

数理計画

2019 年 1 月 21 日

1 10/29

2 数理計画

最適化すべき問題を数学モデルに定式化し、それを解く
目的

1. 様々な問題を数学モデルに定式化できること
2. シンプレックス法を用いて、線形計画問題を解けること

※この二つをテストで確かめられる

※線形計画も線形って何？テストに出るよ

3 1 章 数理計画モデル

目的

1. 数理計画法の考え方を知る
2. 数理計画問題を定式化する

3.1 線形計画モデル

3.1.1 生産計画問題

たぶん、教科書に書いてある 4 種類の原料 A,B,C,D を用いるやつ。それぞれ 80,50,100,70 のやつ

目的：最大の利益をあげたい↓

$$70x_1 + 120x_2 + 30x_3$$

これを目的関数という

この利益を最大にしたい

目的関数： $70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \rightarrow Max$

核原料には使用量に制約がある

原料 A は 80 単位まで使える

$$5x_1 + 6x_3 \leq 80$$

同様に

$$2x_2 + 8x_3 \leq 50 \quad (1)$$

$$70x_1 + 15x_3 \leq 100 \quad (2)$$

$$3x_1 + 11x_2 \leq 70 \quad (3)$$

$$(4)$$

定式化

目的関数：

$$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \rightarrow Max$$

制約条件：

$$5x_1 + 6x_3 \leq 80 \quad (5)$$

$$2x_2 + 8x_3 \leq 50 \quad (6)$$

$$70x_1 + 15x_3 \leq 100 \quad (7)$$

$$3x_1 + 11x_2 \leq 70 \quad (8)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \rightarrow \text{非負条件} \quad (9)$$

(10)

生産計画問題は

制約条件のもとで、目的関数が最大となる変数 x_1, x_2, x_3 の値を求める問題に定式化できる

線形計画問題とは・・・

制約条件が1次の等式や不等式で表され、かつ、目的関数が1次関数である問題のことである

3.1.2 多期間計画問題

t 月における製品 $i = 1, 2$ の生産量を x_{it} とし、t 月から翌月に持ち越す在庫量を y_{it} とする

コストを最小化したい!

3ヶ月間の総コストを考える

目的関数：

$$75(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 50(x_{21} + x_{22} + x_{23}) \rightarrow \text{生産コスト} \quad (11)$$

$$+ 8(y_{11} + y_{12}) + 7(y_{21} + y_{22}) \rightarrow \text{在庫コスト} \quad (12)$$

$$\rightarrow \text{最小} \quad (13)$$

制約条件

原料の利用可能量 (上限) A：

$$1 \text{ 月} : 2x_{11} + 7x_{21} \leq 920$$

$$2 \text{ 月} : 2x_{12} + 7x_{22} \leq 750$$

$$3 \text{ 月} : 2x_{13} + 7x_{23} \leq 500$$

B：

$$1 \text{ 月} : 5x_{11} + 3x_{12} \leq 790$$

$$2 \text{ 月} : 5x_{12} + 3x_{22} \leq 600$$

$$3 \text{ 月} : 5x_{13} + 3x_{23} \leq 480$$

(実際のテストの時には A とか B とか 1 月とか書かなくていい)

出荷量に関する制約

I：

$$1 \text{ 月} : x_{11} - y_{11} = 30$$

$$2 \text{ 月} : x_{12} + y_{11} - y_{12} = 60 \text{ 前の在庫もたす}$$

$$3 \text{ 月} : x_{13} + y_{12} = 80 \text{ 在庫いらない}$$

II：

$$1 \text{ 月} : x_{21} - y_{21} = 20$$

$$2 \text{ 月} : x_{22} + y_{21} - y_{22} = 50$$

$$3 \text{ 月} : x_{23} - y_{22}$$

非負条件は

$$x_{it} \geq 0, i = 1, 2, t = 1, 2, 3$$

$$y_{it} \geq 0, i = 1, 2, t = 1, 2$$

3.1.3 輸送計画問題

工場 $A_i (i = 1, 2, 3)$ から取引先 $B_j (j = 1, 2, 3)$ への輸送量を x_{ij} で表す

輸送コスト

目的関数：

$$4x_{11} + 7x_{12} + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23} \rightarrow \text{最小} \quad (14)$$

