2.4　交流電力

2.4.1　平均電力

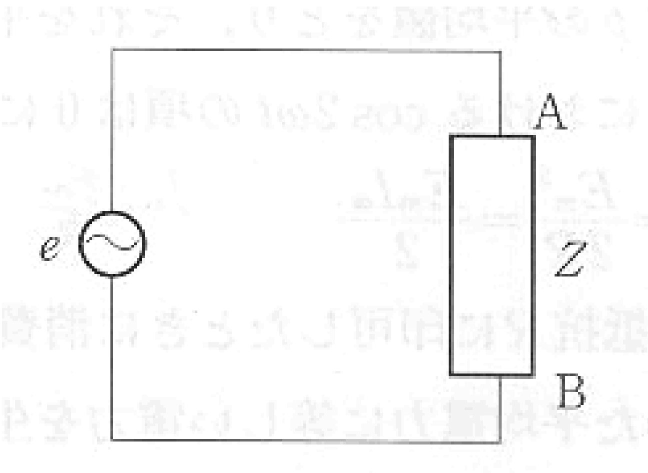


図 2.19　電位差 e と仕事

電荷 δq を点Aから点Bへ運ぶために電流がする仕事 w

$$w = e\delta q$$

e :ボルト[volt, V]

δq :クーロン[coulomb, C]

w :ジュール[joule, J]

仕事率（電力）p は

$$p = \frac{dw}{dt} = e\frac{dq}{dt} = e \cdot i$$

p :ワット[watt, W]

（1）抵抗

$$\mathrm{Z} = R$$

$e = E_m \cos \omega t$ とする

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m \cos \omega t}{R} = I_m \cos \omega t$$

$$p = e \cdot i = \frac{E_m{}^2}{R}\cos^2 \omega t$$

$$= \frac{E_m{}^2}{2R}\left(1 + \cos 2\omega t\right)$$

p : 瞬時電力

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E_m{}^2}{2R}\left(1 + \cos 2\omega t\right) dt$$

$$= \frac{E_m{}^2}{2R} = \frac{E_m \cdot E_m}{2 \cdot R}$$

$$= \frac{E_m I_m}{2}$$

P : 平均電力

$E_e\left[\mathrm{V}\right]$の直流電圧を抵抗 R に印可したときに消費される電力は

$$E_e \cdot \frac{E_e}{R} = \frac{E_e{}^2}{R}$$

$$\frac{E_m{}^2}{2R} = \frac{Ee^2}{R}$$

$$Ee = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad (\text{実効値})$$

同様に

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (\text{実効値})$$

（２）インダクタ(コイル)

$$e = L\frac{di}{dt}$$

$e = E_m \cos\omega t$ のとき

$$i = \frac{E_m \sin\omega t}{\omega L}$$

$$p = e \cdot i = \frac{E_m{}^2 \sin\omega t \cos\omega t}{\omega L}$$

$$= \frac{E_m{}^2}{2\omega L}\sin 2\omega t$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = 0$$

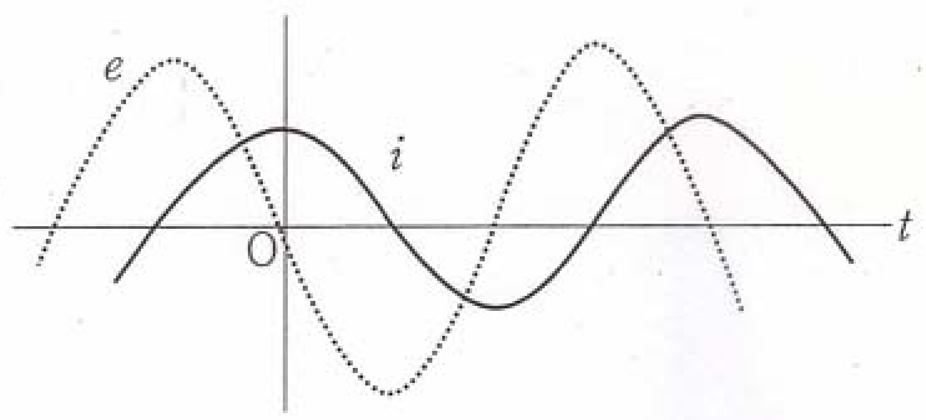


図 2.4　インダクタにおける電圧と電流の関係

電圧と電流が同符号の区間と異符号の区間が等間隔で現れる

同符号の時：
　電源から負荷にエネルギーの供給
　インダクタに磁気エネルギーとして蓄積

異符号の時：
　負荷から電源にエネルギーの供給
　蓄積された磁気エネルギーが再び電源に戻る

エネルギーは電源と負荷の間を往復し, 平均すれば消費される電力は０になる.

（３）キャパシタ(コンデンサ)

$$i = C\frac{de}{dt}$$

$e = E_m \cos\omega t$ とすると

$$i = -\omega C E_m \sin\omega t$$

$$p = ei = -\omega C {E_m}^2 \sin\omega t \cos\omega t$$

$$= -\frac{\omega C E_m}{2}\sin 2\omega t$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = 0$$

