数理計画

2019 年 1 月 21 日

1　10/29

2　数理計画

最適化すべき問題を数学モデルに定式化し、それを解く

目的

1. 様々な問題を数学モデルに定式化できること

2. シンプレックス法を用いて、線形計画問題を解けること

※この二つをテストで確かめられる

※線形計画も線形って何？テストに出るよ

3　1 章 数理計画モデル

目的

1. 数理計画法の考え方を知る

2. 数理計画問題を定式化する

3.1　線形計画モデル

3.1.1　生産計画問題

たぶん、教科書に書いてある 4 種類の原料 A,B,C,D を用いるやつ。それぞれ 80,50,100,70 のやつ

目的：最大の利益をあげたい↓

$$70x_1 + 120x_2 + 30x_3$$

これを目的関数という

この利益を最大にしたい

目的関数：$70x_1 + 120x_2 + 30x_3 \rightarrow Max$

核原料には使用量に制約がある

原料 A は 80 単位まで使える

$$5x_1 + 6x_3 \leqq 80$$

同様に

$$2x_2 + 8x_3 \leqq 50 \tag{1}$$
$$70x_1 + 15x_3 \leqq 100 \tag{2}$$
$$3x_1 + 11x_2 \leqq 70 \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

定式化

目的関数：

$$70x_1+120x_2+30x_3 \rightarrow Max$$

制約条件：

$$5x_1+6x_3 \leqq 80 \tag{5}$$
$$2x_2+8x_3 \leqq 50 \tag{6}$$
$$70x_1+15x_3 \leqq 100 \tag{7}$$
$$3x_1+11x_2 \leqq 70 \tag{8}$$
$$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0 \rightarrow \text{非負条件} \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

生産計画問題は

制約条件のもとで、目的関数が最大となる変数 x_1, x_2, x_3 の値を求める問題に定式化できる

線形計画問題とは・・・

制約条件が 1 次の等式や不等式で表され、かつ、目的関数が 1 次関数である問題のことである

3.1.2 多期間計画問題

t 月における製品 $i=1,2$ の生産量を x_{it} とし、t 月から翌月に持ち越す在庫量を y_{it} とする

コストを最小化したい!

3 ヶ月間の総コストを考える

目的関数：

$$75(x_{11}+x_{12}+x_{13})+50(x_{21}+x_{22}+x_{23}) \rightarrow \text{生産コスト} \tag{11}$$
$$+8(y_{11}+y_{12})+7(y_{21}+y_{22}) \rightarrow \text{在庫コスト} \tag{12}$$
$$\rightarrow \text{最小} \tag{13}$$

制約条件

原料の利用可能量 (上限) A：

1 月：$2x_{11}+7x_{21} \leqq 920$

2 月：$2x_{12}+7x_{22} \leqq 750$

3 月：$2x_{13}+7x_{23} \leqq 500$

B：

1 月；$5x_{11}+3x_{12} \leqq 790$

2 月：$5x_{12}+3x_{22} \leqq 600$

3 月：$5x_{13}+3x_{23} \leqq 480$

(実際のテストの時には A とか B とか 1 月とか書かなくていい)

出荷量に関する制約

I：

1 月：$x_{11}-y_{11}=30$

2 月：$x_{12}+y_{11}-y_{12}=60$ 前の在庫もたす

3 月：$x_{13}+y_{12}=80$ 在庫いらない

II：

1 月：$x_{21}-y_{21}=20$

2 月：$x_{22}+y_{21}-y_{22}=50$

3 月：$x_{23}-y_{22}$

非負条件は

x_{it}≧ $0, i = 1, 2, t = 1, 2, 3$

y_{it}≧0 $, i = 1, 2, t = 1, 2$

3.1.3　輸送計画問題

工場 $A_i(i = 1, 2, 3)$ から取引先 $B_j(j = 1, 2, 3)$ への輸送量を x_{ij} で表す

輸送コスト

目的関数：

$$4_x11 + 7_x12 + 12x_{13} + 11x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23}\text{→最小} \tag{14}$$

制約条件：

生産量

A_1：$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$

A_2：$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80$

注文に関数制約

B_1：$x_{11} + x_{21} = 70$

B_2： $x_{12} + x_{22} = 40$

B_3： $x_{13} + x_{23} = 60$

非負条件

x_{ij}≧ $0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3$

4　11/5

5　ネットワークモデル

グラフ；いくつかの点とそれらを結ぶ矢印からなる

いくつかの点→節点 (ノード)、結ぶ矢印→枝 (アーク)

有向グラフ：枝に向きがある

無向グラフ：枝に向きがない

節点 i から j への枝を (i, j) で表す

例→教科書

節点 $V = \{1, 2, 3, 4\}$ →ここは絶対中括弧

枝全体の集合

$E = (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 2)$

グラフ $G = (V, E)$

で表す

節点 1 から節点 4 への路 (パス)

$P = (1, 2, 4), (1, 3, 4), (1, 3, 2, 4)$

路 $P = (1, 2, 4)$ への長さ

枝 (i, j) を通るかどうかを変数にとる

$x =$

$$1 \begin{cases} 0 & \text{(i,j) を通る} \\ & \text{(i,j) を通らない} \\ & \end{cases} \tag{15}$$

(16)

(17)