制約条件：

生産量

$$A_1 : x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$A_2 : x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80$$

注文に関する制約

$$B_1 : x_{11} + x_{21} = 70$$

$$B_2 : x_{12} + x_{22} = 40$$

$$B_3 : x_{13} + x_{23} = 60$$

非負条件

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$$

4 11/5

5 ネットワークモデル

グラフ；いくつかの点とそれらを結ぶ矢印からなる
いくつかの点→節点（ノード）、結ぶ矢印→枝（アーク）
有向グラフ：枝に向きがある
無向グラフ：枝に向きがない
節点 i から j への枝を (i, j) で表す
例→教科書

節点 $V = \{1, 2, 3, 4\}$ →ここは絶対中括弧
枝全体の集合
 $E = (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2)$
グラフ $G = (V, E)$
で表す
節点 1 から節点 4 への路（パス）
 $P = (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 3, 2, 4)$
路 $P = (1, 2, 4)$ への長さ
枝 (i, j) を通るかどうかを変数にとる

$x =$

$$1 \begin{cases} 0 & (i,j) \text{ を通る} \\ & (i,j) \text{ を通らない} \end{cases} \quad \begin{matrix} (15) \\ (16) \\ (17) \end{matrix}$$

→ 0-1 条件 目的関数 → 総所要時間

$$\sum_{(i,j) \in E} a_{ij} x_{ij} = 5x_{AB} + 4x_{AC} + 2x_{BC} + 4x_{BD} + 7x_{BE} + 2x_{CB} + 6x_{CD} + 8x_{CF} + 5x_{DE} + 3x_{DF} + x_{EF} + 3x_{EG} + 2x_{FE} + 2x_{FG} \rightarrow \text{最小}$$

制約条件

$$A \rightarrow -x_{AB} - x_{AC} = -1$$

$$B \rightarrow x_{AB} + x_{CB} - x_{BC} - x_{BD} - x_{BE} = 0$$

$$C \rightarrow x_{AC} + x_{BC} - x_{CB} - x_{CD} - x_{CF} = 0$$

$$D \rightarrow$$

$$E$$

$$F$$

$$G$$

5.1 最大流問題

教科書みてね

定式化

枝 (i, j) の輸送量を x_{ij} とおく

各枝の容量を u_{ij} で表す

際流量 (輸送できる最大値) を f とおく

目的関数: $f \rightarrow \text{最大}$

制約条件: →教科書

容量制約条件

$$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}, (i, j) \in E$$

5.2 資源配分問題

定式化

各科目の勉強時間を t_1, t_2, t_3 時間とおく → 何を何でおいにかは必ず書く

目的関数: $h_1(t_1) + h_2(t_2) + h_3(t_3) \rightarrow \text{最大}$

制約関数:

$$t_1 + t_2 + t_3 = T, t_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \quad (18)$$

5.3 ポートフォリオ選択問題

各株式への投資額を x_1, x_2, x_3 円とする

1 ヶ月後の予想株価を q_1, q_2, q_3 円とおく

各株式に何口投資したか

利益

$$z = W - w = \frac{x_1}{P_1}q_1 + \frac{x_2}{P_2}q_2 + \frac{x_3}{P_3}q_3 - (x_1 + x_2 + x_3) = R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3R_i = \frac{q_i - P_i}{P_i} \text{とおく} \quad (19)$$

これを収益率という

6 11/19

6.1 交通流割り当て問題

(教科書参照) 図のような道路網を考える。道路管理者が道路網の効率利用の点から交通流を調整する時、どのように A から D へ誘導するのがよいか

道路 i を通る車の台数を x_i とおく

道路 i を通過した車の総所要時間は $x_i f_i(x_i)$ となるので

A → D 全体で

$$\sum_{i=1}^5 x_i f_i(x_i)$$

かかる

目的関数: $\sum_{i=1}^5 x_i f_i(x_i) \rightarrow \text{最大}$

制約条件: A から出発する台数を F だいとする

A: $-x_1 - x_2 = -F$

B: $x_1 - x_2 - x_4 = 0$

C: $x_2 + x_3 - x_5 = 0$

D: $x_4 + x_5 = F$

$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$ 非負条件

道路管理者視点 → システム最適

ドライバー視点 → ユーザ最適

7 組み合わせ計画モデル

線形計画: 量は連続値 (実数)