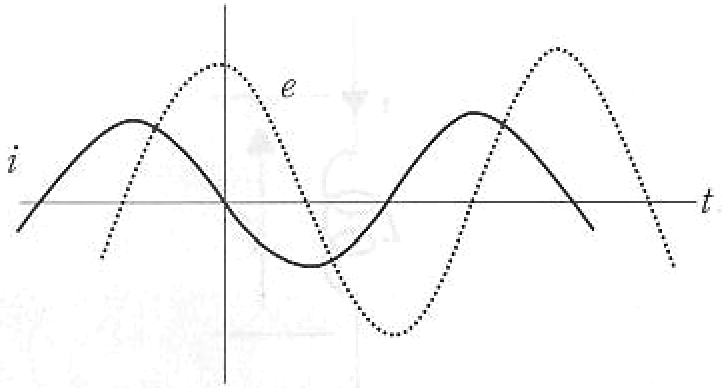


図 2.6　キャパシタにおける電圧と電流の関係

一般の負荷Z

$$Z = \left|Z\right| e^{j\theta}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{\left|Z\right| e^{j\theta}} = \frac{\dot{E}}{\left|Z\right|} e^{-j\theta}$$

$$e = E_m \cos \omega t$$

$$\dot{E} = E_m e^{j\omega t}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{|Z| e^{j\theta}} = \frac{\dot{E}}{|Z|} e^{-j\theta}$$

$$= \frac{E_m e^{j\omega t}}{|Z|} e^{-j\theta} = \frac{E_m}{|Z|} e^{j(\omega t - \theta)}$$

$$i = \mathrm{Re}\, \dot{I} = I_m \cos\left(\omega t - \theta\right) ,$$

$$I_m = E_m \big/ |Z|$$

$$p = ei = E_m I_m \cos\omega t \cos(\omega t - \theta)$$

$$= \frac{1}{2} E_m I_m \left\{ \cos(2\omega t - \theta) + \cos\theta \right\}$$

三角関数の加法定理

$$\cos\alpha \cos\beta$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right\}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} E_m I_m \left\{\cos\left(2\omega t - \theta\right) + \cos\theta\right\} dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} E_m I_m \cos\theta dt$$

$$= \frac{1}{2} E_m I_m \cos\theta$$

$\frac{1}{2} E_m I_m$: 皮相電力　ボルトアンペア[V A]

$\cos\theta$: 力率

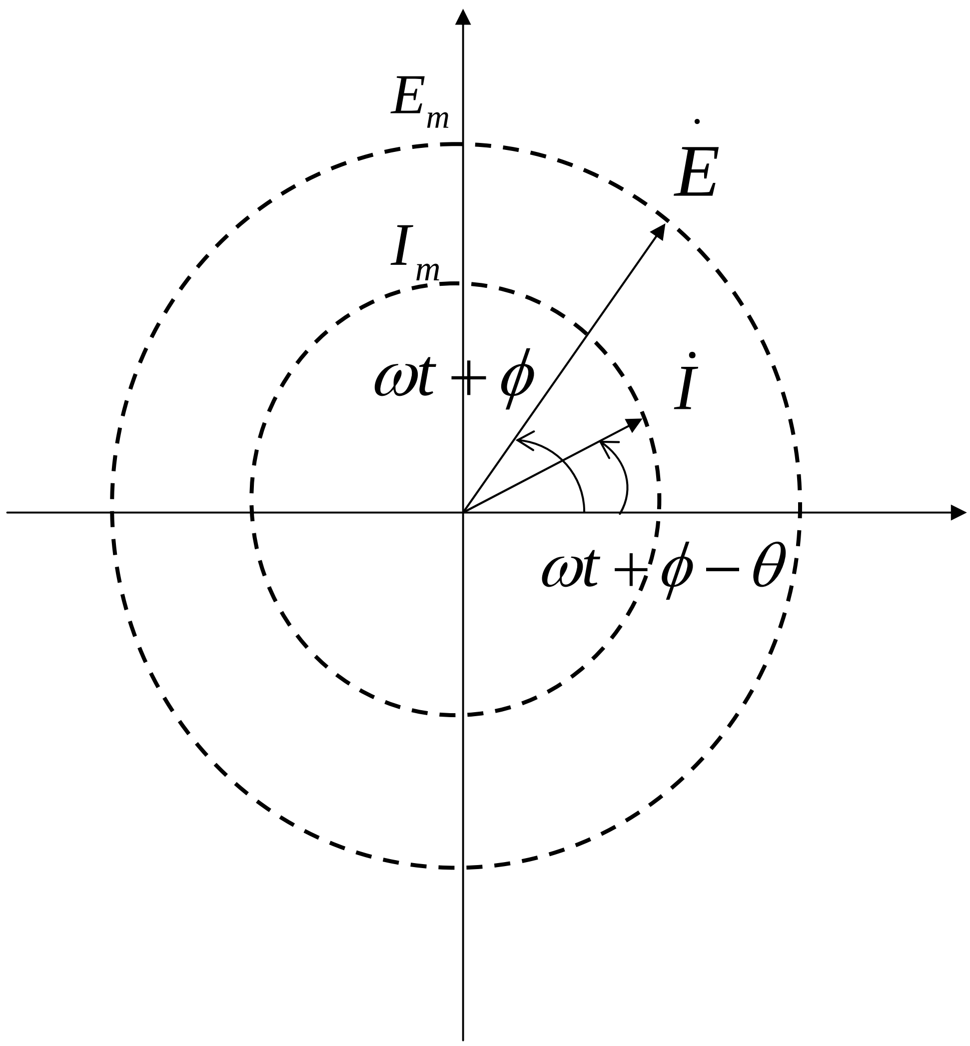
インダクタやキャパシタは $\theta = \pm\pi/2$

$\cos\theta = 0$

2.4.2　複素電圧・電流法による電力の取扱い

$$\dot{E} = E_m e^{j(\omega t+\phi)}$$

$$\dot{I} = I_m e^{j(\omega t+\phi-\theta)}$$



$\dot{I}$ は $\dot{E}$ より位相が θ 遅れている

$$
\overline{\dot{I}} = I_m e^{-j(\omega t + \phi - \theta)}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{P} = \frac{\dot{E}\overline{\dot{I}}}{2} = \frac{E_m e^{j(\omega t + \phi)} \cdot I_m e^{-j(\omega t + \phi - \theta)}}{2} \\
= \frac{1}{2} E_m I_m e^{j\theta} \\
= \frac{1}{2} E_m I_m \cos\theta + j \frac{1}{2} E_m I_m \sin\theta
\end{aligned}
$$