→ 0-1 条件目的関数→総所要時間

$$\sum_{(i,j)\in E} a_{ij}x_{ij} = 5x_{AB}+4x_{AC}+2x_{BC}+4x_{BD}+7x_{BE}+2x_{CB}+6x_{CD}+8x_{CF}+5x_{DE}+3x_{DF}+x_{EF}+3x_{EG}+2x_{FE}+2x_{FG}\text{→最小}$$

制約条件

A → $-x_{AB} - x_{AC} = -1$

B → $x_{AB} + x_{CB} - x_{BC} - x_{BD} - x_{BE} = 0$

C → $x_{AC} + x_{BC} - x_{CB} - x_{CD} - x_{CF} = 0$

D →

E

F

G

5.1 最大流問題

教科書みてね

定式化

枝 (i,j) の輸送量を x_{ij} とおく

各枝の容量を u_{ij} で表す

際流量 (輸送できる最大値) を f とおく

目的関数：f →最大

制約条件：→教科書

容量制約条件

$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}, (i,j) \in E$

5.2 資源配分問題

定式化

各科目の勉強時間を t_1, t_2, t_3 時間とおく→何を何でおいたかは必ず書く

目的関数：$h_1(t_1) + h_2(t_2) + h_3(t_3)$ →最大

制約関数：

$$t_1 + t_2 + t_3 = T t_i \geqq 0, i = 1, 2, 3 \tag{18}$$

5.3 ポートフォリオ選択問題

各株式への投資額を x_1, x_2, x_3 円とする

1 ヶ月後の予想株価を q_1, q_2, q_3 円とおく

各株式に何口投資したか

利益

$$z=W-w=\frac{x_1}{P_1}q_1+\frac{x_2}{P_2}q_2+\frac{x_3}{P_3}q_3-(x_1+x_2+x_3)=R_1x_1+R_2x_2+R_3x_3R_i=\frac{q_i-P_i}{P_i}\text{とおく} \quad (19)$$

これを収益率という

6　11/19

6.1　交通流割り当て問題

(教科書参照) 図のような道路網を考える。道路管理者が道路網の効率利用の点から交通流を調整する時、どのように A から D へ誘導するのがよいか
道路 i を通る車の台数を x_i とおく
道路 i を通過した車の総所要時間は $x_i f_i(x_i)$ となるので
A → D 全体で

$$\sum_{i=1}^{5} x_i f_i(x_i)$$

かかる
目的関数:$\sum_{i=1}^{5} x_i f_i(x_i)$ →最大
制約条件：A から出発する台数を F だいとする
A:$-x_1-x_2=-F$
B:$x_1-x_2-x_4=0$
C:$x_2+x_3-x_5=0$
D:$x_4+x_5=F$
$x_i \geqq 0, i=1,2,3$ 非負条件

道路管理者視点→システム最適
ドライバー視点→ユーザ最適

7　組み合わせ計画モデル

線形計画：量は連続値 (実数)
組み合わせ計画：量は離散値 (整数)
ベクトルと行列の導入
目的関数：$c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ →最大
変数

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

とおくと
目的関数：

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \rightarrow \text{最大}$$

制約条件：教科書見て

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

制約条件

$$A\boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{b}$$

ベクトルに不等号はほんとはダメ。この数理計画だけ
数理計画方では不等号は各要素間の大小関数を表す
皮膚条件は

$$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$$

7.1 ナップサック問題

各品物 i をナップサックに入れるかどうかを変数 x_i で表す

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{ナップサックに入れる} \quad (20) \\ 0 & \text{入れない} \quad (21) \end{cases}$$

$$maxmize : \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$subject : \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqq b & (22) \\ x_i = 0, 1 \qquad \text{i=1,2,..,n} & (23) \end{cases}$$

これらを 0-1 問題と呼ばれる

8 数理計画問題

目的関数：$f(\boldsymbol{x})$ →最大 or 最小
制約条件：$\boldsymbol{x} \in S$
$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$
$f : \boldsymbol{R}^n$ 上で定義された実数値関数→実数値なのは大小関係が決まるから
$\boldsymbol{x} \in S$ を満たす $\boldsymbol{x}$ を実行可能解という
↓
目的関数を最大 (最小) にする x を最適解という

9 線形計画

目標：シンプレックス法を用いて問題を解ける

9.1 線形計画問題

任意の線形計画問題は標準形に変換できる
標準形
目的関数：$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ →最小

制約条件：$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$
この形を**標準形**という

9.1.1　例題

$$\text{目標関数：}-2x_1+5x_2 \rightarrow \text{最大}$$

$$\text{制約条件：}\begin{cases} 4x_1-6x_2=30 & (24)\\ 2x_1+8x_2 \leqq 50 & (25)\\ 7x_1+5x_2 \geqq 10 & (26)\\ x_1 \geqq 0, x_2\text{は符号制約なし} & (27)\end{cases}$$

