補足１：フーリエ級数の副産物

練習問題「１．フーリエ級数」の結果から，π と関係するさまざまな級数を導くことができる。例えば問題２の $f(x) = 0 \quad (-\pi \leq x < 0),\ \ 1 \quad (0 \leq x < \pi)$ は，

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right) \tag{1}$$

となった。この式に $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入すると $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ だから，

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) \tag{2}$$

となり，これを変形すると

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{3}$$

が得られる。これはライプニッツの級数と呼ばれる有名な級数である。

問題１の $f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi)$ は，

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=\text{奇数}} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right) \tag{4}$$

となった。この式に $x = \pi$ を代入して変形すると

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \tag{5}$$

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \tag{6}$$

が得られる。

問題３ (2) の $f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi)$ は，

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} - \frac{\cos 5x}{5^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} - \cdots\right) \tag{7}$$

となった。この式に $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入して変形すると

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(0 - \frac{1}{2^2} - 0 + \frac{1}{4^2} - 0 - \frac{1}{6^2} - 0 + \frac{1}{8^2} - \cdots\right) \tag{8}$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \cdots \tag{9}$$

が得られる。

(6) 式を２倍したものから (9) 式を引くと

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \tag{10}$$

となるし，(6) 式から (9) 式を引くと

$$\frac{\pi^2}{24} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots \tag{11}$$

が得られる。(11) が (10) の 1/4 になっている理由を考えてみてください。