) に対応する運動方程式を作ると

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} - 0 = \lambda_1 \tag{13.18}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - (mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta) = \lambda_2 \tag{13.19}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) + mgr\sin\theta = 0 \tag{13.20}$$

となる。束縛条件 $z=0$ と $r=l$ を代入すると

$$0=\lambda_1 \tag{13.21}$$

$$ml\dot{\theta}^2+mg\cos\theta=-\lambda_2 \tag{13.22}$$

$$ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0\Rightarrow\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\sin\theta \tag{13.23}$$

となる。(13.23) から $\theta(t)$ を求め，(13.22) に代入すれば $\lambda_2$ が求まる。この場合，$-\lambda_2$ は糸の張力である。

ふつうは初めから $z=0, r=l$ と置いて，一般座標として $\theta$ だけを考える。ラグランジアンおよび $\theta$ についてのラグランジュの運動方程式は

$$L=\frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta \tag{13.24}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial L}{\partial\theta}=ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0 \tag{13.25}$$

となり，束縛条件は表に出てこない。【例題終わり】

ラグランジュの運動方程式を使うメリットとして次の 3 つがある。

1. どのような座標を選んでも，運動方程式が同じ形になる。
2. 一般座標をうまく選ぶと，束縛条件が表面に現れないようにできる。
3. ニュートンの運動方程式では加速度が必要だが，ラグランジュの運動方程式では速度を一般座標で表せていればよい。時間微分の手間が一回省け，p.28【補足】で説明したようなやり方で簡単に求められることが多い。

**【補足：保存力以外の力がある場合】** (12.15) 式で力 $F_i$ がポテンシャル $U$ から導かれる力 $-\partial U/\partial x_i$ だけでなく，摩擦力などの非保存力 $F'_i$ も含んでいるとしよう。その場合，(12.15) 式は次のように変化する。

$$\sum_{i=1}^{n}F_i\delta x_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial U}{\partial x_i}+F'_i\right)\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j=\sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\partial U}{\partial q_j}+\sum_{i=1}^{n}F'_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \tag{13.26}$$

となる。したがって一般化力は，

$$Q_j=-\frac{\partial U}{\partial q_j}+Q'_j,\qquad \text{ここで } Q'_j\equiv\sum_{i=1}^{n}F'_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{13.27}$$

と書ける。第 2 項は非保存力があるために出てきた項であり，$Q'_j$ と置いた。運動方程式 (13.12) の右辺には，この力が余分に付け加わるので

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q'_j+\sum_{l=1}^{h}\lambda_l\frac{\partial g_l}{\partial q_j},\qquad j=1,2,\cdots,n \tag{13.28}$$

となる。束縛を受けない座標についてのラグランジュの運動方程式 (13.14) にも $Q'_j$ が加わって

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q'_j,\qquad j=h+1,h+2,\cdots,n \tag{13.29}$$

となる。

# 14　変分法

一変数の関数 $f(x)$ や多変数の関数 $g(x,y,z)$ の極値を求める問題は，微分を使って調べることができる。これに対して別の形の極値問題がある。例をいくつか挙げてみよう。

**【例 1】**$xy$ 平面上で，点 $\mathrm{A}(a, y_A)$ と点 $\mathrm{B}(b, y_B)$ を結ぶ最短の曲線 $y(x)$。答えが直線になるのは明らかだが，式で表すと曲線の長さは次のような積分で与えられる。

$$I = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx, \qquad y' \equiv \frac{dy}{dx} \tag{14.1}$$

積分 $I$ を最小にする曲線 $y(x)$ はどのようにすれば求められるのだろうか？

**【例 2】**幾何光学で光線が通る経路は，進むのに要する時間が最小になるような経路である（**フェルマーの原理**）。簡単のために例 1 と同様に，$xy$ 平面で点 A から出発して点 B に進む光を考える。屈折率は場所によって変化していて $n(x,y)$ だとする。真空中の光の速さを $c$ とすると，屈折率 $n$ の場所での光の速さは $c/n$ になる。曲線 $y(x)$ の上の微小区間 $x \sim x+dx$ の長さは例 1 と同様 $\sqrt{1+y'^2}dx$ なので，点 A に到着するまでの時間 $T$ は

$$T = \int_a^b \frac{n(x,y)}{c}\sqrt{1+y'^2}dx \tag{14.2}$$

という積分で表せる。屈折率 $n(x,y)$ がわかっているとして，時間 $T$ を最小にする経路はどのようにすれば求められるのだろうか？

そこで一般的に次のような積分を対象として考える。

$$I[y] = \int_a^b f(x,y,y')dx \tag{14.3}$$

$I$ の値は関数 $y(x)$ の選び方によって変化するので，$I$ は「関数の関数」とも言える。その意味で $I[y]$ と書き，$I[y]$ を $y(x)$ の**汎関数 (functional)** とよぶ。与えられた $f$ に対して $I$ が極値をとるような $y(x)$ を求めるのが問題である。

さて，図 26 の $y(x)$ は $I[y]$ が極値をとる関数で，それを少しだけ変化させたものを $y(x)+\delta y(x)$ とする。$\delta y(x)$ のことを $y(x)$ **の変分**という。例 1 や例 2 でも始点と終点は決まっていたので，$\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ を仮定する。$y(x)$ の**変分**によって汎関数 $I[y]$ も変化する。この変化分を $\delta I[y]$ または $\delta I$ と表し，**汎関数** $I[y]$ **の変分**という。$x$ の関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で極値をとるとき，$x$ の微小変化 $dx$ に対する関数の変化 $df = f(x_0+dx) - f(x_0) = 0$ であった。これと同様に，$y(x)$ の微小変化 $\delta y(x)$ に対する汎関数の変化 $\delta I[y] = 0$ となることが極値の条件となる。そこで微小量の 1

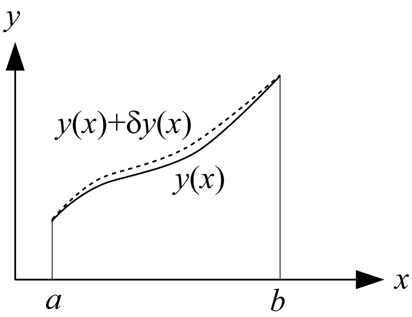


図 26 $y(x)$ の変分 $\delta y(x)$

次の項まで展開すると，

$$
\begin{aligned}
0 = \delta I[y] = \delta \int_a^b f(x,y,y')dx &= \int_a^b \left\{ f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x,y,y') \right\} dx \\
&= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \right) dx \qquad (14.4)
\end{aligned}
$$

となる。$\delta y'$ が $\delta y$ を微分したものであることを使うと，２番目の項の積分は次のように部分積分できる。

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d(\delta y)}{dx}dx &= \left[ \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \\
&= 0 - \int_a^b \frac{d}{dx}\left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \qquad (14.5)
\end{aligned}
$$

最後のところで $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$ を使った。この結果を (14.4) に代入すると，

$$
0 = \delta I[y] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y}\delta y - \frac{d}{dx}\left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y \right\} dx = \int_a^b \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right\} \delta y dx \qquad (14.6)
$$

となる。任意の $\delta y(x)$ に対して積分が 0 になるための必要十分条件は，括弧の中が 0 になることである。したがって，

$$
\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \qquad (14.7)
$$

が得られる。これを**オイラーの微分方程式**または**オイラー-ラグランジュの微分方程式**という。以上のような問題を**変分問題**，その解き方を**変分法**という。オイラーの微分方程式の解 $y(x)$ は次の２つの性質を持つ。

**性質 1**　$f$ が $y$ を陽に含まない $f(x, y')$ の形の場合，$\partial f/\partial y' =$ 一定 になる。

**性質 2**　$f$ が $x$ を陽に含まない，つまり $f(y, y')$ の形の場合，$E = y'(\partial f/\partial y') - f$ で定義される $E$ が一定になる。

**証明：**性質 1 は，$\partial f/\partial y = 0$ なので，オイラーの微分方程式から $d(\partial f/\partial y')/dx = 0$ となることか

ら明らか。性質 2 の証明は，$E$ を $x$ で微分して

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dx} &= y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{df}{dx} = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y''\right)\\ &= y'\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y}\right\} - \frac{\partial f}{\partial x}\end{aligned} \tag{14.8}$$

となるが，第 1 項はオイラーの微分方程式から 0 となり，第 2 項は $f$ が $x$ を陽に含まないことから 0 となる。結局 $dE/dx = 0$ なので $E$ は一定である。≪証明終わり≫

この節の初めの【例 1：$xy$ 平面上で，点 A と点 B を結ぶ最短の曲線】の場合，$f = \sqrt{1+y'^2}$ で $y$ を陽に含まないので，上で説明した性質 1 が使える。$\partial f/\partial y' = y'/\sqrt{1+y'^2} =$ 一定 だから $y' =$ 一定，つまり 2 点を結ぶ最短曲線は直線であることがわかる。

未知関数が $n$ 個の場合に一般化すると，$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ の汎関数

$$I[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')dx \tag{14.9}$$

が極値をとるためのオイラーの微分方程式は，

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j'}\right) = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{14.10}$$

となる。

また，変分問題では「一定の長さのひもが囲む面積を最大にする」というように，いくつかの束縛条件付きの極値問題を扱うことが多い。これについては，変分法の教科書を参照してほしい。

## 15 ハミルトンの原理（最小作用の原理）

未知関数が $n$ 個の場合の変分問題の (14.9) と (14.10) 式で，変数 $x$ の代わりに時間 $t$ をとり，$y_j(x)$ の代わりに一般座標 $q_j(t)$, $y_j'(x)$ の代わりに一般速度 $\dot{q}_j(t)$, 関数 $f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')$ の代わりにラグランジアン $L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)$，汎関数 $I$ の代わりに $S$ とすれば (14.9) 式は，