この問題を標準形にする

1. 最小問題にする
   -1 をかける

$$2x_1-5x_2 \rightarrow \text{最小}$$

2. 符号制約なしを非負条件にする非負変数 $x_2' \geqq 0, x_2" \geqq 0$ を代入する

$$x_2=x_2'-x_2", x_2' \geqq 0, x_2" \geqq 0$$

   とおける
   これらをつかって

$$\text{目的関数：}2x_1-5x_2'+5x_2" \rightarrow \text{最小}$$

$$\text{制約条件}\begin{cases} 4x_1-6x_2'+6x_2"=30 & (28)\\ 2x_1+8x_2'-8x_2" \leqq 50 & (29)\\ 7x_1+5x_2'-5x_2" \geqq 10 & (30)\\ x_1 \geqq 0, x_2' \geqq 0, x_2" \geqq 0 & (31)\end{cases}$$

   $x_2' \rightarrow x_2, x_2" \rightarrow x_3$ に置き換える

3. 不等式を等式にする新しい変数 $x_4 \geqq 0, x_5 \geqq 0$ を導入する (スラック変数)

$$2x_1+8x_2-8x_3 \leqq 50$$

   $\rightarrow$

$$2x_1+8x_2-8x_3+x_4=50$$

   これと

$$7x_1+5x_2-5x_3 \geqq 10$$

   $\rightarrow$

$$7x_1+5x_2-5x_3-x_5=10$$

よって、標準形は

$$\text{目的関数：}2x_1-5x_2+5x_3 \rightarrow \text{最小}$$

$$\text{制約条件}\begin{cases} 4x_1-6x_2'+6x_2"=30 & (32)\\ 2x_1+8x_2-8x_3+x_4=50 & (33)\\ 7x_1+5x_2-5x_3-x_5=10 & (34)\\ x_i \geqq 0 \qquad \text{i=1,2,3,4,5} & (35)\end{cases}$$

10　12/17

前回の続き

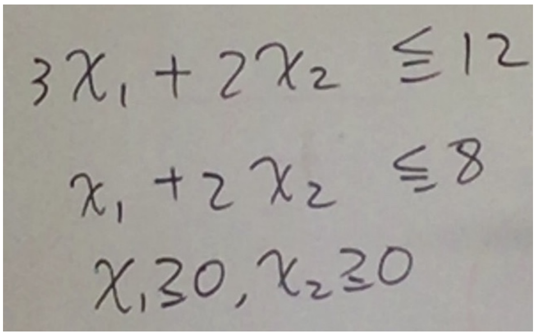
10.1　基底解と最適解

＊＊＊＊＊基底解の意味はわかるようになっとくこと。テスト出るかも

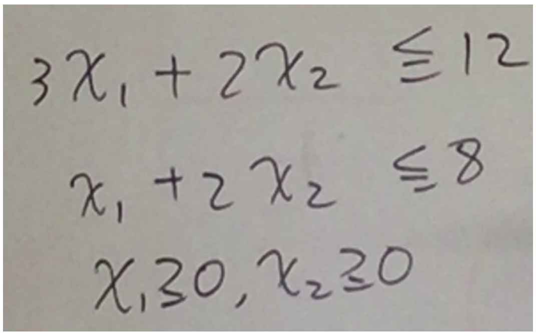
10.1.1　例題

目的関数：$-x_1 - x_2$→最小

制約条件：



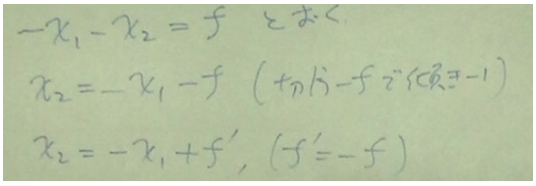
1. 制約条件を図示する

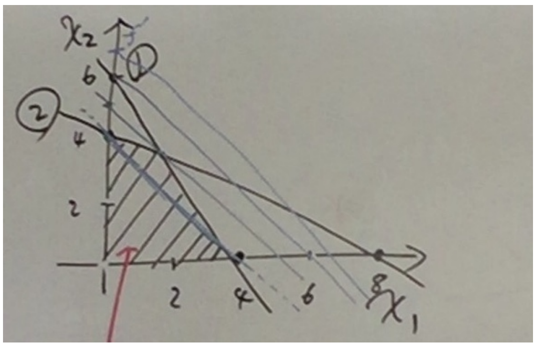


   実行可能領域＝制約条件を満たす解の範囲

2. 目的関数の”等高線”を引く

   ここでいう等高線とは同じ値になるところという意味





3. 最小化→ f を小さくする=f’ を大きくする

   1 と 2 の交点を通るとき最大

実行可能領域の凸多角形の頂点のうち、少なくとも 1 点は最適解になっている。
↓
n 変数の場合も、空間 $\mathbf{R}^n$ の凸面体の頂点が必ず最適解のになっている

