― 論理学 ―

講義資料：
http://www.ic.sci.yamaguchi-u.ac.jp/Japanese/

参考書：

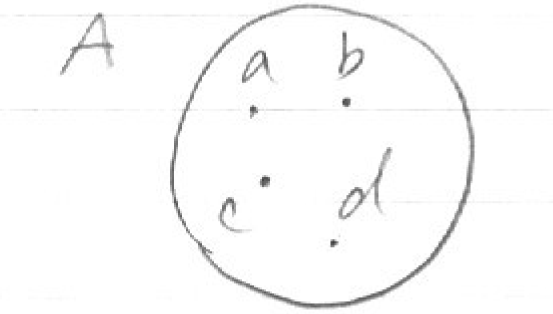
(1) 赤　摂也著；ブール代数，培風館，1973
(2) 細井　勉著；数理科学シリーズ１，論理数学，筑摩書房，1974
(3) 翁長　他著；情報システムの基礎，朝倉書店，1985
(4) 中内　伸光著；ろんりの練習帳，共立出版，2002

1 集合代数

1.1 集合

○ 集合(set)と元(element)

(要素と呼ぶ場合もある)



$A=\{a,b,c,d\}$ （列挙法）

集合Aは元a,b,c,dから成る

$a \in A$: 元aは集合Aに属する

$e \notin A$: 元eは集合Aに属さない

$A = \left\{ x \middle| P(x) \right\}$

条件$P(x)$を満足するxの全体からなる集合

（例）

$\left\{ x \middle| x^2 = 1 \right\} = \{1, -1\}$

$\left\{ x \middle| x\text{は自然数} \right\} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

○ 包含関係(inclusion)

$A \subset B$: 集合Aのあらゆる元がまた
集合Bの元である

i.e. $a \in A \Rightarrow a \in B$

AはBの部分集合(subset)

（注）$A \subset B$は$A = B$の場合も含む

（例）

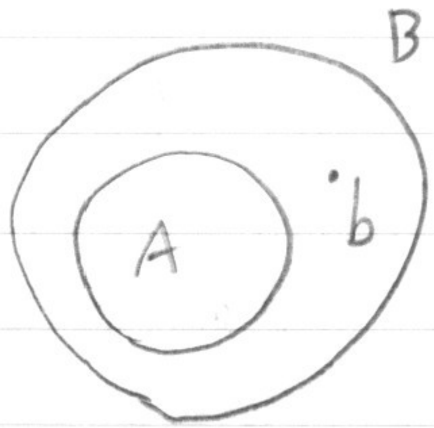
$A \subset A$

$A \subset B$かつ$B \subset A \Rightarrow A = B$

$A \underset{\neq}{\subset} B$:　$A \subset B$でかつAに含まれない元がBの中にある

$(\exists b \in B \ \ such \ \ that \ \ b \notin A)$

AはBの真部分集合(proper set)



ベン図（オイラー図）

○ 空集合(empty set)と普遍集合(universal set)

空集合：　元が 1 つもない集合,

ϕ（0と記す場合もある）

普遍集合：あらゆるものからなる集合,

Ω（1と記す場合もある）

（例）

$\phi \subset A, \quad A \subset \Omega$

○ 濃度(cardinality)

集合Aの元の個数をAの濃度といい,$|A|$で表す.

$|A|$が有限$\Rightarrow$有限集合(finite set)

$|A|$が無限$\Rightarrow$無限集合(infinite set)

（例）

$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3, 2, 1\}$のとき

$A = B, |A| = |B| = 3, \quad A, \quad B$は共に有限集合

$P(A) = 2^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$|2^A| = 8 = 2^{|A|}$

大事

○ 濃度の比較

A, Bを集合とするとき，Aの元とBの元が互いに余ることなく，ペアを組むことが出来るとき，Aの濃度とBの濃度は同じであるといい$|A|=|B|$と書く．
無限集合の場合も同じように考える．

(例)