第１項が平均電力を与える.

$$
\begin{aligned}
\dot{P}' &= \frac{\overline{\dot{E}}\dot{I}}{2} \\
&= \frac{E_m e^{-j(\omega t+\phi)} \cdot I_m e^{j(\omega t+\phi-\theta)}}{2} \\
&= \frac{1}{2} E_m I_m e^{-j\theta} \\
&= \frac{1}{2} E_m I_m \cos\theta - j\frac{1}{2} E_m I_m \sin\theta
\end{aligned}
$$

第１項が平均電力を与える.

いずれにしても第１項が平均電力を与える.

$$\dot{P} = P_r + jP_i$$

$\dot{P}$: 複素電力　ボルトアンペア[VA]

P_r : 実効電力　ワット[W]

P_i : 無効電力　バール[var]

2.4.3　整合回路

信号源から最大のエネルギーを
取り出す回路

一般の電圧源内部にインピーダンスを持っている

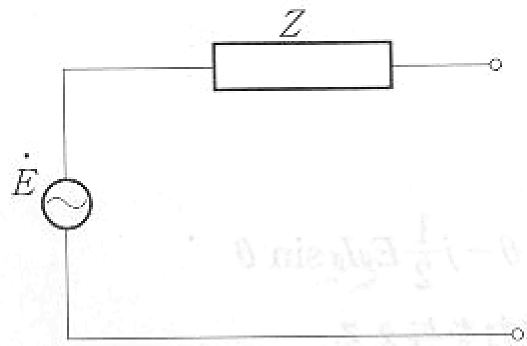


図 2.20　電圧源

内部インピーダンス $Z=R+jX$ とする

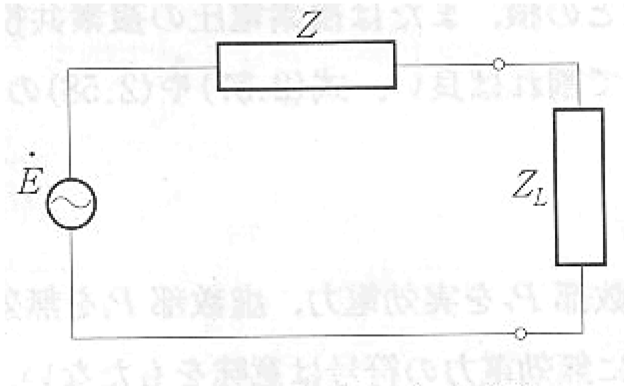


図 2.21　負荷をもつ回路

負荷を $Z_L = R_L + jX_L$ とすると

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z + Z_L}$$

$$\dot{V} = \frac{Z_L}{Z + Z_L}\dot{E}$$

$$P = \frac{1}{2}\dot{V}\overline{\dot{I}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{Z_L}{Z + Z_L}\dot{E} \cdot \frac{\overline{\dot{E}}}{\overline{Z} + \overline{Z}_L}$$

$$= \frac{\left|\dot{E}\right|^2 Z_L}{2\left|Z + Z_L\right|^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{R_L + jX_L}{\left(R + R_L\right)^2 + \left(X + X_L\right)^2}\left|\dot{E}\right|^2$$

$$P_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_L\left|\dot{E}\right|^2}{\left(R + R_L\right)^2 + \left(X + X_L\right)^2}$$

$$-\infty < X_L < +\infty$$

$X_L = -X$ で最大値

$$P_r = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_L \left|\dot{E}\right|^2}{\left(R + R_L\right)^2}$$

$$0 \leq R_L < +\infty$$

$$\frac{dP_r}{dR_L} = \frac{\left|\dot{E}\right|^2}{2\left(R + R_L\right)^4} \left\{\left(R + R_L\right)^2 - 2R_L\left(R + R_L\right)\right\}$$

$$= \frac{\left|\dot{E}\right|^2 \left(R - R_L\right)}{2\left(R + R_L\right)^3}$$

表 2.1　P_rの変化

R_L	……	R	……
$\frac{dP_r}{dR_L}$	+	0	−
P_r	↗	max	↘

$R_L = R$ で P_r が最大

$$P_{r\max} = \frac{\left|\dot{E}\right|^2}{8R}$$

$Z_L = R - jX$ で P_r は最大値を取る

即ち

$Z_L = \bar{Z}$ (内部インピーダンスの複素共役)

の時に最大電力が得られる.

負荷が電源に整合している.