頂点だけ調べればいい｜｜
頂点の数は、n が大きくなると急激に増加する

10.2　シンプレックス法

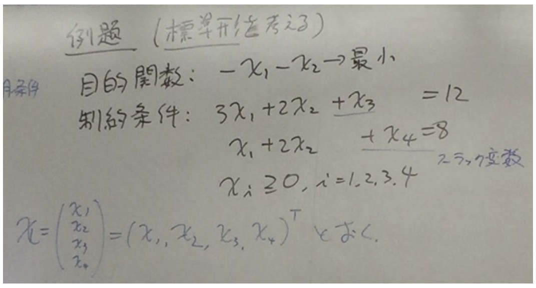
n が大きくなると関数ではしんどい

シンプレックス法

実行可能領域の 1 つの頂点から初めて、目的関数の値が必ず減少するように、隣接する頂点に移動すれば、最終的に最適化に到達する。

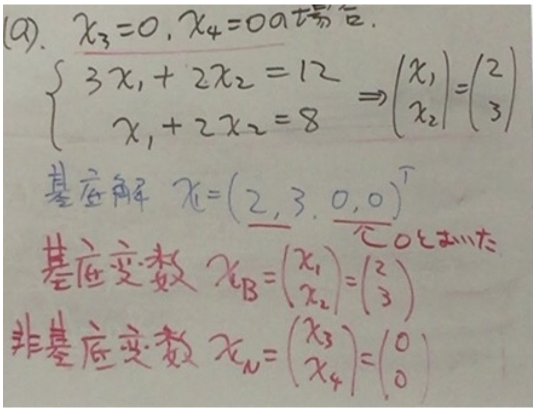
10.2.1　例題 (標準形を考える

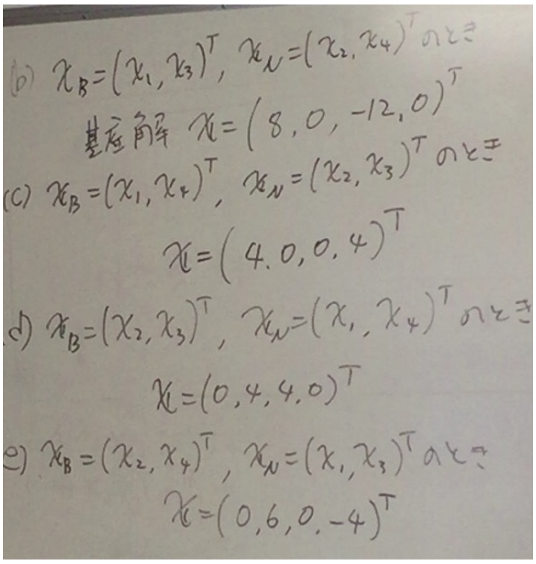
目的関数：$-x_1 - x_2$→最小 制約関数：

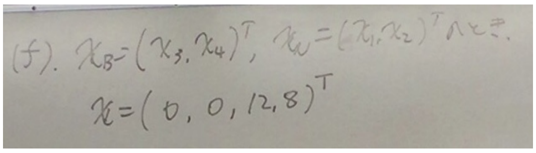


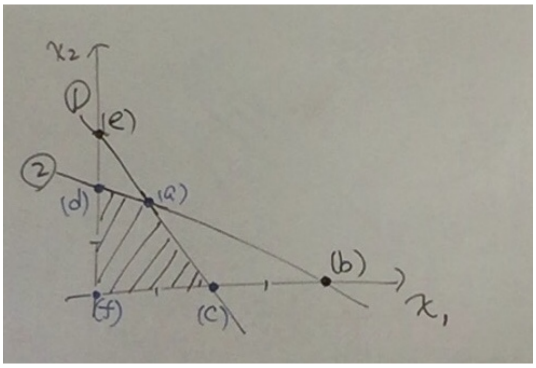
変数の数は 4 つに対して、式が 2 つしかないので、普通にとくと解が出ない
等式の制約条件は 2 つなので、4 変数のうち 2 変数を 0 とおけば、残りの変数の値は一意に定まる。これを基底解と呼ぶ。
基底解のうち、非負条件 $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ を満たすものを、実行可能基底解とよぶ

1. **初期条件**　頂点 (実行可能基底) を 1 つ求める。(a)〜(f) が基底解







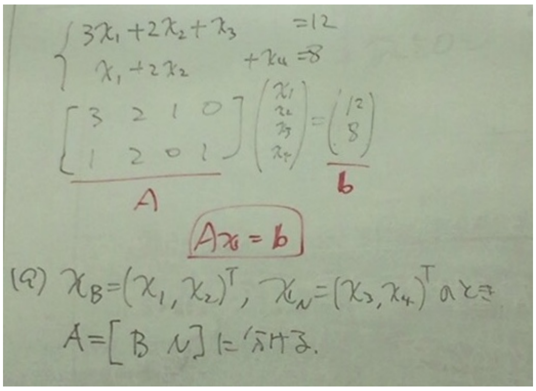


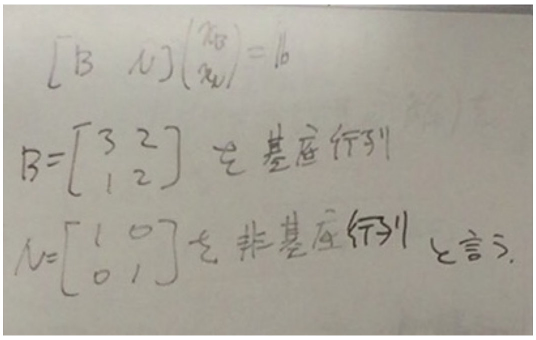
知りたいのは実行可能基底解

実行可能基底解は $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ より、(a),(c),(d),(f) となる