$N=\{1,2,3,4,\cdots,i,\cdots\cdots\}$（自然数の集合）

$\quad\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\quad\ \downarrow$

$E=\{2,4,6,8,\cdots,2i,\cdots\cdots\}$（正の偶数の集合，$N$の部分集合）

1 対 1 対応 $\Rightarrow$ 濃度が等しい $|N|=|E|$

このように，無限集合の場合は，自分自身の
真部分集合と濃度が同じになることがあり得る．
有限集合にはない性質．

Bのある部分集合B'とAの濃度が同じであるとき，
Bの濃度はAの濃度以上であるといい$|A|\leq|B|$と書く．

$|A|\leq|B|$でかつ$|A|\neq|B|$のとき，Bの濃度はAの濃度
より大きいといい,$|A|<|B|$と書く．

○ 可算無限集合（可付番無限集合）

Nと同じ濃度を持つ集合

$$N = \{1, 2, 3, 4, \cdots, i, \cdots\cdots\}$$

$$\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \quad \downarrow$$

$$E = \{2, 4, 6, 8, \cdots, 2i, \cdots\cdots\}$$

$\therefore$ Eは可算無限集合である

（要素に番号を付けることが出来る）

（例）

(i) 正の奇数の集合

$$O = \{1, 3, 5, 7, \cdots, 2i-1, \cdots\cdots\}$$

$$\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \quad \uparrow$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, \cdots, i, \cdots\cdots\}$$

$\therefore$ Oは可算無限集合である

(ii) 整数の集合

$$Z=\left\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots\cdots\right\}$$

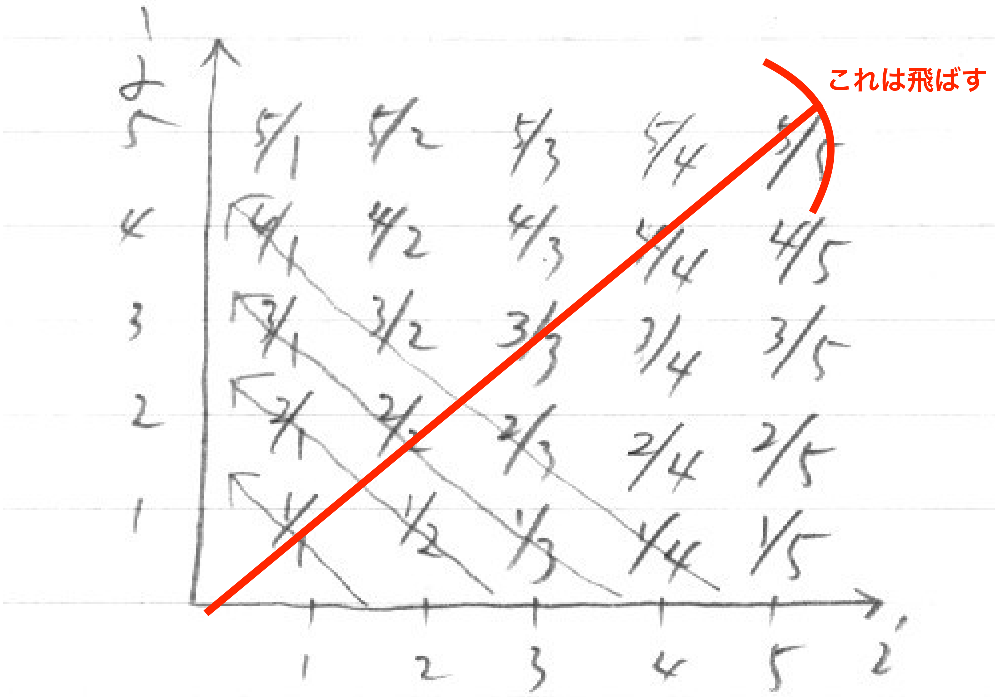
$$=\left\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots,(-1)^{i}\left[\frac{i}{2}\right],\cdots\cdots\right\}$$

$\therefore$ Zは可算無限集合である

(iii) 正の有理数の集合

正の有理数の集合$=\left\{\dfrac{j}{i}\middle| i,j\in N\right\}$

どのように自然数Nと１対１対応させるか？



上の図で数えてる。個数は自然数の数と同じ

$$\left\{1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{2} = 1\right), 3, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \cdots\cdots\right\}$$

