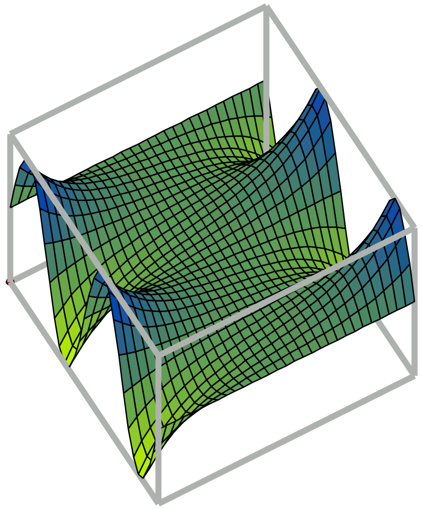
複素関数を学ぶ人のために

===『複素関数論のさわり』を改題 ===

Ver. 0.18



芦田正巳

山口大学　理学部　物理· 情報科学科

出版のお知らせ

このテキストは2０１２年5 月にオーム社さんから出版されました。

「複素関数を学ぶ人のために」　芦田正巳著，オーム社

なお，オーム社さんの御好意により出版後も WEB 上での PDF ファイルの公開は続けます。

はじめに

このテキストは山口大学　理学部　物理· 情報科学科（旧，自然情報科学科）の学生のために書かれました。内容は「複素関数論」の授業そのままです。

数学科の学生を対象にしているのではないので**数学的な厳密さは全然重視していません！**　定理の証明などは真面目に（数学的に厳密に）やってはいません。厳密さよりも，論理の流れをつかむこと，話の大筋を理解することを重視しています。要するに，**何故その定理が成り立つのか，その理由がだいたい分かればよい**と考えています。厳密な証明をしないと気になって夜も眠れないという人は他の本を読んで下さい。このテキストでは（私の授業では）数学的な論理の進め方を身につけることよりも，とりあえず複素関数論を使えるようになることを重視しています。（邪道だなぁ....）

また，半期で複素関数論の授業を行うために，本当は話さなければいけない大切な話をたくさん切り落としています。例えば

- 一次分数変換（一次変換）
- 等角写像
- 解析接続

これらは複素関数論の本ならば必ず書いてあるし，実際，省略してよいようなテーマではないのですが，どうしても時間が足りないので授業では省略しています。従って，このテキストにも書いていません。これらのテーマについては他の参考書などを読んで自分で勉強してください。

そのかわりというわけでもないですが，**章末問題の解答と解説はできるだけ詳しく書きました。**計算のやり方が分からないという人は章末問題の解説を読んでから他の本の同じような問題にチャレンジしてみてください。

平成1８年1１月1２日

芦田正巳

ありがたいことに，統計力学，熱力学に続いてこのテキストもオーム社さんから出版して頂けることになりました。出版にともない，テキストのタイ

トルを「複素関数を学ぶ人のために」に変更しました。ついでに数年ぶりに全体を読み直し，ほんの少しですが書き直しました。

オーム社さんの御厚意により，出版後もフリーの PDF 版の公開は続けますが，絶版にならない程度には書籍を買ってくださる方がいると嬉しいのですが . . .。

平成24 年3 月9 日

芦田正巳

目 次

第1章　複素関数

この章では，私達は色々な複素数の関数を定義して，それらの性質を調べます。つまり，複素数の指数関数とか複素数の三角関数などですね。これらの関数は実数の指数関数や実数の三角関数などと同じような性質も持っていますが，変数が複素数であるために実数の場合とは全く違う性質もたくさん持っています。

複素数の関数の定義の仕方や，変数が複素数であるために現れる不思議な性質を存分に味わってください。

1.1　複素数

まずは高校で習った複素数の性質を復習してみましょう。

どれもこれも分かり切ったことで，いまさらと思うでしょうが，ところが皆さん結構わかった気になっているだけで，身に付いていないことが多いんです。でもまあ一度は習ったはずのことですから，この節はあっさりと流しますよ。

1.1.1　複素数

初めに

$$i^2 = -1 \tag{1.1}$$

となる数 i を考えて i を**虚数単位**[1] と呼ぶことにします。

[1]工学部向けに書かれた本では虚数単位として j を使っていることが多いようです。多分 i を電流の記号として使いたいからなのでしょう。理学部の物理では虚数単位は i を使うことが多いようです。

次に2つの実数 a, b を使って

$$a + bi \qquad \text{または} \qquad a + ib \tag{1.2}$$

という数を考えて[2]，これを**複素数**と呼ぶことにします。

$u = a + ib$ の時，a を複素数 u の**実部**，b を u の**虚部**[3] と呼び次のように書きます。

$$\mathrm{Re}\{u\} = a \quad , \qquad \mathrm{Im}\{u\} = b \tag{1.3}$$

特別な場合として $\mathrm{Im}\{u\} = 0$ の時は $u = a$ となり，u は**実数**になります。また $\mathrm{Re}\{u\} = 0$ の時は $u = ib$ となり，このような u を**純虚数**と呼びます。

1.1.2　四則演算

2つの複素数 $u = a + ib$ $(a, b$ は実数$)$ と $v = c + id$ $(c, d$ は実数$)$ に対して足し算（加法）と掛け算（乗法）を次式で定義します。

$$u + v \equiv (a + c) + i(b + d) \tag{1.4}$$

$$uv \equiv (ac - bd) + i(ad + bc) \tag{1.5}$$

このように加法と乗法を定義すると，交換の法則，結合の法則，分配の法則などが成立することが分かります[4]。

また，実数の場合と同様に uu を u^2，uuu を u^3 等と書くことにしましょう[5]。

同様に $1/u$ を u^{-1}，$1/u^2$ を u^{-2} などと書くことにします。

[2]a, b が変数の時は $a + ib$ と書き，a, b が 2 とか 3 などの数値の場合には $2 + 3i$ などと書く場合が多いようですが，$a + bi$ や $2 + i3$ が間違いというわけではありません。

[3]$2 + 3i$ の虚部を求めなさいという問題を出すと，$3i$ と答える人が毎年何人もいます。これだけで十分**不可にしてよい**という気分になります。$2 + 3i$ の虚部は $3i$ じゃないですよ！　3 ですよ！

[4]複素数全体は**体**を成しています。**体**って何かって？　交換則，結合則，分配則などが成り立っている集合のことです。でも，そんな専門用語まで覚えなくていいですよ！　私もすぐに忘れますから。

[5]$u^{0.5}$ などは未だ定義されていません！　この段階では整数べきだけが定義されています。

1.1.3　共役複素数

複素数 $u=a+ib$ (a,b は実数) に対して複素数 $a-ib$ を u の**共役複素数**と呼び u^* で表すことにします。

$$u=a+ib \quad \text{のとき} \quad u^* \equiv a-ib \tag{1.6}$$

共役複素数の表し方

私は u の共役複素数を u^* と書くことにしていますが，複素関数論の本では u の共役複素数を $\bar{u}$ と書いていることが多いようです。
それを分かっていながら，なぜ敢えて逆らって u^* と書くかというとですね ...「 授業で複素関数論を 学ぶだけ」なら $\bar{u}$ でも u^* でも，どちらでも構わないのですが,「 複素関数論を使って何かを 計算しよう」と思うと $\bar{u}$ という書き方はとっても不便なんです!!
ほんのちょこっと式が長くなったり，複雑になっただけで $\bar{u}$ という書き方では何だか分からなくなってしまいます。

例えば　$z=x+iy$ のとき　$\dfrac{A\sin(kz)+B\ e^{i\lambda z}}{C\tan(pz)+D\ e^{i\rho z}}$　の共役複素数を

$$\overline{\frac{A\sin(kz)+B\ e^{i\lambda z}}{C\tan(pz)+D\ e^{i\rho z}}} \quad \text{と書くより} \quad \left(\frac{A\sin(kz)+B\ e^{i\lambda z}}{C\tan(pz)+D\ e^{i\rho z}}\right)^*$$

と書いた方がずっと簡単で分かりやすいと思いませんか?
あいにく, 物理で出てくる式はこんなに簡単じゃないし, また, $\bar{u}$ という書き方は u の平均という意味に使うこともあるので, 私としては共役複素数は u^* と書きたいのです。

共役複素数の定義式から次の関係式が導かれます。

$$(u^*)^* = u \tag{1.7}$$
$$(u+v)^* = u^*+v^* \tag{1.8}$$

$$(uv)^* = u^*v^* \tag{1.9}$$
$$uu^* = a^2+b^2 \qquad (\ u=a+ib,\quad a \text{ と } b \text{ は実数}) \tag{1.10}$$

これらの式の証明はどれも簡単ですから，気になる人は自分で証明してみて下さい。

1.1.4　複素平面

複素数 $u=a+ib$ (a,b は実数) の値は2 つの実数 a,b を与えれば一通りに決まりますから，$u=a+ib$ を平面上の点 (a,b) と1 対1 に対応させせることができます(図 1.1 参照)。複素数全体と対応させた平面を**複素平面**とか**ガウス平面**と呼びます。

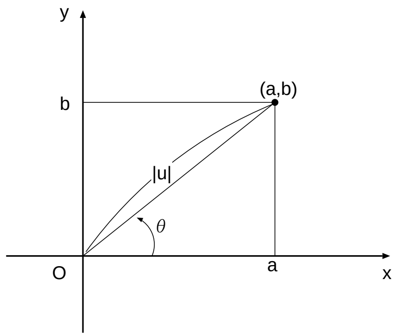


図 1.1: 複素平面

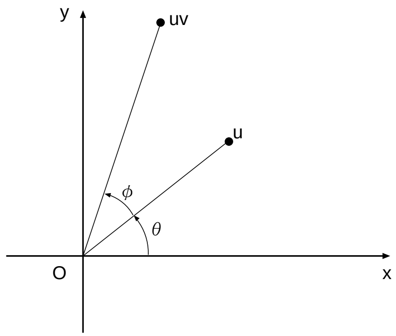


図 1.2: 複素数の掛け算

さて，図 1.1 を見てください。原点 O と点 (a,b) の間の距離は $\sqrt{a^2+b^2}$ ですが，この大きさを複素数 $u=a+ib$ の**絶対値**と呼び，$|u|$ と書きます。

$$|u| \equiv \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{uu^*} \tag{1.11}$$

また，原点 O と点 (a,b) を結ぶ直線が x 軸と成す角度 θ を u の**偏角**(　argument)と呼び，$\arg u$ と書きます。

$$\theta=\arg u \tag{1.12}$$

図 1.1 を見れば分かるように (a, b) はそれぞれ

$$a = |u|\cos\theta \tag{1.13}$$
$$b = |u|\sin\theta \tag{1.14}$$

となりますから，複素数 u を

$$u = a + ib = |u|(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.15}$$

と表すことができます。式 (1.15) を複素数 u の**極形式**と呼びます。

複素数を極形式で表すと複素数同士の掛け算（や割り算）を簡単に計算できましたね[6]。つまり

$$u = a + ib = |u|(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.16}$$
$$v = c + id = |v|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.17}$$

のとき uv は

$$uv = |u||v|\{\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)\} \tag{1.18}$$

となりました（図 1.2 参照）。

積の絶対値はそれぞれの絶対値の積になり，偏角はそれぞれの偏角の和になるわけです。

$$|uv| = |u||v| \tag{1.19}$$
$$\arg uv = \arg u + \arg v \tag{1.20}$$

えっと ...。こういう話は**式だけでなく，図を描いて覚えましょうね!**

最近の学生さんは，なかなか図を描こうとしないんですが，複素平面上で u や v がどこにあるか，そして uv がどこにくるかを図示する癖をつけましょう。複素数を扱うときに複素平面がぱっと思い浮かぶかどうかで，理解力が全然違いますよ！

それはさておき，式 (1.18) を $u = v$ とおいて繰り返し適用すれば

$$u^n = |u|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \tag{1.21}$$

[6]この辺の話は全部，高校で習ったはずと思っています。

が得られます。特に $|u| = 1$ のときは

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{1.22}$$

となり，**ド・モアブル（de Moivre）の公式**と呼ばれています。

1.2 数列と級数

1.2.1 複素数の関数を定義するためには...

高校の復習は前節で終わるとして，次に複素数の関数を定義したいのですが ...，これがなかなか一筋縄ではいかないんですよね。

最近出版された比較的やさしく書かれた本によくあるパターンは，例えば

$z = x + iy$ の指数関数を次式で定義する

$$e^z \equiv e^x(\cos y + i\sin y)$$

なんていうかんじなんです。さて，この定義式を見て「確かに z の指数関数だな」と思える人は一体何人くらいいるのでしょう？ 少なくとも，私には無理です。私は頭が悪いから，もっと実数のときの指数関数とよく似ていないかぎり，z の指数関数という気がしません。

そこで，実数の変数 x の関数 $f(x)$ の性質を利用して，複素数の変数 $z = x + iy$ の関数 $f(z)$ を定義する方法を考えてみましょう[7]。いつでもとは言いませんが，実関数 $f(x)$ は x のべき級数で表せました[8]。そこで $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とべき展開されたとき，この式の x のところを z で置き換えた式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

[7]あのう，e^x や $\sin x$ の x の代わりに z を書いただけでは駄目ですよ！ e^z とか $\sin z$ と書いただけでは何の意味もありません。z の値が与えられたときに e^z の値を計算する手順を決めなければならないのです。

[8]テイラー（Taylor）展開とかマクローリン（Maclaurin）展開と呼ばれていましたね。

を $f(z)$ と考えるのはもっともらしいですよね。

前節でやったように，私達は複素数の足し算と掛け算は計算できます。ですから

$$1 + 3z \quad \text{とか} \quad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3$$

というような多項式の値なら計算することができます。もう少し頑張って無限次まで足して，z の無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ を計算できれば，複素数の関数 $f(z)$ を定義できそうです。

そこで，まず複素数の無限級数について調べてみましょう [9]。

1.2.2 数列

複素数の級数について調べたいのですが，級数を数学的にちゃんと定義するために，まずは数列について述べます。

$\wp\heartsuit\wp$

定義 1.2.1. $n = 1, 2, 3, \ldots$ の各々に対して一つの複素数 $z_1, z_2, z_3, \ldots$ を対応させる規則が定まっているとき，複素数列 $\{z_n\}$ が定義されているという [a]。

[a] ここでは $n = 1, 2, 3, \ldots$ としましたが，$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ でも構いません。

さて，複素数列 $\{z_n\}$ が与えられたときに，n をどんどん大きくしてみます。このとき z_n がある複素数 α に限りなく近づくとき

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \alpha \quad \text{または} \quad z_n \to \alpha \quad (n \to \infty) \tag{1.23}$$

と書き，複素数列 $\{z_n\}$ は α に**収束**するといいます。

図で考えるとすると，図 1.3 のように複素平面のどこかに点 α があります。そして $z_1, z_2, z_3, \ldots$ を表す点がだんだん α を表す点に近づいていくわけです。従って $z_n \to \alpha$ ということは $|z_n - \alpha| \to 0$ ということです。ただし，必

[9] 複素数 z の級数の話は奥が深いのですが，ここでは関数を定義するのに必要な所だけを簡単に紹介します。興味を持たれた方は他の本などでさらに勉強してみてください。

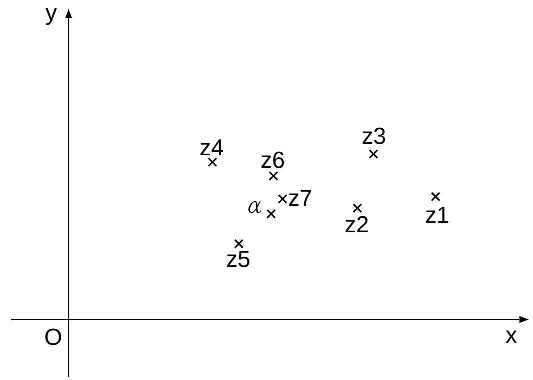


図 1.3: 数列の収束

ずしも $|z_n - \alpha|$ の値は順番に小さくなっていく必要はありません。n を大きくしていったときに，$|z_n - \alpha|$ の値は大きくなったり小さくなったりしながら平均的にはだんだん小さくなり，最終的には 0 に近づけばよいのです。

数列 $\{z_n\}$ が収束しないときには，数列 $\{z_n\}$ は**発散**するといいます。発散するというと，何だか $|z_n|$ が無限大になると思う人もいるかもしれませんが，そうではありません。「z_n の値は一つの値に近づかない」といっているだけなのです。だから，例えば

$$1,\ 2+i,\ 1,\ 2+i,\ 1,\ 2+i,\ \ldots \tag{1.24}$$

という数列は発散していることになります。

特に $|z_n|$ が無限大になる場合には，数列 $\{z_n\}$ は ∞ に発散するといい

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \quad \text{または} \quad z_n \to \infty \quad (n \to \infty) \tag{1.25}$$

と書きます。この場合，z_n の絶対値 $|z_n|$ が無限大になりさえすればよいのであり，z_n の偏角はどのようになっていてもかまいません。

1.2.3 級数

数列 $\{z_n\}$ の収束や発散の意味がわかったので，これを利用して無限級数を定義します。

℘♡℘

定義 1.2.2. 複素数列 $\{z_n\}$ が与えられたとき

$$s_1 = z_1 \tag{1.26}$$
$$s_2 = z_1 + z_2 \tag{1.27}$$
$$s_3 = z_1 + z_2 + z_3 \tag{1.28}$$
$$\vdots$$

として，新しい複素数列 $\{s_n\}$ を作る。
数列 $\{s_n\}$ が極限値 s に収束するとき無限級数 $z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$ は収束するといい，その和は s であるといい，次式のように書く。

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{1.29}$$

数列 $\{s_n\}$ が収束しないとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は発散するという。

さて，随分長ったらしい言い方になりましたが，分かりましたか？
何故単に「 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ がある値 s になったら s に収束するという」という言い方ではいけなかったのでしょう？
ポイントは**足す順番が重要だ**ということです！ 無限個の数値を足すときは，足す順番を変えると足された結果が変わってしまうことがあるのです。例えば

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots \tag{1.30}$$

を考えてみてください。これを次のような順番で足すと

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0 \tag{1.31}$$

となり結果は 0 となりますが，一方

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1 \tag{1.32}$$

のような順番で足せば 1 になってしまいます。
つまり定義 1.2.2 は「**無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は前から順番に足しなさい**」というふうに，**足す順番を指定している**のです！
この定義に従って $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ を計算してみれば

$$s_1 = 1,\ s_2 = 0,\ s_3 = 1,\ s_4 = 0,\ \ldots$$

というふうに 1 と 0 が交互に現れますから，この無限級数は発散していることになります。

数列 $\{z_n\}$ が与えられたとき，z_n を足していくのでなく，$|z_n|$ を足して作られる級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ を**絶対値級数**といいます。絶対値級数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するとき無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は**絶対収束**するといいます[10]。
絶対収束する級数については，とても重要な定理がいくつかあります。