組み合わせ計画: 量は離散値 (整数)

ベクトルと行列の導入

目的関数: $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{最大}$

変数

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

とおくと

目的関数:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最大}$$

制約条件：教科書見て

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

制約条件

$$Ax \leq b$$

ベクトルに不等号はほんとダメ。この数理計画だけ

数理計画方では不等号は各要素間の大小関数を表す

皮膚条件は

$$x \geq 0$$

7.1 ナップサック問題

各品物 i をナップサックに入れるかどうかを変数 x_i で表す

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{ナップサックに入れる} \\ 0 & \text{入れない} \end{cases} \quad (20)$$

(21)

$$\text{maximize} : c^T x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\text{subject} : \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ x_i = 0, 1 \end{cases} \quad (22)$$

(23)

これらを 0-1 問題と呼ばれる

8 数理計画問題

目的関数： $f(x) \rightarrow$ 最大 or 最小

制約条件： $x \in S$

$x \in R^n$

$f : R^n$ 上で定義された実数値関数 \rightarrow 実数値なのは大小関係が決まるから

$x \in S$ を満たす x を実行可能解という

↓

目的関数を最大(最小)にする x を最適解という

9 線形計画

目標：シンプレックス法を用いて問題を解ける

9.1 線形計画問題

任意の線形計画問題は標準形に変換できる

標準形

目的関数： $c^T x \rightarrow$ 最小

制約条件 : $Ax = b, x \geq 0$

この形を標準形という

9.1.1 例題

目標関数 : $-2x_1 + 5x_2 \rightarrow \text{最大}$

$$\text{制約条件 : } \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 = 30 & (24) \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 50 & (25) \\ 7x_1 + 5x_2 \geq 10 & (26) \\ x_1 \geq 0, x_2 \text{ は符号制約なし} & (27) \end{cases}$$

この問題を標準形にする

1. 最小問題にする

-1 をかける

$2x_1 - 5x_2 \rightarrow \text{最小}$

2. 符号制約なしを非負条件にする非負変数 $x'_2 \geq 0, x_2'' \geq 0$ を代入する

$$x_2 = x'_2 - x_2'', x'_2 \geq 0, x_2'' \geq 0$$

とおける

これらをつかって

目的関数 : $2x_1 - 5x'_2 + 5x_2'' \rightarrow \text{最小}$

$$\text{制約条件} \begin{cases} 4x_1 - 6x'_2 + 6x_2'' = 30 & (28) \\ 2x_1 + 8x'_2 - 8x_2'' \leq 50 & (29) \\ 7x_1 + 5x'_2 - 5x_2'' \geq 10 & (30) \\ x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x_2'' \geq 0 & (31) \end{cases}$$

$x'_2 \rightarrow x_2, x_2'' \rightarrow x_3$ に置き換える

3. 不等式を等式にする新しい変数 $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ を導入する (スラック変数)

$$2x_1 + 8x_2 - 8x_3 \leq 50$$

\rightarrow

$$2x_1 + 8x_2 - 8x_3 + x_4 = 50$$

これと

$$7x_1 + 5x_2 - 5x_3 \geq 10$$

\rightarrow

$$7x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_5 = 10$$

よって、標準形は

目的関数 : $2x_1 - 5x_2 + 5x_3 \rightarrow \text{最小}$

$$\text{制約条件} \begin{cases} 4x_1 - 6x'_2 + 6x_2'' = 30 & (32) \\ 2x_1 + 8x_2 - 8x_3 + x_4 = 50 & (33) \\ 7x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_5 = 10 & (34) \\ x_i \geq 0 & i=1,2,3,4,5 & (35) \end{cases}$$