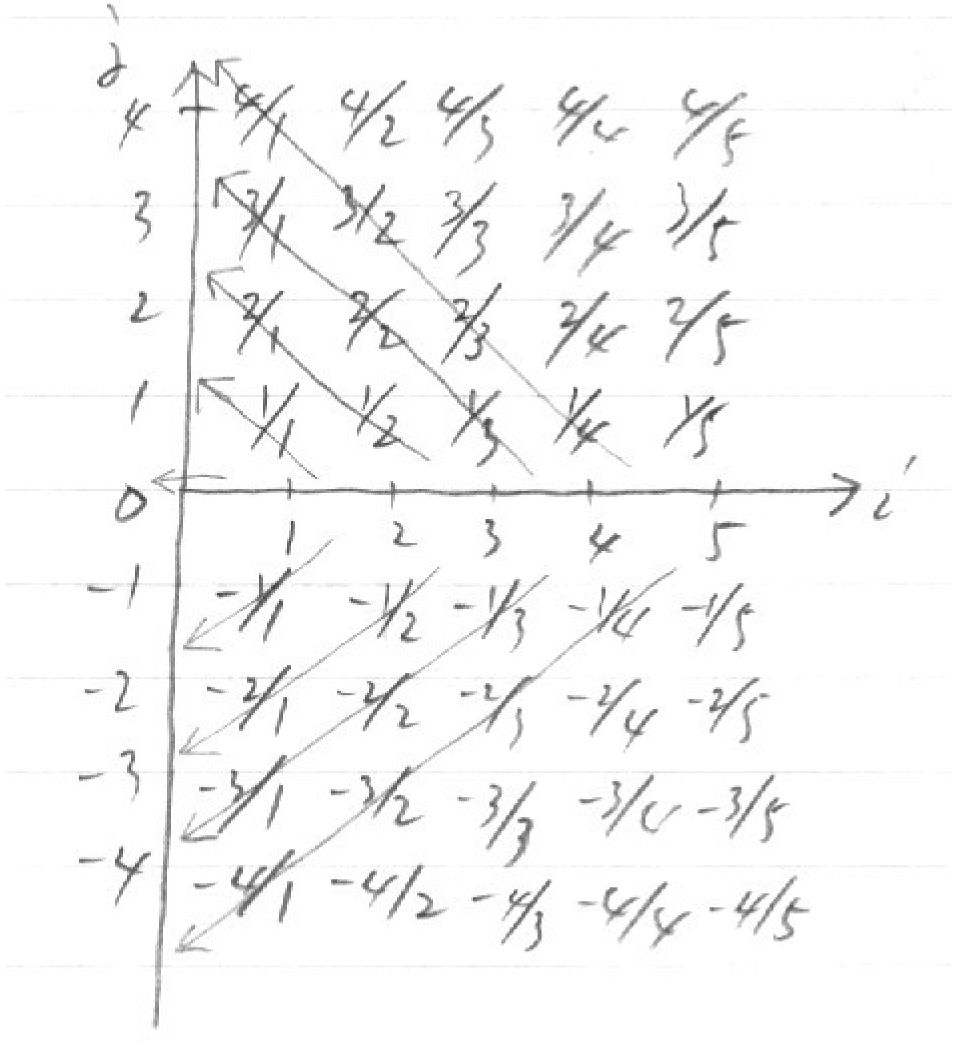
（既に数え上げているので飛ばす）

$\therefore$ 正の有理数の集合は１個づつ数え上げられる（自然数との１対１対応が取れる）ので可算無限集合である.

(iv) すべての有理数の集合

$$Q=\left\{0,1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2,-2,\cdots\cdots\right\}$$

Qは可算無限集合である.



○ 非可算無限集合

自然数よりも無限の度合いが大きい集合

$$P(N) = 2^N = \{x | x \subset N\}$$

自然数の部分集合をすべて集めた集合

この要素には番号を付けることが出来ない.

$P(N)$は非可算無限集合である.