℘♡℘

定理 1.2.1. 絶対収束する級数は収束する。

つまり $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束すれば $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は必ず収束すると言っています。ちゃんとした証明はしませんが，直感的には明らかなんじゃないでしょうか。つまり $|z_n| \geqq 0$ ですから

$$|z_1| \leqq |z_1| + |z_2| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| \leqq \ldots \tag{1.33}$$

となり，足せば足すほど大きくなっていきます。この和が無限大にならないで，ある有限値に収束するということは $|z_n|$ が 0 に近づいていくということ

[10]「絶対収束」で一つの言葉です。「絶対収束する」を「絶対，収束する」と読んではいけません。いや，まあ，確かに「絶対に収束している」んですけど。

ですね？　つまり絶対収束する級数の各項の大きさは

$$|z_n| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となっているのです。

$|z_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$ だからといって，無限個足したものが発散しないとは限りませんが，絶対収束するような級数では，無限個足しても有限な値にとどまるくらい十分早く 0 になっているわけです。

正の値と負の値が適当に打ち消し合って収束しているのではなく，大きさそのものが 0 に近づくせいで収束しているので，次の2 つの定理が導かれることになります。

$\wp\heartsuit\wp$

定理 1.2.2. 絶対収束する級数は，その項の順序をどのように入れ替えても常に収束し，その和は一定である。

$\wp\heartsuit\wp$

定理 1.2.3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|v_n|$ が収束し $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n = u$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}v_n = v$ であるとき

$$w_0 = u_0 v_0 \tag{1.34}$$
$$w_1 = u_1 v_0 + u_0 v_1 \tag{1.35}$$
$$w_2 = u_2 v_0 + u_1 v_1 + u_0 v_2 \tag{1.36}$$
$$\vdots$$
$$w_n = u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \cdots + u_0 v_n \tag{1.37}$$
$$\vdots$$

とおけば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ は収束し

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = uv \tag{1.38}$$

となる。

ここで現れた級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ はコーシー（ Cauchy ）の乗積とかコーシーの乗積級数と呼ばれています。

このように絶対収束する級数では，足す順番を変えたり，級数同士の和や積を計算する場合に分配の法則などを使うことができます。

えっと，足す順番などを変えるだけで，なぜ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ が uv になるのか分からないという人がたまにいるので，念のため少し計算を書いておきます[11]。

$$uv = u\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u v_n \tag{1.39}$$

[11] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} w_n = uv$ を証明しているのではありません。証明ならもっと真面目にやらないと ...。

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} u_m\right) v_n \tag{1.40}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_m v_n \tag{1.41}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{r} u_{r-n} v_n \tag{1.42}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} w_r \tag{1.43}$$

式 (1.40) から 式 (1.41) に移るときは注意が必要です。式 (1.40) は足す順番がはっきり 決まっていますが，式 (1.41) のような 書き 方では足す順番があまり はっきり 決まっていないのです。ですから 式 (1.40) を 式 (1.41) に変形してよいのは絶対収束している 場合のように 足す順番を 自由に 入れ替えてよい 場合だけなのです。

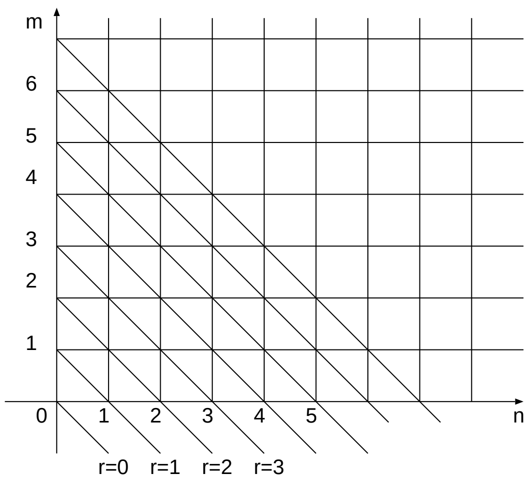


図 1.4:

さて，式 (1.41) で n と m の足す順番を 気にしなくてよいなら，n と m は図 1.4 の交点の座標を 足していけばよいことになります。

ここで $r = n + m$ と 置いて，r の値ごとに 交点を 分類してみましょう。

$r = 0$ のときは $(n, m) = (0, 0)$ だけ，
$r = 1$ のときは $(n, m) = (0, 1)$ と $(1, 0)$，
$r = 2$ のときは $(n, m) = (0, 2)$ と $(1, 1)$ と $(2, 0)$，
$\vdots$

このように r で分類して全ての交点について足し 合わせると 式 (1.42) になります。

式 (1.41) のようなものを 式 (1.42) のように 変形することは，結構あちこちで必要になりますから 今の中に 慣れておいた 方がよいでしょう。コツは面倒がらずに 図 1.4 のようなものを 描いて 考えることです。

1.2.4 無限級数の収束判定方法

級数が絶対収束しているならば足す順番などを 気にしなくてよいということですが，それでは絶対収束しているかどうかはどうやったら 分かるのでしょうか？

級数が収束しているかどうかを 調べる 方法としては，次の3 つの方法があります。

$\wp\heartsuit\wp$

定理 1.2.4 (比較判定法)**.** $|z_n| \leqq a_n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ であり $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するときは $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ は絶対収束する。

定理 1.2.5 (コーシー・アダマール(**Chauchy-Hadamard**)の判定法(根による判定法))**.** $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ とするとき

$$\begin{array}{lll}
\rho < 1 & \text{ならば} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{は絶対収束する。} \\
\rho > 1 & \text{ならば} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{は発散する。} \\
\rho = 1 & \text{ならば} & \text{この方法では判定できない。}
\end{array}$$

定理 1.2.6 (ダランベール(**d'Alembert**) の判定法(比による判定法))**.** $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ とするとき

$$\begin{array}{lll}
\rho < 1 & \text{ならば} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{は絶対収束する。} \\
\rho > 1 & \text{ならば} & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{は発散する。} \\
\rho = 1 & \text{ならば} & \text{この方法では判定できない。}
\end{array}$$

さて,まじめな証明はしませんが何故これで収束の判定ができるのか その心だけでも説明しておきましょう。

比較判定法の心

比較判定法は直感的に分かるでしょうね? なぜかというと式 (1.33) で書いたように絶対値を足していくと必ず和は増えていきます。

$$|z_1| \leqq |z_1|+|z_2| \leqq |z_1|+|z_2|+|z_3| \leqq |z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4| \leqq \ldots \quad (1.44)$$

ところが今は各項が $|z_n| \leqq a_n$ なのですから,必ず

$$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| \leqq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| \qquad (n=1,2,3,\ldots) \quad (1.45)$$

となります。従って $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ となり,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ は有限値に収束します [12]。

Chauchy-Hadamard の判定法の心

次に Chauchy-Hadamard の判定法について考えてみます。

絶対値級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ が収束するか否かを考えてみましょう。十分に大きな整数 M を適当に選びます。$|z_1|$ から $|z_M|$ まで足した値 $\displaystyle\sum_{n=1}^{M} |z_n|$ は必ず有限ですね? M がどんなに大きくても,有限な値を有限個足すだけですから,必ず有限な値になるはずです。そこで無限級数を2 つの部分に分けて考えます。

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{M-1} |z_n| + \sum_{n=M}^{\infty} |z_n| \tag{1.46}$$

式 (1.46) の右辺第1 項は有限です。第2 項はどうでしょうか?

第2 項では $1 \ll M \leqq n$ です。ところで $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ ですから n が十分に大きいときは

$$\rho \simeq \sqrt[n]{|z_n|} \qquad (n \gg 1) \tag{1.47}$$

と思ってよいでしょう。従って両辺を n 乗すれば

$$|z_n| \simeq \rho^n \qquad (n \gg 1) \tag{1.48}$$

[12] 絶対値を足していくのだから,途中まで足した値が前の値より小さくなることはないということに注意して下さいね!

が得られます。式 (1.48) を使って第2 項 $\displaystyle\sum_{n=M}^{\infty}|z_n|$ の大きさを評価してみましょう。

$$\sum_{n=M}^{\infty}|z_n| \simeq \sum_{n=M}^{\infty}\rho^n \tag{1.49}$$

$$= \rho^M\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \tag{1.50}$$

これは公比が ρ の等比級数ですから $\rho<1$ のときには収束します。

という訳で $\rho<1$ のときには絶対値級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ は収束しそうですね?

d'Alembert の判定法の心

d'Alembert の判定法の場合も Chauchy-Hadamard の判定法と同じように考えることができます。

やはり 1 より十分に大きな整数 M を選んで絶対値級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ を分離します。

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=1}^{M-1}|z_n| + \sum_{n=M}^{\infty}|z_n| \tag{1.51}$$

第2 項では $1\ll M\leqq n$ ですから，$\rho=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}$ より

$$\rho \simeq \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} \qquad (n\gg 1) \tag{1.52}$$

よって

$$|z_{n+1}| \simeq \rho|z_n| \tag{1.53}$$

$$\simeq \rho^2|z_{n-1}| \tag{1.54}$$

$$\vdots$$

$$\simeq \rho^{n+1-M}|z_M| \tag{1.55}$$

従って式 (1.51) の第2 項は

$$\sum_{n=M}^{\infty}|z_n| \simeq |z_M|\sum_{n=M}^{\infty}\rho^{n-M} \tag{1.56}$$

$$= |z_M|\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \tag{1.57}$$

となり，やはり公比が ρ の等比級数ですから $\rho<1$ のときには収束します。

1.2.5 べき級数（整級数）

前節で複素数の級数の性質を見てきましたが，そこでは足される各項 z_n は複素数の定数と思っていました。今，実部と虚部が x と y であるような複素数の変数 $z=x+iy$ を考えて，z_n が z の関数であるような級数（関数項級数）を作ってみましょう。といっても，我々はまだ複素数の足し算と掛け算しか知りませんから，掛け算を使って次式のような級数を作ることにします。

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad (z=x+iy) \tag{1.58}$$

ここで c_n，a は複素数の定数であり，c_n は**係数**，a は級数の**中心**と呼ばれます。

このような級数を**べき級数**とか**整級数**と呼びます。

式 (1.58) で表されるべき級数は z の値を変えれば各項の値が変わりますから，z の値によって収束したり発散したりします。このべき級数の収束に関しては次のとってもとってもとっ〜〜〜〜〜ても大切な定理があります。

$\wp\heartsuit\wp$

定理 1.2.7 (べき級数の収束)**.** 点 $z=z_0$ で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ が収束するとき，$|z-a|<|z_0-a|$ である全ての z に対してこの級数は絶対収束する（図 *1.5* 参照）。

証明の雰囲気

この定理の証明の雰囲気はだいたい以下のような感じです。

$z = z_0$ では級数は収束しているのだから，十分に大きな値を M とすれば

$$|c_n(z_0 - a)^n| \ < \ M \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{1.59}$$

と考えられます。従って $|z-a| < |z_0 - a|$ の z に対しては

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z-a)^n| \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z_0-a)^n| \, \frac{|z-a|^n}{|z_0-a|^n} \tag{1.60}$$

$$< \ M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z-a}{z_0-a} \right|^n \tag{1.61}$$

という不等式が成り立ちます。

ところで $|z-a| < |z_0-a|$ ですから $\frac{|z-a|}{|z_0-a|} < 1$ より式 (1.61) の等比級数は収束します。従って級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は絶対収束します。

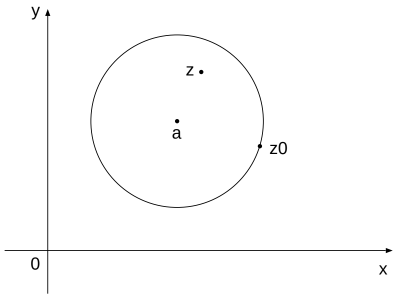


図 1.5:

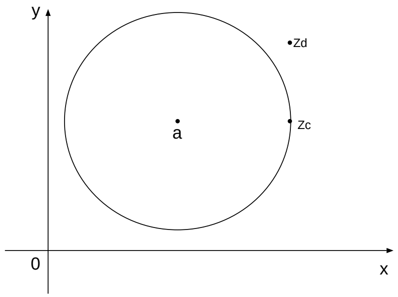


図 1.6:

収束円と収束半径

ところで，式 (1.58) のべき級数が点 $z = z_0$ で収束するなら $|z-a| < |z_0-a|$ である全ての z で絶対収束するということは，このべき級数が収束する複素平面上の点を全て集めた集合は**複素平面全体**か **a を中心とするある半径 R の円の内部**ということになりますね？

なぜかというと図 1.6 のように，べき級数が収束しない点のうち a に最も近い点を z_c とすると，z_c より無限小だけ a に近い点 z'_c では級数は収束します。従って定理より $|z-a| < |z_c - a|$ を満たす全ての z（ a を中心とする半径 $|z_c - a|$ の円の内部の点 ）で絶対収束することになります。

念のために言っておくと，この円の外の点で収束することはありえません。もし円の外の点 z_d で収束するなら，$|z_c - a| < |z_d - a|$ ですから定理より z_c でも絶対収束することになってしまいますから ...。

このようにべき級数が収束する全ての点からなる集合である円を**収束円**と呼び，この円の半径 R を**収束半径**と呼びます。

$$|z-a| \ < \ R \quad \text{では絶対収束}$$
$$|z-a| \ > \ R \quad \text{では発散}$$

収束半径の求め方

さて，べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ は中心 a の円の内部の z で収束することが分かりましたが，それではこの円の半径 R（ 収束半径）はどうやったら分かるのでしょう？ これについては次の2 つの定理があります。

℘♡℘

定理 1.2.8 (Chauchy-Hadamard の公式). 数列 $\sqrt[n]{|c_n|}$ が収束するとき $\rho \equiv \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ とすると，収束半径 R は $R = \dfrac{1}{\rho}$ で与えられる。

定理 1.2.9. 極限値 $\rho \equiv \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ が存在するとき，収束半径 R は $R = \dfrac{1}{\rho}$ で与えられる。

ちなみに，$\rho = 0$ のときは $R \to \infty$ ，つまり複素平面全体で収束していると考えられます。

何故これらの式で収束半径が求められるのかを理解することは，わりと簡単です。前節の級数の収束判定の部分を思い出してください。要するに級数が収束するかどうかは，最初の方の足し算はどうでもよくて，n が十分に大きくなってから無限大まで足し合わせた部分が収束するか否かで決まったのです。十分大きな値を M として $\displaystyle\sum_{n=M}^{\infty} c_n(z-a)^n$ について考えてみましょう。

Chauchy-Hadamard の公式では $\rho \equiv \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ が存在すると仮定しています。今，$1 \ll M \leqq n$ より $\rho \simeq \sqrt[n]{|c_n|}$。従って $\rho^n \simeq |c_n|$ と考えられます。よって

$$\sum_{n=M}^{\infty} |c_n(z-a)^n| \simeq \sum_{n=M}^{\infty} \rho^n |z-a|^n \tag{1.62}$$

上式の右辺は公比 $\rho|z-a|$ の等比級数ですから $\rho|z-a| < 1$ のときに収束します。従って，べき級数は $|z-a| < \dfrac{1}{\rho}$ で収束することになり，収束半径は $R = \dfrac{1}{\rho}$ になります。

定理 1.2.9 についても同様ですから，皆さん自分で考えてみてください。

べき級数の一意性

この節を終える前に，もう一つべき級数に関する定理を紹介しておきます。

$\wp\heartsuit\wp$

定理 1.2.10 (べき級数の一致の定理). 2 つのべき級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ と $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ が領域 $D = \{\ z \mid |z| < R,\ R > 0\}$ で収束し，かつ領域 D の全ての z について $f(z) = g(z)$ であるなら，この2 つの級数は一致する。
つまり

$$a_n = b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.63}$$

この証明は簡単ですね。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \tag{1.64}$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \tag{1.65}$$

と書いて D 内部では $f(z) = g(z)$ ですから辺々引き算すると

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)z + (a_2 - b_2)z^2 + \cdots \qquad (|z| < R) \tag{1.66}$$

が得られます。

式 (1.66) は $z = 0$ でも成立していますから，$z = 0$ と置けば

$$0 = a_0 - b_0 \tag{1.67}$$

が得られます。

この結果を式 (1.66) に代入すれば

$$0 = (a_1 - b_1)z + (a_2 - b_2)z^2 + \cdots \qquad (|z| < R) \tag{1.68}$$

となりますが，両辺を z で割れば

$$0 = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)z + \cdots \qquad (|z| < R) \tag{1.69}$$

となります。

式 (1.69) で $z = 0$ と置けば

$$0 = a_1 - b_1 \tag{1.70}$$

が得られます。

以下同様にすれば結局

$$a_n = b_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.71}$$

となります。

1.3　複素関数

1.3.1　複素関数

前節までで色々な複素関数を定義する準備が整いました。いよいよ複素数の指数関数や三角関数を定義するわけですが，その前に一応「 複素関数」の意味について確認しておきましょう。

実数の変数 x, y を実部と虚部に持つ複素数の変数 $z = x + iy$ を考えます。

複素数 z の値に対して，別の複素数 w を対応させる規則が与えられているとき w は z の関数であるといいます。この対応関係を f で表して $w = f(z)$ などと書きます。

この関数は複素数に別の複素数を対応させるものなので**複素関数**と呼ばれます。

今のところ我々は複素数の足し算と掛け算しかできないので，以下のような簡単な複素関数の例しか知りません。

例

$$w = z \tag{1.72}$$

$$w = z^2 + c \qquad (\text{ c は複素数の定数}) \tag{1.73}$$

$$w = (az + b)^3 \qquad (\text{ a, b は複素数の定数 }) \tag{1.74}$$

$$w = \frac{2}{z^4 + c} \qquad (\text{ c は複素数の定数 }) \tag{1.75}$$

さて，それでは前節でやったべき級数を利用して様々な複素関数を作っていきましょう。

1.3.2　指数関数

実数 x の指数関数をマクローリン（ Maclaurin ）展開すると次式のようになります [13]。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (|x| < \infty) \tag{1.76}$$

右辺の級数は $|x|$ が有限値であれば常に収束します。

さて，複素数 z の指数関数を式 (1.76) と同じ形のべき級数で定義することにしましょう。

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1.77}$$

このようにべき級数で定義すると，べき級数が収束するかどうかが問題になりますが，実はこの級数は無限遠点を除いた複素平面全体で絶対収束することが簡単に分かります。

まずは複素平面の実軸上の点を考えて下さい。実軸上では $z = x$ なので式 (1.77) は

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{1.78}$$

となります。この式の右辺のべき級数は実数の指数関数なので x が有限値であれば常に収束します。従って式 (1.77) のべき級数は実軸上の全ての z で収束します。

そこで前節のべき級数の収束に関する定理を思い出してください。実軸上の任意の点を x_0 とするとべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は $z = x_0$ で収束しますから，**原点を中心とする半径 $|x_0|$ の円の内部にある全ての z について絶対収束します。**（ 図 1.7 参照）

x_0 は実軸上の任意の点でしたから，x_0 の値を大きくすれば円の半径もいくらでも大きくできます。従ってべき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ は無限遠点を除いた複素平面全体で絶対収束することが分かりました。

[13] もちろん $0! = 1$ であることは知っていますね?