2.5　共振回路

2.5.1　直列共振回路

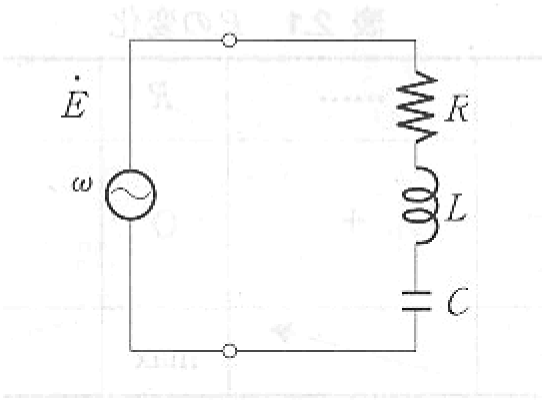


図 2.22

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

インピーダンス Z は

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

で最小となる

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ あるいは } f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\left(\omega = 2\pi f\right)$$

このとき i の振幅が最大(直列共振)

共振角周波数を ω_{r}

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\omega_r L\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{1}{\omega\omega_r LC}\right)}$$

$$= \frac{\dot{E}}{R + j\omega_r L\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)}$$

$$= \frac{\dot{E}}{R + j\omega_r L\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)}$$

$$= \frac{\dot{E}}{R\left\{1 + j\frac{\omega_r L}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega}\right)\right\}}$$

ここで

$$Q=\frac{\omega_r L}{R}\left(=\frac{1}{\omega_r CR}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

Q:直列共振回路のQ値 (quality factor)

$$\bar{\omega}=\frac{\omega}{\omega_r}\ ,\ \dot{I}_r=\frac{\dot{E}}{R}$$

とおくと

$$\frac{\dot{I}}{\dot{I}_r}=\frac{1}{1+jQ\left(\bar{\omega}-\frac{1}{\bar{\omega}}\right)}$$

$$\left|\frac{\dot{I}}{\dot{I}_r}\right|^2=\frac{1}{1+Q^2\left(\bar{\omega}-\frac{1}{\bar{\omega}}\right)^2}$$

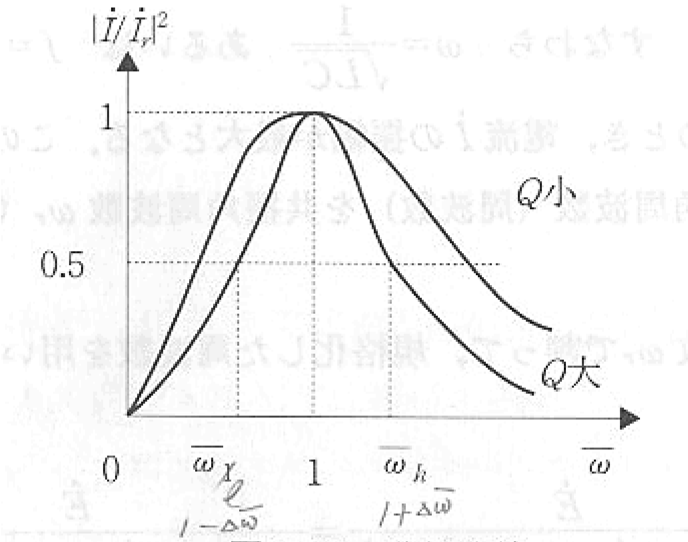


図 2.23　共振曲線

ここが宿題 最悪このまま写す

$$\left|\frac{\dot{I}}{\dot{I}_r}\right|^2 = \frac{1}{2}$$ のときの

$\bar{\omega}_h - \bar{\omega}_l$ を半値幅

$$\bar{\omega}_h - \bar{\omega}_l = \frac{1}{Q}$$

Q : 共振の鋭さの指標

$$\left[\ \bar{\omega}_h - \bar{\omega}_l = \frac{1}{Q}\text{の証明}\ \right]$$

$$\left|\frac{\dot{I}}{\dot{I}_r}\right|^2 = \frac{1}{1+Q^2\left(\bar{\omega}-\dfrac{1}{\bar{\omega}}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$Q^2\left(\bar{\omega}-\frac{1}{\bar{\omega}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\bar{\omega}-\frac{1}{\bar{\omega}}\right) = \pm\frac{1}{Q}$$

$$x-\frac{1}{x} = \pm a \qquad a = \frac{1}{Q}$$

(1)

$$x-\frac{1}{x}=a,\ \ x^2-1=ax,\ \ \ x^2-ax-1=0$$

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2},\ x_h=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

(2)

$$x-\frac{1}{x}=-a,\ \ x^2-1=-ax,\ \ \ x^2+ax-1=0$$

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4}}{2},\ x_l=\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

$$x_h - x_l$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} - \frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

$$= a$$

$$= \frac{1}{Q}$$

$$\therefore \quad \bar{\omega}_h - \bar{\omega}_l = \frac{1}{Q} \qquad [QED]$$

$$\dot{V}_L = j\omega_r L \cdot \dot{I}_r$$

$$= j\frac{\omega_r L}{R}\dot{E}$$

$$= jQ\dot{E}$$

$$\dot{V}_c = \frac{\dot{I}_r}{j\omega_r C}$$

$$= \frac{\dot{E}/R}{j\omega_r C}$$

$$= \frac{\dot{E}}{j\omega_r RC} = -jQ\dot{E}$$

共振時には

L と C には $\dot{E}$ の Q 倍の電圧がかかる.

2.5.2　並列共振回路

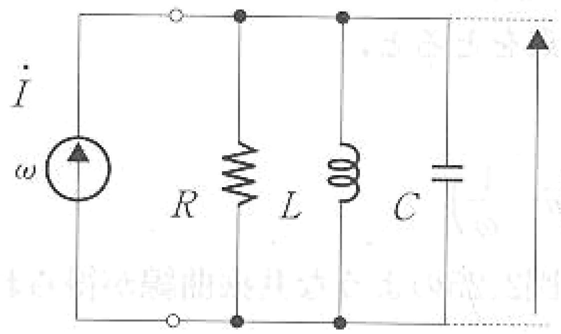


図 2.24

アドミタンス Y は

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

$$= G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\dot{I} = Y\dot{V}$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{I}}{G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

Y が最小となるのは

$$\omega C = \frac{1}{\omega L}\ ,\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\ ,\ f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