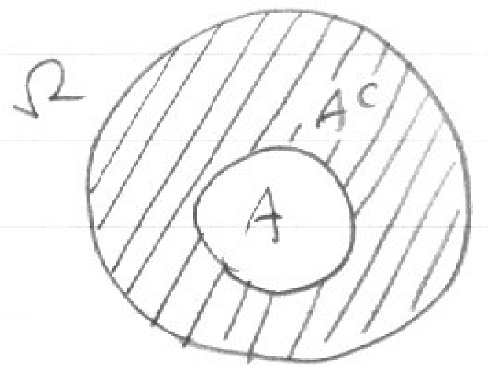
1.2　集合演算

○ 補集合(complementary set)

$$A^c = \left\{ x \middle| x \in \Omega \quad and \quad x \notin A \right\}$$

普遍集合から集合Aの元を全部

取り去ったものの集合

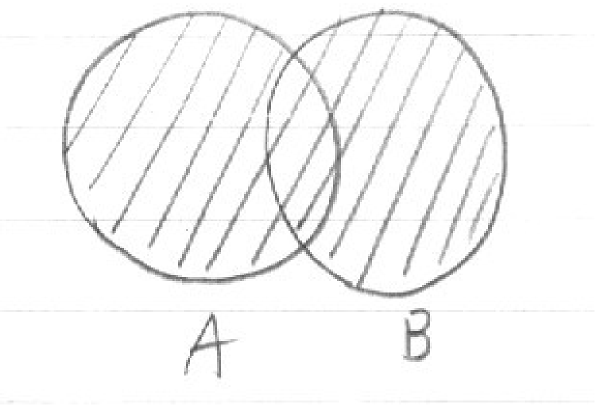


（例）$\phi^c = \Omega$,　$\Omega^c = \phi$

○ 和集合(sum set)

$$A \bigcup B = \left\{ x \middle| x \in A \quad or \quad x \in B \right\}$$

(union)

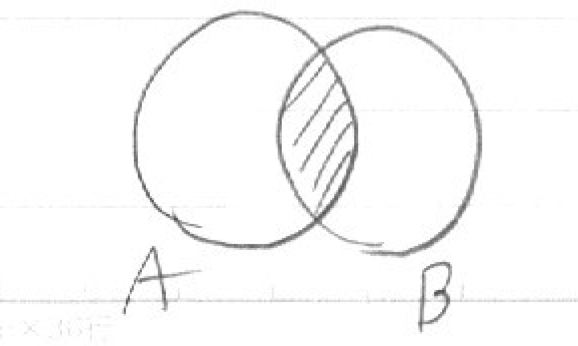


○ 積集合(product set)

$$A \bigcap B = \left\{ x \middle| x \in A \quad and \quad x \in B \right\}$$

(intersection)

$A \bigcap B = \phi$の時，AとBは互いに素(disjoint)

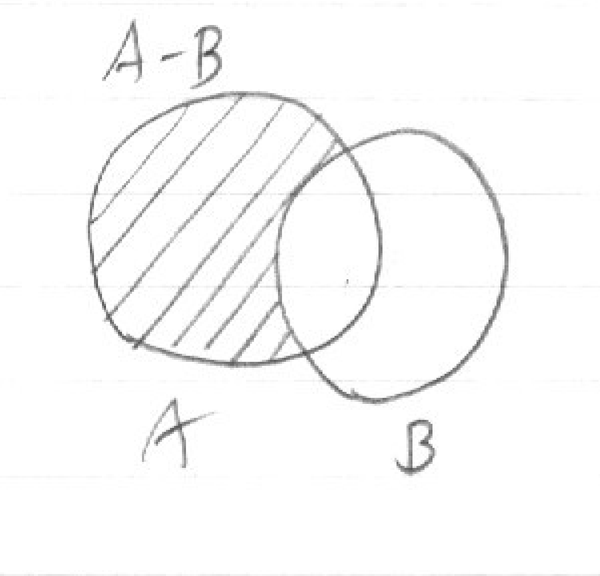


○ 差集合(difference set)