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)dt \tag{15.1}$$

となる。汎関数 $S$ のことを解析力学では**作用積分**または単に**作用**とよぶ。作用積分が極値をとるためのオイラーの微分方程式は，(14.10) 式を書き換えて

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{15.2}$$

となる。符号を反転すれば，これはラグランジュの運動方程式 (12.25) になる。対応関係をまとめたのが表 3 である。

以上のことから，**ニュートンの運動方程式にしたがって実際に起こる運動は，作用積分 (15.1) が極値をとるような運動になっていることがわかる。**これを**ハミルトンの原理**という。多くの場合

表 3　一般の変分問題との対応関係

| 一般の変分問題 | 解析力学 |
|---|---|
| 変数 $x$ | 時間 $t$ |
| 関数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ | 一般座標 $q_1(t), q_2(t), \cdots, q_n(t)$ |
| 一階導関数 $y_1'(x), y_2'(x), \cdots, y_n'(x)$ | 一般速度 $\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \cdots, \dot{q}_n(t)$ |
| 関数 $f(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')$ | ラグランジアン $L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, t)$ |
| 汎関数 $I = \int_a^b f dx$ | 作用積分 $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ |
| オイラーの微分方程式 $\frac{\partial f}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_j'}\right) = 0$ | ラグランジュの運動方程式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ |

に作用積分が極小になり，場合によっては最小になるので，**最小作用の原理**とよばれることも多い。逆に，ハミルトンの原理（最小作用の原理）を出発点（指導原理）として理論を組み立てていくこともできる。例えば，有名なランダウ-リフシッツの「力学」はこの方式を採用している。

# 16　ラグランジアンについてのいくつかの注意

## 16.1　ラグランジアンの形

ここまではラグランジアン $L = K - U$ だとしてきたが，そうとばかりは限らない。たとえば電荷 $e$ をおびた荷電粒子が電場 $\boldsymbol{E}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の中を運動する場合，運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E} + e\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B} \tag{16.1}$$

また，電場と磁束密度はスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r}, t)$，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ を用いて次のように表せる。

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{16.2}$$

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} \tag{16.3}$$

このとき，ラグランジアンを

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\phi + e\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A} \tag{16.4}$$

とすると，電磁場中の荷電粒子の運動を表すことができる。第 2 項までは $K - U$ の形だが，余分に第 3 項が付け加わる。

【証明】(16.4) からラグランジュの運動方程式を作ってみる。デカルト座標を採用し，$x$ 成分を計算してみる。

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + eA_x\right) - \left(-e\frac{\partial \phi}{\partial x} + e\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\right) \\ &= m\ddot{x} + e\frac{dA_x}{dt} + e\frac{\partial \phi}{\partial x} - e\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} \end{aligned} \tag{16.5}$$

ここで

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} \tag{16.6}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} = \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{16.7}$$

を代入すると，(16.5) 式は

$$\begin{aligned}0 &= m\ddot{x} + e\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right) + e\frac{\partial \phi}{\partial x} - e\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ &= m\ddot{x} + e\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) - e\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + e\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \\ &= m\ddot{x} - eE_x - e(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B})_x \end{aligned} \tag{16.8}$$

となる。これは運動方程式 (16.1) を書き換えたものである。$y, z$ 成分についても同様。【証明終り】

## 16.2　ラグランジアンの任意性

座標と時間の任意関数 $f(q_1, q_2, \cdots, q_n, t)$ の完全導関数をラグランジアン $L$ に加えたものを $L'$ と置く。

$$L' = L + \frac{df}{dt} = L + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t}\right) \tag{16.9}$$

$L'$ に対する作用積分 $S'$ は

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt \\ &= S + f(q_1(t_2), q_2(t_2), \cdots, q_n(t_2), t_2) - f(q_1(t_1), q_2(t_1), \cdots, q_n(t_1), t_1) \end{aligned} \tag{16.10}$$

となる。変分を考えるときには，両端 $t_1, t_2$ での $q_1, q_2, \cdots, q_n$ は変化させないので，(16.10) の右辺第 2 項と第 3 項は変化しない。つまり，$S'$ と $S$ の差は定数になるので，同じ運動方程式を与える。（納得できなければ，$L'$ からラグランジュの運動方程式を実際に計算して，$L$ による運動方程式と同じになることを確かめること。）このように，ラグランジアンには，座標と時間の任意関数の時間についての完全導関数を付け加えてよいという任意性が残されている。この性質は，後の正準変換のところで重要な役割を果たす。

# 17　対称性と保存則

## 17.1　循環座標

ラグランジアンがある座標 $q_j$ を含まない形をしている場合，その座標をずらしてもラグランジアンは同じで運動方程式も変わらない。このような座標を**循環座標**とよぶ。ラグランジュの方程式と $q_j$ が循環座標であることから，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{17.1}$$

が成り立つので，左辺の括弧内は時間変化せず一定になる。ラグランジアンを一般座標 $q_j$ で偏微分したものを $q_j$ に共役な**一般運動量** $p_j$ という。(17.1) は

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{一定} \tag{17.2}$$

つまり，循環座標に対応する（共役な）一般運動量が保存することを意味している。

外部と相互作用していない質点系を**孤立系**とよぶ。孤立系については系全体のエネルギー，運動量，角運動量が一定になる。これらを**エネルギー保存則**，**運動量保存則**，**角運動量保存則**という。この３つの保存則は，考えている質点系自体の性質によるものではなく，**私たちが住む時空（時間＋３次元空間）の対称性（時間の一様性，空間の一様性と等方性）に起因**している。だからこそ，孤立系の詳細にかかわらず，一般的に成り立つのである。このことを以下で説明する。上で述べた循環座標は，運動量保存則や角運動量保存則に対応している場合が多い。【質点系がある対称性を持っていると，それに応じた保存則が成り立つことを示せる。これをネーターの定理という。】

## 17.2　時間の一様性とエネルギー保存則

孤立系の運動は，スタートの時間を変えても，初期条件を同じにすればまったく同じ運動が起こる。ビデオに撮影しても区別はできない。これは時間に特別な原点がなく，どの時刻でも同じ性質を持っていることによる。この性質を**時間に対する並進対称性**とか**時間の一様性**とよぶ。このような場合には，時間を変化させてもラグランジアンは変化せず，ラグランジアンは時間に陽に依存しない形 $L(q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)$ になる。ラグランジアンの時間微分を計算すると，

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right\} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{17.3}$$

となる。ただし，２つ目から３つ目の変形でラグランジュの運動方程式を使った。したがって，

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad E \equiv \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \text{一定} \tag{17.4}$$

となる。これは p.34 の性質 2 を一般化したものであり，$E$ のことを**エネルギー**とよぶ。(17.4) はエネルギーが一定になること，つまり**エネルギー保存則**を意味する。

質点系が孤立系でなく，**外部からの力（外力）を受けている場合でも，外力のポテンシャルが時間変化しなければエネルギーが保存する。**例えば，各質点に重力 $m_i g$ が働く場合がそうである。重力のポテンシャルは時間を陽に含まないので，ラグランジアン $L = K - U$ も時間を陽に含まず，上の議論がそのまま適用できるからである。（外力が時間変化する場合でも，外力の原因となっている部分も含めた十分大きな系をとれば孤立系となって，エネルギー保存則が成り立つようにできることが多い。）

デカルト座標では運動エネルギー $K$ は (12.5) 式であった。デカルト座標と一般座標の関係式が時間 $t$ を陽に含まない

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \cdots, q_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{17.5}$$

という形であれば，

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \tag{17.6}$$

となるので，運動エネルギー $K$ は，

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \qquad \left( \text{ここで } M_{jk} \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \text{と置いた} \right) \end{aligned} \tag{17.7}$$

という 2 次形式になることがわかる。$M_{jk} = M_{kj}$ であることに注意。例えば $n = 2$ の場合，

$$K = \frac{1}{2} \left( M_{11} \dot{q}_1^2 + M_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + M_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + M_{22} \dot{q}_2^2 \right) \tag{17.8}$$

だから，

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2} \dot{q}_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} &= \dot{q}_1 \left( M_{11} \dot{q}_1 + \frac{1}{2} M_{12} \dot{q}_2 + \frac{1}{2} M_{21} \dot{q}_2 \right) + \dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} M_{12} \dot{q}_1 + \frac{1}{2} M_{21} \dot{q}_1 + M_{22} \dot{q}_2 \right) \\ &= M_{11} \dot{q}_1^2 + M_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + M_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + M_{22} \dot{q}_2^2 = 2K \end{aligned} \tag{17.9}$$

である。$n \geq 3$ でも同様に $2K$ になる。ポテンシャル $U$ が速度に依存しない場合には，

$$E = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - L = 2K - (K - U) = K + U = \text{一定} \tag{17.10}$$

つまり，**力学的エネルギー $E$ は運動エネルギー $K$ と位置エネルギー $U$ の和**になっている（ただし，(17.5) つまり座標変が時間 $t$ を含まない形であるという条件の下で)。

## 17.3　空間の一様性と運動量保存則

時間だけでなく空間もまた一様性を持っている。孤立系は系の外から力を受けないので，何もない空っぽの空間の中に存在しているのと同じである。孤立系をある場所で運動させても，別の場所で運動させても，系に対して固定したビデオカメラで撮影すればまったく同じ運動をする。これは系の性質ではなく，われわれが住む 3 次元空間が，何もない空っぽの状態では，どの場所でも同じ性質を持っているからである。この性質を**空間の一様性**という。

そこで，系全体を任意の方向に $\Delta \boldsymbol{r}_0$ だけ無限小変位させても，ラグランジアンが変化しないことを要請する。ここではデカルト座標を採用して，$a = 1, 2, \cdots, N$ 番目の質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_a$，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_a$ とする。ラグランジアンの変化 $\delta L$ は，

$$0 = \delta L = \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_0 = \Delta \boldsymbol{r}_0 \cdot \sum_{a=1}^{N} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \right) = \Delta \boldsymbol{r}_0 \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_{a=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \right) \tag{17.11}$$