10 12/17

前回の続き

10.1 基底解と最適解

*****基底解の意味はわかるようになってくこと。テスト出るかも

10.1.1 例題

目的関数： $-x_1 - x_2 \rightarrow$ 最小

制約条件：

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. 制約条件を図示する

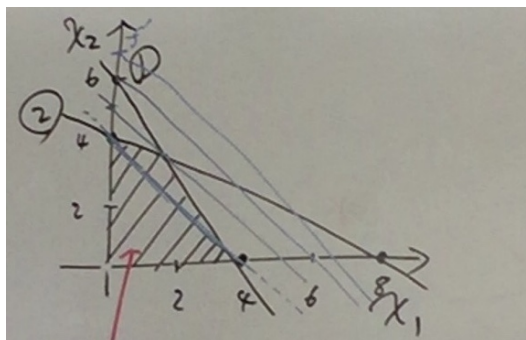
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

実行可能領域＝制約条件を満たす解の範囲

2. 目的関数の”等高線”を引く

ここでいう等高線とは同じ値になるところという意味

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &= f \quad \text{とおく} \\ x_2 &= -x_1 - f \quad (\text{ただし } f \text{ は } x_2 \text{ の係数} \\ x_2 &= -x_1 + f', \quad (f' = -f) \end{aligned}$$



3. 最小化 $\rightarrow f$ を小さくする $=f'$ を大きくする

1 と 2 の交点を通るとき最大

実行可能領域の凸多角形の頂点のうち、少なくとも1点は最適解になっている。

↓

n 変数の場合も、空間 \mathbf{R}^n の凸面体の頂点が必ず最適解になっている

頂点だけ調べればいい | |

頂点の数は、 n が大きくなると急激に増加する

10.2 シンプレックス法

n が大きくなると関数ではしんどい

シンプレックス法

実行可能領域の1つの頂点から初めて、目的関数の値が必ず減少するように、隣接する頂点に移動すれば、最終的に最適化に到達する。

10.2.1 例題 (標準形を考える)

目的関数: $-x_1 - x_2 \rightarrow \text{最小}$ 制約関数:

例題 (標準形を考える)
目的関数: $-x_1 - x_2 \rightarrow \text{最小}$
制約条件: $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$
 $x_1 + 2x_2 + x_4 = 8$ (2変数)
 $x_i \geq 0, i=1,2,3,4$
 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ とおく。

変数の数は4つに対して、式が2つしかないので、普通にとくと解が出ない

等式の制約条件は2つなので、4変数のうち2変数を0とおけば、残りの変数の値は一意に定まる。これを基底解と呼ぶ。

基底解のうち、非負条件 $x \geq 0$ を満たすものを、実行可能基底解とよぶ

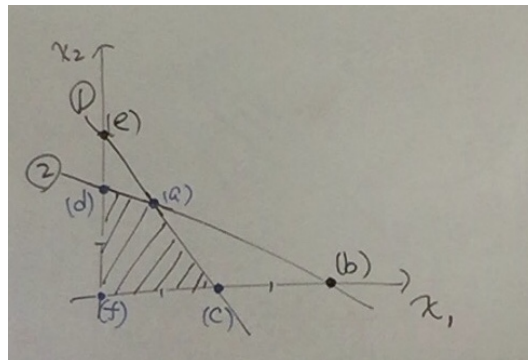
1. 初期条件 頂点 (実行可能基底) を1つ求める。(a)~(f) が基底解

(a) $x_3 = 0, x_4 = 0$ の場合.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

基底解 $x = (2, 3, 0, 0)^T$
基底変数 $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
非基底変数 $x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $x_B = (x_1, x_3)^T$, $x_N = (x_2, x_4)^T$ のとき
 基底解 $x = (8, 0, -12, 0)^T$
 (c) $x_B = (x_1, x_4)^T$, $x_N = (x_2, x_3)^T$ のとき
 $x = (4, 0, 0, 4)^T$
 (d) $x_B = (x_2, x_3)^T$, $x_N = (x_1, x_4)^T$ のとき
 $x = (0, 4, 4, 0)^T$
 (e) $x_B = (x_2, x_4)^T$, $x_N = (x_1, x_3)^T$ のとき
 $x = (0, 6, 0, -4)^T$