$$A - B = \left\{ x \middle| x \in A \quad and \quad x \notin B \right\}$$

Aの元のうち，Bに属さないものの集合

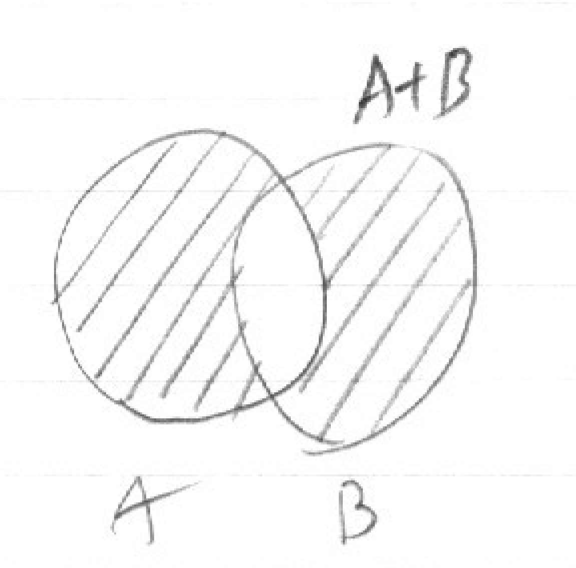
$A - B = A \cap B^c$



○ 対称差(symmetrical difference)

$$A+B=\left\{x \,\middle|\, \begin{array}{l} x\text{は}A\text{か}B\text{かのいずれか一方のみに} \\ \text{属する元} \end{array}\right\}$$

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)$$



○ 巾等則

$$A \bigcup A = A, \quad A \bigcap A = A$$

○ 交換則

$$A \bigcup B = B \bigcup A, \quad A \bigcap B = B \bigcap A$$

○ 結合法則

$$A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C,$$

$$A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$$

これより簡単に

$$A \bigcup (B \bigcup C) = A \bigcup B \bigcup C,$$

$$A \bigcap (B \bigcap C) = A \bigcap B \bigcap C$$

と書いてもよい

○ド●モルガンの法則(De Morgan's law)

$$(A \bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c, \quad (A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$$

［証明］

(i) $(A \bigcup B)^c \subset A^c \bigcap B^c$ を示す

もし，$x \in (A \bigcup B)^c$ ならば $x \notin A \bigcup B$

したがって，$x \notin A$ かつ $x \notin B$

これは，$x \in A^c$ かつ $x \in B^c$

即ち, $x \in A^c \bigcap B^c$

$\therefore x \in (A \bigcup B)^c \Rightarrow x \in A^c \bigcap B^c$

よって，$(A \bigcup B)^c \subset A^c \bigcap B^c$

(ii) $(A \bigcup B)^c \supset A^c \bigcap B^c$ を示す

もし，$x \in A^c \bigcap B^c$ ならば $x \in A^c$ かつ $x \in B^c$

即ち，$x \notin A$ かつ $x \notin B$

したがって，$x \notin A \bigcup B$

これは，$x \in (A \bigcup B)^c$

$\therefore x \in A^c \bigcap B^c \Rightarrow x \in (A \bigcup B)^c$

よって，$A^c \bigcap B^c \subset (A \bigcup B)^c$

上記 (i),(ii)より $(A\bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$が証明された

また，$(A\bigcup B)^c = A^c \bigcap B^c$において

$A \to A^c$，$B \to B^c$と置き換えると，

$$(A^c \bigcup B^c)^c = (A^c)^c \bigcap (B^c)^c = A \bigcap B$$

両辺の補集合を取ると

$$(A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$$

となり，第２の関係が証明された．[Q.E.D.]

○ 分配法則

$$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C),$$
$$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$$

［証明］

(i) $A\bigcup(B\bigcap C)\subset(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ を示す

もし，$x\in A\bigcup(B\bigcap C)$ならば$x\in A$または$x\in B\bigcap C$

ここで,

(a) $x\in A$ ならば明らかに$x\in A\bigcup B$ かつ $x\in A\bigcup C$

$\therefore\ x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

(b) $x\in B\bigcap C$ ならば $x\in B$ かつ $x\in C$

即ち，$x\in A\bigcup B$ かつ $x\in A\bigcup C$

$\therefore\ x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

即ち,

$$\therefore x\in A\bigcup(B\bigcap C)\Rightarrow x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$
$$\therefore A\bigcup(B\bigcap C)\subset(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

(ii) $A\bigcup(B\bigcap C)\supset(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ を示す