と書ける。（途中でラグランジュの運動方程式を使った。また $\partial L / \partial \boldsymbol{r}_a$ は $x, y, z$ 成分が $\partial L / \partial x_a, \partial L / \partial y_a, \partial L / \partial z_a$ のベクトルを意味する。$\partial L / \partial \boldsymbol{v}_a$ も同様。）これが任意の $\Delta \boldsymbol{r}_0$ に対して

成り立つためには，右辺の括弧内が一定でなければならない。したがって，

$$\sum_{a=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}=\sum_{a=1}^{N}\boldsymbol{p}_a=\text{全一般運動量}=\text{一定} \tag{17.12}$$

であることがわかる（$\boldsymbol{p}_a$ は質点 $a$ の一般運動量ベクトル）。これが一般的な形の**運動量保存則**である。ポテンシャル $U$ が速度に依存しない場合には，

$$\text{一定}=\sum_{a=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}=\sum_{a=1}^{N}\frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{v}_a}=\sum_{a=1}^{N}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_a}\left(\frac{1}{2}m_a\boldsymbol{v}_a^2\right)=\sum_{a=1}^{N}m_a\boldsymbol{v}_a=\text{全運動量 }\boldsymbol{P} \tag{17.13}$$

となって，よく知っている形の運動量保存則が成り立つ。

## 17.4　空間の等方性と角運動量保存則

われわれが住む 3 次元空間は，何もない空っぽの状態では，どの方向も同じ性質を持つ。これを**空間の等方性**という。地上では重力のために鉛直方向と水平方向では性質が違い，等方性が破れている。等方的になるのは，宇宙空間でまわりの星からの万有引力が無視できるほど小さいような場合である。この時，孤立系を回転させてもラグランジアンは変化しないだろう。

微小回転を表すベクトルを $\delta\boldsymbol{\varphi}$ とする。回転軸はこのベクトルの方向で，回転の向きは右ねじの関係，回転角は $|\delta\varphi|$ で十分小さいとする。微小回転によって，位置ベクトルと速度ベクトルは

$$\boldsymbol{r}\longrightarrow\boldsymbol{r}+(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{v}\longrightarrow\boldsymbol{v}+(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{v}) \tag{17.14}$$

と変化する。ラグランジアンの変化 $\delta L=0$ は，

$$\begin{aligned}
0=\delta L&=\sum_{a=1}^{N}\left\{\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_a)+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{v}_a)\right\}\\
&=\sum_{a=1}^{N}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}\right)\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_a)+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a}\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{v}_a)\right\}\\
&=\sum_{a=1}^{N}\left\{\frac{d\boldsymbol{p}_a}{dt}\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}_a)+\boldsymbol{p}_a\cdot(\delta\boldsymbol{\varphi}\times\frac{d\boldsymbol{r}_a}{dt})\right\}\\
&=\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\sum_{a=1}^{N}\left\{\boldsymbol{r}_a\times\frac{d\boldsymbol{p}_a}{dt}+\frac{d\boldsymbol{r}_a}{dt}\times\boldsymbol{p}_a\right\}\\
&=\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}(\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a)
\end{aligned} \tag{17.15}$$

と書ける。任意の $\delta\boldsymbol{\varphi}$ に対して成り立つことから，

$$\sum_{a=1}^{N}(\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a)=\text{一定} \tag{17.16}$$

でなければならない。ポテンシャル $U$ が速度に依存しない場合には，一般運動量 $\boldsymbol{p}_a=m_a\boldsymbol{v}_a$ となるので，上の式は全角運動量が一定になること，つまり**角運動量保存則**を表している。

地上で鉛直方向を $z$ 軸にとると，水平方向には等方的なので，$z$ 軸のまわりの回転に対してはラグ

ランジアンが不変になるはずである。その場合，$\delta\boldsymbol{\varphi}$ の $x, y$ 成分は 0 なので，(17.15) と (17.16) は

$$\delta\varphi\ \frac{d}{dt}\sum_{a=1}^{N}(\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a)_{z\ \text{成分}}=0 \qquad\Longrightarrow\qquad \sum_{a=1}^{N}(\boldsymbol{r}_a\times\boldsymbol{p}_a)_{z\ \text{成分}}=\text{一定} \tag{17.17}$$

となり，全角運動量の $z$ 成分が保存することがわかる。

# 18　ハミルトンの正準運動方程式

ラグランジアンは一般座標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ と時間 $t$ を独立変数とする関数と見ることができる。さらに，一般座標は時間の関数であり，一般速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ は一般座標を時間で微分したものだった。しかし，この関係を使ったのは，変分法によって作用積分の極値からラグランジュの運動方程式を導くときだけであった。（このプリントでは，(14.5) の式変形に相当する部分。§15 ハミルトンの原理では，変分法の一般論の結果 (14.10) を利用したが，それを導くためには (14.5) が必要だった。）ラグランジュの運動方程式を立てるときには，**一般座標 $q_j$ と一般速度 $\dot{q}_j$ は独立な変数だとして**，$\partial L/\partial q_j$ や $\partial L/\partial \dot{q}_j$ を計算してきた。これに対して，(17.2) で定義した一般運動量

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ , \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{18.1}$$

を使って，**一般座標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，一般運動量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ および時間 $t$ を独立変数とするハミルトニアン** $H(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t)$ を次のように定義する。

$$H(q_1,q_2,\cdots,q_n,p_1,p_2,\cdots,p_n,t)=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j p_j-L \tag{18.2}$$

ここで次の 2 点を注意する：(1) この式の中の $\dot{q}_j$ には，(18.1) の連立方程式を $\dot{q}_j$ について解いた $\dot{q}_j=\phi_j(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t)$ を代入して，$\dot{q}_j$ を消去する。(2) (18.1) 式では一般運動量 $p_j$ は一般座標と一般速度の関数であるが，(18.2) 式の**ハミルトニアンを求めたあとは，(18.1) 式を忘れて一般運動量を一般座標とは独立な変数として取り扱う。**

このような変換は**ルジャンドル変換**とよばれる。独立変数が変わることは，次のようにして確かめられる。それぞれの変数が微小変化したときのハミルトニアンの変化 $dH$ は

$$\begin{aligned} dH &= \sum_{j=1}^{n}(d\dot{q}_j p_j+\dot{q}_j dp_j)-\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}d\dot{q}_j+\frac{\partial L}{\partial q_j}dq_j\right)+\frac{\partial L}{\partial t}dt\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(d\dot{q}_j p_j+\dot{q}_j dp_j)-\left\{\sum_{j=1}^{n}(p_j d\dot{q}_j+\dot{p}_j dq_j)+\frac{\partial L}{\partial t}dt\right\} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(\dot{q}_j dp_j-\dot{p}_j dq_j)-\frac{\partial L}{\partial t}dt \end{aligned} \tag{18.3}$$

となる。この式を 3 変数の関数 $f(x, y, z)$ の微小変化の式

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{18.4}$$

と比較すると，ハミルトニアン $H$ の独立変数は確かに $q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t$ であり，

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{18.5}$$

$$\dot{p}_j = \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{18.6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{18.7}$$

という関係が成り立つことがわかる。(18.5) と (18.6) を**ハミルトンの運動方程式**または**正準運動方程式**という。ラグランジュの運動方程式は $n$ 個の 2 階微分方程式で，座標変換をしても形が変わらなかった。これに対してハミルトンの運動方程式は $q_j$，$p_j$ について合計 $2n$ 個の 1 階微分方程式になる。符号の違いはあるが，$q_j$ と $p_j$ に対してほぼ対称な形をしていて，座標と運動量が混ざったようなもっと一般的な変換に対しても形が変わらない。$q_j$ を**正準座標**，$p_j$ を**正準運動量**とよび，まとめて**正準変数**という。

また (18.7) より，ラグランジアンが時間 $t$ を陽に含まないときは，ハミルトニアンも時間 $t$ を陽に含まない。それだけでなく，(18.3) の両辺を $dt$ で割ると

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left( \dot{q}_j \frac{dp_j}{dt} - \dot{p}_j \frac{dq_j}{dt} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} (\dot{q}_j \dot{p}_j - \dot{p}_j \dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{18.8}$$

となるので，**ラグランジアンが時間 $t$ を陽に含まないときは，ハミルトニアンが時間によらずに一定になる。**（ハミルトニアン $H$ の式に $t$ が現れないだけでなく，$q_j$，$p_j$ が時間とともに変化しても，ハミルトニアンは一定に保たれる。）これは，§17.2 で述べた**エネルギー保存則**である。(17.4) 式のエネルギー $E$ の定義と (18.2) 式のハミルトニアン $H$ の定義は同じ式であるが，独立変数が違うことに注意しよう。(17.4) 式の独立変数は $q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ であった。一方，(18.2) 式の独立変数は正準座標と正準運動量である。§17.2 の後半の 2 つの条件，(1) デカルト座標から一般座標への変換が時間 $t$ を陽に含まない（または，運動エネルギーが (17.7) のように一般速度の 2 次形式になる），(2) ポテンシャルが一般速度に依存しない，が成り立つ場合には，(17.10) に対応して

$$H = K + U \tag{18.9}$$

という形になる。次の例 1 から例 3 では実際，そのようになっている。

【例 1】質量 $m$ の 1 個の粒子がポテンシャル $U$ の中を運動する場合。デカルト座標をとると，

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \tag{18.10}$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{18.11}$$

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) \tag{18.12}$$

正準運動方程式は次のようになる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (y, z \text{ についても同様}) \tag{18.13}$$