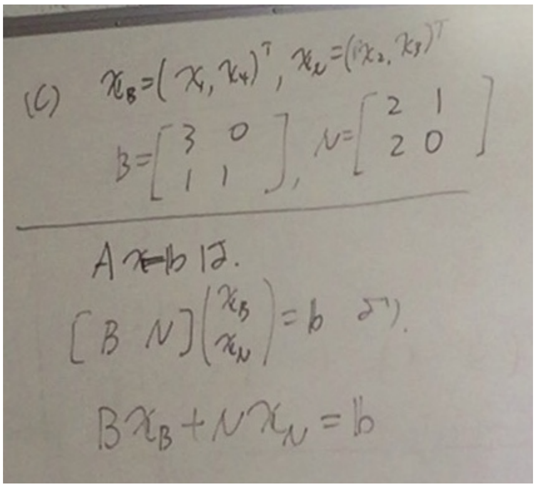
(b) と (e) は基底解だが、実行可能基底解ではない。

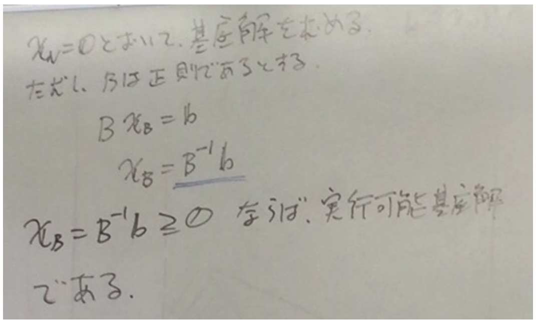
行列とベクトルによる解放





xt

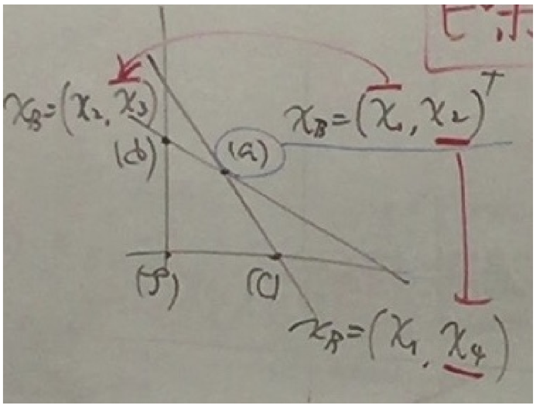




↓

凸多面体の頂点

2. **隣接する頂点に移動する**　基底変数の 1 つと非基底変数の 1 つを交換する



↓

ピボット操作という

ピボット操作を繰り返して、実行可能基底解を次々に調べていくと、最適解にたどり着く

11　1/7

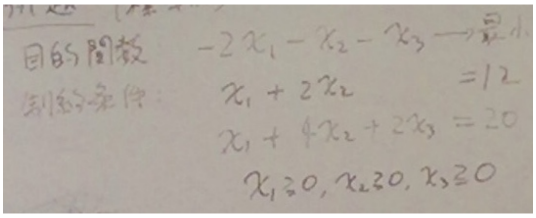
11.1　シンプレックス法の初期化

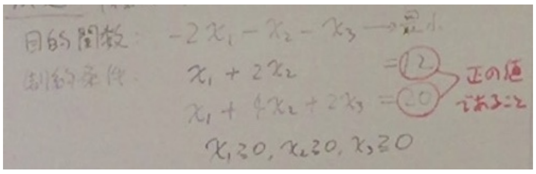
初期化実行可能基底解を見つけるには、どのようにすれば良いか

2 段階法 (2 段階シンプレックス法)

初期実行可能基底解を求めるのに、さらにシンプレックス法を用いる方法

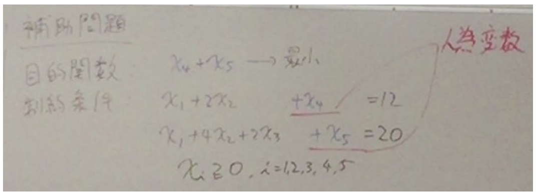
11.1.1　例題





初期実行基底解を求めるために、補助問題を考える

補助問題



************人為変数と前に使ったスラック変数の違い大事！！穴埋めでテストに出る !!

補助問題の最小値が 0 ならば、$x_4 = 0.x_5 = 0$ である。x_1, x_2, x_3 はもとのの問題の制約条件を満たすので、実行可能解を与える

補助問題の最小値が 0 である

↓

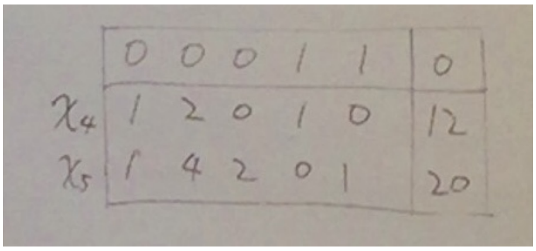
元の問題に実行可能解が存在する

※最小値が 0 出ない場合、元の問題に最適解が存在しない

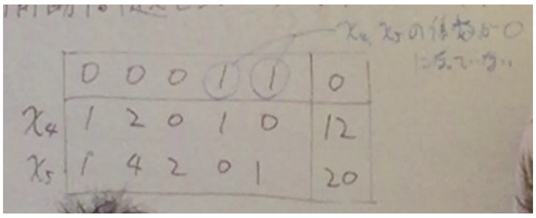
第一段階　：補助問題をシンプレックス法で解き、元の問題の実行可能基底解をもとめる