もし，$x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ならば

$x\in A\bigcup B$ かつ $x\in A\bigcup C$

ここで,

(a) $x\notin A$ ならば必然的に $x\in B$ かつ $x\in C$

したがって，$x\in B\bigcap C$

$\therefore\ x\in A\bigcup(B\bigcap C)$

(b) $x\in A$ ならば 明らかに$x\in A\bigcup(B\bigcap C)$

即ち,

$\therefore\ x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)\Rightarrow x\in A\bigcup(B\bigcap C)$

$\therefore(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)\subset A\bigcup(B\bigcap C)$

上記 (i),(ii)より

$A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$が証明された

また, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$において

$A\to A^c$, $B\to B^c$, $C\to C^c$と置き換えると,

$$A^c\cup(B^c\cap C^c)=(A^c\cup B^c)\cap(A^c\cup C^c)$$

両辺の補集合を取るとド・モルガンの
法則より

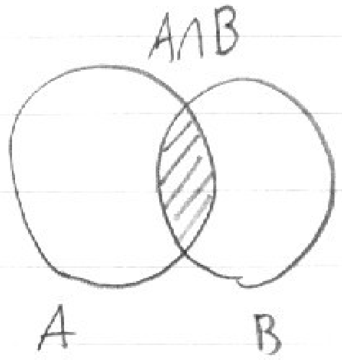
$$A\cap(B\cup C)=(A^c\cup B^c)^c\cup(A^c\cup C^c)^c$$
$$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

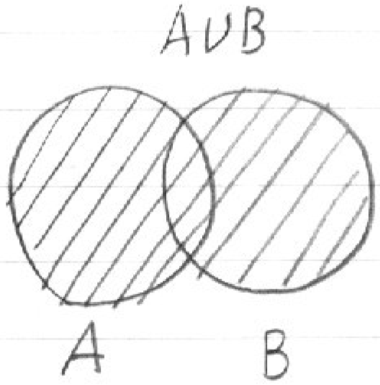
となり第２の関係が証明された

［Q.E.D.］

○ 吸収法則

$$A \bigcup (A \bigcap B) = A, \quad A \bigcap (A \bigcup B) = A$$





［証明］

(i) $A \bigcup (A \bigcap B) = (A \bigcap \Omega) \bigcup (A \bigcap B)$

$$= A \bigcap (\Omega \bigcup B)$$

$$= A \bigcap \Omega$$

$$= A$$

(ii) $A \bigcap (A \bigcup B) = (A \bigcup \phi) \bigcap (A \bigcup B)$

$$= A \bigcup (\phi \bigcap B)$$

$$= A$$

問題

$A \cap B = A \cap C$,　$A^c \cap B = A^c \cap C$ならば$B = C$

であることを証明せよ.

［証明１］　（基本的証明）

$B = C$を示すには$B \subset C$と$B \supset C$を両方示せばよい.