この時 $\dot{V}$ の振幅が最大となる（並列共振）

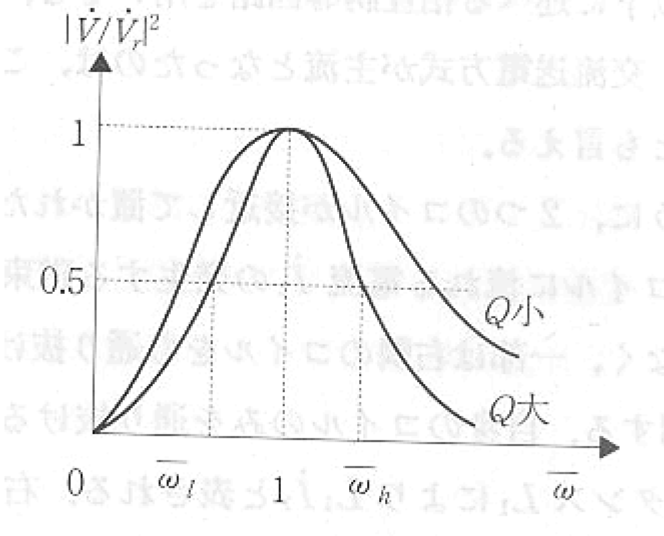


図 2.25　共振曲線

$$\dot{I}_L = -jQ\dot{I}$$

$$\dot{I}_c = jQ\dot{I}$$

共振時には L と C に $\dot{I}$ の Q倍

の電流が流れる

2.6　相互誘導回路

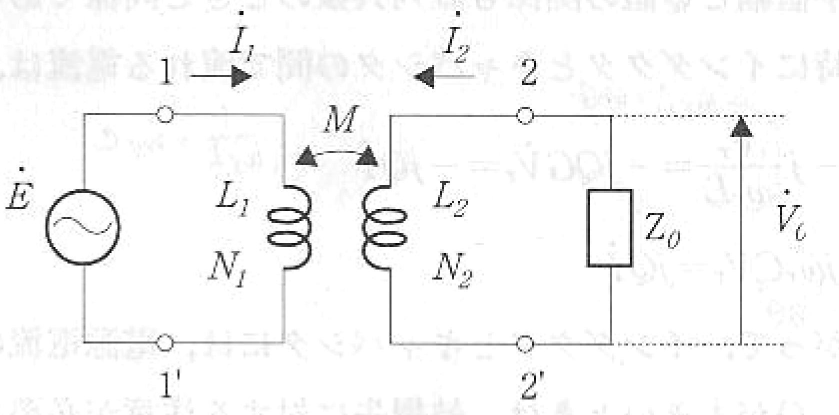


図 2.26

L_1, L_2 :自 己インダクタンス

M:相 互インダクタンス

$$\dot{E} - j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 = 0$$

$$\dot{V}_0 - j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 = 0$$

$$\dot{E} = j\omega \left(L_1 - M \right) \dot{I}_1 + j\omega M \left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 \right)$$

$$\dot{V}_0 = j\omega \left(L_2 - M \right) \dot{I}_2 + j\omega M \left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 \right)$$

$$\dot{E} = j\omega\left(L_1 - M\right)\dot{I}_1 + j\omega M\left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right)$$

$$\dot{V}_0 = j\omega\left(L_2 - M\right)\dot{I}_2 + j\omega M\left(\dot{I}_1 + \dot{I}_2\right)$$