(f) $x_B = (x_3, x_4)^T$, $x_N = (x_1, x_2)^T$ のとき
 $x = (0, 0, 12, 8)^T$



知りたいのは実行可能基底解
 実行可能基底解は $x \geq 0$ より、(a),(c),(d),(f) となる
 (b) と (e) は基底解だが、実行可能基底解ではない。

行列とベクトルによる解放

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A x = b$$
 (a) $x_B = (x_1, x_2)^T$, $x_N = (x_3, x_4)^T$ のとき
 $A = [B \ N]$ となる。

$$[B \ N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ を基底行列

$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ を非基底行列 と言う.

xt

(c) $x_B = (x_1, x_4)^T, x_N = (x_2, x_3)^T$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$Ax=b$ は.

$$[B \ N] \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b \text{ となる.}$$

$$Bx_B + Nx_N = b$$

$x_N = 0$ とおいて、基底解を求める。
ただし、 b は正則であるとする。

$$Bx_B = b$$

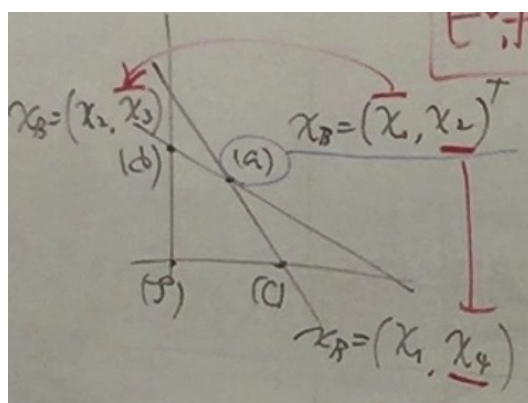
$$x_B = B^{-1}b$$

$x_B = B^{-1}b \geq 0$ ならば、実行可能基底解である。

↓

凸多面体の頂点

2. 隣接する頂点に移動する 基底変数の1つと非基底変数の1つを交換する



↓

ピボット操作という

ピボット操作を繰り返して、実行可能基底解を次々に調べていくと、最適解にたどり着く

11 1/7

11.1 シンプレックス法の初期化

初期化実行可能基底解を見つけるには、どのようにすれば良いか

2段階法 (2段階シンプレックス法)

初期実行可能基底解を求めるのに、さらにシンプレックス法を用いる方法

11.1.1 例題

目的関数: $-2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \text{最小}$
制約条件: $x_1 + 2x_2 = 12$
 $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

目的関数: $-2x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \text{最小}$
制約条件: $x_1 + 2x_2 = 12$ (正の値)
 $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20$ (正の値)
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

初期実行基底解を求めるために、補助問題を考える

補助問題

補助問題
目的関数: $x_4 + x_5 \rightarrow \text{最小}$
制約条件: $x_1 + 2x_2 + x_4 = 12$
 $x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 20$
 $x_i \geq 0, i=1,2,3,4,5$
人為変数

