３．常微分方程式

1. 変数分離型として次の 1 階常微分方程式を解きなさい。

   (1) $y' = \dfrac{x}{y}$　(2) $y' = \dfrac{y}{x}$　(3) $y' = x(1-y)$　(4) $(x+xy)y' = y - xy$

   (5) $v' = -g - \mu v$　(v は t の関数。g, μは正の定数)

   (6) $y' = \mu y \left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$　(μ, K は正の定数)

2. 同次型として次の 1 階常微分方程式を解きなさい。

   (1) $y' = \dfrac{y}{x}$　(2) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$　(3) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy}$

   (4) $(x+y+4)y' - (x-y-2) = 0$

   （ヒント：$u = x+a, v = y+b$ と変数変換し，同次型になるように a, b を選ぶ）

3. 5.2.3 の方法で次の 1 階常微分方程式を解きなさい。

   (1) $y' - 3y = e^{2x}$　(2) $y' + xy = 2x^3$　(3) $y' + y\cos x = \sin 2x$

4. インダクタンス L のコイル，抵抗値 R の抵抗，起電力 $V(t)$ の電源を直列につないだ回路の電流 $I(t)$ は次の方程式に従う。

   $$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = V(t)$$

   起電力は $V(t) = V_0 (0 \le t \le T), 0$(それ以外) とする。また $I(t) = 0 \quad (t \le 0)$ とする。次の手順で方程式を解きなさい。

   （a）$0 \le t \le T$ での解を 5.2.3 の方法で求めなさい。

   （b）$T < t$ での一般解を求め，$0 \le t \le T$ での解につながるように任意定数を決めて解を求めなさい。

5. 完全微分型の次の 1 階常微分方程式を解きなさい。

   (1) $(3x+2y)dx + (2x+4y)dy = 0$　(2) $y\sin x dx - \cos x dy = 0$

   (3) $(2xe^y + 1)dx + (x^2 e^y + 2y)dy = 0$

6. 次の定数係数 2 階線形微分方程式の一般解を求めなさい。

   (1) $y'' + 5y' + 6y = 0$　(2) $y'' - 5y' + 4y = 0$　(3) $y'' - 4y' + 4y = 0$

   (4) $y'' - 4y = 1$　(5) $y'' - 4y = \sin x$　(6) $y'' - 4y = e^{2x}$

7. 質量 m のおもりが，ばね定数 k のばねから力を受けて単振動するとき，運動方程式は，

   $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (ただし\omega_0^2 = \frac{k}{m})$$

   となる。これは，定数係数 2 階線形微分方程式である。5.3.1 の方法で一般解を求めなさい。

8. 質量 m のおもりが，ばね定数 k のばねからの力と速度に比例する抵抗力を受けて運動するとしよう。運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{ただし } 2\gamma = \frac{\mu}{m} > 0, \omega_0^2 = \frac{k}{m})$$

となる。これは，定数係数 2 階線形微分方程式なので，5.3.1 の方法で解ける。

(a) $\gamma < \omega_0, \gamma > \omega_0, \gamma = \omega_0$ の 3 つに場合分けして，一般解を求めなさい。

(b) それぞれの場合の解の様子や特徴を説明しなさい。

9. 前の問題にさらに，外部からの力 $F_0 \cos\omega t$ が加わったとしよう。運動方程式は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t \quad (1)$$

となる。（ただし $f_0 = F_0/m$ とおいた。）これは，定数係数 2 階線形非斉次微分方程式である。このままでも解くことはできるが，次のように複素数の方程式にすると見通しが良くなる。

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t} \qquad (2)$$

ここで，z は複素数値をとる関数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ で，$x(t), y(t)$ は実数値をとる関数である。(2) の実数部をとれば方程式 (1) になるのは明らかだろう。

(a) (2) の特解として $z = Ce^{i\omega t}$ を仮定する。方程式が成り立つように定数 C（複素数）を決めなさい。

(b) 複素数 C の絶対値 A と偏角 ϕ（つまり $C = Ae^{i\phi}$）が次のように表せることを示しなさい。

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\cos\phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad \sin\phi = -\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

(c) (a) で求めた特解 z の実数部をとり，A, ϕ を使って方程式 (1) の特解 x を表しなさい。

(d) 【方程式 (1) の一般解】=【斉次方程式の一般解】+【方程式 (1) の特解】である。【斉次方程式の一般解】は問題 8 で求めたものと同じである。十分時間が経ったとき，【方程式 (1) の一般解】はどのようになるか説明しなさい。

10. 図のように質量 M のおもりの両側に，質量 m のおもりが，ばね定数 k のばねでつながれている。おもりが水平方向に動く場合だけを考える。つり合いの位置からの変位を x_1, x_2, x_3 として固有振動数と振動のモードを求めなさい。