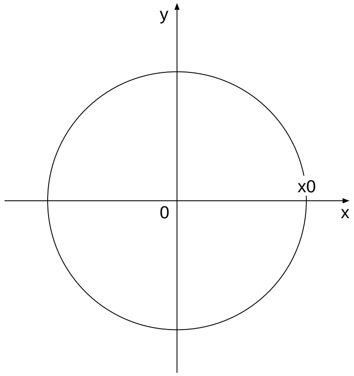


図 1.7:
円の内部で絶対収束する。

これで式 (1.77) で z の指数関数を定義できることが分かりましたが，ここでとってもとっても重要な注意をしておきます。

e^z は $e = 2.71828\ldots$ の z乗ではありません!!!

従って，e^z を e の z 乗と読んではいけません。これについては，もう少し後で z 乗という関数を定義してから述べることにします。とりあえず今は「e^z は e の z 乗ではないんだ」と思っていてください。

ちなみに，指数関数を e^z と書くかわりに $\exp(z)$ と書くこともあります。こちらの方が e の z 乗と混乱しなくてよいかもしれません。

さて，複素数 z の指数関数 e^z は定義できましたが，このように定義された e^z は実数の指数関数 e^x と同じような性質を持っているのでしょうか？ **同じ記号で書いたからといって，全く同じ性質を持っているとは限りません**[14]。面倒臭がらずに定義式 (1.77) を使って色々調べてみましょう。

指数関数の性質といえば，何といっても先ずは指数法則でしょう。最初に，指数法則が成立するかどうかを調べてみます。

[14] これ，結構勘違いする人がいるんですよね ....。

任意の複素数 u と v を考えます。

$$
\begin{aligned}
e^{u+v} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u+v)^n}{n!} && (1.79)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}u^r v^{n-r} && (1.80)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{n}\frac{u^r v^{n-r}}{r!(n-r)!} && (1.81)\\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{u^r v^{n-r}}{r!(n-r)!} && (1.82)\\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{u^r}{r!}\sum_{n=r}^{\infty}\frac{v^{n-r}}{(n-r)!} && (1.83)\\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{u^r}{r!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{v^m}{m!} \qquad (m \equiv n-r) && (1.84)\\
&= e^u e^v && (1.85)
\end{aligned}
$$

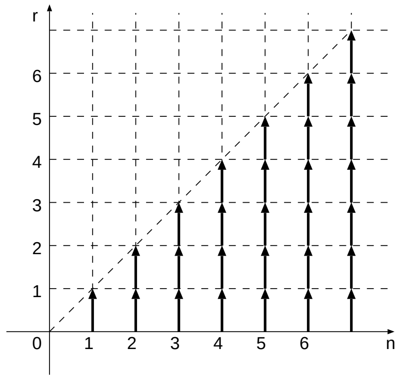


図 1.8:
n を固定して最初に r について足す。

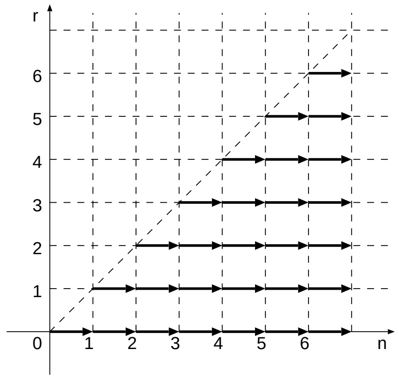


図 1.9:
r を固定して最初に n について足す。

少し計算の説明をしておきましょう。

式 (1.79) は指数関数の定義式そのものですね。この式の $(u+v)^n$ の部分を2 項定理で展開したものが式 (1.80) です。そして $n!$ を分母分子で約分すれば式 (1.81) になります。

さて，式 (1.81) には n と r の和がありますが，この式では，先ず n を固定しておいて先に r について足してから，次に n について足しています(図 1.8 参照)。この級数は絶対収束しているはずですから，足し算の順番を変えることができます。そこで図 1.9 のように，r を固定しておいて先に n について足してから，次に r について足してみると式 (1.82) になります。

ここまできたら後は簡単ですね。$\frac{u^r}{r!}$ は n を含んでいないので n の和の外に出して，$m=n-r$ と置いてやればおしまいです。

というわけで，任意の複素数 u, v に対して次の指数法則が成立することが分かりました。

$$e^{u+v}=e^u e^v \tag{1.86}$$

今導いた指数法則を利用すると様々な関係式を導くことができます。

とりあえず複素数 $z=x+iy$ の指数関数を変形してみると

$$\begin{aligned}
e^z &= e^{x+iy}=e^x e^{iy} && (1.87)\\
&= e^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^n}{n!} && (1.88)\\
&= e^x\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} && (1.89)\\
&= e^x\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}y^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}i\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}y^{2n+1}\right\} && (1.90)\\
&= e^x(\,\cos y+i\sin y\,) && (1.91)
\end{aligned}$$

となります。

従って，e^z は x, y を使って以下のように書けることが分かりました。

$$e^z=e^{x+iy}=e^x(\,\cos y+i\sin y\,) \tag{1.92}$$

前に書いたように，数学科以外の学生のために書かれた易しめの本では，この式で指数関数を定義していたりします。べき級数 (1.77) で定義するより，

式 (1.92) で定義する方がよいと思う人はこちらを定義式だと思ってもかまいません。

ただ私には，z が入っていない式 $e^x(\,\cos y+i\sin y\,)$ で e^z を定義されても，z の関数のように見えなくて困るんですよね。後で e^z を z で微分したり積分したりしなくちゃならないし。$e^x(\,\cos y+i\sin y\,)$ を見て z で微分できそうに見えますか?

それはさておき，式 (1.92) から e^z の実部，虚部，絶対値や偏角などが分かります。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\{e^z\} &= e^x\cos y && (1.93)\\
\mathrm{Im}\,\{e^z\} &= e^x\sin y && (1.94)\\
|e^z| &= e^x && (1.95)\\
\arg e^z &= y && (1.96)
\end{aligned}$$

また，式 (1.92) の複素共役な式を作れば

$$(e^z)^*=e^x(\,\cos y-i\sin y\,)=e^x(\,\cos(-y)+i\sin(-y)\,)=e^{x-iy}=e^{z^*} \tag{1.97}$$

ですから

$$(e^z)^*=e^{z^*} \tag{1.98}$$

であることが分かります [15]。

式 (1.92) で $z=i\theta$ (θは実数) と置けば**オイラー(Euler)の公式**が得られます。

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \qquad \text{オイラーの公式} \tag{1.99}$$

ところで z を極形式で表してからオイラーの公式を使えば

$$z=x+iy=|z|(\,\cos\theta+i\sin\theta\,)=|z|e^{i\theta} \qquad (\theta=\arg z) \tag{1.100}$$

となり，指数関数を使った極形式の表式が得られます。

[15] もちろん e^z の定義式 (1.77) の両辺の複素共役な式を作って導いたのでもよいですよ。

複素数の計算には，三角関数を使った極形式より指数関数を使った極形式の方が何かと便利ですから，こちらの形を覚えましょう。どこが便利かというと，まず，この方が短く書けることと，そして掛け算や割り算のときに指数法則で簡単に計算できるという点です。

$$z_1 = |z_1|e^{i\theta_1} \tag{1.101}$$
$$z_2 = |z_2|e^{i\theta_2} \tag{1.102}$$

とおくと

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.103}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.104}$$

三角関数で表して加法定理を用いるより，ずっとすっきりしていると思いませんか [16]？

1.3.3 三角関数

次に複素数 z の三角関数を定義してみましょう。

実数 x の三角関数をマクローリン展開すると次式のようになります。

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad (|x|<\infty) \tag{1.105}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \qquad (|x|<\infty) \tag{1.106}$$

右辺の級数は $|x|$ が有限値であれば常に収束します。

指数関数の場合と全く同様に，右辺のべき級数の x を z と置き換えることで複素数 z の三角関数を定義しましょう。

$$\sin z \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \tag{1.107}$$
$$\cos z \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} \tag{1.108}$$

[16] 私は加法定理なんて覚えていません。指数法則を覚えているだけで十分!

このように定義すれば，指数関数の場合と同様に，複素平面の実軸上で級数は収束しますから，無限遠点を除いた複素平面全体でこのべき級数は絶対収束します。

定義式 (1.107)，(1.108) を見れば分かるように，$\sin z$ は z の奇数次の項だけで書かれていますから z の奇関数であり，$\cos z$ は z の偶数次の項だけで書かれていますから z の偶関数になります。

$$\sin(-z) = -\sin z \tag{1.109}$$
$$\cos(-z) = \cos z \tag{1.110}$$

ところで，指数関数の話をしたところで，やたらと三角関数が出てきたことを覚えていますね？ 実は複素数の範囲で考えると，指数関数と三角関数はとても密接な関係があるのです。(ほとんどおんなじもの!)

指数関数の定義式を使うと

$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \tag{1.111}$$
$$= \cos z + i\sin z \tag{1.112}$$
$$e^{-iz} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!} \tag{1.113}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(-z)^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(-z)^{2n+1} \tag{1.114}$$
$$= \cos z - i\sin z \tag{1.115}$$

となります。

この2 つの式を組み合わせれば，三角関数は指数関数を使って以下のように書けることが分かります。

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \tag{1.116}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \tag{1.117}$$

ここで z は実数ではなく，任意の複素数だということに注意してください。

特に z が実数の場合には $z=x$ と置けば

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \tag{1.118}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \tag{1.119}$$

となり，オイラーの公式 (1.99) を少し変形したものになります。こちらの式もオイラーの公式と呼ばれています。

さて，三角関数を定義できたら，やっぱり加法定理などが成り立つか調べてみるんでしょうかねぇ[17]。証明の方法は色々あるでしょうが，ここでは指数関数に書き換えて導いてみます。

任意の複素数を $u,\ v$ とします

$$\cos(u+v) = \frac{e^{i(u+v)}+e^{-i(u+v)}}{2} = \frac{1}{2}(e^{iu}e^{iv}+e^{-iu}e^{-iv}) \tag{1.120}$$

$$= \frac{1}{2}\{(\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v) + (\cos u - i\sin u)(\cos v - i\sin v)\} \tag{1.121}$$

$$= \cos u\cos v - \sin u\sin v \tag{1.122}$$

従って

$$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v \tag{1.123}$$

となります。同様にして

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v \tag{1.124}$$

も導くことができます。

このように，複素数の変数に対しても加法定理はちゃんと成立しますから，正確に覚えていられる人は使ってもかまいません[18]。

順番が少し違うような気もしますが，次に三角関数の最も代表的な性質を導いてみましょう。式 (1.123) で $u=z,\ v=-z$ と置くと

$$\cos(z-z) = \cos z\cos(-z) - \sin z\sin(-z) \tag{1.125}$$

[17]授業でここの話をする時にしか加法定理なんて使わないから，覚えてないんですよね。全部指数法則で済ませてしまう。

[18]覚える必要もないのに無理に覚えようとして間違った式を書く人が多くて困るんですよ。

ところで $\cos(z-z)=\cos 0 = 1$ ですから

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \tag{1.126}$$

という，とってもなじみ深い公式が得られます[19]。

ここで注意しておきますが，z は一般に複素数ですから $\cos^2 z$ も $\sin^2 z$ も，どちらも複素数です。z の値を変えると $\cos^2 z$ の実部も虚部も複雑に変化します。単純な周期関数なんかではありません。にもかかわらず，$\cos^2 z$ と $\sin^2 z$ を足し合わせると虚部はちょうど打ち消し合い，実部はちょうど1 になると言っているのです。

なお，三角関数の実部と虚部がどのように変化するかは，次の節で話すことにします。

ここまでは $\sin z$ と $\cos z$ の話だけをしてきましたが，他の三角関数は $\sin z$ と $\cos z$ を組み合わせて定義すればよいでしょう。

$$\sec z \equiv \frac{1}{\cos z} \tag{1.127}$$

$$\mathrm{cosec}\ z \equiv \frac{1}{\sin z} \tag{1.128}$$

$$\tan z \equiv \frac{\sin z}{\cos z} \tag{1.129}$$

$$\cot z \equiv \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\tan z} \tag{1.130}$$

1.3.4 双曲線関数

指数関数と三角関数の間に密接な関係があるというお話をしましたが，実はもうひとつこれらの関数と切っても切れない関係がある関数があります。それは双曲線関数です。指数関数と三角関数は高校で習いますが，双曲線関数は高校で習わないので，あまりなじみがないかもしれませんね[20]。最初に実数の双曲線関数について簡単に復習しておきます。

[19]この公式を導くには別に加法定理を使う必要はありません。$\cos z$ と $\sin z$ を指数関数で表して2 乗して足せば簡単に導けます。自分で確かめてみてください。

[20]物理を勉強していると，あちこちで双曲線関数が出てきます。物理を勉強する人は今の中に慣れておきましょう。

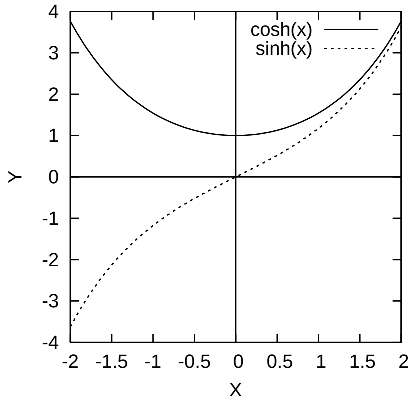


図 1.10: $\cosh x$ と $\sinh x$

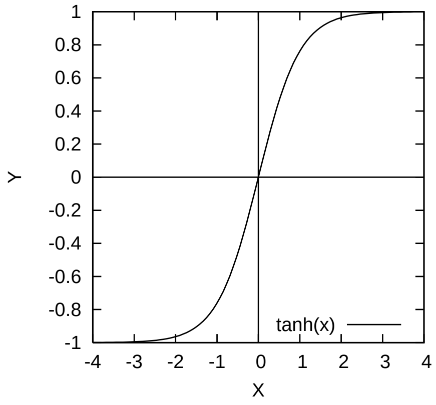


図 1.11: $\tanh x$

実数 x の双曲線関数は以下のようなものです。

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{1.131}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1.132}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{1.133}$$

$\cosh x$ や $\sinh x$ はべき級数で表した式と指数関数で表した式の，どちらを定義式と思ってもかまいません。どちらか好きな方で定義して，もう一方の式は定義から導かれるものと思ってください。

これらの関数を図示したものが図 1.10 と図 1.11 です。$\cosh x$ は偶関数で $\sinh x$ は奇関数であり，どちらも $|x| \to \infty$ で発散します。一方 $\tanh x$ は奇関数で，$|x| \to \infty$ のとき ± 1 になります。

式 (1.131) と (1.132) を組み合わせると指数関数になります。

$$e^x = \cosh x + \sinh x \tag{1.134}$$

つまり，指数関数 e^x の偶関数部分が $\cosh x$ で奇関数部分が $\sinh x$ なわけです。

ところで双曲線関数は三角関数と同じような記号で書きますが，三角関数とよく似た次の性質を持っています [21]。

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \tag{1.135}$$

さて，実数の双曲線関数の復習はこれくらいにして，複素数 z の双曲線関数を定義しましょう。ここでも前と同様に，実数の関数の x の部分を複素数 z で置き換えた式で定義することができます。

$$\cosh z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{1.136}$$

$$\sinh z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{1.137}$$

$$\tanh z \equiv \frac{\sinh z}{\cosh z} \tag{1.138}$$

なお，複素数の指数関数は既に定義されていますから「べき級数なんて大嫌いだ！」という人は指数関数で表した式が定義式だと思ってもかまいません。

このように定義すると，実数の双曲線関数と同様に以下の関係式が成立します [22]。

$$e^z = \cosh z + \sinh z \tag{1.139}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \tag{1.140}$$

ところで双曲線関数を指数関数で表した式は三角関数を指数関数で表した式 (1.116)(1.117) によく似ていると思いませんか？　あらためて並べてみると

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

z は任意の複素数ですから，これらの式をちょっと変形すれば

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{(iz)} + e^{-(iz)}}{2} = \cosh(iz) \tag{1.141}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i\,\frac{e^{(iz)} - e^{-(iz)}}{2} = -i\ \sinh(iz) \tag{1.142}$$

[21] $\cosh^2 x$ は $\cosh(x)\cosh(x)$ のことです。
[22] 簡単だから自分で導きましょう。

よって，三角関数は双曲線関数と次の関係で結ばれていることが分かりました。

$$\begin{cases} \cos z = \cosh(iz) \\ \sin z = -i\ \sinh(iz) \end{cases} \tag{1.143}$$

同様にすれば逆に双曲線関数を三角関数で表すこともできます[23]。

$$\begin{cases} \cosh z = \cos(iz) \\ \sinh z = -i\ \sin(iz) \end{cases} \tag{1.144}$$

このように，**複素数の範囲で考えると三角関数と双曲線関数はほとんど同じものなのです！**

さて，この辺で x や y を変化させたときに三角関数や双曲線関数がどのように振る舞うかを調べてみましょう。三角関数と双曲線関数はほとんど同じものですから，皆さんになじみ深い三角関数の方を調べてみます。

$\cos z = \cos(x+iy)$ ですから，複素平面の実軸上では $z = x$ であり，$\cos z = \cos x$ となります。

一方，虚軸上では $z = iy$ ですから $\cos z = \cos(iy) = \cosh y$ となり，双曲線関数になります！

$$\cos z = \begin{cases} \cos x & \text{実軸上} \\ \cosh y & \text{虚軸上} \end{cases} \tag{1.145}$$

三角関数というと，どうしても周期関数を思い浮かべるでしょうが，実は虚軸上では周期的に変化してはいないのです。

実軸上と虚軸上以外ではもっと複雑な式になります[24]。

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos(x+iy) = \frac{1}{2}\left\{ e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)} \right\} && (1.146)\\
&= \frac{1}{2}\left\{ e^{ix-y} + e^{-ix+y} \right\} && (1.147)\\
&= \frac{1}{2}\left\{ e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x) \right\} && (1.148)\\
&= \frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})\cos x - \frac{i}{2}(e^{y}-e^{-y})\sin x && (1.149)\\
&= \cosh(y)\ \cos(x) - i\ \sinh(y)\ \sin(x) && (1.150)
\end{aligned}$$