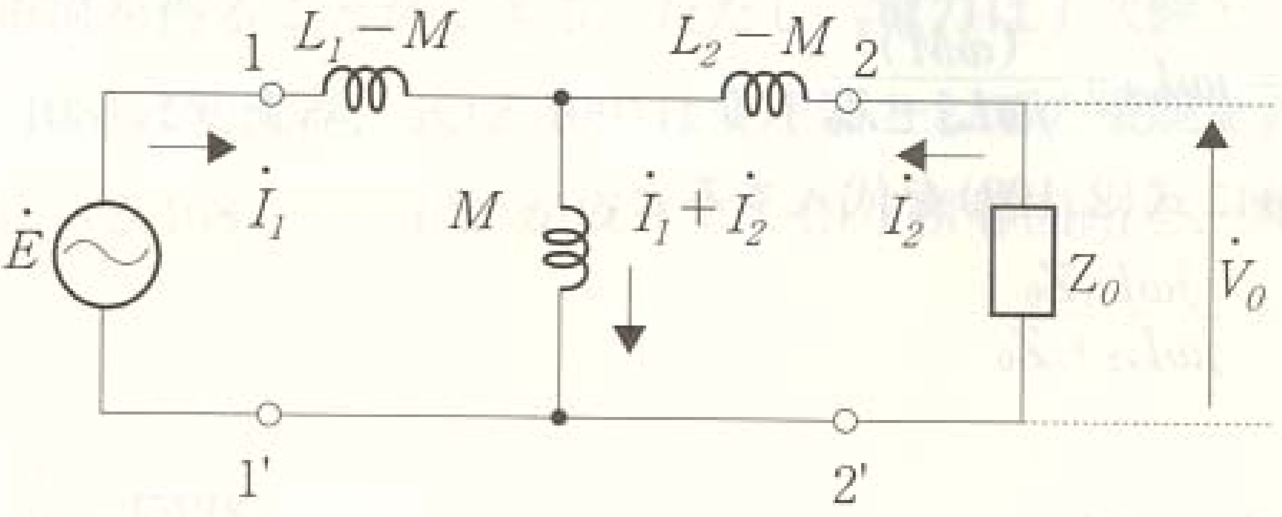


図 2.27

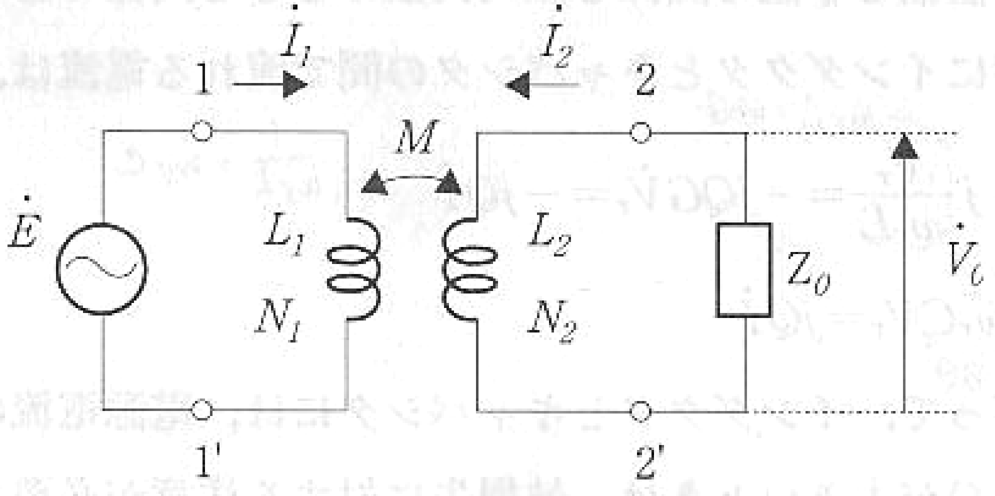


図 2.26

理想変成器では

$$\dot{I}_2 = -\frac{N_1}{N_2} \cdot \dot{I}_1$$

$$\dot{V}_0 = \frac{N_2}{N_1} \cdot \dot{E}$$

N_1, N_2: コイルの巻数

2. 7 ブリッジ回路

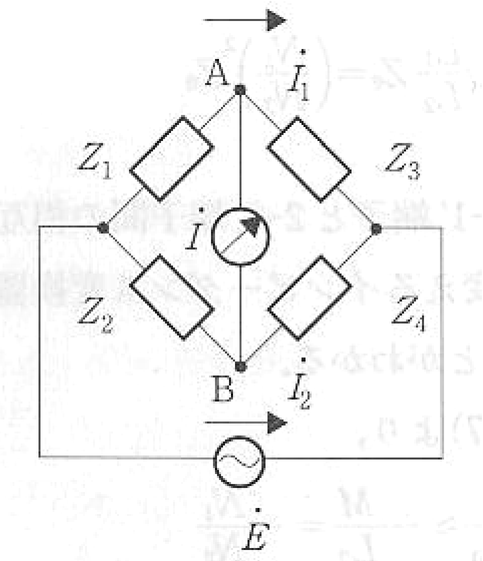


図 2.28

$\dot{I} = 0$ のとき

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_1 + Z_3}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{Z_2 + Z_4}$$

点Aと点Bの電位

$$\dot{V}_A = \dot{I}_1 Z_3 = \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2}\dot{E}$$

$$\dot{V}_B = \dot{I}_2 Z_4 = \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4}\dot{E}$$

$\dot{V}_A = \dot{V}_B$ より

$$\frac{Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{Z_4}{Z_2 + Z_4}$$

$$Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4 = Z_1 Z_4 + Z_3 Z_4$$

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$$

$$Z_3 = \frac{Z_1 Z_4}{Z_2} \left(\text{未知インピーダンス}\right)$$

ホイートストンブリッジ

(Wheatstone bridge)

2.8 フィルタ

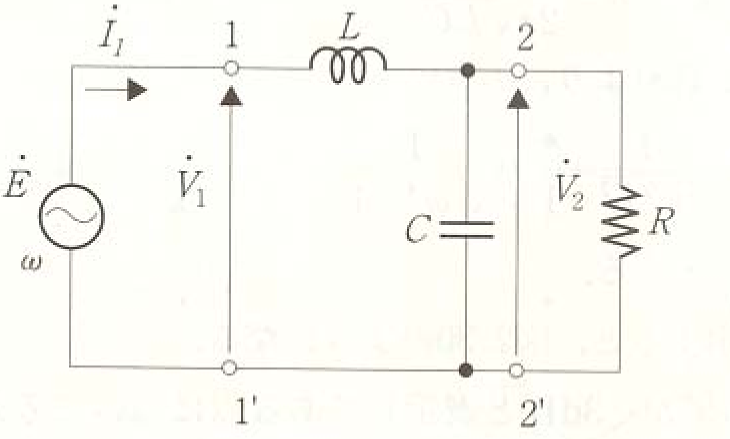


図 2.29 ローパスフィルタ（低域通過フィルタ）

端子1-1'から右を見たときのインピーダンスZ

$$Z = j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}$$

$$= j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR}$$

$$= \frac{R\left(1 - \omega^2 CL\right) + j\omega L}{1 + j\omega CR}$$

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 - j\omega L \dot{I}_1$$

$$= \dot{V}_1 - j\omega L \frac{\dot{V}_1}{Z}$$

$$= \dot{V}_1 \left\{ 1 - \frac{j\omega L \left(1 + j\omega CR\right)}{R\left(1 - \omega^2 CL\right) + j\omega L} \right\}$$

$$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{R}{R\left(1 - \omega^2 CL\right) + j\omega L}$$

$$\left| \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} \right|^2 = \frac{R^2}{\omega^4 R^2 C^2 L^2 + \omega^2 \left(L^2 - 2R^2 CL\right) + R^2}$$