第二段階　：元の問題をシンプレックス法で解く

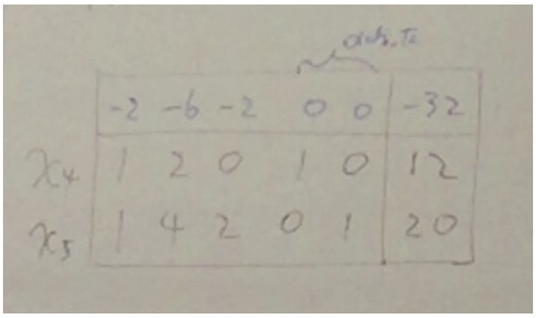
補助問題をシンプレックス・タブローでとく。一番上の行が目的関数となるよー



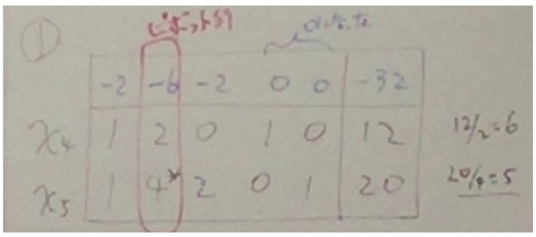
基底変数として、人為変数の x_4, x_5 を選ぶ。しかし、スラック変数と違って、上の段の x_4, x_5 の係数が 0 になっていない



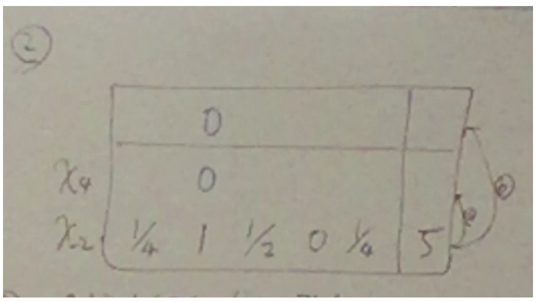
→修正が必要
基底変数 x_4, x_5 の係数が 0 になるように、行の演算をする
・1 行目から 2 行目と 3 行目の和を引くと、1 行目の x_4, x_5 の係数の値が 0 になる

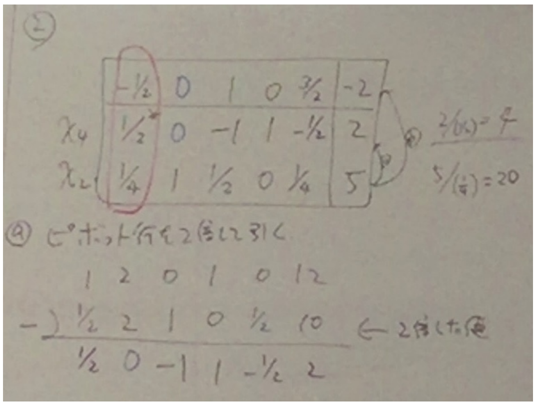


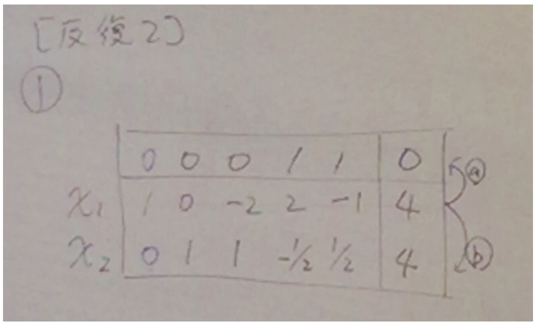
これによりシンプレックス・タブローで解くことができる
1 行目で一番小さいやつをピボット列とする。一番左の値をピボット列でそれぞれ割って、小さい方をピボット値とする



0 になるように 1 行目 2 行目を計算, 1 行目で小さいやつをピポット列





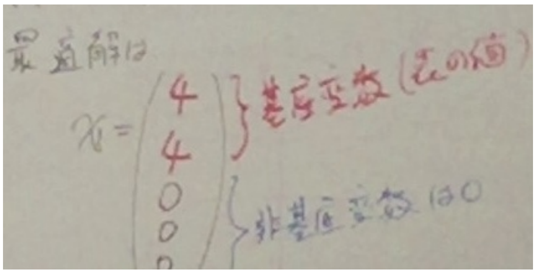


1 行目がすべて 0 以上になったので終了

一番左の x_1, x_2 が基底変数、その他の変数は非基底変数

これらの違いは基底変数は解、非基底変数は 0 となるよって

最適解は

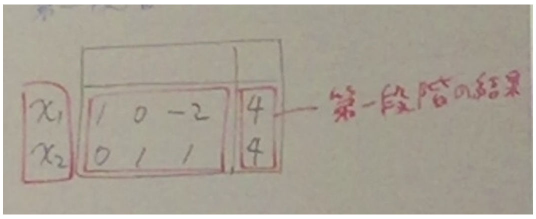


であり、この時の最適値 (目的関数の値) は 0 になる。一番左上のマイナスの値 (今回は 0 なので-0)