[23] 自分で導いてみましょう。
[24] 加法定理を使って変形してもよいでしょう。

同様にすれば $\sin z$ の式も導けます。結局，$\cos z$ と $\sin z$ は以下のように表されることが分かります。

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cosh(y)\ \cos(x) - i\ \sinh(y)\ \sin(x) && (1.151)\\
\sin z &= \cosh(y)\ \sin(x) + i\ \sinh(y)\ \cos(x) && (1.152)
\end{aligned}$$

これで前節の宿題だった「三角関数の実部と虚部を求める」も片づきました。実部，虚部ともに，x 方向には周期的に変化しますが，y 方向には周期的ではないことに注意してください。図 1.12 と図 1.13 に $\cos z$ の実部と虚部の振る舞いを描いておきました。

1.3.5 対数関数

前節までは実数 x の関数 $f(x)$ をべき展開（マクローリン展開）して，この級数の x を z で置き換えたべき級数の式で複素関数 $f(z)$ を定義してきました。

この節では複素数の対数関数を定義したいのですが，残念ながら $\log x$ は x のべき級数で表せません。従って $\log z$ をべき級数で定義することはできませんから，ここでは別の方法で定義します。

正の実数 x の対数関数 $\log x$ は指数関数 e^x の逆関数として定義されました。

℘♡℘

定義 1.3.1 (実数の対数関数). $x = e^y$ のとき $y \equiv \log x$ と定義する。

つまり，x の値が与えられたら，e^y が x と同じになるような y を捜して，この y を対数関数 $\log x$ と呼んだわけです[25]。

複素数 z に対しても同様に対数関数を定義することにしましょう。

[25] 対数関数は $\log x$ と書かないで $\ln x$ と書く場合もあります。

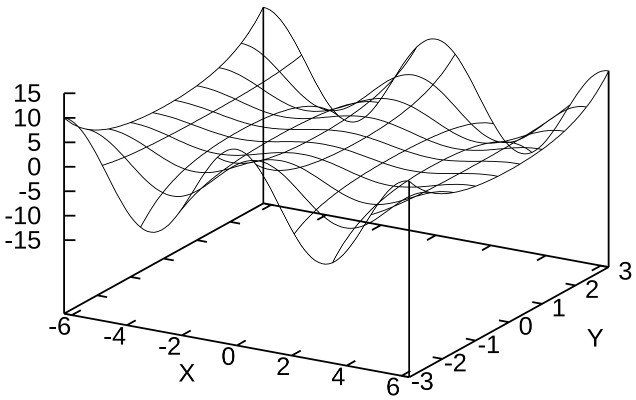


図 1.12: $\cos z$ の実部

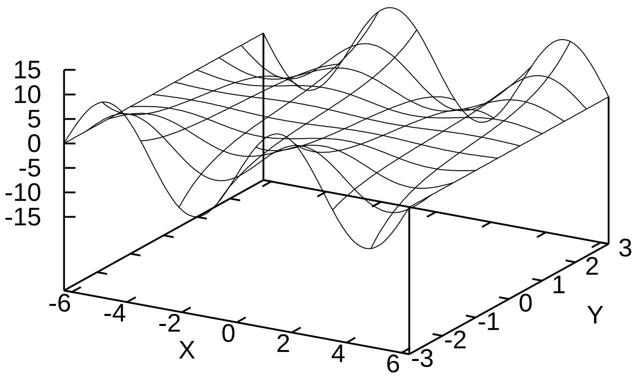


図 1.13: $\cos z$ の虚部

℘♡℘

定義 1.3.2 (**複素数の対数関数**). $z = e^w$ のとき $w \equiv \log z$ と定義する。

このように定義しておくと，複素数の対数関数は実数の対数関数と同じようなものになりそうに思えますが，ところが色々と違ってくるのです。特に注意しなければいけないことは

$\log z$ の z を実数にしても
実数で定義された対数関数と一致しない!!

という点です。

例えば $\log z$ で $z = 2$ の場合を調べてみましょう。はっきり区別するために以下では実数で定義された対数関数は $\log_e x$ のように書くことにします[26]。すると

$$z = 2 = e^{\log_e 2} \tag{1.153}$$

ですから $w = \log 2 = \log_e 2$ と思うかもしれません。しかし一般に

$$e^{2n\pi i} = 1 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{1.154}$$

ですから，実は

$$z = 2 = e^{\log_e 2} = e^{\log_e 2 + 2n\pi i} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{1.155}$$

なのです。従って，正しくは

$$\log 2 = \log_e 2 + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{1.156}$$

としなければならないのです。

このように**複素関数の対数関数 $\log z$ は多価関数になります!**

[26] このように書くのは一般的な表記ではありません!! このテキストのこの部分だけです。このテキストでもすぐ後では一般的に通用する別の表記を用います。なお，普通の本では実数の対数関数も複素関数の対数関数も log と書くので，$\log 2$ などが，どちらの意味で書かれているのか分かりません!

例 1.3.1（$\log(1+i)$ のとき）.

$$1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}=e^{\log_e\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i+2n\pi i} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots) \tag{1.157}$$

より

$$\log(1+i)=\log_e\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i+2n\pi i \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots) \tag{1.158}$$

例 1.3.2（$\log(-3)$ のとき）.

$$-3=3e^{\pi i}=e^{\log_e 3+\pi i+2n\pi i} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots) \tag{1.159}$$

より

$$\log(-3)=\log_e 3+(2n+1)\pi i \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots) \tag{1.160}$$

対数関数を複素数の範囲まで拡張すると，負の実数の対数も存在するということに注意してください[27]。

例を見ればだいたい分かったと思いますが，一般に複素数 z が与えられたら，z を極形式で書いてみます。

$$z=|z|e^{i\theta}=e^{\log_e|z|+i\theta} \tag{1.161}$$

そうすれば指数関数の引数部分が対数関数になります。

$$\log z=\log_e|z|+i\theta \tag{1.162}$$

問題は z の偏角 θ の値が一つではないということです。つまり，ある θ の値に 2π の整数倍を加えても，同じ z の値を与えるのです。複素平面に図を描いてみれば，θ の値を決めるときに，原点のまわりを何周もしてから z にたどり着いたのでもよいということです。

いつも複数の値を考えるのでは何かと面倒なので，偏角 θ の値を $-\pi<\theta\leqq\pi$ の範囲に限った場合の対数を考えて**対数の主値**と呼び $\mathrm{Log}\ z$ と書くことにします。

$$\mathrm{Log}\ z=\log_e|z|+i\theta \qquad (-\pi<\theta\leqq\pi) \tag{1.163}$$

式 (1.163) では一応 $-\pi<\theta\leqq\pi$ と書きましたが，$\mathrm{Log}\ z$ の場合には断らなくても必ず偏角は $-\pi<\theta\leqq\pi$ の範囲で考えています。

[27] 平気で「$\log(-3)$ は存在しません」なんて答える人がけっこういるんですよ。

例 1.3.3.

$$\mathrm{Log}\ 3=\log_e 3$$

例 1.3.4.

$$\mathrm{Log}\ (-3)=\log_e 3+\pi i$$

このように z が正の実数 x の場合には対数の主値 $\mathrm{Log}\ z=\mathrm{Log}\ x$ は実数で定義された対数関数 $\log_e x$ と等しくなります。

$$\mathrm{Log}\ x=\log_e x \qquad (x>0) \tag{1.164}$$

そこで以下では $\log_e x$ と書かずに $\mathrm{Log}\ x$ と書くことにします[28]。

さて $w=\mathrm{Log}\ z$ の実部を u，虚部を v と置き，z を変化させたときに w がどのように変化するかを調べてみましょう。

$$w=u+iv=\mathrm{Log}\ z=\mathrm{Log}\ |z|+i\theta \qquad (-\pi<\theta\leqq\pi) \tag{1.165}$$

ですから

$$\begin{cases} u=\mathrm{Log}\ |z| \\ v=\theta \end{cases} \tag{1.166}$$

となります。

$z=x+iy$ の複素平面で $|z|=$(一定) として偏角 θ を変化させれば，原点を中心にした半径 $|z|$ の円になります（図 1.14 参照）。偏角 θ は $-\pi<\theta\leqq\pi$ と制限されているので，z 平面の負の実軸を横切るときに値が不連続に変化してしまいます[29]。そこで z 平面の負の実軸に切れ目があると考えて，この切れ目を**切断（cut）**と呼びます。

さて，z 平面で円を描くとき $w=u+iv$ 平面では $u=\mathrm{Log}\ |z|=$(一定) で，$v=\theta$ が変化していきますから，v 軸に平行な直線が描かれます（図 1.15 参照）。z 平面での円の半径が $|z|>1$ のとき，$u=\mathrm{Log}\ |z|>0$ ですから，w 平面では $u>0$ の領域に直線が引かれます。同様にして，$|z|=1$ の円は v

[28] 主値を Log と書くのは一般的に通用する書き方です。

[29] z の値は連続的に変化していますよ。不連続なのは偏角 θ です。

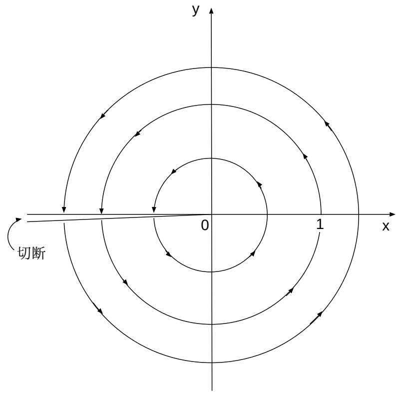


図 1.14: $z = x + iy$

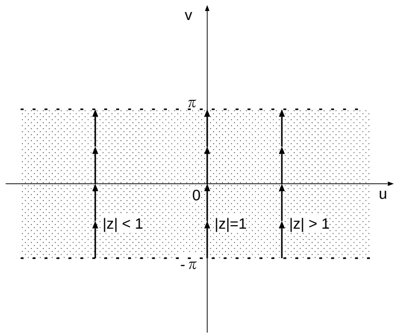


図 1.15: $w = u + iv$

軸上の直線に対応し，$|z| < 1$ の円は $u < 0$ の領域の直線に対応します。従って，z 平面全体は w 平面の $-\pi < v \leqq \pi$ という帯状の領域に対応することになります。

次に一般の対数関数 $\log z$ について考えてみましょう。$\log z$ と $\mathrm{Log}\ z$ の違いは偏角の不定さからくる $2n\pi i$ だけですから

$$\log z = \mathrm{Log}\ z + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots) \tag{1.167}$$

$$= \mathrm{Log}\ |z| + i(\theta + 2n\pi) \qquad (-\pi < \theta \leqq \pi) \tag{1.168}$$

となります。

よって実部は $u = \mathrm{Log}\ |z|$ で主値の場合と同じですが，虚部は $v = \arg z = \theta + 2n\pi$ となり，n の値によって色々な値になります。

$n = 0$ のときは $-\pi < v \leqq \pi$ となり，$\log z$ は主値となります。このときはすでに見てきたように，偏角の値が $-\pi$ から π と定義された z 平面全体が w 平面の帯状の領域 $-\pi < v \leqq \pi$ に射影されました。

$n = 1$ のときは $\pi < \arg z \leqq 3\pi$ となり，$z = x + iy$ の方は偏角の値が π から 3π と定義された新しい z 平面全体を表します。この z 平面全体が w 平面の帯状の領域 $\pi < v \leqq 3\pi$ に射影されます（図 1.17 参照）。

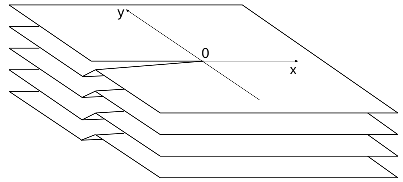


図 1.16: $z = x + iy$ の Riemann 面

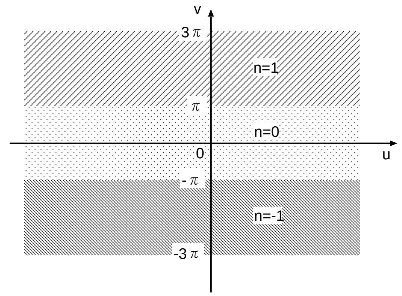


図 1.17: $w = \log z$ の分枝

同様に $n = -1$ のときは偏角の値が -3π から $-\pi$ で定義された別の z 平面全体を表し，この領域が w 平面の帯状領域 $-3\pi < v \leqq -\pi$ に射影されます。

このように n の値を一つ決めると，偏角が $(2n-1)\pi < \arg z \leqq (2n+1)\pi$ で定義された z 平面全体が w 平面の $(2n-1)\pi < v \leqq (2n+1)\pi$ という帯状の領域に射影されています。この帯状領域での $\log z$ の値を**分枝（ branch）**と呼びます。$n = 1$ の分枝とか $n = 2$ の分枝とか ...。

さて n の値を変えると，n の値毎に1 枚の z 平面が必要でした。$n = 0$ の偏角が $-\pi < \arg z \leqq \pi$ と定義された z 平面と $n = 1$ の $\pi < \arg z \leqq 3\pi$ で定義された z 平面とは $\arg z = \pi$ のところ（負の実軸）で連続と考えられますから，$\arg z = \pi$ の所で貼り合わせることにしましょう。

同様に $n = -1$ の z 平面の $\arg z = -\pi$ の部分は $n = 0$ の z 平面の $\arg z \to -\pi$ の部分と連続と考えてよいでしょうから，この部分で貼り合わせます。

このようにして $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ に対応する無限個の z 平面を貼り合わせたものを**リーマン（ Riemann）面**と呼びます（図 1.16）。

リーマン面上の z と $w = \log z$ とは1 対1 に対応しています。

最後になってしまいましたが，$z = 0$ では $\log z$ は定義できません。リーマン面を考えて $z = 0$（原点）の周りを回ると上（下）の z 平面に移動し，

$w = \log z$ の方は別の分枝に行くことになるので，$z = 0$ を**分岐点**(branch point）とか**対数分岐点**と呼びます [30]。

1.3.6 べき乗(累乗，べき関数）

最後に複素数の複素数乗について定義しましょう。

正の実変数 x と実数 a に対しては

$$x^a = \left(e^{\log x}\right)^a = e^{a \log x} \tag{1.169}$$

という関係がありました。

そこで複素数の変数 z と任意の複素数 c に対して

$$z^c \equiv e^{c \log z} \tag{1.170}$$

と定義します。

えっと，式 (1.170) は e の ($c\ \log z$) 乗ではないですよ！ ($c\ \log z$) の指数関数 $\exp(\ c\ \log z\ )$ のことですよ。

さて，このようにべき乗を定義すると以下の点が気になりませんか?

- $c = 2$ のとき z^2 と書くと $z^2 = z \times z$ と解釈されてしまいそうだが，上記の定義の z^2 は $z \times z$ と同じものになっているのか?
  一般に $c = n =$(自然数）の場合，今まで使ってきた表記
  $z^n = \overbrace{z \times z \times z \times \cdots \times z}^{n\ 個}$ と矛盾しないのか?
- $c = -n =$(負の整数）の場合，$z^{-n} = 1/(z \times z \times z \times \cdots \times z)$ との関係は?
- $c = \frac{1}{2}$ のとき，$z^{\frac{1}{2}}$ と書くと，普通は「 2 つ掛けると z になる数」と解釈されるが，はたしてそうなっているのか?
- $\log z$ は一般に多価関数だが，z^c は多価になるのか?

[30] 分枝点と書いてある本もありましたが，普通は分岐点といいます。

z^n の場合

先ず，$c = n = 0$ の場合は定義式 (1.170) は

$$z^c = z^0 = e^{0 \log z} = e^0 = 1 \tag{1.171}$$

となります。0 乗は普通 1 と考えていますから，これで何も困ることはありません。

次に, $c = n = 1$ の場合は定義式 (1.170) と対数関数の定義より

$$z^c = z^1 = e^{\log z} = z \tag{1.172}$$

となりますから矛盾はありません。

次に $c = n = 2, 3, \ldots$ の場合を考えてみましょう。対数関数の定義より

$$z = e^{\log z} = e^{\mathrm{Log}\ z + 2m\pi i} = e^{\mathrm{Log}\ z} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.173}$$

ですから [31]，z を n 回掛けたものは

$$\overbrace{z \times z \times z \times \cdots \times z}^{n\ 個} = e^{\mathrm{Log}\ z} \times e^{\mathrm{Log}\ z} \times e^{\mathrm{Log}\ z} \times \cdots \times e^{\mathrm{Log}\ z} = e^{n \mathrm{Log}\ z} \tag{1.174}$$

となります [32]。

一方，z^c は

$$z^c = e^{n \log z} = e^{n(\mathrm{Log}\ z + 2m\pi i)} = e^{n\mathrm{Log}\ z + 2mn\pi i} \tag{1.175}$$

$$= e^{n\mathrm{Log}\ z} e^{2mn\pi i} = e^{n\mathrm{Log}\ z} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{1.176}$$

となります。

式 (1.174) と式 (1.176) より

$$z^n = e^{n \log z} = \overbrace{z \times z \times z \times \cdots \times z}^{n\ 個} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{1.177}$$

であることが示されました。

[31] $\log z$ は多価ですが $e^{\log z}$ は1 価です。まあ，もともと z そのものなんですから1 価に決まっていますが。

[32] 当然，これも1 価です。

ここまでで，n が 0 以上の整数の場合には，$z^n = e^{n\log z}$ は1 価であり，z を n 回掛けた値と一致することが分かりました。

$c = -n =$(負の整数) の場合も同様にすれば，1 価であり，1 を z で n 回割ったものになることを示せますから，練習のため自分で確かめてみてください。

$c = \frac{1}{n}$　$(n = 2, 3, \dots)$ の場合

実数の場合には $y = x^{\frac{1}{n}}$ は x が与えられたときに n 乗すると x になる数のことでした。つまり

$$y^n = \overbrace{y \times y \times y \times \cdots \times y}^{n\text{ 個}} = x \quad \text{となる数 } y \text{ が } x^{\frac{1}{n}}$$

だったわけです。これを x の n 乗根と呼びました。

それでは，$w = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z}$ は n 乗すると z になるでしょうか?

$$w = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\ \mathrm{Log}\ z + 2m\pi i\ )} = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\ z + \frac{2m\pi}{n}i} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{1.178}$$

従って

$$\begin{aligned}
w^n &= \overbrace{w \times w \times \cdots \times w}^{n\text{ 個}} && (1.179)\\
&= e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\ z + \frac{2m\pi}{n}i} \times e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\ z + \frac{2m\pi}{n}i} \cdots \times e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\ z + \frac{2m\pi}{n}i} && (1.180)\\
&= e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\ z + \frac{2m\pi}{n}i + \cdots + \frac{1}{n}\mathrm{Log}\ z + \frac{2m\pi}{n}i} && (1.181)\\
&= e^{\mathrm{Log}\ z + 2m\pi i} && (1.182)\\
&= z && (1.183)
\end{aligned}$$

となり，確かに w は z の n 乗根になっています。

ところで式 (1.178) では m の値は無限個ありますが，w の値は無限個存在するのでしょうか?