(i) $B \subset C$を示す

$x \in B$とすると$x \in A$または$x \notin A$のいずれかの場合がある

(a) $x \in A$とすると

$x \in A \cap B$より$x \in A \cap C$（第１の条件）

$\therefore x \in C$　$i.e.$ $x \in B \Rightarrow x \in C$

(b) $x \notin A$とすると

$x \in A^c \cap B$となり$x \in A^c \cap C$（第２の条件）

$\therefore x \in C$　$i.e.$ $x \in B \Rightarrow x \in C$

$(a),(b)$よりいずれにしても$x \in B \Rightarrow x \in C$が示されたので $B \subset C$ である

(ii) $B \supset C$を示す

$x \in C$とすると$x \in A$または$x \notin A$のいずれかの場合がある

(a) $x \in A$とすると

$x \in A \cap C$より$x \in A \cap B$（第１の条件）

$\therefore\ x \in B \quad i.e.\ x \in C \Rightarrow x \in B$

(b) $x \notin A$とすると

$x \in A^c \cap C$となり$x \in A^c \cap B$（第２の条件）

$\therefore\ x \in B \quad i.e.\ x \in C \Rightarrow x \in B$

$(a),(b)$よりいずれにしても$x \in C \Rightarrow x \in B$が示されたので$B \supset C$である

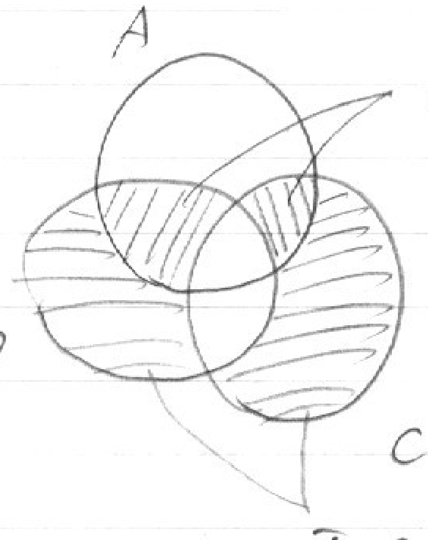
$\therefore$ (i),(ii) より$B = C$である

［Q.E.D.］

［証明２］　（公式を利用）

$$
\begin{aligned}
B &= \Omega \cap B \\
&= (A \cup A^c) \cap B \\
&= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \\
&= (A \cap C) \cup (A^c \cap C) \\
&= (A \cup A^c) \cap C \\
&= \Omega \cap C \\
&= C
\end{aligned}
$$

［証明にならない証明］　（ベン図を利用）



$A \cap B = A \cap C$ よりこの部分が空集合である

∴ $B = C$ である

$\bar{A} \cap B = \bar{A} \cap C$ よりこの部分が空集合である.

問題

$A \subset B$と$A \cup B = B$は同値であることを証明せよ．

二つの値は同じ意味ということ

［証明］

$A \subset B$が成立するとしよう．$x \in A \cup B$とすると

$x \in A$または$x \in B$である．

しかるに，$A \subset B$より$x \in B$となり

$A \cup B \subset B$が示される．

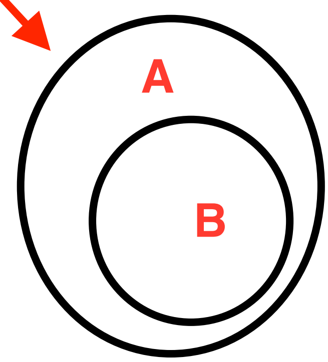
また$B \subset A \cup B$であるから$A \cup B = B$が示される．

逆に，$A \cup B = B$が成立するとしよう．

$A \subset A \cup B = B$より$A \subset B$が示される．

よって，$A \subset B$と$A \cup B = B$が同値である

ことが示された．



同様にして，次の４つの関係も同値である．

(i) $A \subset B$

(ii) $A \bigcup B = B$

(iii) $A \bigcap B = A$

(iv) $A \bigcap B^c = \phi$

大切

大事 テストに出るかも

問題

$A \subset B$, $A \subset C$ ならば $A \subset B \cap C$ を証明せよ.

[証明]

$A \subset B$ ならば $A \cap B = A$

$A \subset C$ ならば $A \cap C = A$

使っていい

したがって,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap C = A$

$\therefore\ A \subset B \cap C$

この問題は全部これを使って証明

問題

$A \subset B$ならば$A \cap C \subset B \cap C$を証明せよ.

[証明]

$A \subset B$より$A = A \cap B$

また,

$(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C = A \cap C$

$\therefore \quad A \cap C \subset B \cap C$

問題

$A \bigcup B = \Omega$，$A \bigcap B = \phi$ は$B = A^c$であるとき，およびそのときに限り成立することを証明せよ．

［証明］

(i) $A^c \subset B$を示す．

$$
\begin{aligned}
A^c \bigcap B &= \phi \bigcup (A^c \bigcap B) \\
&= (A^c \bigcap A) \bigcup (A^c \bigcap B) \\
&= A^c \bigcap (A \bigcup B) \\
&= A^c \bigcap \Omega \qquad \because\ A \bigcup B = \Omega \\
&= A^c
\end{aligned}
$$

(ii) $A^c \supset B$を示す.

$$
\begin{aligned}
A^c \bigcup B &= \Omega \bigcap (A^c \bigcup B) \\
&= (A^c \bigcup A) \bigcap (A^c \bigcup B) \\
&= A^c \bigcup (A \bigcap B) \\
&= A^c \bigcup \phi \qquad \because A \bigcap B = \phi \\
&= A^c
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad A^c \supset B$

よって，$A^c \subset B$および$A^c \supset B$
が示されたので，$B = A^c$である.