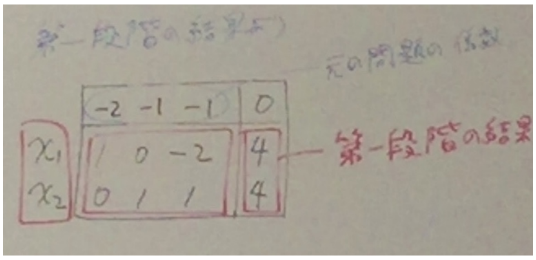
・人為変数 x_4, x_5 の値は 0 であり、最小値 0 となっている。

●第二段階

第一段階の結果より

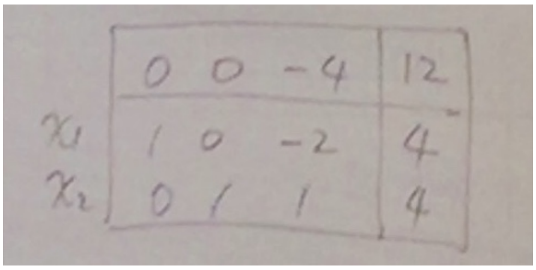


元の目的関数の係数を 1 行目に書く

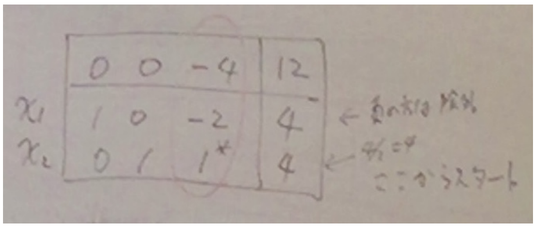


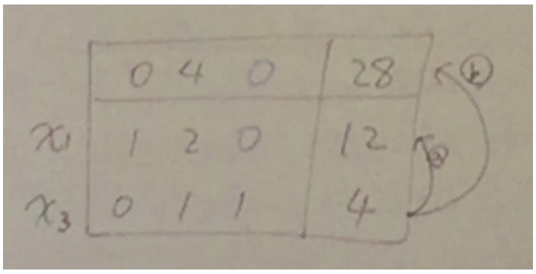
基底変数 x_1, x_2 の係数が 0 になっていないので、行操作を行い 0 にする。

● 2 行目を 2 倍したものと、3 行目の和を 1 行目に足す



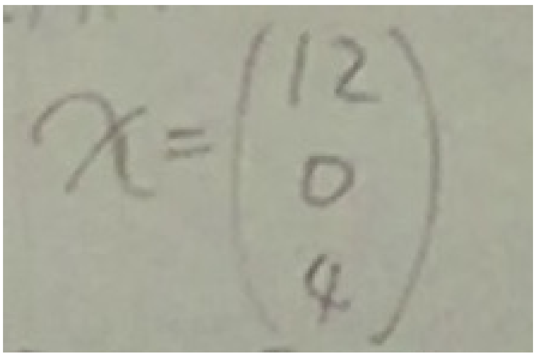
ピボットを求める。負の方は除外するので自動的に 3 列目の 1 がピボット。





1 行目に負の値がないので終了。

最適解は



であり、この時の最適値は、-28 になる (マイナスを忘れないように)

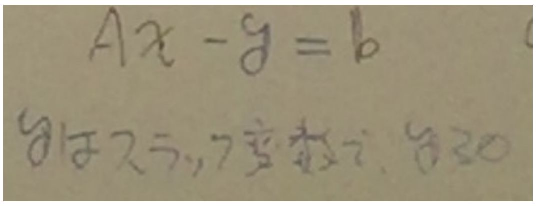
12　1/21

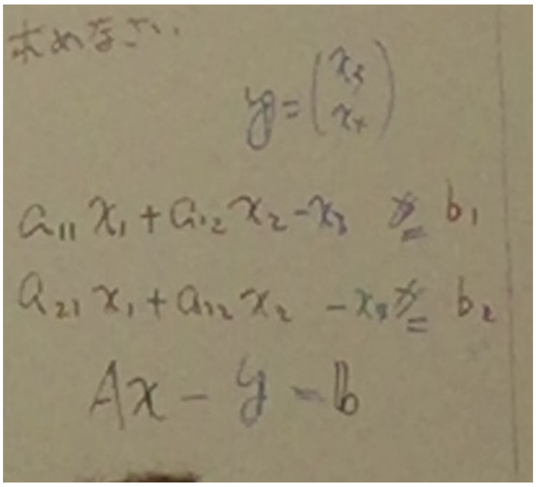
　テスト範囲 2-7 まで
シンプレックスタブローの解き方は覚える
2 段階法は初期値がわからん時に使う
標準形になおすことが大事!!
線形代数の問題がでるよ $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} =$ とか