$e^{\frac{2m\pi}{n}i}$ の部分の m を $m = 0, 1, 2, \dots$ と順番に増やしていくと

$$e^0 = 1,\ e^{\frac{2\pi}{n}i},\ \dots,\ e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i},\ e^{\frac{2n\pi}{n}i} = e^{2\pi i} = 1,\ e^{\frac{2(n+1)\pi}{n}i} = e^{\frac{2\pi}{n}i},\ \dots \tag{1.184}$$

となり，周期的に同じ値がでてくることが分かります。結局，異なる値は $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$ のときの n 個だけです。

従って $w = z^{\frac{1}{n}}$ は n 価の関数になります。また $w^n = z$ という方程式を w について解くと，以下の n 個の解(根) を持つことになります。

$$w = z^{\frac{1}{n}} = \begin{cases}
e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\ z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}\\
e^{\frac{1}{n}(\ \mathrm{Log}\ z + 2\pi i\ )} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n} + i\frac{2\pi}{n}}\\
e^{\frac{1}{n}(\ \mathrm{Log}\ z + 4\pi i\ )} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n} + i\frac{4\pi}{n}}\\
\vdots\\
e^{\frac{1}{n}(\ \mathrm{Log}\ z + 2(n-1)\pi i\ )} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n} + i\frac{2(n-1)\pi}{n}}
\end{cases} \tag{1.185}$$

ただし

$$z = |z|e^{i\theta} \qquad (\ -\pi < \theta \leqq \pi\ ) \tag{1.186}$$

と置きました。

このような $z^{\frac{1}{n}}$ の多価性は，もとはと言えば，z の偏角 $\arg z$ の値を決めるときに $-\pi < \arg z \leqq \pi$ の範囲から選ぶか，$\pi < \arg z \leqq 3\pi$ の範囲から選ぶか，$\dots$ という，偏角の不定さからきたものであることに注意してください。

例 1.3.5 ($w = z^{\frac{1}{2}}$ のとき).

例として $w = z^{\frac{1}{2}}$ を調べてみましょう。

w の多価性は z の偏角の選び方から来るので，まずは $-\pi < \arg z \leqq \pi$ の範囲としてみます(図 1.18 参照)。

$$z = |z|e^{i\theta} \qquad (\ -\pi < \theta \leqq \pi\ ) \tag{1.187}$$

このとき w は

$$w = z^{\frac{1}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad (\ -\pi < \theta \leqq \pi\ ) \tag{1.188}$$

となるので $-\frac{\pi}{2} < \arg w \leqq \frac{\pi}{2}$ となり，z 平面は $w = u + iv$ 平面の右半分の領域(図 1.19) に射影されます。

次に図 1.20 のように $\pi < \arg z \leqq 3\pi$ の範囲で z を表すと，

$$\begin{aligned}
z &= |z|e^{i\theta} \qquad (\ \pi < \theta \leqq 3\pi\ ) && (1.189)\\
w &= z^{\frac{1}{2}} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} && (1.190)
\end{aligned}$$

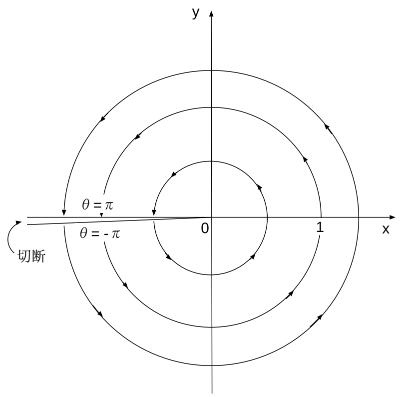


図 1.18: z 平面
$-\pi < \arg z \leqq \pi$

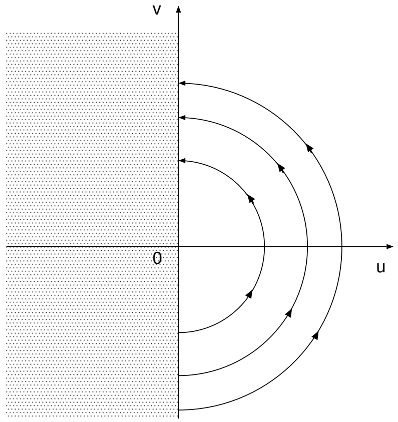


図 1.19: w 平面
$u > 0$ の半平面が z 平面と対応する。

より，$\frac{\pi}{2} < \arg w \leqq \frac{3\pi}{2}$ となり，今度は z 平面は w 平面の左半分の領域（図 1.21）に射影されることになります。

図 1.18 の z 平面と図 1.20 の z 平面を合わせれば，w 平面の全ての点と 1 対1 に対応しますから，$w = z^{\frac{1}{2}}$ という関数では2 枚の z 平面を貼り合わせたリーマン面を作ればよいことが分かります。

1.3.7 分枝に関するとっても重要な注意

指数関数や三角関数は1 価ですからよいのですが，対数関数とべき乗は一般には多価なので，式変形をする際は十分に気をつけなければなりません。以下に間違いやすい部分を列挙します。

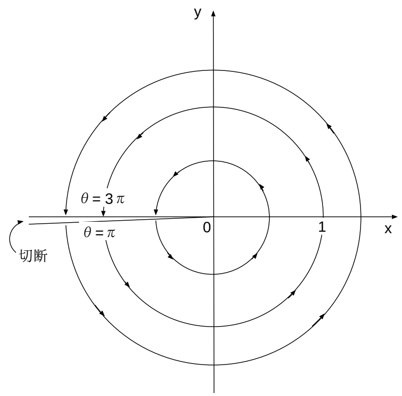


図 1.20: z 平面
$\pi < \arg z \leqq 3\pi$

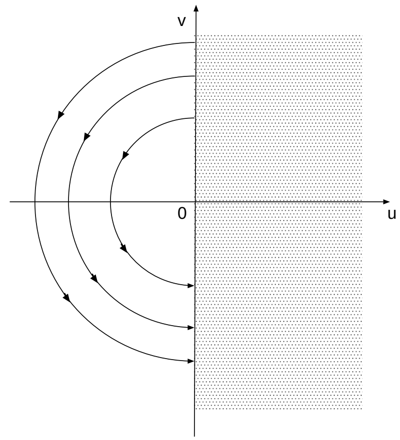


図 1.21: w 平面
$u < 0$ の半平面が z 平面と対応する。

$\wp\heartsuit\wp$

注意1 $e^{\log z} = z$ であるが $\log e^z \neq z$ である。

注意2 $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$ であるが $\log z^2 \neq 2\log z$ である。

注意3 $(e^{\alpha})^{\beta} \neq e^{\alpha\beta}$

注意4 $e^z \neq (e)^z$ ただし，右辺の e は Napier の数 $e \equiv 2.71828\ldots$ 。

どうですか？ 一目見て「あぁ，そうだな。」と納得できますか？
これらをすぐに理解できる人は，まずいないでしょうね。それくらい，誰でも（別にうっかりしていなくても）間違ってしまいそうな部分なんです。
それでは一つずつ調べてみましょう。

注意1　について

先ず，$e^{\log z}=z$ は対数関数の定義から明らかですね?　$e^w=z$ となる w のことを $\log z$ と定義したんですから。

で，問題は $\log e^z \neq z$ ですが，左辺の $\log e^z$ は対数ですからいつでも 多価 です。一方，右辺の z は当然，1 価 です!　だから，等しいはずがありません!

$$e^z=e^{z+2n\pi i} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{1.191}$$

より，正しい等式は以下となります。

$$\log e^z=z+2n\pi i \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{1.192}$$

注意2　について

$$z_1 = |z_1|e^{i(\theta_1+2n_1\pi)} \quad (\,-\pi<\theta_1\leqq\pi,\quad n_1=0,\pm1,\pm2,\ldots\,) \tag{1.193}$$

$$z_2 = |z_2|e^{i(\theta_2+2n_2\pi)} \quad (\,-\pi<\theta_2\leqq\pi,\quad n_2=0,\pm1,\pm2,\ldots\,) \tag{1.194}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\log z_1+\log z_2 &= \mathrm{Log}\,|z_1|+\mathrm{Log}\,|z_2|+i(\theta_1+\theta_2)+2(n_1+n_2)\pi i\\ &= \mathrm{Log}\,|z_1|+\mathrm{Log}\,|z_2|+i(\theta_1+\theta_2)+2n\pi i\\ &\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)\end{aligned} \tag{1.195}$$

一方

$$z_1z_2=|z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2+2n\pi)} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{1.196}$$

ですから

$$\log(z_1z_2)=\mathrm{Log}\,|z_1|+\mathrm{Log}\,|z_2|+i(\theta_1+\theta_2)+2n\pi i \tag{1.197}$$

となり $\log(z_1z_2)=\log z_1+\log z_2$ であることが分かりました。

次に $\log z^2 \neq 2\log z$ についてですが，

$$z=|z|e^{i(\theta+2n\pi)} \qquad (\,-\pi<\theta\leqq\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots\,) \tag{1.198}$$

と置くと

$$z^2=|z|^2e^{i(2\theta+2m\pi)} \qquad (\,-\pi<\theta\leqq\pi,\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots\,) \tag{1.199}$$

となりますから $\log z^2$ は

$$\log z^2 = \mathrm{Log}\,|z|^2+2i\theta+2m\pi i \tag{1.200}$$

$$\begin{aligned}&= 2\mathrm{Log}\,|z|+2i\theta+2m\pi i\\ &\qquad (\,-\pi<\theta\leqq\pi,\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots\,)\end{aligned} \tag{1.201}$$

となります。

一方 $2\log z$ は

$$2\log z = 2\{\mathrm{Log}\,|z|+i\theta+2n\pi i\} \tag{1.202}$$

$$\begin{aligned}&= 2\mathrm{Log}\,|z|+2i\theta+4n\pi i\\ &\qquad (\,-\pi<\theta\leqq\pi,\quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots\,)\end{aligned} \tag{1.203}$$

となります。

従って，$\log z^2$ の虚部の不定さは $2m\pi = 0,\ \pm2\pi,\ \pm4\pi,\ \ldots$ ですが $2\log z$ の虚部の不定さは $4n\pi = 0,\ \pm4\pi,\ \pm8\pi,\ \ldots$ となり，一致しません。

注意3　について

べき乗の定義式と注意1 で導いた式 (1.192) を使うと

$$(e^\alpha)^\beta = e^{\beta\log e^\alpha} \tag{1.204}$$

$$= e^{\beta(\alpha+2n\pi i)} \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots) \tag{1.205}$$

$$= e^{\beta\alpha}e^{\beta 2n\pi i} \tag{1.206}$$

となります。

従って，β が整数でない限り $e^{\beta 2n\pi i}\neq 1$ であり

$$(e^\alpha)^\beta \neq e^{\beta\alpha} \tag{1.207}$$

です。

注意4　について

Napier の数 $e \equiv 2.71828\ldots$ の z 乗と z の指数関数をちゃんと書き分けるのはなかなか難しいのですが，ここでは e の z 乗は $(e)^z$ と書き，指数関数は $\exp(z)$ と書くことにします。

さてべき乗の定義より

$$\begin{aligned}(e)^z &= \exp(z\log e) = \exp\{z(\mathrm{Log}\ e + 2n\pi i)\} &(1.208)\\ &= \exp\{z(1+2n\pi i)\} = \exp(z)\exp(z2n\pi i)\\ &\qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots) &(1.209)\end{aligned}$$

従って z が整数でない限り $(e)^z \neq \exp(z)$ となります。

◇◇ 第 1 章の練習問題 ◇◇

【 1 】　次の式の実部と虚部を求めなさい。但し，a, b, c, d は実数，$z = x+iy$ であるとする。

(1)　$(\ a+bi\ )(\ c+di\ )$	(2)　$\dfrac{a+bi}{c+di}$
(3)　$\sin(az)$	(4)　$e^{cz}(a+bz)$
(5)　$\log(-2)$	(6)　$\log(\ 1+\sqrt{3}\ i\ )$
(7)　$(\ -1+i\ )^{11}$	(8)　$(\ 1+\sqrt{3}\ i\ )^{10}$

【 2 】　次の関係式を証明しなさい。但し，a は実数とする。

(1)　$(\cos z)^* = \cos(z^*)$	(2)　$(\sin z)^* = \sin(z^*)$
(3)　$(\cosh z)^* = \cosh(z^*)$	(4)　$(\sinh z)^* = \sinh(z^*)$
(5)　$(\log z)^* = \log(z^*)$	(6)　$(z^a)^* = (z^*)^a$

【 3 】　次の方程式を z について解きなさい。但し，z は複素数であるとする。

(1)　$z^3 = 1+i$	(2)　$e^z = \sqrt{3}+i$
(3)　$\mathrm{Log}\ z = 4 + \dfrac{\pi}{2}i$	(4)　$\cos z = 3$

【 4 】　三角関数 $\sin z, \cos z$ などの逆関数を，逆三角関数と言い $\arcsin z, \arccos z$ とか $\sin^{-1} z$, $\cos^{-1} z$ と書く。以下の式を証明しなさい。

(1)　$\arcsin z = -i\log(iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}})$

(2)　$\arccos z = -i\log(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}})$

(3)　$\arctan z = \dfrac{i}{2}\log\dfrac{i+z}{i-z}$

注）　$(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ や $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ は2 価です。

【 5 】　双曲線関数 $\sinh z, \cosh z$ などの逆関数を，逆双曲線関数と言い $\mathrm{arcsinh}\ z, \mathrm{arccosh}\ z$ とか $\sinh^{-1} z$, $\cosh^{-1} z$ と書く。以下の式を証明しなさい。

(1)　$\mathrm{arcsinh}\ z = \log(z + (z^2+1)^{\frac{1}{2}})$

(2)　$\mathrm{arccosh}\ z = \log(z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}})$

(3)　$\mathrm{arctanh}\ z = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+z}{1-z}$

注）　$(z^2+1)^{\frac{1}{2}}$ や $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ は2 価です。

第 2 章　複素関数の微分

前章で複素関数を定義できたので，この章では複素関数を複素数の変数で微分する方法を学びましょう。

実は，複素関数の微分公式は実数関数の微分公式と同じになるので，皆さんは微分の計算に苦労することはないでしょう。ですから，この章で大切なことは微分公式を覚えることではありません。複素数で微分するということの意味，複素数で微分できるということが特別なことなんだと知ることが重要です。

2.1　複素微分

2.1.1　複素微分の定義

え〜〜っと，毎回おんなじ書き出しであれなんですが，実数の関数の微分は次の極限で定義されました。

$$f'(x) \equiv \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{2.1}$$

そこで，複素数の変数 z の関数 $f(z)$ の微分も，同じ形の極限で定義します。

℘♡℘

定義 2.1.1 (複素微分の定義). 関数 $f(z)$ について，極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{2.2}$$

が存在するなら， $f(z)$ は $z=z_0$ で**微分可能**であるという。この極限値を $f(z)$ の $z=z_0$ における**微分係数**といい，$f'(z_0)$ と書く。

こうして並べてみると，定義式 (2.1) と (2.2) は x を z_0 と置き換えただけで，全く同じように見えます。しかし，実はとっても大きな違いがあります!

実数関数の微分の定義式 (2.1) に入っている h は当然，実数です。この場合，$h\to 0$ とするとき，h を正に保ったまま 0 にするのか，それとも負で 0 にするのか，という 2 通り考えられました [1]。で，普通はどちらから 0 に近づけても同じ極限値になるとき，微分可能と思っていたわけです。

しかし，複素関数の微分の定義式 (2.2) に入っている h は複素数です。$h\to 0$ というのは h の大きさ $|h|$ を 0 にするということであり，h の偏角については何も言っていないのです。つまり，複素平面上で $|h|\to 0$ とするとき，h の偏角がどんなふうに変化しても同じ極限値になるとき，式 (2.2) は収束したといってよいのです。

$h\to 0$ とする方法は，実数の場合には2 通りしかありませんでしたが，複素数の場合には無限のパターンがあります。どんなふうに $h\to 0$ としても，必ず式 (2.2) が同じ値になるべしというのは，実はとてもとっても厳しい条件です。

例えば $f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ として，式 (2.2) を計算してみましょう。$\arg h$ は一定でなくてよいのですが，ここでは簡単のため $\arg h=\theta=$ (一定) と選んでおきます。

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\\
&\quad= \lim_{|h|\to 0}\frac{(x+|h|\cos\theta)^2+(y+|h|\sin\theta)^2-(x^2+y^2)}{|h|e^{i\theta}} && (2.3)\\
&\quad= \lim_{|h|\to 0}\frac{2x|h|\cos\theta+2y|h|\sin\theta+|h|^2}{|h|e^{i\theta}} && (2.4)\\
&\quad= 2(x\cos\theta+y\sin\theta)\ e^{-i\theta} && (2.5)
\end{aligned}$$

従って，この極限値は h の偏角 θ の選び方によって値が変わります。ですから，$f(z)=|z|^2$ を z で微分することはできません。

つまり，一般的には，x と y の関数 $f(x,y)$ は複素数 $z=x+iy$ の関数と考えてよいのですが [2]，関数 $f(x,y)$ のうち z で微分できるものは限られて

[1] 右側微分係数とか左側微分係数とか ...

