２．フーリエ変換 (Fourier Transform)

２.１ フーリエ変換

$f(x)$は $-\infty < x < \infty$ で有界変動、

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

$(e^{-i\omega x} = \cos\omega x - i\sin\omega x)$

を$f(x)$のフーリエ変換という。

$F(\omega) = Ff(x)$と書く。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

を逆フーリエ変換という。

$f(x) = F^{-1}F(\omega)$と書く。

２．２フーリエ変換の例

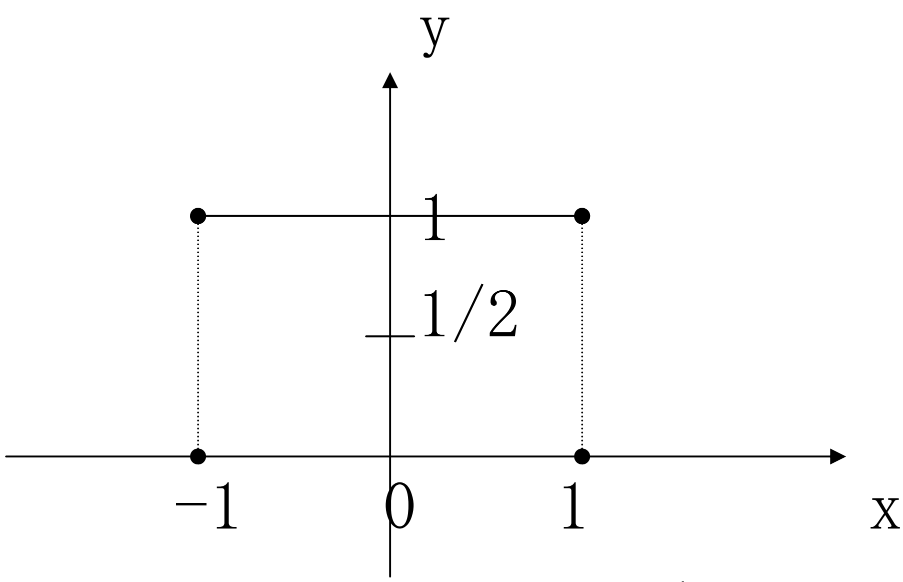
〔例〕

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<1)\\ \dfrac{1}{2} & (x=\pm 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

のフーリエ変換及び逆フーリエ変換を用いて

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

であることを示せ。



(注)不連続点では $f(x)=\dfrac{1}{2}\left\{f(x+0)+f(x-0)\right\}$

の値を取る。

(解)

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}1\cdot(\cos\omega x-i\sin\omega x)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{1}\cos\omega x dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\sin\omega x}{\omega}\right]_0^1=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin\omega}{\omega}(\cos\omega x+i\sin\omega x)d\omega$$

$$=\frac{2}{2\pi}\cdot 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\cdot\cos\omega x}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}d\omega$$

ここで、$x=1$とすると

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2\omega}{\omega}d\omega$$

$2\omega=\lambda$とすると、$2d\omega=d\lambda$より

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin 2\omega}{\omega}d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\frac{\lambda}{2}}\cdot\frac{1}{2}d\lambda$$

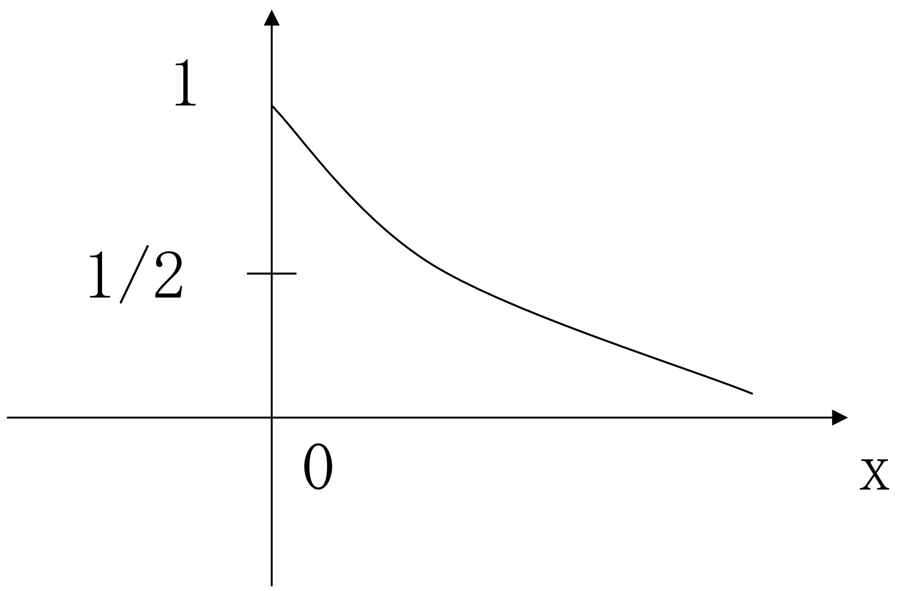
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda$$