1 番目の式は運動量の定義であり，2 番目の式はニュートンの運動方程式と等しい。

【例 2】質量 $m$ の 1 個の粒子が中心力を受けて平面上を運動している場合。平面極座標 $r,\theta$ をとると，

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-U(r) \tag{18.14}$$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r},\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta} \tag{18.15}$$

$$H=\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta-L=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+U(r) \tag{18.16}$$

【例 3】質量 $m$ の 1 個の粒子が中心力を受けて 3 次元空間で運動している場合。極座標 $r,\theta,\varphi$ をとると，

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)-U(r) \tag{18.17}$$

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r},\quad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},\quad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta \tag{18.18}$$

$$H=\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta+\dot{\varphi}p_\varphi-L=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}+\frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)+U(r) \tag{18.19}$$

【例 4】p.36 の電磁場中の荷電粒子。デカルト座標で計算すると，

$$L=\frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2-e\phi+e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A} \tag{18.20}$$

$$\boldsymbol{p}=m\dot{\boldsymbol{r}}+e\boldsymbol{A} \tag{18.21}$$

$$H=\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{p}-L=\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}-e\boldsymbol{A})^2+e\phi \tag{18.22}$$

# 19　変分原理と正準運動方程式

ラグランジュの運動方程式は，作用積分 $S$ が極値をとるというハミルトンの原理から導かれた。式で表せば，作用積分の変分が 0 という次の式になる。

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q_1,q_2,\cdots,q_n,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n,t)dt=0 \tag{19.1}$$

(18.2) 式からラグランジアン $L$ は

$$L=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_jp_j-H(q_1,q_2,\cdots,q_n,p_1,p_2,\cdots,p_n,t) \tag{19.2}$$

と表せるので，(19.1) の $L$ を置き換えた

$$\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_jp_j-H(q_1,q_2,\cdots,q_n,p_1,p_2,\cdots,p_n,t)\right\}dt=0 \tag{19.3}$$

を要請してみる。これを**修正されたハミルトンの原理**という。以下で示すように，この原理から正準運動方程式が得られる。$q_1,q_2,\cdots,q_n,p_1,p_2,\cdots,p_n$ は互いに独立な変数として変分を計算す

ると

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \delta \dot{q}_j p_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right\} dt \\
&= \sum_{j=1}^{n} [\delta q_j p_j]_{t_1}^{t_2} + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\delta q_j \dot{p}_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right\} dt \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( -\dot{p}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j + \left( \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j \right\} dt
\end{aligned}
\tag{19.4}
$$

となる。1 行目から 2 行目では，(14.5) 式と同様に部分積分をし，2 行目から 3 行目では $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ を使った。任意の $\delta q_j, \delta p_j$ に対して 0 になるためには，

$$
-\dot{p}_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} = 0, \qquad \dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} = 0 \tag{19.5}
$$

が必要十分条件であり，これは正準運動方程式 (18.5), (18.6) に等しい。【証明終り】

# 20　ポアッソン括弧式

任意の力学量 $F$ を考える。$F$ は $q_j$，$p_j, t$ の関数である。$F$ の時間微分を正準運動方程式を使って変形すると，

$$
\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{20.1}
$$

となる。ここで一般的に 2 つの力学量 $F, G$ に対して**ポアッソン括弧式**を次のように定義する。

$$
\{F, G\} \equiv \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q_j} \right) \tag{20.2}
$$

ポアッソン括弧式を使うと (20.1) は

$$
\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{20.3}
$$

と書ける。

$F$ が陽には時間によらない場合，時間についての偏微分が消えて

$$
\frac{dF}{dt} = \{F, H\} \tag{20.4}
$$

となって，$F$ の時間変化はポアッソン括弧式 $\{F, H\}$ で決まる。この場合に $F$ が時間変化しない保存量であるための必要十分条件は

$$
\{F, H\} = 0 \tag{20.5}
$$

である。この関係は，量子力学で物理量 $F$ が時間変化しない条件 $[F, H] = FH - HF = 0$ と対応するものである（量子力学でも $H$ はハミルトニアン）。

$F$ としてハミルトニアン $H$ をとると，$\{H, H\} = 0$ なので (20.3) は

$$
\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{20.6}
$$

となり，ハミルトニアン $H$ が時間に陽によらないときは

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \text{すなわち} \quad H = \text{一定} \tag{20.7}$$

と言える。

ポアッソン括弧式には次のような性質がある。

- $\{A, B\} = -\{B, A\}$ したがって $\{A, A\} = 0$
- $a, b$ を定数として $\{aA + bB, C\} = a\{A, C\} + b\{B, C\}$
- $\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C$
- $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0$　（ヤコビの恒等式）

正準変数そのものについては，

$$\{q_j, q_k\} = 0, \qquad \{p_j, p_k\} = 0, \qquad \{q_j, p_k\} = \delta_{jk} \tag{20.8}$$

が成り立つ。ここで $\delta_{jk}$ はクロネッカーのデルタで，$j = k$ のとき 1，$j \neq k$ のとき 0 になる量である。また，1 個の質点の角運動量については，

$$L_x = yp_z - zp_y, \qquad L_y = zp_x - xp_z, \qquad L_z = xp_y - yp_x \tag{20.9}$$

から計算すると，

$$\{L_x, L_y\} = L_z, \qquad \{L_y, L_z\} = L_x, \qquad \{L_z, L_x\} = L_y \tag{20.10}$$

が成り立つ。量子力学でも (20.8) や (20.10) と対応する次のような交換関係が成り立つ。ここで $\hbar$ はプランク定数 $h$ を $2\pi$ で割ったものであり，$i$ は虚数単位である。

$$[q_j, q_k] = 0, \qquad [p_j, p_k] = 0, \qquad [q_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk} \tag{20.11}$$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \qquad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \qquad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \tag{20.12}$$

## 21　正準変換

ラグランジュの運動方程式は任意の座標変換に対して形を変えなかった。したがって，ラグランジアンおよびラグランジュの運動方程式から導かれる**正準運動方程式も，任意の座標変換に対して形を変えない。ところが，正準運動方程式はもっと一般的な変換に対しても形を変えない**。それが**正準変換**である。

簡単な例として 1 次元の場合を考える。正準座標を $q$，正準運動量を $p$ とする。それぞれ 1 個ずつなので添え字は付けない。正準運動方程式は

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad H = H(q, p, t) \tag{21.1}$$

である。座標と運動量を入れ替えた新しい正準座標 $Q$，正準運動量 $P$，ハミルトニアン $K$ を次のように定義する。

$$Q = p, \qquad P = -q, \qquad K(Q, P, t) = H(-P, Q, t) = H(q, p, t) \tag{21.2}$$

$K(Q,P,t)$ は $H$ の $q$ のところに $-P$ を入れ，$p$ のところに $Q$ を入れたものである。そうすると，

$$\dot{Q} = \dot{p}, \quad \dot{P} = -\dot{q}, \quad \frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial K}{\partial P} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{21.3}$$

となる。まとめると，

$$\dot{Q} = \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \tag{21.4}$$

となって，$Q$ と $P$ について $K$ をハミルトニアンとする正準運動方程式が成り立つことがわかる。このように，正準運動方程式はラグランジュの運動方程式よりももっと多様な変換に対して形を変えない。また，入れ替えることができるので，座標と運動量の間には絶対的な区別がなくなる。

さて，正準運動方程式が形を変えないための条件を求めよう。変換

$$Q_k = Q_k(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t) = Q_k(q,p,t) \tag{21.5}$$
$$P_k = P_k(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t) = P_k(q,p,t) \tag{21.6}$$

と逆変換

$$q_j = q_j(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, P_1, P_2, \cdots, P_n, t) = q_j(Q,P,t) \tag{21.7}$$
$$p_j = p_j(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, P_1, P_2, \cdots, P_n, t) = p_j(Q,P,t) \tag{21.8}$$

があるとする。一番右の形では，$q_1, q_2, \cdots, q_n$ をまとめて $q$，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ をまとめて $p$ というように略記している。§19 では，修正されたハミルトンの原理から正準運動方程式を導いた。新しい変数 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, P_1, P_2, \cdots, P_n$ が正準運動方程式を満たすためには，この変数に対してハミルトニアン $K(Q,P,t)$ が存在し，修正されたハミルトンの原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \dot{Q}_k P_k - K(Q,P,t) \right\} dt = 0 \tag{21.9}$$

が成り立たなければならない。また，元の変数については当然

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j p_j - H(q,p,t) \right\} dt = 0 \tag{21.10}$$

が成り立つ。そのための必要十分条件は，$F$ を座標，運動量，時間の任意関数として

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{q}_j p_j - H(q,p,t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{Q}_k P_k - K(Q,P,t) + \frac{dF}{dt} \tag{21.11}$$

となっていることである。（厳密には上の式の左辺と右辺が定数倍の関係になることが条件である。しかし，単位を適当に選ぶと定数を 1 にできるので定数倍は本質的な問題ではない。）座標と運動量の変分は両端の時刻 $t_1, t_2$ では 0 なので，最後の項を積分したものの変分が

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta \left[ F \right]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{21.12}$$

となるからである。(21.11) 式を

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{dq_j}{dt} p_j - \sum_{k=1}^{n} \frac{dQ_k}{dt} P_k + K(Q,P,t) - H(q,p,t) \tag{21.13}$$

と変形し，両辺に $dt$ を掛けて整理すると

$$dF = \sum_{j=1}^{n} p_j dq_j - \sum_{k=1}^{n} P_k dQ_k + \{K(Q,P,t) - H(q,p,t)\}\, dt \tag{21.14}$$

となる。この式は $F$ が $q_1, q_2, \cdots, q_n$ と $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ と $t$ の関数であることを意味している。$F(q_1, q_2, \cdots, q_n, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, t)$ の全微分の式

$$dF = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_j} dq_j + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial F}{\partial t} dt \tag{21.15}$$