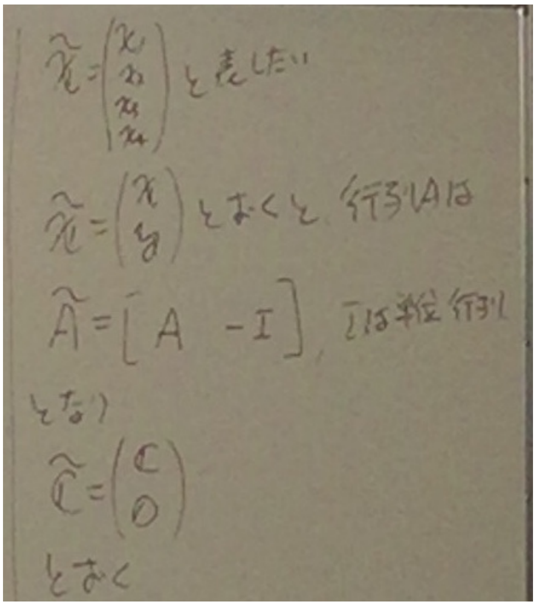
12.1　双対法

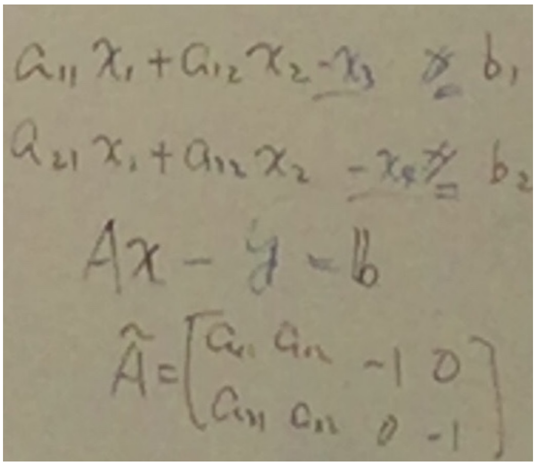
　与えられた任意の線形計画問題 (主問題) に対して、その双対問題と呼ばれる、もう 1 つの線型計画法が存在する。
標準形の問題
目的関数：$\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \rightarrow$最小
制約条件：$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$
これを主問題とすると、双対問題は
目的関数：$\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{w} \rightarrow$最小
制約条件：$A^T\mathbf{w} \leqq \mathbf{C}$
と定義される。(定義なのでこういうもの)
**例題
目的関数：$\mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} \rightarrow$最小
制約条件：$A\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$
この問題の双対問題を求めなさい。

1. 標準形にする

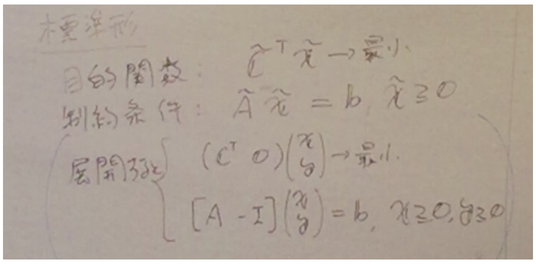




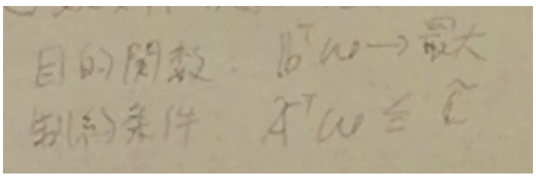




このように変数を置き換えると



2. 双対問題にする



3. 置いたやつをもとにもどす

$$\begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix}^T \omega \leqq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} A^T \\ -I^T \end{bmatrix} \omega$$

$$\begin{bmatrix} A^T \omega \\ -\omega \end{bmatrix} \leqq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A^T \omega \leqq c \\ -\omega \leqq 0 \rightarrow \omega \geqq 0 \ \text{非負条件} \end{cases}$$

これより、双対問題は

目的関数 $b^T \omega \rightarrow$ 最大

制約条件 $A^T \omega \leqq c, \omega \geqq 0$

となる。

12.2 双対問題

”双対問題”を主問題とみなすと、元の”主問題”が双対問題となる。

主問題を (P)

双対問題を (D) で表す

12.3 弱双対定理

(P) と (D) のそれぞれの任意の実行可能解 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{w}$ に対して、常に不等式

$$\mathbf{C}^{\mathbf{T}} \geqq \mathbf{b}^{\mathbf{T}}\mathbf{w}$$

が成り立つ

(証明)

(P) の制約条件 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ と (D) の制約条件 $A\mathbf{w} \leqq \mathbf{C}$ より

$$\begin{aligned} c^T x &\geqq (A^T \omega)^T x \\ &= \omega^T A x \\ &= \omega^T b \\ &= b^T \omega \quad // \end{aligned}$$

→テスト出るかも

- (P) の任意の実行可能解 $\mathbf{x}$ に対して

$$\mathbf{C^T x} \geqq \text{ } (\mathbf{D}) \text{ の最大値}$$

  が成り立つ。また、(D) の任意の実行可能解 $\mathbf{w}$ に対して、

$$(P) \text{ の最小値} \geqq \text{ } \mathbf{b^T w}$$

  が成り立つ。

- (P) と (D) のそれぞれの実行可能解 $\mathbf{x}, \mathbf{w}$ が

$$\mathbf{C^T x} = \mathbf{b^T w}$$

  を満たせば、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{w}$ はそれぞれの最適解である。

- (P) が有界でないならば、(D) は実行可能解を持たない。
  また、(D) が有界でないならば、(P) は実行可能解を持たない

(P) の最小値を求めることが、難しいならば、(D) の実行可能解 $\mathbf{w}$ を 1 つ見つけて、$\mathbf{b^T w}$ を求めることで、(P) の最小値の下限を知ることができる。

12.4　双対定理

(P) または (D) の一方が最適解を持つならば、他方も最適解を持ち、(P) の最小値と (D) の最大値は一致する