$$\therefore\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda$$

〔例２〕

$$f(x)=\begin{cases} e^{-ax}\left(a>0\right) & \left(x>0\right) \\ \dfrac{1}{2} & \left(x=0\right) \\ 0 & \left(x<0\right) \end{cases}$$

のフーリエ変換、及び逆フーリエ変換を用いて、$f(x)$の積分表示を求めよ。



(解)

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-(a+i\omega)x}}{-(a+i\omega)}\right]_{0}^{\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a+i\omega}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a-i\omega}{(a+i\omega)(a-i\omega)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$f(x)=F^{-1}F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}e^{i\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(a-i\omega)(\cos\omega x+i\sin\omega x)}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(a\cos\omega x+\omega\sin\omega x)+i(a\sin\omega x-\omega\cos\omega x)}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\sin\omega x-\omega\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\cos\omega x+\omega\sin\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega$$

(∵ $f(x)$は実関数より)

$$i.e.\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\sin\omega x-\omega\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega=0$$

また $x=0$とすると $f(0)=\dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$=\frac{2a}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{a^2+\omega^2}d\omega$$

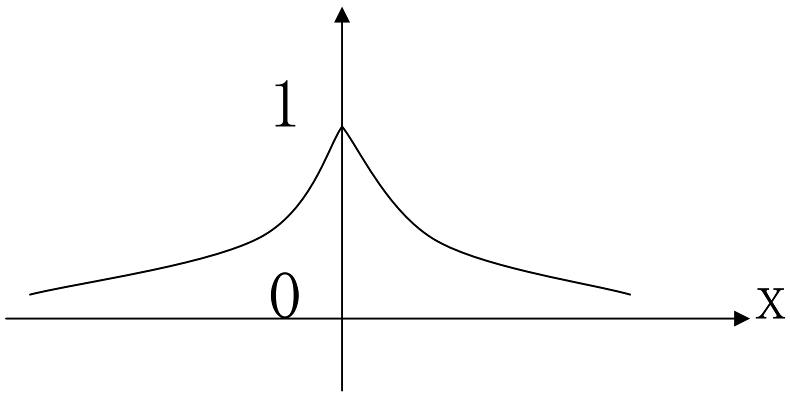
$$i.e.\quad \int_{0}^{\infty}\frac{1}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2a}$$

〔例３〕

$f(x)=e^{-a|x|} \quad (a>0)$ のフーリエ変換、及び逆フーリエ変換を用いて

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2a}e^{-a|x|}$$

を示せ。



(解)

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|x|}\left(\cos\omega x-i\sin\omega x\right)dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-a|x|}\cos\omega x dx$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-ax}\cos\omega x dx$$

ここで $e^{i\omega x}=\cos\omega x+i\sin\omega x$

$$\therefore Re\, e^{i\omega x}=\cos\omega x$$

$$\therefore F(\omega)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}\cdot Re e^{i\omega x}dx$$

$$=Re\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{-ax}e^{i\omega x}dx=Re\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{(-a+i\omega)x}dx$$

$$=Re\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(-a+i\omega)x}}{-a+i\omega}\right]_0^{\infty}=Re\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a-i\omega}$$

$$=Re\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}e^{+i\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+\omega^2}(\cos\omega x+i\sin\omega x)d\omega$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{a}{a^2+\omega^2}\cos\omega x d\omega$$

$$=\frac{2a}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$\therefore e^{-a|x|}=\frac{2a}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega$$

$$i.e.\quad \int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2}d\omega=\frac{\pi}{2a}e^{-a|x|}$$