と (21.14) を比較すると，

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial q_j}, \qquad P_k = -\frac{\partial F}{\partial Q_k}, \qquad K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{21.16}$$

が成り立つことがわかる。このような変換を**正準変換**とよぶ。関数 $F$ は変換を決める（生み出す）関数なので**母関数**とよばれる。

以上をまとめると次のようになる。

1. $q_1, q_2, \cdots, q_n$ と $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ と $t$ の関数 $F$ が与えられたとする。
2. $p_j = \partial F/\partial q_j$ を $n$ 個の連立方程式として $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ について解き，$Q_k = Q_k(q,p,t)$ を得る。
3. この $Q_k = Q_k(q,p,t)$ を $P_k = -\partial F/\partial Q_k$ に代入して $P_k = P_k(q,p,t)$ を得る。
4. 以上の関係を逆に解いて $q_j = q_j(Q,P,t)$ と $p_j = p_j(Q,P,t)$ を得る。
5. $K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \partial F/\partial t$ の右辺をすべて新しい変数 $Q_k, P_k$ で表して $K(Q,P,t)$ を求める。
6. $Q_k, P_k$ はハミルトニアンを $K(Q,P,t)$ とする正準方程式に従う。

逆に，変換 (21.5), (21.6) が与えられている場合には，母関数を次のようにして求めることができる。

1. (21.5), (21.6) を連立方程式として解き，$p_j$ と $P_k$ を $q_j$ と $Q_k$ の関数として表す。
2. $p_j = p_j(q,Q,t) = \partial F/\partial q_j$ と $P_k = P_k(q,Q,t) = -\partial F/\partial Q_k$ を連立させて解き，$F(q,Q,t)$ を求める。（時間の任意関数の不確定性があることに注意。しかし，変換には影響しないし，正準運動方程式にも影響しない。）

【例】p.45(21.2) 式の変換の場合に母関数 $F(q,Q,t)$ を求めてみる。まず，$p$ と $P$ を $q$ と $Q$ の関数と見ると，

$$p = Q = \partial F/\partial q, \qquad P = -q = -\partial F/\partial Q \tag{21.17}$$

となる。したがって $F(q,Q,t) = qQ$ ととればよい。

他の形の変換も考えられる。ここまで使ってきた母関数に添え字を付けて $F_1(q,Q,t)$ と表すこ

とにする。母関数として

$$F_2 = F_1(q, Q, t) + \sum_{k=1}^{n} Q_k P_k \tag{21.18}$$

を考えると，$F_2$ の全微分は，(21.14) を利用すると

$$\begin{aligned} dF_2 &= dF_1 + \sum_{k=1}^{n} \{Q_k dP_k + P_k dQ_k\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j dq_j - \sum_{k=1}^{n} P_k dQ_k + \{K(Q, P, t) - H(q, p, t)\}\, dt + \sum_{k=1}^{n} \{Q_k dP_k + P_k dQ_k\} \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j dq_j + \sum_{k=1}^{n} Q_k dP_k + \{K(Q, P, t) - H(q, p, t)\}\, dt \end{aligned} \tag{21.19}$$

となる。したがって，$F_2$ は $q_1, q_2, \cdots, q_n$ と $P_1, P_2, \cdots, P_n$ と $t$ の関数 $F_2(q, P, t)$ であり，

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j}, \qquad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}, \qquad K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{21.20}$$

が成り立つことがわかる。

同様に，

$$F_3 = F_1(q, Q, t) - \sum_{j=1}^{n} q_j p_j \tag{21.21}$$

の場合には，$F_3$ の全微分は，

$$dF_3 = -\sum_{j=1}^{n} q_j dp_j - \sum_{k=1}^{n} P_k dQ_k + \{K(Q, P, t) - H(q, p, t)\}\, dt \tag{21.22}$$

となるので $F_3$ は $p_1, p_2, \cdots, p_n$ と $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ と $t$ の関数 $F_3(p, Q, t)$ であり，

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j}, \qquad P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}, \qquad K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{21.23}$$

が成り立つ。

最後に

$$F_4 = F_1(q, Q, t) - \sum_{j=1}^{n} q_j p_j + \sum_{k=1}^{n} P_k Q_k \tag{21.24}$$

の場合には，$F_4$ の全微分は，

$$dF_4 = -\sum_{j=1}^{n} q_j dp_j + \sum_{k=1}^{n} Q_k dP_k + \{K(Q, P, t) - H(q, p, t)\}\, dt \tag{21.25}$$

となるので $F_4$ は $p_1, p_2, \cdots, p_n$ と $P_1, P_2, \cdots, P_n$ と $t$ の関数 $F_3(p, P, t)$ であり，

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j}, \qquad Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}, \qquad K(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{21.26}$$

が成り立つ。

以上をまとめると次の表 4 のようになる。これ以外に部分的に変数を変換することもできる。

表 4　正準変換の 4 つのタイプ

| 母関数 | 残りの変数と母関数の偏微分の関係 | ハミルトニアンの関係 |
|---|---|---|
| $F_1(q,Q,t)$ | $p_j = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_j}$, $P_k = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_k}$ | $K = H + \dfrac{\partial F_1}{\partial t}$ |
| $F_2(q,P,t)$ | $p_j = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_j}$, $Q_k = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_k}$ | $K = H + \dfrac{\partial F_2}{\partial t}$ |
| $F_3(p,Q,t)$ | $q_j = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_j}$, $P_k = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_k}$ | $K = H + \dfrac{\partial F_3}{\partial t}$ |
| $F_4(p,P,t)$ | $q_j = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_j}$, $Q_k = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_k}$ | $K = H + \dfrac{\partial F_4}{\partial t}$ |

正準変換の例をいくつか見てみよう。

1. **恒等変換**：$F_2(q,P) = \sum_{j=1}^{n} q_j P_j$ とすると，表 2 より $p_j = \partial F_2/\partial q_j = P_j$，$Q_k = \partial F_2/\partial P_k = q_k$ となる。これは新旧の座標どうし，運動量どうしがそれぞれ等しいので，恒等変換である。また，$F_3(p,Q) = -\sum_{j=1}^{n} p_j Q_j$ としても恒等変換になる。
2. **通常の座標変換（点変換）**：$F_2(q,P) = \sum_{j=1}^{n} f_j(q) P_j$ とすると表 2 より $Q_k = \partial F_2/\partial P_k = f_k(q)$ となる。新しい座標 $Q_k$ が古い座標 $q_j$ の関数として表せるので，これは通常の座標変換になっている。これを点変換ともいう。また，$F_3(p,Q) = -\sum_{j=1}^{n} p_j g_j(Q)$ としてもよい。
3. **座標と運動量の交換**：$F_1(q,Q) = \sum_{j=1}^{n} q_j Q_j$ とすると，表 2 より $p_j = \partial F_1/\partial q_j = Q_j$，$P_k = -\partial F_1/\partial Q_k = -q_k$ となる。符号の変化はあるが，座標と運動量が入れ替わっている。したがって座標と運動量という名前には絶対的な意味がなくなる。$F_4(p,P) = \sum_{j=1}^{n} p_j P_j$ としてもよい。
4. **力学系の運動**：運動にともなって正準座標と正準運動量は変化するが，正準運動方程式を満たし続けることには変わりない。したがって，運動にともなう変化を正準変換と見ることができる。簡単のために 1 次元の運動を考える。ある時刻 $t$ での正準座標と正準運動量を $q_t, p_t$ とする。わずかの時間 $\Delta t$ 後の時刻 $t + \Delta t$ では，それぞれ $q_{t+\Delta t}, p_{t+\Delta t}$ とする。これまでの記号と対応させると $(q_t, p_t) \Leftrightarrow (q,p)$，$(q_{t+\Delta t}, p_{t+\Delta t}) \Leftrightarrow (Q,P)$ である。 母関数として

$$F_2(q,P,t) = F_2(q_t, p_{t+\Delta t}, t) = q_t p_{t+\Delta t} + H(q_t, p_{t+\Delta t}, t)\Delta t \tag{21.27}$$

を考える。$H(q_t, p_{t+\Delta t}, t)$ は $p_t$ の入るべきところに $p_{t+\Delta t}$ を代入したものである。(21.20)

式より，

$$p_t = \frac{\partial F_2}{\partial q_t} = p_{t+\Delta t} + \frac{\partial H(q_t, p_{t+\Delta t}, t)}{\partial q_t}\Delta t \tag{21.28}$$

$$q_{t+\Delta t} = \frac{\partial F_2}{\partial p_{t+\Delta t}} = q_t + \frac{\partial H(q_t, p_{t+\Delta t}, t)}{\partial p_{t+\Delta t}}\Delta t \tag{21.29}$$

となる。少し変形をして $\Delta t \to 0$ の極限をとると，

$$\frac{p_{t+\Delta t} - p_t}{\Delta t} = -\frac{\partial H(q_t, p_{t+\Delta t}, t)}{\partial q_t} \quad \longrightarrow \quad \dot{p_t} = -\frac{\partial H(q_t, p_t, t)}{\partial q_t} \tag{21.30}$$

$$\frac{q_{t+\Delta t} - q_t}{\Delta t} = \frac{\partial H(q_t, p_{t+\Delta t}, t)}{\partial p_{t+\Delta t}} \quad \longrightarrow \quad \dot{q_t} = \frac{\partial H(q_t, p_t, t)}{\partial p_t} \tag{21.31}$$

となり，正準運動方程式が導ける。逆に，正準運動方程式に従う運動は，(21.27) 式の母関数による無限小（$\Delta t \to 0$）の正準変換を次々に行っていると言える。

# 22　位相空間

正準座標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ と正準運動量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ が作る $2n$ 次元の空間を**位相空間**という。ある時刻の系の状態（正準座標と正準運動量）は位相空間の中の点で表される。この点を**代表点**という。正準座標と正準運動量は正準運動方程式にしたがって時間変化をするので，代表点は時間とともに移動して曲線を描く。