*****人為変数と前に使ったスラック変数の違い大事!! 穴埋めでテストに出る!!

補助問題の最小値が0ならば、 $x_4 = 0, x_5 = 0$ である。 x_1, x_2, x_3 はもとの問題の制約条件を満たすので、実行可能解を与える

補助問題の最小値が0である

↓

元の問題に実行可能解が存在する

※最小値が0 出ない場合、元の問題に最適解が存在しない

第一段階 : 補助問題をシンプレックス法で解き、元の問題の実行可能基底解をもとめる

第二段階 : 元の問題をシンプレックス法で解く

補助問題をシンプレックス・タブローでとく。一番上の行が目的関数となるよー

	0	0	0	1	1	0
x_4	1	2	0	1	0	12
x_5	1	4	2	0	1	20

基底変数として、人為変数の x_4, x_5 を選ぶ。しかし、スラック変数と違って、上の段の x_4, x_5 の係数が 0 になっていない

	0	0	0	1	1	0
x_4	1	2	0	1	0	12
x_5	1	4	2	0	1	20

x_4, x_5 の係数が 0 になっていない

→修正が必要

基底変数 x_4, x_5 の係数が 0 になるように、行の演算をする

・1 行目から 2 行目と 3 行目の和を引くと、1 行目の x_4, x_5 の係数の値が 0 になる

	-2	-6	-2	0	0	-32
x_4	1	2	0	1	0	12
x_5	1	4	2	0	1	20

x_4, x_5

これによりシンプレックス・タブローで解くことができる

1 行目で一番小さいやつをピボット列とする。一番左の値をピボット列でそれぞれ割って、小さい方をピボット値とする

①	-2	-6	-2	0	0	-32
x_4	1	2	0	1	0	12
x_5	1	4	2	0	1	20

$12/2=6$
 $20/4=5$

0 になるように 1 行目 2 行目を計算、1 行目で小さいやつをピボット列

②	0					
x_4	0					
x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	5

②

	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$	-2
x_4	$\frac{1}{2}$	0	-1	1	$-\frac{1}{2}$	2
x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	5

③ ヒュウムト行を2倍に引く

	1	2	0	1	0	12
-)	$\frac{1}{2}$	2	1	0	$\frac{1}{2}$	10
	$\frac{1}{2}$	0	-1	1	$-\frac{1}{2}$	2

④ $\frac{3}{2}(x) = 4$
 $\frac{5}{4}(x) = 20$

[反復2]

①

	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	-2	2	-1	4
x_2	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4

1行目がすべて0以上になったので終了
 一番左の x_1, x_2 が基底変数、その他の変数は非基底変数
 これらの違いは基底変数は解、非基底変数は0となるよって
 最適解は

最適解は

$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ } 基底変数 (表の値)
 } 非基底変数は0

であり、この時の最適値 (目的関数の値) は0になる。一番左上のマイナスの値 (今回は0なので-0)
 ・人為変数 x_4, x_5 の値は0であり、最小値0となっている。

●第二段階

第一段階の結果より

x_1	1	0	-2	4
x_2	0	1	1	4

第一段階の結果

元の目的関数の係数を1行目に書く

第一段階の結果

元の問題の係数

	-2	-1	-1	0
x_1	1	0	-2	4
x_2	0	1	1	4

第一段階の結果

基底変数 x_1, x_2 の係数が 0 になっていないので、行操作を行い 0 にする。

- 2 行目を 2 倍したものと、3 行目の和を 1 行目に足す

	0	0	-4	12
x_1	1	0	-2	4
x_2	0	1	1	4

ピボットを求める。負の方は除外するので自動的に 3 列目の 1 がピボット。

	0	0	-4	12
x_1	1	0	-2	4
x_2	0	1	1	4

← 負の方は除外
← $x_2 = 4$
ここからスタート

	0	4	0	28
x_1	1	2	0	12
x_3	0	1	1	4

1 行目に負の値がないので終了。

最適解は

$$x = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

であり、この時の最適値は、-28 になる (マイナスを忘れないように)

12 1/21

テスト範囲 2-7 まで
シンプレックスタブローの解き方は覚える
2段階法は初期値がわからん時に使う
標準形になおすことが大事!!
線形代数の問題がでるよ $\mathbf{x}^T \mathbf{y} =$ とか

12.1 双対法

与えられた任意の線形計画問題 (主問題) に対して、その双対問題と呼ばれる、もう 1 つの線型計画法が存在する。

標準形の問題

目的関数: $\mathbf{C}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小}$

制約条件: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

これを主問題とすると、双対問題は

目的関数: $\mathbf{b}^T \mathbf{w} \rightarrow \text{最小}$

制約条件: $A^T \mathbf{w} \leq \mathbf{C}$

と定義される。(定義なのでこういうもの)