[2] z の値を決めれば (x,y) の値が決まり，(x,y) の値が決まれば $f(x,y)$ の値も決まります。従って $f(x,y)$ は $z=x+iy$ の関数と考えることができます。

いるのです。適当に x と y で関数を作っても駄目なんです。このように，z で微分できる関数はエリートなので，特別に肩書きが付けられています [3]。

℘♡℘

定義 2.1.2 (正則). 領域 D の全ての点で $f(z)$ が微分可能であるとき，$f(z)$ は D で**正則**であるという。また，$f(z)$ は**正則関数**であるともいう。このとき $f'(z)$ は D で定義された z の関数になっているので，この関数を $f(z)$ の**導関数**と呼び，$\dfrac{df}{dz}$ と書く。
また，$f(z)$ がある点 z_0 で正則であるとは，適当な z_0 の近傍で $f(z)$ が正則であることをいう [a]。

[a] つまり，$z = z_0$ だけでなく，$z = z_0$ を含む小さな領域で微分可能なとき，$z = z_0$ で正則だと言ってよいわけです。

正則という言葉は，これからもしょっちゅう使うので，しっかり覚えておいてください。

ちなみに，複素平面全体で正則な関数を**整関数**と言います。後で分かることですが，z^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ や e^z，$\sin z$，$\cos z$ などは整関数です。

さて，少し言葉遣いの注意をしておきます。実は本によっては正則と言わずに**解析的**と言っているものもあります。また，正則と解析的を遣い分けている本もあります。

2.1.2 微分公式

複素関数の微分の定義式 (2.2) は，見かけは実数関数の微分の定義と同じですから，基本的な微分公式は実数関数の場合と全く同じ形になります。証明は高校の教科書の x を z に置き換えるだけですから省略します。

$$(f+g)' = f' + g' \tag{2.6}$$
$$(fg)' = f'g + fg' \tag{2.7}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{2.8}$$

[3]「たかが微分可能というだけで，そんなに偉いんか」と思うかもしれませんが，実はとっても偉いんです。後で段々，偉さが分かってきます。

「正則」と「解析的」

私は数学の専門家ではないので，あまり詳しいことは分からないのですが，どうも，正則と解析的の元々の意味は

正則 微分可能

正則関数 微分可能な関数

解析的 べき級数で表せる

解析関数 解析的な関数を可能な限り解析接続して作った関数

ということのようです。
実数の関数の場合には，微分可能であってもべき級数で表せない（テイラー展開できない）場合があります。しかし，後で述べるように（93 ページ），複素関数では微分可能という条件があまりにも厳しいので，微分可能な関数は必ずべき級数で表せてしまうのです。逆に，べき級数で表された関数は微分可能です。
つまり複素関数では「微分可能（正則）」と「べき級数で表せる（解析的）」とは全く同等なのです。そこで「正則」と「解析的」が本によっては同じ意味で使われることになるわけです。

$$F(z) = f(g(z)) \quad \text{のとき} \quad \frac{dF}{dz} = \frac{df(g)}{dg}\frac{dg(z)}{dz} \tag{2.9}$$

例 2.1.1. 例として $f(z) = z^n$ （$n = 0, 1, 2, \ldots$）を微分してみましょう。
微分の定義より

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{2.10}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \tag{2.11}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(z^n + nz^{n-1}h + \cdots + h^n - z^n) \tag{2.12}$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}\right) \tag{2.13}$$

$$= \quad nz^{n-1} \tag{2.14}$$

従って

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1} \qquad (\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ) \tag{2.15}$$

であることが分かりました。

ちなみに，式 (2.15) と微分公式を使えば $f(z) = z^{-n}$ の微分公式も簡単に導けますから，自分で導いてみましょう。

2.1.3 べき級数の微分

前章で複素数の指数関数や三角関数をべき級数で定義しました。そこで，指数関数や三角関数の微分を考える前に，まずはべき級数の微分について調べておきましょう。

べき級数の微分については，とても重要な2 つの定理があります。

℘♡℘

定理 2.1.1. べき級数は，その収束円内で項別微分が可能である。

えっと,「 項別微分」というのは読んで字のごとしで，項別に微分してから足すことですね。つまり式で書けば

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\ c_n z^n \tag{2.16}$$

としてよいと言っているのです。

公式 (2.6) から，当前だと思うかもしれませんが，無限個足す場合には必ずしも当たり前のことではないんです。

まじめに証明する気はないんですが，まあ，べき級数の場合には収束円内では絶対収束してますから，$|c_n z^n| \to 0\ (n \to \infty)$ となっているので，何も問題はなさそうな気はするでしょう？

℘♡℘

定理 2.1.2. べき級数は，その収束円内で何回でも微分可能であり，微分して作られたべき級数の収束円は元の級数の収束円と同じものである。

証明らしきもの

べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{2.17}$$

の収束半径 R は Cauchy-Hadamard の公式 (20 ページ）を使うと

$$R \quad = \quad \frac{1}{\rho} \tag{2.18}$$

$$\rho \quad = \quad \lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \tag{2.19}$$

でした。

さて，式 (2.17) のべき級数を項別に微分すると

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}\ c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n z^{n-1} \tag{2.20}$$

となります。

この級数 (2.20) の収束半径を Cauchy-Hadamard の公式を使って求めてみます。

$$\rho_1 \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (n|c_n|)^{\frac{1}{n}} \tag{2.21}$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{\frac{1}{n}\mathrm{Log}\ n} |c_n|^{\frac{1}{n}} \right\} \tag{2.22}$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}} \tag{2.23}$$

従って $\rho_1 = \rho$ となり，式 (2.20) は元の級数 (2.17) と全く同じ円の内部で絶対収束します。 ■

ちなみに，この2 つの定理から $z^n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$，$e^z$，$\sin z$，$\cos z$ などが整関数であることが分かりますね? これらの関数はべき級数で定義されていて複素平面全体で収束していましたから，複素平面全体で微分可能です。

2.1.4 指数関数の微分

指数関数はべき級数で定義されましたから，べき級数の微分の定理を使えば

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}e^z &= \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} && (2.24)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{z^n}{n!} && (2.25)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{n!} && (2.26)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} && (2.27)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} && (2.28)\\ &= e^z && (2.29)\end{aligned}$$

となります。

従って次の微分公式が導かれました。

$$\frac{d}{dz}\ e^z = e^z \qquad (2.30)$$

2.1.5 双曲線関数の微分

双曲線関数はべき級数で表してから微分してもよいのですが，前節で指数関数の微分公式を導きましたから，指数関数で表して微分してみます。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\cosh z &= \frac{d}{dz}\frac{e^z+e^{-z}}{2} && (2.31)\\ &= \frac{e^z-e^{-z}}{2} && (2.32)\\ &= \sinh z && (2.33)\end{aligned}$$

えっと。式 (2.31) から式 (2.32) に行くところが分からないという人が極くたまにいるんですが，合成関数の微分公式 (2.9) を使っているだけですよ。

$$\frac{d}{dz}e^{-z} = \frac{de^{-z}}{d(-z)}\frac{d(-z)}{dz} = -e^{-z} \qquad (2.34)$$

同じ様にすれば $\sinh z$ の微分も計算できますね。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\sinh z &= \frac{d}{dz}\frac{e^z-e^{-z}}{2} && (2.35)\\ &= \frac{e^z+e^{-z}}{2} && (2.36)\\ &= \cosh z && (2.37)\end{aligned}$$

$\tanh z$ の微分なども，合成関数の微分法を使えば簡単に計算できますから，自分で導いてみてください。

以下に代表的な双曲線関数の微分公式を列挙しておきます。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\ \cosh z &= \sinh z && (2.38)\\ \frac{d}{dz}\ \sinh z &= \cosh z && (2.39)\\ \frac{d}{dz}\ \tanh z &= \frac{1}{\cosh^2 z} && (2.40)\end{aligned}$$

2.1.6 三角関数の微分

複素数の範囲で考えると三角関数と双曲線関数はほとんど同じものでしたね。ですから微分公式も同じようにして導けばよいでしょう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\cos z &= \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} && (2.41)\\ &= \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} && (2.42)\\ &= -\sin z && (2.43)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\sin z &= \frac{d}{dz}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} && (2.44)\\ &= \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} && (2.45)\\ &= \cos z && (2.46)\end{aligned}$$

以下に代表的な三角関数の微分公式を列挙しておきます。

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \tag{2.47}$$
$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z \tag{2.48}$$
$$\frac{d}{dz}\tan z = \frac{1}{\cos^2 z} \tag{2.49}$$

2.1.7 対数関数の微分

対数関数 $w = \log z$ は定義より

$$z = e^w \tag{2.50}$$

を満たします。

この式の両辺を z で微分すれば

$$1 = \frac{dz}{dz} = \frac{de^w}{dz} \tag{2.51}$$
$$= \frac{de^w}{dw}\frac{dw}{dz} \tag{2.52}$$
$$= e^w\frac{d\log z}{dz} \tag{2.53}$$
$$= z\frac{d\log z}{dz} \tag{2.54}$$

となりますから，

$$1 = z\frac{d\log z}{dz} \tag{2.55}$$

です。

従って両辺を z で割れば次の微分公式が導かれます。

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z} \tag{2.56}$$

注意して欲しいことは，$\log z$ は多価関数ですが，微分したものは $1/z$ という 1 価の関数であるということです。対数の多価性は $2n\pi$ という定数分の違いしかないので，微分すると消えてしまうのです。

2.1.8 べき乗の微分

べき乗 α^β の α と β どちらを変数 z にするか，2 通りありますね。

z^c の微分

$f(z) = z^c$ (c は任意の複素数) を z で微分してみましょう。

べき乗の定義式 (1.170) より

$$f(z) = z^c = e^{c\log z} \tag{2.57}$$

ですから

$$g(z) \equiv c\log z \tag{2.58}$$

と置いて合成関数の微分公式 (2.9) を使えば

$$\frac{d}{dz}z^c = \frac{de^{g(z)}}{dz} = \frac{de^g}{dg}\frac{dg(z)}{dz} = e^g\frac{d(c\log z)}{dz} = z^c\frac{c}{z} = cz^{c-1} \tag{2.59}$$

よって以下の公式が得られました。

$$\frac{d}{dz}z^c = cz^{c-1} \tag{2.60}$$

c^z の微分

次に $f(z) = c^z$ を z で微分してみます。

$$f(z) = c^z = e^{z\log c} \tag{2.61}$$

ですから

$$g(z) \equiv z\log c \tag{2.62}$$

と置いて合成関数の微分公式を使えば

$$\frac{d}{dz}c^z = \frac{de^{g(z)}}{dz} = \frac{de^g}{dg}\frac{dg(z)}{dz} = e^g\frac{d(z\log c)}{dz} = c^z\log c \tag{2.63}$$

より

$$\frac{d}{dz}c^z = \log(c)\ c^z \tag{2.64}$$

となります。

2.2 コーシー・リーマン（ Cauchy-Riemann ）の関係式

前節で導いた微分公式は，どれも実数関数の微分公式と全く同じ形なのでガッカリしたのではないですか?

「せっかく高い授業料払って大学まで来ているのに，高校で習った式ばかりで，つまらん！」

とか思ってないですか?

安心して下さい。ここから，ぐっと難しくなります。おそらく皆さんが想像もしなかったような話がぞろぞろ出てきて，いかにも大学の授業だという気分を味わえるでしょう。複素変数 z で微分できるということが，実は特殊なことなんだということが，この辺りからじわじわと出てきます。

2.2.1 コーシー・リーマン（ Cauchy-Riemann ）の関係式

前節で色々な複素関数を微分する方法を学びました。前節でやったような，皆さんがよく知っている関数なら簡単に微分できるでしょう。

さて，問題は一般の複素関数が与えられたとき，微分できるかどうかを，どうやって判断したらよいかということです。ピンときませんか? それでは例をあげましょう。

例. 次の関数が z で微分できるか否かを調べなさい。

$$f_1(z) = e^x(\cos y - i\sin y) \tag{2.65}$$
$$f_2(z) = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{2.66}$$
$$f_3(z) = x^2 + y^2 \tag{2.67}$$

さて，すぐに答えられますか?

このように，z の関数だからといって，必ずしも z で表されているとは限らないのです。実際，いくつかの複素関数論の本では指数関数を $e^x(\cos y + i\sin y)$ で定義していました。

x や y などで表された一般の $f(z)$ が z で微分できるかどうかを調べるには，次のコーシー・リーマン（ Cauchy-Riemann ）の関係式が使えます。

℘♡℘

定理 2.2.1 (Cauchy-Riemann の関係式).

$$z = x + iy \tag{2.68}$$
$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{2.69}$$

とする。ただし，u, v は x, y の実関数である。

領域 D で $f(z)$ が正則であるための必要十分条件は，$u(x,y)$, $v(x,y)$ が D で**全微分可能**で [a]，かつ次式が成立することである。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.70}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.71}$$

[a] $u(x,y)$ が全微分可能であるためには x, y について連続で滑らかであり，かつ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ が必要です。

証明の雰囲気

微分できるかどうかを調べたいので，微分を定義した極限の式を調べてみましょう。

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{2.72}$$

微小量 h の実部と虚部を Δx, Δy とします。

$$h = \Delta x + i\Delta y \tag{2.73}$$

このとき式 (2.72) の分子は

$$f(z+h) - f(z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \tag{2.74}$$
$$= u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y) \tag{2.75}$$

となります。この式を $\Delta x,\ \Delta y$ でテイラー展開してみましょう。

$$
\begin{aligned}
& f(z+h)-f(z) \\
= \quad & u(x+\Delta x, y+\Delta y)+iv(x+\Delta x, y+\Delta y) \\
& -u(x,y)-iv(x,y) \qquad (2.76) \\
= \quad & u(x,y)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y \\
& +iv(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+O(\Delta x \text{ や} \Delta y \text{ の2 次以上}) \\
& -u(x,y)-iv(x,y) \qquad (2.77) \\
= \quad & \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x \\
& +\left(-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)i\Delta y+O(\Delta x \text{ や} \Delta y \text{ の2 次以上}) \qquad (2.78)
\end{aligned}
$$

式 (2.72) が h の偏角の選び方に依らずに一定の極限値を持つためには，式 (2.78) の Δx や Δy の1 次の項が $h=\Delta x+i\Delta y$ に比例していなければなりません。そのためには式 (2.78) の Δx と $i\Delta y$ の前の係数が等しくなっていなければならないので

$$
\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2.79)
$$

であることが必要です。

さて，式 (2.79) が成り立つと仮定し

$$
g(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (2.80)
$$

とおいてみると，極限の式 (2.72) は

$$
\begin{aligned}
& \lim_{|h|\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\
& \quad = \lim_{|h|\to 0}\frac{g(z)(\Delta x+i\Delta y)+O(\Delta x \text{ や} \Delta y \text{ の2 次以上})}{h} \qquad (2.81) \\
& \quad = \lim_{|h|\to 0}\frac{g(z)h+O(\Delta x \text{ や} \Delta y \text{ の2 次以上})}{h}=g(z) \qquad (2.82)
\end{aligned}
$$

となるので，このときは確かに $f(z)$ は微分可能であり，導関数は $g(z)$ になることが分かります。

関数 $f(z)$ が微分可能である必要十分条件は式 (2.79)（ または式 (2.80)）が成立することであると分かりました。ところで式 (2.79) の u と v は実関数ですから，この等式が成立するためには明らかに

$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.83)
$$

でなければなりません。これは Cauchy-Riemann の関係式そのものですね。

■

さて，Cauchy-Riemann の関係式を導く途中に出てきた式 (2.80) と式 (2.82) を少し変形してみましょう。

$$
\frac{df}{dz}=g(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial\ (u+iv)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (2.84)
$$

従って，もし $f(z)$ が z で**微分可能であることが分かっているならば，**z で微分する代わりに x で偏微分したのでもよいということが分かりました。

同様に

$$
\frac{df}{dz}=g(z)=-i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-i\frac{\partial\ (u+iv)}{\partial y}=-i\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (2.85)
$$

ですから，y で偏微分することによって $\dfrac{df}{dz}$ を求めることもできます [4]。

2.2.2　調和関数

Cauchy-Riemann の関係式の重要性は，単に関数の微分可能性を調べることができるということに止まりません。

実関数 $u(x,y)$ と $v(x,y)$ が全微分可能で，かつ Cauchy-Riemann の関係式を満たしていると仮定しましょう。このとき2 つの式 (2.70) と (2.71) を組

[4] あくまでも，f を z で微分できることが分かっているときだけですよ!!

み合わせると以下のような関係を導けます。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.86}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.87}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.88}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.89}$$
$$= -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.90}$$

式 (2.86) から式 (2.87) への変形には Cauchy-Riemann の関係式 (2.70) を用いました。また，式 (2.87) から式 (2.88) は，微分の順番を入れ替えています。式 (2.88) から式 (2.89) は，再び Cauchy-Riemann の関係式 (2.71) を用いました。

従って，関数 $u(x,y)$ は次の微分方程式を満たすことが分かりました。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.91}$$

同様にして，関数 $v(x,y)$ も同じ形の微分方程式を満たしていることを示せます。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{2.92}$$

これらの微分方程式は2 次元の**ラプラス（ Laplace ）方程式**と呼ばれます。2 次元のラプラシアン（ Laplacian ）を

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.93}$$

と定義して

$$\Delta u = 0 \quad , \quad \Delta v = 0 \tag{2.94}$$

と書くこともよくあります。

ラプラス方程式を満たす関数を**調和関数**と呼びます。Cauchy-Riemann の関係式を満たす u, v はどちらも調和関数であり，v を u の**共役調和関数**と呼びます。

ラプラス方程式は電磁気学や流体力学など，物理学や工学の色々な分野で顔を出します。物理学などを勉強していると，適当な境界条件の下でラプラス方程式を解かなければならない場面にしばしば遭遇します。それがもし 2 次元（ 2 変数）のラプラス方程式ならば，$z = x + iy$ と置けば，**z の正則関数（ 微分可能な関数）$f(z)$ は全てラプラス方程式を満たしています。**実数の解が必要ならば $f(z)$ の実部 $u = \mathrm{Re}\{f\}$ や虚部 $v = \mathrm{Im}\{f\}$ を作れば u も v もラプラス方程式の解になります。従って残された問題は，与えられた境界条件を満たすような正則関数を見つけることだけになります。

例 2.2.1 (調和関数の例)**.**

$$z = x + iy = re^{i\theta} \quad , \ r \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.95}$$

と置く。

$$f(z) = z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \tag{2.96}$$

より

$$u = \mathrm{Re}\{f\} = r^n \cos(n\theta) \tag{2.97}$$
$$v = \mathrm{Im}\{f\} = r^n \sin(n\theta) \tag{2.98}$$

と置けば $u(x,y)$ と $v(x,y)$ はどちらもラプラス方程式の解である。

従って，これらの線形結合

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{\ a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \sin(n\theta)\ \} \tag{2.99}$$

もラプラス方程式の解である。ここで a_n, b_n は任意の実数定数である。

このように正則な関数を利用してラプラス方程式の解を作ることができるので，電磁気学や流体力学などでは複素関数論の知識を使うことが多々あります。純粋に数学として学ぶのも面白いかもしれませんが，複素関数論は物理学や工学などの分野で色々応用されていることも知っておいてください。特に，**物理を学ぶ学生にとっては，複素関数論の知識が必須**となります。

◇◇ 第 2 章の練習問題 ◇◇

【 1 】 次の関数が複素数の変数 z で微分可能か否かを調べなさい。また，z で微分できるものは導関数を求めなさい。但し，a は実数の定数であり，$z = x + iy$ とする。

(1) $f = y + ix$ (2) $f = x - y + (x + y)i$
(3) $f = e^{ay}(\cos ax + i\sin ax)$ (4) $f = e^{-ay}(\cos ax + i\sin ax)$
(5) $f = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy))$