また，逆に$B = A^c$であるならば
明らかに

$A \bigcup B = A \bigcup A^c = \Omega$,

$A \bigcap B = A \bigcap A^c = \phi$である.

問題　テスト出るかも

$(A-B)\bigcup B = A\bigcup B$を示せ.

［証明］

$$
\begin{aligned}
(A-B)\bigcup B &= (A\bigcap B^c)\bigcup B \\
&= (A\bigcup B)\bigcap(B^c\bigcup B) \\
&= (A\bigcup B)\bigcap\Omega \\
&= A\bigcup B
\end{aligned}
$$

問題

$A-B=A$であるための必要十分条件は

$A\cap B=\phi$であることを証明せよ.

[証明]

$A-B=A$より$A=A\cap B^c$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad A\cap B &= (A\cap B^c)\cap B\\
&= A\cap(B^c\cap B)\\
&= A\cap\phi=\phi
\end{aligned}
$$

逆に

$A\cap B=\phi$ならば

$=A-B$

$=A\cap B^c$

$=\phi\cup(A\cap B^c)$

$=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\quad \because A\cap B=\phi$

$=A\cap(B\cup B^c)$

$=A\cap\Omega$

$=A$

問題

$C\cap(A-B)=(C\cap A)-(C\cap B)$を証明せよ.

［証明］

$$(C\cap A)-(C\cap B)=(C\cap A)\cap(C\cap B)^c$$

$$=(C\cap A)\cap(C^c\cup B^c)$$

$$=(C\cap A\cap C^c)\cup(C\cap A\cap B^c)$$

$$=C\cap(A\cap B^c)$$

$$=C\cap(A-B)$$

問題

$A \times B \equiv (A+B)^c$ と定義する

(AとBの十字積) .

この定義は大事

次を示せ.

$A \times B = A^c + B = A + B^c$

[解]

$$A \times B = (A+B)^c = ((A-B) \cup (B-A))^c$$

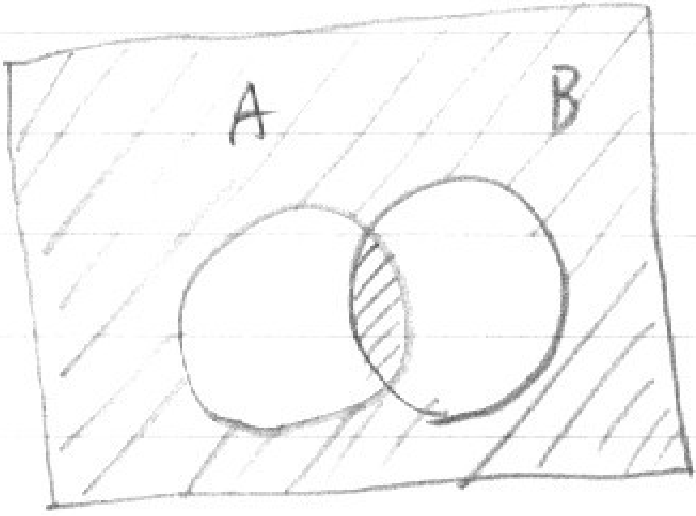
$$= (A \cap B^c)^c \cap (B \cap A^c)^c$$

$$= (A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)$$

$$= ((A^c \cup B) \cap B^c) \cup ((A^c \cup B) \cap A)$$

$$= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)$$

$$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \quad \text{（十字積）}$$



AとBの十字積

$$A^c + B = (A^c - B) \bigcup (B - A^c)$$

$$= (A^c \bigcap B^c) \bigcup (B \bigcap A)$$

$$= A \times B$$

$$A + B^c = (A - B^c) \bigcup (B^c - A)$$

$$= (A \bigcap B) \bigcup (B^c \bigcap A^c)$$

$$= A \times B$$