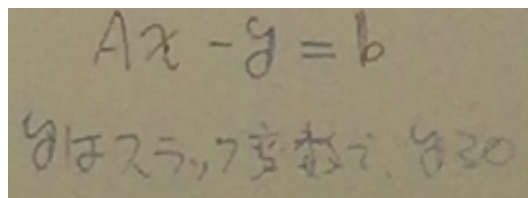
**例題

目的関数: $\mathbf{C}^T \mathbf{x} \rightarrow \text{最小}$

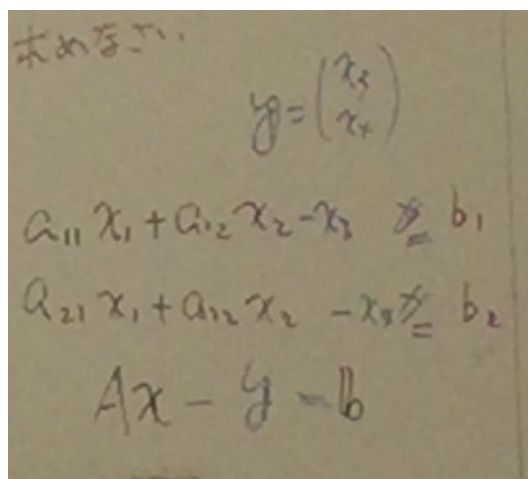
制約条件: $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

この問題の双対問題を求めなさい。

1. 標準形にする


$$A\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

yは7次元ベクトル、y ≥ 0



求める。

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_4 \leq b_2$$
$$A\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ と表したい}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ とおくと、行列 } A \text{ は}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix}, \quad I \text{ は単位行列}$$

と置く

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - x_3 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_4 \leq b_2$$

$$Ax - y = b$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

このように変数を置き換えると

標準形

目的関数: $\tilde{c}^T \tilde{x} \rightarrow \text{最小}$

制約条件: $\tilde{A} \tilde{x} = b, \tilde{x} \geq 0$

展開すると $\begin{cases} (c^T \ 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \text{最小} \\ [A \ -I] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b, x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

2. 双対問題にする

目的関数: $b^T w \rightarrow \text{最大}$

制約条件: $A^T w \leq \tilde{c}$

3. 置いたやつをもとにもどす

$$\begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix}^T w \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} A^T \\ -I^T \end{bmatrix} w$$

$$\begin{bmatrix} A^T w \\ -w \end{bmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A^T w \leq c \\ -w \leq 0 \end{cases} \rightarrow w \geq 0$$

非負条件

これより、双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & b^T w \rightarrow \text{最大} \\ \text{制約条件} & A^T w \leq c, w \geq 0 \end{array}$$

となる。

12.2 双対問題

”双対問題”を主問題とみなすと、元の”主問題”が双対問題となる。

主問題を (P)

双対問題を (D) で表す

12.3 弱双対定理

(P) と (D) のそれぞれの任意の実行可能解 x と w に対して、常に不等式

$$C^T x \geq b^T w$$

が成り立つ

(証明)

(P) の制約条件 $Ax = b, x \geq 0$ と (D) の制約条件 $A^T w \leq c$ より

$$\begin{aligned} \underline{C^T x} &\geq \underline{(A^T w)^T x} \\ &= w^T \underline{Ax} \\ &= w^T b \\ &= b^T w \quad // \end{aligned}$$

→テスト出るかも

- (P) の任意の実行可能解 \mathbf{x} に対して

$$\mathbf{C}^T \mathbf{x} \geq (\text{D}) \text{ の最大値}$$

が成り立つ。また、(D) の任意の実行可能解 \mathbf{w} に対して、

$$(\text{P}) \text{ の最小値} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{w}$$

が成り立つ。

- (P) と (D) のそれぞれの実行可能解 \mathbf{x}, \mathbf{w} が

$$\mathbf{C}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{w}$$

を満たせば、 \mathbf{x} と \mathbf{w} はそれぞれの最適解である。

- (P) が有界でないならば、(D) は実行可能解を持たない。
また、(D) が有界でないならば、(P) は実行可能解を持たない

(P) の最小値を求めることが、難しいならば、(D) の実行可能解 \mathbf{w} を 1 つ見つけて、 $\mathbf{b}^T \mathbf{w}$ を求めることで、(P) の最小値の下限を知ることができる。

12.4 双対定理

(P) または (D) の一方が最適解を持つならば、他方も最適解を持ち、(P) の最小値と (D) の最大値は一致する