【 2 】 次の関数を複素数の変数 z で微分しなさい。但し，a, b は定数であるとする。

(1) $f = (az^2 + b)^3$ (2) $f = \dfrac{z^2 + ia}{z + ib}$
(3) $f = \sin(az)$ (4) $f = e^{az}$
(5) $f = \cos(az^3 + bz)$ (6) $f = e^{-a(z+b)^2}$
(7) $f = \log(z^2 - 1)$ (8) $f = \log(1 + e^{az^2})$
(9) $f = (z^2 + a)^{\frac{1}{3}}$ (10) $f = (a + iz^3)^{\frac{2}{5}}$

第 3 章　複素関数の積分

前章では複素関数の微分について学びましたが，この章では複素関数を複素数で積分する方法を学びます。微分は比較的分かりやすいのですが，積分は難しいです。でも，その分，得られるものも大きいですから気合いを入れて取り組みましょう。

3.1　複素積分

3.1.1　複素積分の定義

複素関数 $f(z)$ は一つの複素変数 z の関数だと思うこともありますが，$z = x + iy$ は実部 x と虚部 y の2 つの変数を含んでいますから2 変数の関数です。

従って，単純に「いくつからいくつまで f を積分する」というように表現することはできません。ちゃんと複素平面を考えて「**どこから（始点）どこまで（終点）どのような経路に沿って積分する**」かを指定する必要があります。つまり，2 次元空間内の線積分と同じように考える必要があるのです。

複素平面上に始点 $z_a = x_a + iy_a$ と終点 $z_b = x_b + iy_b$ を結ぶ適当な曲線 C が与えられたとします。この曲線に沿って関数 $f(z)$ を z_a から z_b まで積分する方法を考えましょう（図 3.1 参照）。

まず，曲線を適当な実数のパラメーター t で表します。すると曲線上の点は t の値で位置が定まりますから，t の関数となります。

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \tag{3.1}$$

従って，複素関数 $f(z)$ は，この曲線上では t の関数と考えることができます。

$$f(z) = f(z(t)) \qquad (z \text{ は曲線上の点}) \tag{3.2}$$

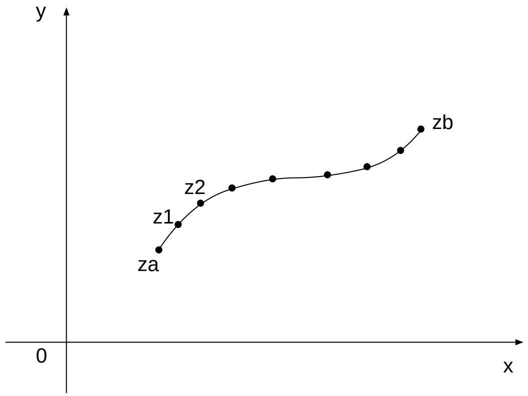


図 3.1:

次に，曲線 C を N 個に分割します。

$$t_0 = t_a,\ t_1,\ t_2,\ \dots\ ,\ t_N = t_b \tag{3.3}$$

$$z_0 = z_a,\ z_1,\ z_2,\ \dots\ ,\ z_N = z_b \tag{3.4}$$

また，$\Delta z_n \equiv z_n - z_{n-1}$，$\Delta t_n \equiv t_n - t_{n-1}$ と定義して置きます。

これで準備は整いました。曲線 C に沿った z_a から z_b までの，関数 $f(z)$ の積分を次式で定義します。

$$\int_C f(z)\ dz \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(z_n)\Delta z_n \tag{3.5}$$

定義式 (3.5) を少し変形してみましょう。曲線 C 上では $z = z(t)$ であることに注意してください。

$$\int_C f(z)\ dz \equiv \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(z_n)\Delta z_n \tag{3.6}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f(z(t_n))\frac{z(t_n) - z(t_{n-1})}{\Delta t_n}\Delta t_n \tag{3.7}$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}\ dt \tag{3.8}$$

従って，複素積分は積分経路を適当なパラメーター t で表してやれば，パラメーター t についての積分で書くことができます。

$$\int_C f(z)\ dz = \int_{t_a}^{t_b} f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}\ dt \tag{3.9}$$

式 (3.9) は実数の1 変数 t での積分ですから,(実際に積分できるときには）計算を実行できますね。

え〜っと，少し積分の表記について注意しておきます。

複素関数論の本を読んでいると，次のような式を見かけることがあります。

$$\int_C f(z)\ dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C (udx-vdy)+i\int_C (vdx+udy) \tag{3.10}$$

あるいは

$$\int_C f(z)\ dz = \int_C f(x,y)\ dx + i\int_C f(x,y)\ dy \tag{3.11}$$

これらの式は間違ってはいません。しかし，例えば $\int_C f(x,y)\ dx$ という式は単純に x だけで積分すればよいのではありません!! あくまでも，積分は曲線 C に沿って実行するのですから，**曲線上を点が移動していくときに，x だけでなく y も変化します！** 従って，x の変化にともなって y がどう変化するかを考えねばなりません。つまり曲線を表すパラメーターとして x を使ったことになっているのです。従って， $\int_C f(x,y)\ dx$ という積分では u や v の中にある y は全て $y(x)$ と考えて積分する必要があります。

3.1.2 複素積分の基本的な性質

複素積分の定義式 (3.5) の見かけは，高校で習った実数変数 x の関数の積分の定義式と同じですから，同じような性質を持っています。

以下の公式は定義式から簡単に導けますから自分で導いてみてください。

$$\int_C f(z)\ dz = -\int_{\overline{C}} f(z)\ dz \qquad (\ \overline{C}\text{は } C \text{ と逆向きの経路}\ ) \tag{3.12}$$

$$\int_C \{\ f(z)+g(z)\ \}\ dz = \int_C f(z)\ dz + \int_C g(z)\ dz \tag{3.13}$$

$$\int_C \{\ \alpha f(z)\ \}\ dz = \alpha \int_C f(z)\ dz \qquad (\ \alpha\text{は任意の複素定数}\ ) \tag{3.14}$$

$$\left|\int_C f(z)\ dz\right| \leqq \int_C |f(z)|\,|dz| = \int_{t_a}^{t_b} \left|f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}\right|\ dt \qquad (\ t_a \leqq t_b\ ) \tag{3.15}$$

以上の公式は実数関数 $f(x)$ の積分の場合と同じものですが，次からは複素積分独自の性質です。特に次の定理は**実際に積分を計算するときに必ずと言ってよいくらい使うことになる**とってもとっても重要なものです。

他の定理は全部忘れても，この定理だけは覚えておこう！

定理 3.1.1 (積分路変形の定理). $f(z)$ は領域 D で正則な関数とする。D 内の点 z_0 を始点，z_1 を終点とするような D 内の2 つの積分路を C_1, C_2 とする。C_2 を正則な点だけを使って連続的に変形して C_1 に一致させることができるとき

$$\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_{C_2} f(z)\ dz \tag{3.16}$$

が成り立つ。

この定理には特に名前はついていないのですが，不便なのでこのテキストでは「積分路変形の定理」と呼んでおきます。

この定理を使うときには，積分経路は自由に伸び縮みするゴム紐だと思いましょう。積分の始点と終点にピンを挿してゴム紐の端をとめます。ゴム紐の両端がしっかりとピンで固定されたら，あとは自由にゴムを伸ばしたり縮めたり曲げたりまっすぐにしたりして，好きなように変形してください（図 3.2 参照）。

唯一，絶対守るべき条件はゴム紐（積分路）は正則な領域 D の外に出られないということです。

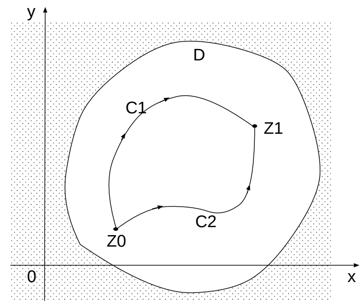


図 3.2:

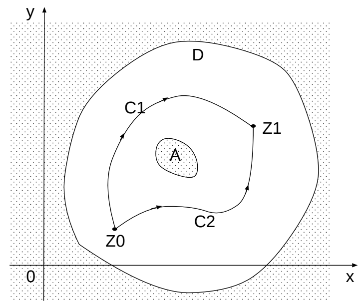


図 3.3:

図 3.2 のようなものを考えると，いつだって経路 C_2 を変形して C_1 に重ねることができるじゃないかと思うかもしれませんが，そうは問屋がおろしません [1]。図 3.3 を見てください。このように，領域 D が穴開きドーナッツのような形をしている場合，C_2 をどう変形しても，両端が固定されているので穴のところを回避できなくて C_1 に一致させることができません。

えーと，図 3.3 の A の部分（正則でない部分）は，穴と思うより，柱みたいなものが立っていると思った方がいいですかね。柱にゴム紐が引っかかってしまうから C_2 を C_1 に一致させることができない ...と。

そして，図 3.3 のような場合には，**経路 C_1 で積分した結果と経路 C_2 で積分した結果とは同じになりません!!　一般に複素積分した結果は，始点と終点の値だけでなく，途中の経路の選び方に依存します。**にもかかわらず，「**正則な点だけを使って変形するなら途中の経路をどう変えても積分結果は変わりません**」と積分路変形の定理は主張しているのです [2]。

ちなみに，図 3.2 の領域 D のように穴の開いていない（柱がたっていない）領域を**孤状連結領域**といい [3]，図 3.3 の領域 D のように，いくつか穴が開いている（柱がたっている）領域を**多重連結領域**といいます [4]。

[1] う〜〜ん。ものすごく古臭い表現だ。もう死語かなぁ。
[2] この定理を使って積分しやすいように経路を変えてから積分するのが普通です。
[3] 孤状連結のことを単連結ともいいます。
[4] 図 3.3 の場合は2 重連結です。

積分路変形の定理とベクトル解析の定理の関係

普通の複素関数論の本では，先ずグリーン（ Green ）の公式を使って Cauchy の積分定理（すぐ後でやります）を証明し，Cauchy の積分定理を使って積分路変形の定理を証明します。

このテキストは主に物理学を学ぶ学生を対象にしているので，当然，ベクトル解析の知識を持っていると期待し，ベクトル解析の定理を使って積分路変形の定理を導いてみます[5]。

z と f を実部と虚部で表して

$$\begin{aligned} z &= x+iy && (3.17)\\ f(z) &= u(x,y)+iv(x,y) && (3.18) \end{aligned}$$

とします。

また，複素平面を2 次元ベクトル空間と見なして，$z=x+iy$ に対応する位置ベクトルを

$$\boldsymbol{r} \equiv x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \tag{3.19}$$

と置きます。

このとき複素積分を以下のように2 次元ベクトル空間内の線積分で表すことができます。

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\ dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy) && (3.20)\\ &= \int_C (udx-vdy) + i\int_C (vdx+udy) && (3.21)\\ &= \int_C (u\boldsymbol{e}_1 - v\boldsymbol{e}_2)(dx\boldsymbol{e}_1 + dy\boldsymbol{e}_2)\\ &\quad + i\int_C (v\boldsymbol{e}_1 + u\boldsymbol{e}_2)(dx\boldsymbol{e}_1 + dy\boldsymbol{e}_2) && (3.22)\\ &= \int_C \boldsymbol{U}_1\cdot d\boldsymbol{r} + i\int_C \boldsymbol{U}_2\cdot d\boldsymbol{r} && (3.23) \end{aligned}$$

[5] 他の授業で習ったこととの関連を知ることはとても大切なことです。ばらばらな知識をたくさん持っているだけでは理解したとは言えません。

ただし，ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}_1 &\equiv u\boldsymbol{e}_1 - v\boldsymbol{e}_2 && (3.24)\\ \boldsymbol{U}_2 &\equiv v\boldsymbol{e}_1 + u\boldsymbol{e}_2 && (3.25) \end{aligned}$$

と置きました。

このベクトル場の回転を作ると

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{U}_1 &= \boldsymbol{e}_3\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) && (3.26)\\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{U}_2 &= \boldsymbol{e}_3\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) && (3.27) \end{aligned}$$

となりますが，考えている領域内では $f(z)$ は正則ですから u, v は Cauchy-Riemann の関係式を満たすので，式 (3.26)，(3.27) の右辺は 0 となります。

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\ \boldsymbol{U}_1 &= \boldsymbol{0} && (3.28)\\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{U}_2 &= \boldsymbol{0} && (3.29) \end{aligned}$$

従って，ベクトル解析の定理により線積分 $\int_C \boldsymbol{U}_1\cdot d\boldsymbol{r}$ と $\int_C \boldsymbol{U}_2\cdot d\boldsymbol{r}$ は始点と終点の座標だけで値が決まり，途中の積分経路の選び方に依存しません。

従って

$$\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_{C_2} f(z)\ dz \tag{3.30}$$

となります。

$\wp\heartsuit\wp$

定理 3.1.2 (Cauchy の積分定理). 複素関数 $f(z)$ は領域 D で正則であるとする。C は D 内の単一閉曲線であり，その周および内部が D に含まれるとする[a]（ 図 *3.4*）。このとき次式が成立する。

$$\int_C f(z)\ dz = 0 \tag{3.31}$$

[a] 閉曲線 C の上だけでなく，その内部の全ての点で正則だということです。

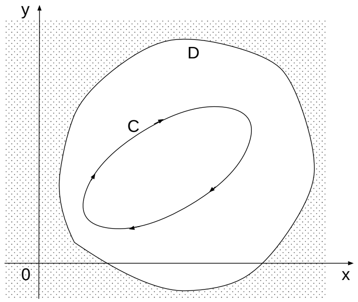


図 3.4:

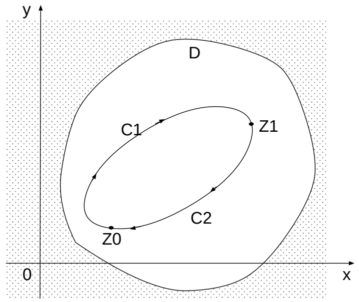


図 3.5:

この定理は先程の積分路変形定理とほとんど同じ内容の定理です。こちらの定理の方が「Cauchy の積分定理」という，ちゃんとした名前がついている分有名なのかもしれませんが，実際に積分の計算に使うときには，積分路が閉曲線というのは使い勝手が悪く，積分路変形定理の方が何かと融通が利いて便利なのです。

証明の雰囲気

閉曲線 C の上に適当に z_0 と z_1 を選んで，z_0 から z_1 に行く部分を C_1，z_1 から z_0 に戻ってくる部分を C_2 とします（図 3.5)。すると元の積分は2つの積分に分けられます。

$$\int_C f(z)\ dz = \int_{C_1} f(z)\ dz + \int_{C_2} f(z)\ dz \tag{3.32}$$

C_2 を逆向きに進む経路を $\overline{C}_2$ と書くと

$$\int_{C_2} f(z) = -\int_{\overline{C}_2} f(z) \tag{3.33}$$

ですから

$$\int_C f(z)\ dz = \int_{C_1} f(z)\ dz - \int_{\overline{C}_2} f(z)\ dz \tag{3.34}$$

となります。

一方，積分路の変形定理によれば

$$\int_{C_1} f(z)\ dz = \int_{\overline{C}_2} f(z)\ dz \tag{3.35}$$

ですから

$$\int_C f(z)\ dz = \int_{C_1} f(z)\ dz - \int_{\overline{C}_2} f(z)\ dz = 0 \tag{3.36}$$

となります。

3.1.3 原始関数

1 変数の実数関数 $f(x)$ の場合，微分してできた関数を導関数と呼び，積分してできた関数を原始関数と呼びました。

複素積分の場合も原始関数を定義できることもあります。

関数 $f(z)$ は孤状連結領域 D で正則であるとします。D 内のどこでもよいですから，どこか好きな点を一つ決めて z_0 とします。さて，z_0 から D 内の任意の点 z に至る経路を C とすると，積分路変形の定理から，積分

$$\int_C f(z')\ dz' \tag{3.37}$$

の値は始点 z_0 と終点 z の値だけで決まり，途中の積分路 C の選び方に依存しません。

従って，始点 z_0 を固定して考えれば，この積分結果は終点 z の関数と考えることができます。

$$F(z) \equiv \int_C f(z')\ dz' \tag{3.38}$$

このように $F(z)$ を定義したとき，$F(z)$ は経路 C には依存しないので

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')\ dz' \tag{3.39}$$

と書くことができます。

このとき複素関数 $F(z)$ は D 内で正則になり

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z) \tag{3.40}$$

となります。

℘♡℘

定義 3.1.1. 孤状連結領域 D で正則な関数 $f(z)$ に対して

$$\frac{dF(z)}{dz} = f(z) \tag{3.41}$$

である関数 $F(z)$ を $f(z)$ の**原始関数**と呼ぶ。

このように，考えている領域が**穴のない正則な領域の場合**[6] には原始関数が存在し，以下のように高校で習った懐かしい定理（と同じもの）が成り立ちます。この辺は証明も解説も要りませんね。

℘♡℘

定理 3.1.3. 関数 $f(z)$ は孤状連結領域 D で正則であるとし，$F(z)$ を $f(z)$ の原始関数とすると，D 内の任意の2 点 z_0，z_1 に対して次式が成立する。

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\ dz = F(z_1) - F(z_0) \tag{3.42}$$

[6] 穴があったら駄目ですよ！ どういう場合に成り立つのか十分に注意してくださいね！ 例え1 点でも正則でない点があったら穴開きですからね！

℘♡℘

定理 3.1.4 (部分積分). $f(z)$，$g(z)$ が孤状連結領域 D で正則であり，$g(z)$ の原始関数を $G(z)$ とすると

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g(z)\ dz = [f(z)G(z)]_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \frac{df(z)}{dz} G(z)\ dz \tag{3.43}$$

定理 3.1.5 (置換積分). $z = g(w)$ によって w 面上の孤状連結領域 T が z 面上の孤状連結領域 D に1 対1 に写像されるとする。$f(z)$ は領域 D で，$g(w)$ は T でそれぞれ正則であるとする。このとき次式が成立する。

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\ dz = \int_{w_0}^{w_1} f(g(w))\ \frac{dz}{dw}\ dw = \int_{w_0}^{w_1} f(g(w))\ \frac{dg(w)}{dw}\ dw \tag{3.44}$$

原始関数の話が出たので，この辺で Cauchy の積分定理の逆にあたるモレラ（ Morera ）の定理についてもふれておきます。

℘♡℘

定理 3.1.6 (モレラ（ Morera ）の定理). 関数 $f(z)$ は孤状連結領域 D で連続であるとする。D の中の任意の閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z)\ dz = 0 \tag{3.45}$$

であるとき，$f(z)$ は領域 D で正則である。

図 3.6 のように D 内に1 点 z_0 を適当に定めます。D 内の任意の点を z とし，z_0 と z を含む任意の閉曲線を C とし，z_0 から z に行く部分を C_1，z から z_0 に戻る部分を C_2 とします。