【例 1；単振動】質量 $m$ の質点が $x$ 軸上で角振動数 $\omega$ の単振動をしている場合，

$$\text{ラグランジアン}\quad L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{22.1}$$

$$\text{運動量}\quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \tag{22.2}$$

$$\text{ハミルトニアン}\quad H = p\dot{x} - L = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \text{一定} \equiv E \tag{22.3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/m\omega^2} = 1 \tag{22.4}$$

最後の式は楕円を表す。位相空間での軌跡を図 27 に示す。，$p > 0$ ならば $x$ は増加し，$p < 0$ なら

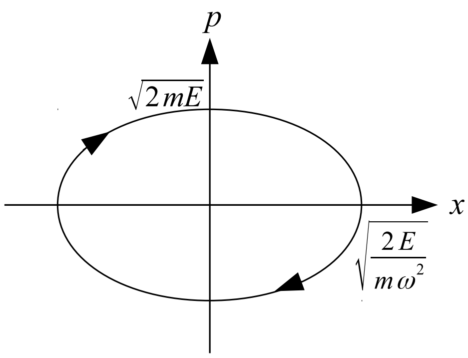


図 27　単振動の位相空間での軌跡

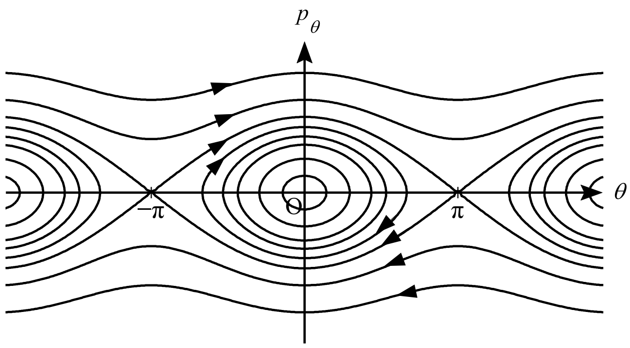


図 28　回転振り子の位相空間での軌跡

ば $x$ は減少するので時計回りに回る。楕円の面積 $S$ は $S = 2\pi E/\omega$ である。

【例 2；回転振り子】質量 $m$ のおもりを付けた長さ $l$ の振り子の糸の代わりに質量が無視できる十分軽い棒にしたとしよう。図 21 のように，振り子はある鉛直面内で運動するとし，その振れ角を $\theta$ とする。

$$\text{ラグランジアン}\quad L = K - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \tag{22.5}$$

$$\text{一般運動量}\quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \tag{22.6}$$

$$\text{ハミルトニアン}\quad H = p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{1}{2ml^2}p_\theta^2 - mgl\cos\theta = \text{一定} \equiv E \tag{22.7}$$

エネルギー $E$ の値を変化させて描いた位相空間での軌跡を図 28 に示す。$E > mgl$ の場合は一方向に回り続ける。角度 $\theta$ は増え続けるか減り続けるかのどちらかなので，上の 2 本と下の 2 本のように開いた曲線になる。$E < mgl$ の場合は，往復運動をするので軌跡は閉曲線になる。振幅が小さい場合は単振動になるので，図 27 と同様の楕円になる。ちょうど $E = mgl$ の場合は，$\theta = \pm\pi$ を通る曲線が軌跡になる。$(\theta, p_\theta) = (\pm\pi, 0)$ では 2 つの軌跡が交差しているが，この点は振り子が真上に上がった不安定なつり合いの状態であり，この点が初期状態ならば動かない。これから少しずれた点が初期状態であれば，曲線に沿って動いていくことになる。

正準運動方程式から明らかなように，ハミルトニアンが時間を陽に含んでいない場合，正準座標と正準運動量の時間変化は位相空間での位置によって決まる。したがって，位相空間での運動の軌跡は，つり合いの状態を表す点以外では交差しない。（交差するとしたら，2 通りの時間変化の仕方があることになってしまう。）

## 23　正準不変量

正準変換に対して値が変化しない量を**正準不変量**とよぶ。その中でも重要なものが §20 で説明したポアッソン括弧式である。

証明のための準備として，(21.16), (21.20), (21.23), (21.26) 式から次の関係を導いておく。

$$p_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_j},\quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \Longrightarrow \frac{\partial p_j}{\partial Q_k} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q_j \partial Q_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \tag{23.1}$$

$$p_j = \frac{\partial F_2}{\partial q_j},\quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \Longrightarrow \frac{\partial p_j}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial q_j \partial P_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} \tag{23.2}$$

$$q_j = -\frac{\partial F_3}{\partial p_j},\quad P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \Longrightarrow \frac{\partial q_j}{\partial Q_k} = -\frac{\partial^2 F_3}{\partial p_j \partial Q_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p_j} \tag{23.3}$$

$$q_j = -\frac{\partial F_4}{\partial p_j},\quad Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k} \Longrightarrow \frac{\partial q_j}{\partial P_k} = -\frac{\partial^2 F_4}{\partial p_j \partial P_k} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} \tag{23.4}$$

正準変数が $q_j, p_j$ の場合と $Q_k, P_k$ の場合が区別できるように，$q_j, p_j$ で計算したポアッソン括弧

式を $\{\quad\}_{qp}$，$Q_j, P_j$ で計算したポアッソン括弧式を $\{\quad\}_{QP}$ と書くことにする。

$$\{F,G\}_{qp} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right) \tag{23.5}$$

$$\{F,G\}_{QP} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_j}\frac{\partial G}{\partial P_j} - \frac{\partial F}{\partial P_j}\frac{\partial G}{\partial Q_j}\right) \tag{23.6}$$

(20.8) と同様に $Q_k, P_k$ についても当然，

$$\{Q_k, Q_l\}_{QP} = 0, \qquad \{P_k, P_l\}_{QP} = 0, \qquad \{Q_k, P_l\}_{QP} = \delta_{kl} \tag{23.7}$$

が成り立つ。それでは，$q_j, p_j$ で計算したポアッソン括弧式はどうなるだろうか？ (23.1) から (23.4) を利用して計算してみる。

$$\begin{aligned}\{Q_k, Q_l\}_{qp} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_j}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial p_j}{\partial P_k}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} + \frac{\partial q_j}{\partial P_k}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j}\right)\\ &= \frac{\partial Q_l}{\partial P_k} = 0 \end{aligned} \tag{23.8}$$

$$\begin{aligned}\{P_k, P_l\}_{qp} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_j}\frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial P_k}{\partial p_j}\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\partial p_j}{\partial Q_k}\frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial q_j}{\partial Q_k}\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\right)\\ &= -\frac{\partial P_l}{\partial Q_k} = 0 \end{aligned} \tag{23.9}$$

$$\begin{aligned}\{Q_k, P_l\}_{qp} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}\frac{\partial P_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_j}\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial p_j}{\partial P_k}\frac{\partial P_l}{\partial p_j} + \frac{\partial q_j}{\partial P_k}\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\right)\\ &= \frac{\partial P_l}{\partial P_k} = \delta_{kl} \end{aligned} \tag{23.10}$$

したがって，$q, p$ で計算しても $Q, P$ で計算しても同じになることがわかった。

一般の力学量 $F, G$ についても正準変数の取り方によらずポアッソン括弧式は同じ値になる。長い計算になるが，計算してみよう。

$$\begin{aligned}\{F,G\}_{qp} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_j}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_j}\right)\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} + \frac{\partial G}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial p_j}\right)\right\}\\ &\quad - \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} + \frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_j}\right)\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j} + \frac{\partial G}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\right)\right\} \end{aligned} \tag{23.11}$$

括弧をばらして，$F$ と $G$ の微分の積が同じ形になる項をまとめると次のような 4 つの項が出てくる。それぞれ，(23.8) から (23.10) の関係を使って簡単な形にできる。

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial G}{\partial Q_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_j}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j}\right)\right\}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial G}{\partial Q_l}\{Q_k, Q_l\}_{qp} = 0 \end{aligned} \tag{23.12}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial G}{\partial P_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_j}\frac{\partial P_l}{\partial p_j}-\frac{\partial Q_k}{\partial p_j}\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial G}{\partial P_l}\{Q_k,P_l\}_{qp}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial G}{\partial P_l}\delta_{kl}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial G}{\partial P_k} \tag{23.13}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial G}{\partial Q_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_j}\frac{\partial Q_l}{\partial p_j}-\frac{\partial P_k}{\partial p_j}\frac{\partial Q_l}{\partial q_j}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial G}{\partial Q_l}\{P_k,Q_l\}_{qp}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial G}{\partial Q_l}(-\delta_{kl})=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial G}{\partial Q_k} \tag{23.14}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial G}{\partial P_l}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_j}\frac{\partial P_l}{\partial p_j}-\frac{\partial P_k}{\partial p_j}\frac{\partial P_l}{\partial q_j}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial G}{\partial P_l}\{P_k,P_l\}_{qp}=0 \tag{23.15}$$

以上をまとめると，結局

$$\{F,G\}_{qp}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial F}{\partial Q_k}\frac{\partial G}{\partial P_k}-\frac{\partial F}{\partial P_k}\frac{\partial G}{\partial Q_k}\right\}=\{F,G\}_{QP} \tag{23.16}$$

となり，**一般の力学量 $F,G$ についても正準変数の取り方によらずポアッソン括弧式は同じ値になる。** この性質があるので，$\{\quad\}_{qp}$ や $\{\quad\}_{QP}$ のように添え字を付けて区別する必要はなく，$\{F,G\}$ と書いてよい。