分母の ω の２次の項が０となるようにする

$$L^2 - 2R^2CL = 0$$

$$L = 2R^2C$$

$$\frac{L}{C} = 2R^2 = \frac{\sqrt{2}R}{\omega_c} \cdot \sqrt{2}R\omega_c$$

$$L = \frac{\sqrt{2}R}{\omega_c}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}R\omega_c}$$

$$LC = \frac{1}{{\omega_c}^2}, \quad \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\left|\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right| = \sqrt{\frac{R^2}{\omega^4 R^2 C^2 L^2 + R^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\omega^4 C^2 L^2 + 1}}$$

$\overline{\omega} = \dfrac{\omega}{\omega_c}$ とすると

$$\left|\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{\overline{\omega}^4 + 1}}$$

$$G = 10\log_{10}\left|\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right|^2 = 20\log_{10}\left|\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right|$$

$\left|\dfrac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right|^2 = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\left|\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707\left(\overline{\omega} = 1\right)$$

$$G \cong -3(\mathrm{dB})$$

$\omega = \omega_c$ の時，出力のエネルギは半分になる

ω_c: しゃ断周波数

（ω_c 以上の周波数は通過しない）

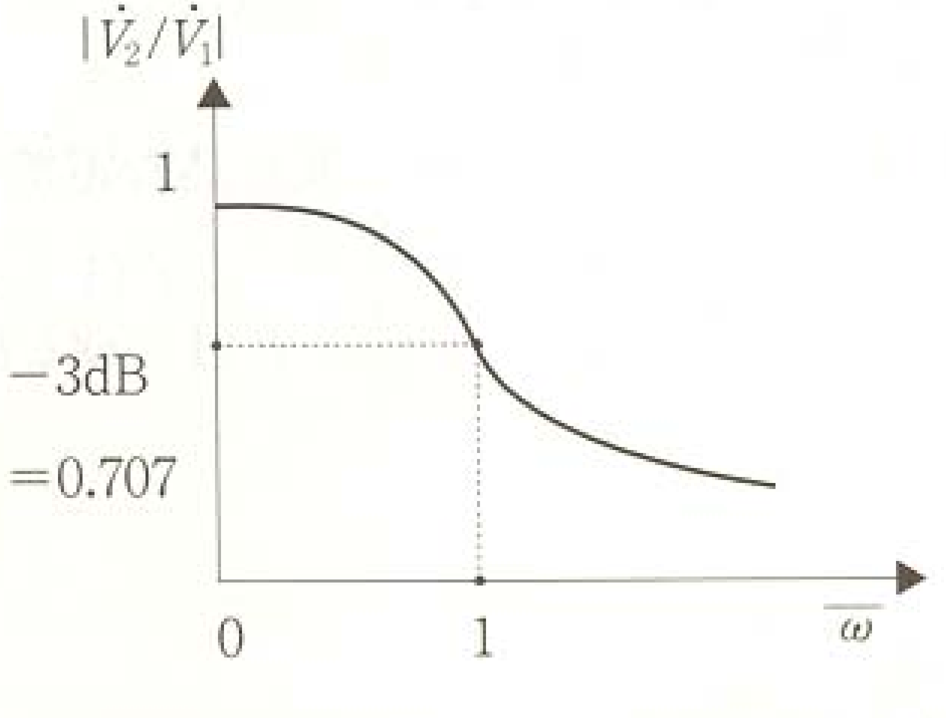


図 2.30　ローパスフィルタ（低域通過フィルタ）

ローパスフィルタ（低域通過フィルタ）

周波数の低い成分を通過させる

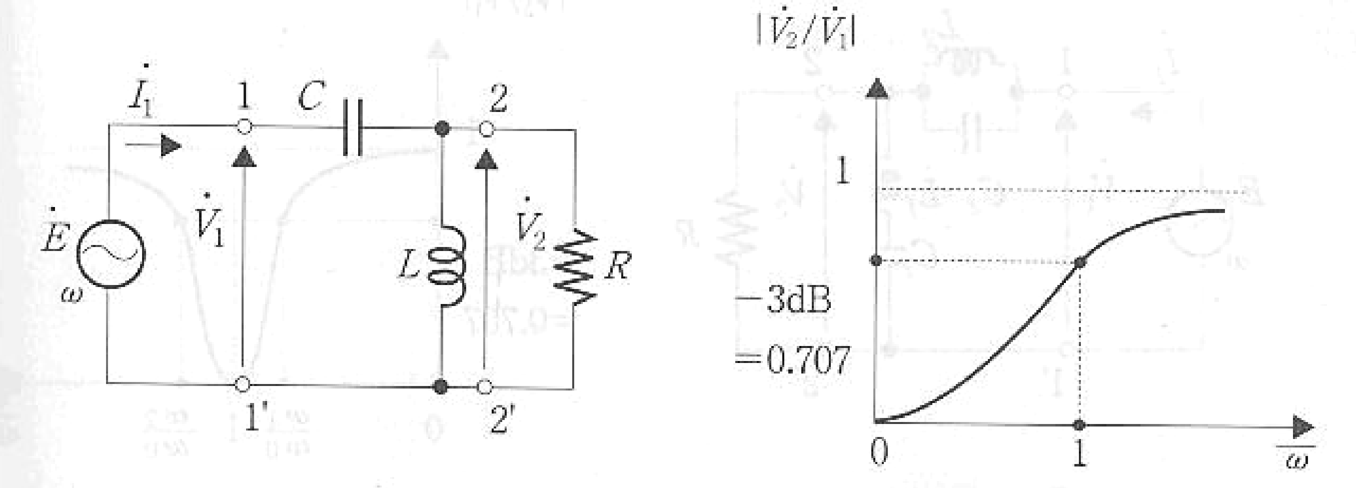
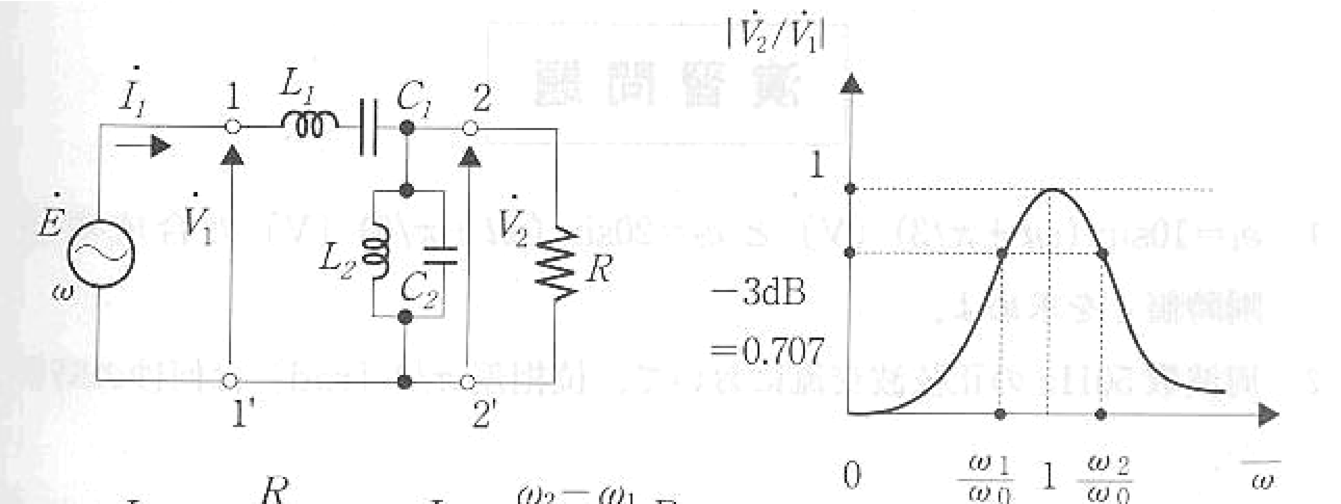


図 2.31　ハイパスフィルタ（高域通過フィルタ）

ハイパスフィルタ（高域通過フィルタ）
周波数の高い成分を通過させる

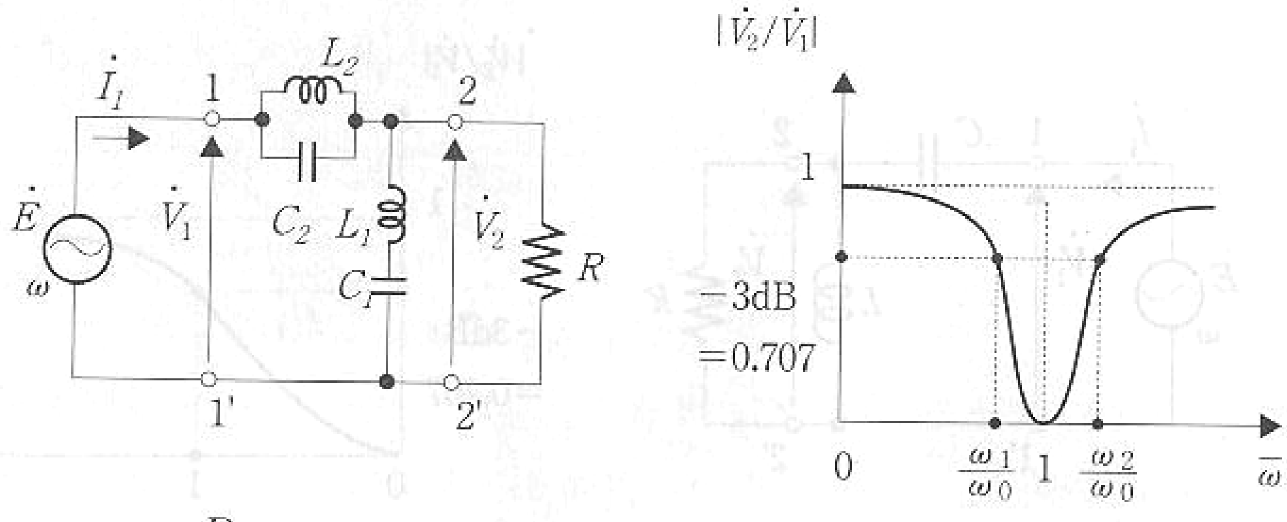


$$L_1=\frac{R}{\omega_2-\omega_1},\qquad L_2=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1\omega_2}R,$$

$$C_1=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1\omega_2 R},\qquad C_2=\frac{1}{(\omega_2-\omega_1)R}$$

図 2.32　バンドパスフィルタ（帯域通過フィルタ）

バンドパスフィルタ（帯域通過フィルタ）
ある帯域の周波数範囲のみを通過させる



$$L_1=\frac{R}{\omega_2-\omega_1},\quad L_2=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1\omega_2}R,$$

$$C_1=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1\omega_2R},\quad C_2=\frac{1}{(\omega_2-\omega_1)R}$$

図 2.33 バンドエリミネイトフィルタ（帯域阻止フィルタ）

バンドエリミネイトフィルタ（帯域阻止フィルタ）
ある帯域の周波数範囲を阻止する