逆に，ポアッソン括弧式の値が変化しないような変換が正準変換であることも示せる。（難しいので，ここでは証明はしない。）つまり**「正準変換」＝「ポアッソン括弧式の値が変化しない変換」**である。一般の力学量 $F,G$ について，ポアッソン括弧式の値が変化しないかどうかを調べるのは難しそうであるが，心配はいらない。(23.16) 式の証明では，変数変換の基本的な関係式に (23.8), (23.9), (23.10) を適用して (23.16) を導けたので，(23.8), (23.9), (23.10) が成り立つかどうかを調べるだけでよい。したがって，**新旧の変数の関係式 (21.5), (21.6) が与えられたときに，(23.8), (23.9), (23.10) が成り立てば正準変換であり，成り立たなければ正準変換ではない。** 正準変換かどうか，この方法で簡単に判別できる。

【例：(21.2) 式の変換】1 次元で $Q=p, P=-q$ という変換だった。$\{Q,Q\}=0, \{P,P\}=0$ は，ポアッソン括弧式の定義から明らかなので，$\{Q,P\}$（変数を明示すれば，$\{Q,P\}_{qp}$）だけを計算する。

$$\{Q,P\}=\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}=0\times 0-1\times(-1)=1 \tag{23.17}$$

確かに (23.8), (23.9), (23.10) が成り立つので，(21.2) の変換は正準変換である。

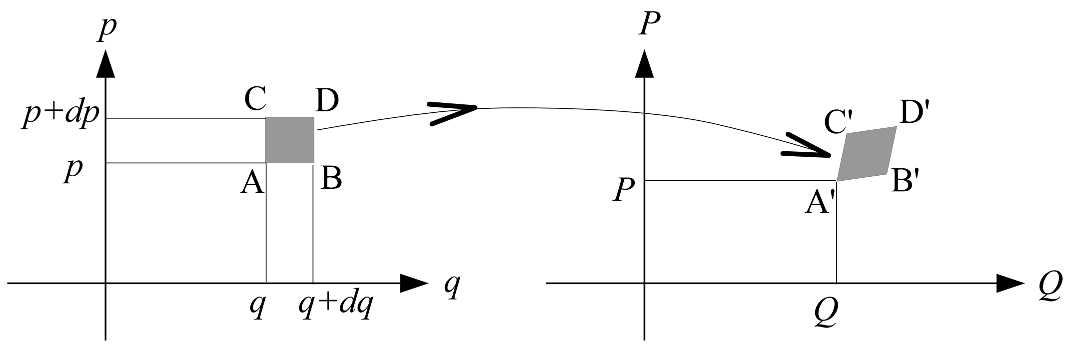


図 29　正準変換による微小体積の変換

# 24　Liouville の定理

（フランス人の名前なのでリュウヴィユがもともとの発音に近いらしい。しかし，リウヴィル，リュウビルなどと書くことが多い）

まず，簡単な例として図 29 のように，1 次元の場合の正準変数 $q, p$ から $Q, P$ への正準変換を考えよう。$q, p$ が作る位相空間での微小体積 $dqdp$ の頂点 A, B, C, D が移る先は，

$$A:(q,p) \qquad\qquad \Longrightarrow A':(Q,P) \tag{24.1}$$

$$B:(q+dq,p) \qquad \Longrightarrow B':(Q+\frac{\partial Q}{\partial q}dq, P+\frac{\partial P}{\partial q}dq) \tag{24.2}$$

$$C:(q,p+dp) \qquad \Longrightarrow C':(Q+\frac{\partial Q}{\partial p}dp, P+\frac{\partial P}{\partial p}dp) \tag{24.3}$$

$$D:(q+dq,p+dp) \Longrightarrow D':(Q+\frac{\partial Q}{\partial q}dq+\frac{\partial Q}{\partial p}dp, P+\frac{\partial P}{\partial q}dq+\frac{\partial P}{\partial p}dp) \tag{24.4}$$

となり，一般的には長方形が平行四辺形になる。A’B’C’D’ の面積を位相空間 $Q, P$ での面積要素という意味で $dQdP$ と書くことにする。その面積は（ベクトル積の定義を思い出して）

$$A'B'C'D'\text{の面積 } dQdP = \frac{\partial Q}{\partial q}dq\frac{\partial P}{\partial p}dp - \frac{\partial Q}{\partial p}dp\frac{\partial P}{\partial q}dq = \{Q,P\}_{qp}dqdp = dqdp \tag{24.5}$$

となって，**正準変換によって面積要素の面積は変化しない**ことがわかる。また，

$$dQdP = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right)dqdp = \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)}dqdp \tag{24.6}$$

$$\text{ただし}\quad \frac{\partial(Q,P)}{\partial(q,p)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q} & \dfrac{\partial P}{\partial q} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial p} & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} \quad \text{はヤコビアン（この場合は } \{Q,P\}_{qp}=1\text{）} \tag{24.7}$$

のようにヤコビアンを使って表すこともできる。

一般的には，$q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n$ から $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, P_1, P_2, \cdots, P_n$ に正準変換した

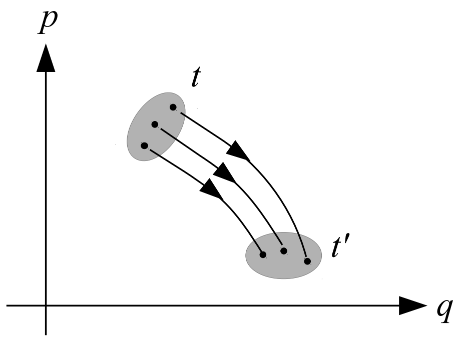


図 30　時間経過による代表点と体積の移動

とき，体積要素は**ヤコビアン**を使って次のように変換される。

$$dQ_1 dQ_2 \cdots dQ_n dP_1 dP_2 \cdots dP_n = \frac{\partial(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})}{\partial(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} dq_1 dq_2 \cdots dq_n dp_1 dp_2 \cdots dp_n \tag{24.8}$$

$$\text{ここで}\quad \frac{\partial(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})}{\partial(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_n} & \frac{\partial P_1}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial q_n} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_1} & \frac{\partial P_1}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} \quad \text{はヤコビアン} \tag{24.9}$$

ただし $q_1, q_2, \cdots, q_n$ を $\boldsymbol{q}$，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ を $\boldsymbol{p}$，$Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ を $\boldsymbol{Q}$，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ を $\boldsymbol{P}$ で表している。ヤコビアンは分数のように割り算をしてよく，さらに，上下に同じ量があるときには約分ができるので，

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})}{\partial(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})} &= \frac{\partial(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})}{\partial(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P})} \Big/ \frac{\partial(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})}{\partial(\boldsymbol{q},\boldsymbol{P})} = \frac{\partial(\boldsymbol{Q})}{\partial(\boldsymbol{q})} \Big/ \frac{\partial(\boldsymbol{p})}{\partial(\boldsymbol{P})} \\ &= \frac{\partial(Q_1, Q_2, \cdots, Q_n)}{\partial(q_1, q_2, \cdots, q_n)} \Big/ \frac{\partial(p_1, p_2, \cdots, p_n)}{\partial(P_1, P_2, \cdots, P_n)} \end{aligned} \tag{24.10}$$

となる。分子のヤコビアンの $ij$ 成分は $\partial Q_j/\partial q_i$ である。一方，分母のヤコビアンの $ji$ 成分は $\partial p_i/\partial P_j$ だが，(23.2) より $\partial Q_j/\partial q_i$ に等しい。行列式の値は転置（行と列の入れ替え）をしても変わらないので，(24.10) の分子と分母のヤコビアンは等しく，(24.10) は結局 1 になる。したがって，(24.8) は

$$dQ_1 dQ_2 \cdots dQ_n dP_1 dP_2 \cdots dP_n = dq_1 dq_2 \cdots dq_n dp_1 dp_2 \cdots dp_n \tag{24.11}$$

となり，位相空間の体積要素は正準変換によって変わらないことになる。もちろん，**有限の領域を考えても，その体積は正準変換によって変化しない**。これを **Liouville の定理**という。

§21 の最後に説明したように，系の運動による時間変化は正準変換である。図 30 では，時刻 $t$ に網掛けで示した位相空間の領域に 3 つの状態がある。時間がたつにつれて代表点は動き，領域も形を変えながら移動していく。しかし，Liouville の定理により領域の体積は変化しないので，位相空

間の単位体積あたりの状態数（これを状態密度という）は時間がたっても変化しない。これは古典統計力学の基礎として重要である。

## 25　ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式

$q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n$ から $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, P_1, P_2, \cdots, P_n$ への正準変換の結果として得られるハミルトニアン $K$ が 0 になれば，正準運動方程式は

$$\frac{dQ_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_j} = 0, \qquad \frac{dP_j}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \tag{25.1}$$

となる。すべての $Q_j$ と $P_j$ が一定になって，問題が解けたことになる。

母関数 $F_2(q, P, t)$ による正準変換を考える。表 4 より変換後のハミルトニアン $K = 0$ という条件は $p_j = \partial F_2 / \partial q_j$ を使って

$$K = \frac{\partial F_2}{\partial t} + H(q_1, q_2, \cdots, q_n, \frac{\partial F_2}{\partial q_1}, \frac{\partial F_2}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial F_2}{\partial q_n}, t) = 0 \tag{25.2}$$

と表せる。この方程式の解をハミルトンの主関数とよび，$S$ で表すことが多い。そこで $F_2$ を $S$ で置き換えた

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, q_2, \cdots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) = 0 \tag{25.3}$$

を**ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式**という。この方程式は $q_1, q_2, \cdots, q_n$ と $t$ の合わせて $n+1$ 個の変数の関数 $S$ についての 1 階偏微分方程式だと見ることができる。変数と同じ数の任意定数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n, \alpha_0$ を含む解（完全解とよぶ）は次のようになる。

$$S = S_0(q_1, q_2, \cdots, q_n, t, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) + \alpha_0 \tag{25.4}$$

$+\alpha_0$ の形の任意定数があってよいことは，方程式に代入して簡単に確かめられる。

さて，変換後のハミルトニアン $K$ は 0 なので，新しい座標 $Q_k$ と運動量 $P_k$ はすべて定数になる。もともと $F_2(q_1, q_2, \cdots, q_n, P_1, P_2, \cdots, P_n, t)$ だったところを $S$ に置き換えたのだから，$S$ の中の任意定数 $\alpha_k$ が運動量 $P_k$ に対応する。正準変換の母関数が $S$ だとして，残りの変数もまとめて書くと，

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} \tag{25.5}$$

$$P_k = \alpha_k \tag{25.6}$$

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \text{定数} \equiv \beta_k \tag{25.7}$$

となる。これは $q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n$ についての連立方程式なので，これらを解けば，

$$q_j = q_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, t) \tag{25.8}$$

$$p_j = p_j(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, t) \tag{25.9}$$

の形，つまり時間の関数として表せて問題が解けたことになる。

ところで，(25.4) 式を時間で微分して，(25.3) と (25.5) の関係を使うと

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial t}=-H+\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j=L \quad\Longrightarrow\quad S=\int Ldt \tag{25.10}$$

を示せる。つまり，ハミルトンの主関数 $S$ は（定数を除いて）作用積分と一致する。そのため $S$ という記号が使われる。ハミルトン-ヤコビの偏微分方程式は，量子力学のシュレディンガー方程式と深い関係がある。

# 26　補足：無限小正準変換とポアッソン括弧式

$\varepsilon$ を無限小の数として

$$F_2(q,P,t)=\sum_{j=1}^{n}q_jP_j+\varepsilon U(q,P) \tag{26.1}$$

の形の母関数で生成される変換を無限小正準変換という。表 2 より

$$p_j=\frac{\partial F_2}{\partial q_j}=P_j+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{26.2}$$

$$Q_j=\frac{\partial F_2}{\partial P_j}=q_j+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{26.3}$$

であるから，

$$Q_j=q_j+\delta q_j,\qquad \delta q_j=\varepsilon\frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{26.4}$$

$$P_j=p_j+\delta p_j,\qquad \delta p_j=-\varepsilon\frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{26.5}$$

となる。$\delta q_j,\delta p_j$ は $\varepsilon$ の 1 次のオーダーまでしか問題にしないとすると，$U$ の変数 $P$ は変換前の $p$ に置き換えてよい。したがって，

$$Q_j=q_j+\delta q_j,\qquad \delta q_j=\varepsilon\frac{\partial U(q,p)}{\partial p_j}=\varepsilon\{q_j,U(q,p)\} \tag{26.6}$$

$$P_j=p_j+\delta p_j,\qquad \delta p_j=-\varepsilon\frac{\partial U(q,p)}{\partial q_j}=\varepsilon\{p_j,U(q,p)\} \tag{26.7}$$

となる。$U$ をこの無限小変換の**生成子** (generator) という。

無限小変換による物理量 $G(q,p)$ の変化 $\delta G$ は，

$$\begin{aligned}\delta G=G(q+\delta q,p+\delta p)-G(q,p)&=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_j}\delta q_j+\frac{\partial G}{\partial p_j}\delta p_j\right)\\&=\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial G}{\partial q_j}\frac{\partial U}{\partial p_j}-\frac{\partial G}{\partial p_j}\frac{\partial U}{\partial q_j}\right)\\&=\varepsilon\{G,U\}\end{aligned} \tag{26.8}$$

となって，$G$ と生成子 $U$ のポアッソン括弧式で表せる。

簡単のために 1 粒子の場合について，具体的な例を考えてみよう。

【例 1：座標系の回転】デカルト座標系の座標軸を $z$ 軸のまわりに角度 $\varepsilon$ だけ回転する。古い座標 $x, y, z$ は新しい座標系での座標 $X, Y, Z$ を使って次のように書ける。

$$x = X\cos\varepsilon - Y\sin\varepsilon \cong X - \varepsilon Y \tag{26.9}$$

$$y = X\sin\varepsilon + Y\cos\varepsilon \cong Y + \varepsilon X \tag{26.10}$$

$$z = Z \tag{26.11}$$

運動量ベクトルも座標と同じように変換されるので，

$$p_x = P_X\cos\varepsilon - P_Y\sin\varepsilon \cong P_X - \varepsilon P_Y \tag{26.12}$$

$$p_y = P_X\sin\varepsilon + P_Y\cos\varepsilon \cong P_Y + \varepsilon P_X \tag{26.13}$$

$$p_z = P_Z \tag{26.14}$$

物理量 $G$ が座標と運動量の関数だとする。回転する前は $G(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ であったものが，回転後は $G'(X, Y, Z, P_X, P_Y, P_Z) = G(X - \varepsilon Y, Y + \varepsilon X, Z, P_X - \varepsilon P_Y, P_Y + \varepsilon P_X, P_Z)$ になる。関数値の変化は

$$\begin{aligned}
\delta G &= G'(X, Y, Z, P_X, P_Y, P_Z) - G(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \\
&= \varepsilon\left(-Y\frac{\partial G}{\partial x} + X\frac{\partial G}{\partial y}\right) + \varepsilon\left(-P_Y\frac{\partial G}{\partial p_x} + P_X\frac{\partial G}{\partial p_y}\right) \\
&\cong \varepsilon\left(x\frac{\partial G}{\partial y} - y\frac{\partial G}{\partial x}\right) + \varepsilon\left(p_x\frac{\partial G}{\partial p_y} - p_y\frac{\partial G}{\partial p_x}\right) \\
&= \varepsilon\left(\frac{\partial G}{\partial x}(-y) - \frac{\partial G}{\partial p_x}p_y\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial G}{\partial y}x - \frac{\partial G}{\partial p_y}(-p_x)\right) \\
&= \varepsilon\{G, L_z\}
\end{aligned} \tag{26.15}$$

となる。ここで $L_z$ は角運動量の $z$ 成分 $L_z = xp_y - yp_x$ である。つまり，座標軸を $z$ 軸まわりに無限小回転する生成子は角運動量の $z$ 成分 $L_z$ である。もちろん，ハミルトニアンについても

$$\delta H = \varepsilon\{H, L_z\} \tag{26.16}$$

が成り立つ。

【例 2：座標系の平行移動】デカルト座標系の座標軸を $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ だけ平行移動すると，古い座標 $x, y, z$ は新しい座標系での座標 $X, Y, Z$ を使って次のように書ける。

$$x = X + \varepsilon_x \tag{26.17}$$

$$y = Y + \varepsilon_y \tag{26.18}$$

$$z = Z + \varepsilon_z \tag{26.19}$$

運動量は変化せず $P_X = p_x, P_Y = p_y, P_Z = p_z$ である。移動前の座標系で $G(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ であったものは，移動後には $G'(X, Y, Z, P_X, P_Y, P_Z) = G(X + \varepsilon_x, Y + \varepsilon_y, Z + \varepsilon_z, p_x, p_y, p_z)$ になる。変化分は，

$$\begin{aligned}
\delta G &= G'(X, Y, Z, P_X, P_Y, P_Z) - G(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \\
&= G(X + \varepsilon_x, Y + \varepsilon_y, Z + \varepsilon_z, p_x, p_y, p_z) - G(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \\
&= \varepsilon_x\frac{\partial G}{\partial x} + \varepsilon_y\frac{\partial G}{\partial y} + \varepsilon_z\frac{\partial G}{\partial z} \\
&= \varepsilon_x\{G, p_x\} + \varepsilon_y\{G, p_y\} + \varepsilon_z\{G, p_z\}
\end{aligned} \tag{26.20}$$

と表せる。したがって，$x, y, z$ 軸方向への座標軸の無限小平行移動の生成子は，それぞれ $p_x, p_y, p_z$ である。

§20 のポアッソン括弧式のところで説明したように，時間に陽に依存しない物理量 $G$ の時間変化は

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} \tag{26.21}$$

であった。これを微小時間 $\delta t$ の間の変化分 $\delta G$ の式として

$$\delta G = \delta t\{G, H\} \tag{26.22}$$

と書き直せば，ハミルトニアンが運動の生成子になっていることがわかる。

系のハミルトニアンが $z$ 軸まわりの無限小回転に対して不変であれば，上の例 1 の (26.16) から，

$$\delta H = \varepsilon\{H, L_z\} = 0 \tag{26.23}$$

になる。(26.21) と合わせると

$$\delta H = \varepsilon\{H, L_z\} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dL_z}{dt} = \{L_z, H\} = 0 \tag{26.24}$$

となって角運動量の $z$ 成分 $L_z$ が保存される。また，$x$ 軸方向に平行移動してもハミルトニアンが不変であれば，例 2 の (26.20) から

$$\varepsilon_x\{H, p_x\} = 0 \tag{26.25}$$

となり，(26.21) より運動量の $x$ 成分 $p_x$ が保存される。このようにハミルトニアンがある操作に対して不変であれば，その操作の生成子は保存される。

# 参考文献

[1] 増山博行 『平成 23 年度 力学? 講義ノート』

[2] 田辺行人，品田正樹 『理・工基礎 解析力学』 裳華房

[3] 畑浩之 『基幹講座物理学 解析力学』東京図書

[4] ゴールドスタイン，ポール，サーフコ 『古典力学 （上），（下）原著第 3 版』 吉岡書店

[5] 江沢洋 『新物理学シリーズ 36 解析力学』 培風館

[6] 山内恭彦 『一般力学 増訂第 3 版』 岩波書店

[7] ランダウ，リフシッツ 『力学』 東京図書

[8] 山本義隆，中村孔一 『朝倉物理学大系 解析力学 I，II』 朝倉書店

[9] 須藤靖 『解析力学・量子論』 東京大学出版会

[10] 高橋康 『量子力学を学ぶための解析力学入門』 講談社