このとき仮定より

$$0 = \int_C f(z')\ dz' = \int_{C_1} f(z')\ dz' + \int_{C_2} f(z')\ dz' \tag{3.46}$$

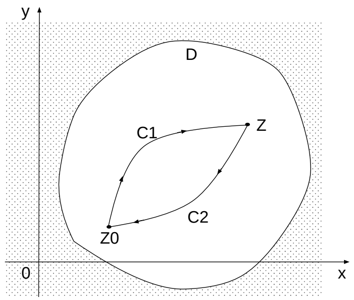


図 3.6:

となりますが，経路 C_2 を逆向きにしたものを $\overline{C}_2$ とすると

$$0=\int_C f(z')\ dz'=\int_{C_1} f(z')\ dz'-\int_{\overline{C}_2} f(z')\ dz' \tag{3.47}$$

となります。

経路 C は任意ですから，C_1, $\overline{C}_2$ も任意に選べます。従って z_0 から z まで $f(z)$ を積分した値は経路に依存しません。よって $f(z)$ の原始関数 $F(z)$ を定義することができ $F(z)$ は D で正則です。

$$\frac{dF(z)}{dz}=f(z) \tag{3.48}$$

であり， $F(z)$ が正則ですから，導関数 $f(z)$ も正則になります。

3.1.4 簡単な複素積分の例

z^n $(n=0,1,2,\dots)$ や e^z，$\sin z$，$\cos z$ などは整関数ですから（ 55 ページと 58 ページあたりを参照 ），原始関数が存在します。

微分公式を逆に使えば $f(z)$ の原始関数 $F(z)$ は明らかに表 3.1 のようになります。

このように複素平面全体で被積分関数 $f(z)$ が正則ならば原始関数が存在しますから，積分経路のことは忘れていることができますが，もし複素平面

$f(z)$	$F(z)$
$z^n \quad (n=0,1,2,\dots)$	$\dfrac{1}{n+1}z^{n+1}$
e^z	e^z
$\sin z$	$-\cos z$
$\cos z$	$\sin z$

表 3.1: 原始関数

内に1 点でも正則でない点[7] がある場合には積分経路と正則でない点との位置関係がとても重要になります。

例 3.1.1. 積分路 C は正の向きの閉曲線とする。

$$\int_C \frac{1}{z-z_0}\ dz=\begin{cases} 2\pi i & (z_0\text{が } C \text{ の中}) \\ 0 & (z_0\text{が } C \text{ の外}) \end{cases} \tag{3.49}$$

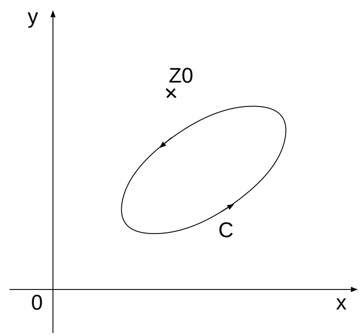


図 3.7:

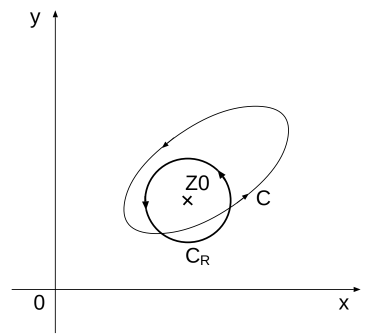


図 3.8:

先ず，z_0 が閉曲線 C の外にあるときは（ 図 3.7），C の内部では被積分関数は正則ですから，Cauchy の積分定理から明らかに

$$\int_C \frac{1}{z-z_0}\ dz=0 \tag{3.50}$$

[7]特異点といいます。特異点については後で詳しく述べます。

となります。

次に，z_0 が閉曲線 C の中にあるときですが，図 3.8 のように積分路の変形定理を使って閉曲線 C を変形し，中心 z_0 半径 R の円にします。(この変形が分からない人は 付録 A を読んでください。）この円形の経路を C_R とします。

C_R 上の z は

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi) \tag{3.51}$$

と表せますから [8]， C_R に沿った変位は

$$dz = \frac{dz}{d\theta}\, d\theta = Re^{i\theta} i\, d\theta \tag{3.52}$$

です。

従って

$$\int_C \frac{1}{z-z_0}\, dz = \int_{C_R} \frac{1}{z-z_0}\, dz \tag{3.53}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}}\, Re^{i\theta}\; i\; d\theta \tag{3.54}$$

$$= \int_0^{2\pi} i\; d\theta = 2\pi i \tag{3.55}$$

となります。

実は式 (3.49) という 積分は，単なる 複素積分の1 例というだけに止まりません。この形の積分を 利用して，正則でない点を 含む領域での複素積分の様々な性質が導かれることになります。ですから，単に式 (3.49) の結果を 覚えるのではなく，計算方法も 含めて，しっかり 理解しておいてください。

3.2 コーシー（ Cauchy）の積分公式と 正則関数

3.2.1 コーシー（ Cauchy）の積分公式

前節で 複素積分の定義といくつかの重要な 定理について話しましたが，積分に関する 定理ではいつも 被積分関数が正則（ 微分可能）かどうかが問題に

[8] この章の最初の話に 合わせて言えば，曲線を 表すパラメーター t として角度 θ を 使ったことになります。

なっていました。このような 正則な 関数に関しては次のコーシー（ Cauchy）の積分公式が成立します。

$\wp\heartsuit\wp$

定理 3.2.1 (Cauchy の積分公式). 関数 $f(z)$ は孤状連結領域 D で正則であるとする。閉曲線 C は正の向きを持ち，C の周および内部の点は全て D に含まれるとする。C 内の任意の点を z_0 とすると 次式が成立する。

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz \tag{3.56}$$

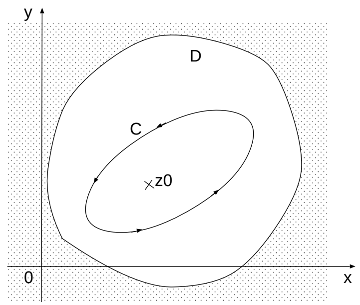


図 3.9:

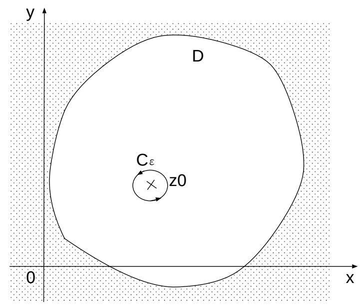


図 3.10:

証明にかなり 近いもの

この公式はとても 大切なものなので，いつもより は少しまじめに証明らしきものを 書いてみましょう。

点 z_0 が問題になっているので，被積分関数の分子を z_0 での値と，そこか

らの差の形に書きます。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad (3.57)\\ &= \frac{f(z_0)}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-z_0}\,dz \\ &\quad +\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad (3.58)\\ &= \frac{f(z_0)}{2\pi i}2\pi i+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad (3.59)\\ &= f(z_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad (3.60)\end{aligned}$$

式 (3.57) の第1 項で $f(z_0)$ は積分変数 z を含んでいないので，積分の外に出します。式 (3.58) の第1 項の積分は前節の例題 3.1.1 でやりましたね。

さて，式 (3.60) の第2 項の積分がどうなるかを調べてみましょう。

積分路 C を変形して，中心が z_0 ，半径 ϵ の円 C_ϵ にします（ 図 3.10 参照）。積分路の変形の定理より，このように積分路を変えても積分した結果は変化しません。

$$\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_\epsilon} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz \qquad (3.61)$$

今，円の半径 ϵ を無限小にしてみると被積分関数は

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \qquad (3.62)$$

ですが，$f(z)$ は領域 D の中では正則なので，この極限は導関数 $f'(z_0)$ となります。

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \qquad (3.63)$$

$f(z)$ は正則ですから $|f'(z_0)|$ は有限な値を持っているはずであり，適当に大きな値 M を選べば

$$|f'(z_0)| \leqq M \qquad (3.64)$$

となります。

従って

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{C_\epsilon}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| &\leqq \lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right||dz| \qquad (3.65)\\ &\leqq \lim_{\epsilon\to 0}M\int_{C_\epsilon}|dz| = \lim_{\epsilon\to 0}M2\pi\epsilon = 0 \qquad (3.66)\end{aligned}$$

となります。

よって，式 (3.60) の第2 項は 0 であり，Caushy の積分公式 (3.56) が成り立つことが分かりました。 ■

Caushy の積分公式 (3.56) では z_0 と書いているので，何だか z_0 は値が決まっている定数のように見えてしまいますが，z_0 は積分路 C の内側のどこでもよいのですから，変数と思ってよいわけです。

そこで z_0 と書く代わりに z と書くことにして，代わりに積分変数の方を z でなく z' とでも書いてみましょう。

$\wp\heartsuit\wp$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \qquad (3.67)$$

このように書いてみればよく分かると思いますが，Caushy の積分公式は

閉曲線 C の上で $f(z')$ の値を与えれば C の内部での正則な関数 $f(z)$ は一意的に定まる。

と言っているのです。

ちょっとビックリしませんか？　式 (3.67) の右辺の積分は C に沿った積分だから，C 上での値を適当に与えれば実行できてしまいますよね？　すると，その結果は C 内部で正則な関数になり，そして C 内部で正則な関数はそれ一つしかないんです。

えっ!? 「一つしかない」ことはまだ分からない? う～～ん。蛇足のような気もするけど，少し付け足しますか ....。

C 上で $f(z')$ となり C の内部で正則な関数が $f_1(z)$ と $f_2(z)$ の2 つあったとします。Caushy の積分公式よりこれらの関数は

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \tag{3.68}$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \tag{3.69}$$

と表せます。従って，辺々引き算すれば

$$f_1(z) - f_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' = 0 \tag{3.70}$$

ですから，$f_1(z) = f_2(z)$ となります。

さて，何故 C 上の値を決めるだけで，C 内部の関数形まで決まってしまうかというと ...それは前から何度も強調したように，正則（微分可能）だということが，関数形をものすごく制限するからなんです。複素関数にとっては「微分できる」ということは，とても厳しい条件なんです。

具体的に言うと，正則であるためには前章でやったように Cauchy-Riemann の関係式を満たしていなければなりませんでした。Cauchy-Riemann の関係式は要するに微分方程式でしたね? つまり，正則な関数を作るというのは Cauchy-Riemann の関係式という微分方程式を解くことと同じなんです。そして，C 上での値を与えるというのは「境界での値を与える」ということになっています。「C 上での値を与えて正則な関数を作る」というのは見方を変えれば「境界条件を与えて微分方程式を解く」ことに他ならないのです。

そう思ってみれば，正則な関数が一通りに決まってしまっても不思議はないでしょう?

3.2.2 正則な関数に関するいくつかの定理

さて，正則な関数は Caushy の積分公式 (3.67) で表せることが分かりました。この式の右辺で変数 z は分母の一か所にしか入っていません。形の分からない（自分で適当に与える） $f(z')$ の部分には z は入っていないのです。

従って，この式を用いれば正則な関数の z 依存性が形式的には分かっていることになります。

以下では，Caushy の積分公式 (3.67) を使って正則な関数の性質を調べていきましょう。

℘♡℘

定理 3.2.2. [a] 複素関数 $f(z)$ は領域 D で正則であるとする。そのとき $f(z)$ は全ての次数の導関数を持ち，それらは全て領域 D で正則である。また Caushy の積分公式のときと同じ条件の曲線 C を用いると n 次導関数 $f^{(n)}(z)$ は次式となる。

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{(z'-z)^{n+1}}\,dz' \tag{3.71}$$

[a]この定理はコーシーの積分公式とかグルサ（ Goursat ）の定理と呼ばれることもあります。

まじめに証明するのは面倒臭いですが，成り立ちそうなことは簡単に分かります。

$f(z)$ は正則ですから Caushy の積分公式 (3.67) を使うと

$$\frac{d}{dz}f(z) = \frac{d}{dz}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \tag{3.72}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d}{dz}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \tag{3.73}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{(z'-z)^2}\,dz' \tag{3.74}$$

となります。

式 (3.74) 右辺の被積分関数の分母は $(z'-z)^2$ ですが，z' は C 上の点で z は C 内部の点ですから，分母が 0 になることはないので，積分した結果がおかしくなることはないでしょうから，多分，$\dfrac{d}{dz}f(z)$ は正則になるでしょう [9]。

同様に n 回微分すれば式 (3.71) となります。

[9]気になる人は正則になることをちゃんと示してみてください。

注意

実数の関数 $f(x)$ では n 回までは微分できても， $n+1$ 回目は微分できないような関数がいくらでもあります。しかし，複素関数では1 回微分できれば（ 正則ならば），自動的に何回でも微分できることになってしまうのです。

℘♡℘

定理 3.2.3 (最大値の原理). C を単一閉曲線とし，$f(z)$ は C の周および内部で正則であるとする。このとき $|f(z)|$ は C 上で最大となる [a]。

[a] C の外は考えていません。C の外でも $f(z)$ の値が定義されているなら，C の外ではもっと大きいかもしれません。

C の内部の点を z とします。n を自然数として，$(f(z))^n$ に Cauchy の積分公式を使うと

$$(f(z))^n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(f(z'))^n}{z'-z}\,dz' \tag{3.75}$$

となります。

従って

$$|f(z)|^n \leqq \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|f(z')|^n}{|z'-z|}\,|dz'| \tag{3.76}$$

という不等式が成り立ちます。

曲線 C の長さを ℓ，点 z と最も近い C 上の点と z との距離を d とし（ 図3.11），C 上での $|f(z')|$ の最大値を M とすれば，明らかに

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|f(z')|^n}{|z'-z|}\,|dz'| \leqq \frac{1}{2\pi}\ell\frac{M^n}{d} \tag{3.77}$$

という不等式が成り立ちます。

よって

$$|f(z)|^n \leqq \frac{\ell}{2\pi}\frac{M^n}{d} \tag{3.78}$$

従って

$$|f(z)| \leqq \left(\frac{\ell}{2\pi d}\right)^{\frac{1}{n}} M \tag{3.79}$$

今，n は任意の自然数なので $n\to\infty$ とすれば

$$|f(z)| \leqq M \tag{3.80}$$

従って $|f(z)|$ は C 上で最大となります。

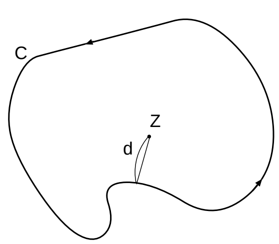


図 3.11:

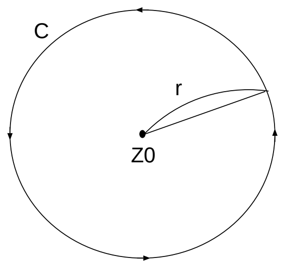


図 3.12:

℘♡℘

定理 3.2.4 (Cauchy の評価式). C は z_0 を中心とする半径 r の円とする（ 図 3.12）。$f(z)$ は C の周および内部で正則であるとする。C 上での $|f(z)|$ の最大値を M とすると以下の不等式が成立する。

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqq \frac{n!}{r^n}\,M \tag{3.81}$$

式 (3.71) より

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{(z'-z_0)^{n+1}}\,dz' \tag{3.82}$$

ですから

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leqq \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{|f(z')|}{|z'-z_0|^{n+1}}\,|dz'| && (3.83)\\ &\leqq \frac{n!}{2\pi}2\pi r\frac{M}{r^{n+1}} && (3.84)\\ &= \frac{n!}{r^n}M && (3.85)\end{aligned}$$

となります。

℘♡℘

定理 3.2.5 (リウヴィル（ **Liouville** ） の定理)**.** $f(z)$ が有界な整関数ならば，$f(z)$ は定数である。

$f(z)$ は有界なので，適当に大きな値を M とすれば

$$|f(z)| \leqq M \tag{3.86}$$

となります。

ところで $n=1$ として Cauchy の評価式 を使えば

$$|f'(z_0)| \leqq \frac{C \text{ 上での } |f(z)| \text{ の最大値}}{r} \leqq \frac{M}{r} \tag{3.87}$$

となります。

仮定より $f(z)$ は整関数ですから式 (3.87) は複素平面全体で成り立つので，$r \to \infty$ とすれば

$$|f'(z_0)| = 0 \tag{3.88}$$

となります。

z_0 は任意の値なので

$$\frac{df(z)}{dz} = 0 \qquad (\, z \text{ は任意の値}\,) \tag{3.89}$$

となり， $f(z)$ は定数であることが分かります。

℘♡℘

定理 3.2.6 (代数学の基本定理)**.** 任意の代数方程式

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (\, a_n \neq 0,\ n \geqq 1\,) \tag{3.90}$$

は必ず解を持つ。

$a_n \neq 0,\ n \geqq 1$ より，$f(z)$ は定数ではありません。

さて，$f(z)=0$ が解を持たないと仮定してみます。

このとき

$$g(z) \equiv \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \tag{3.91}$$

と定義すると，右辺の分母は 0 になりません。従って明らかに $g(z)$ は複素平面全体で正則であり，整関数になります。

また，式 (3.91) の右辺の分母は 0 にならないのですから，明らかに $g(z)$ は有界です。

従って Liouville の定理より $g(z)$ は定数ということになりますが，これは $f(z)$ が定数でないことと矛盾します。

従って $f(z)=0$ は解を持たなければなりません。

◇◇ 第 3 章の練習問題 ◇◇

【 **1** 】 次の関数をそれぞれ積分路 C_1 と C_2 に沿って積分し，結果を比較しなさい。但し， a と b は実数であり積分路 C_1 と C_2 は以下とする。

C_1： 0 から a まで直線に沿って進んだ後，a から $a+ib$ まで直線に沿って進む。

C_2： 0 から $a+ib$ まで直線に沿って進む。

(1) $f = z^2$ (2) $f = |z|^2$

【 **2** 】 次の積分を計算しなさい。但し，積分路 C は複素平面の原点を中心とする半径 1 の円であり，向きは正の向き（ 反時計回り ）とする。

$$\int_C \frac{1}{z^2}\frac{1}{z-2}\, dz$$

第4章　複素関数の展開と特異性

前章までで私達は複素関数を定義し，その微分と積分について学びました。微分や積分の基本的な公式は実関数のときと同じものがたくさんありましたが，変数が複素数であるために色々と新しい概念も出てきました。中でも最も重要な概念は「正則（微分可能）」ということでしょう。

この章ではコーシーの積分公式を用いて複素関数をべき展開し，正則な関数や正則でない関数の性質を調べてみます。

4.1　テイラー（Taylor）展開

皆さんは，実関数 $f(x)$ のテイラー（Taylor）展開やマクローリン（Maclaurin）展開の話をどこかで聞いたことがあると思います。実関数では n 回微分できても $n+1$ 回目は微分できない場合もあるので，テイラー（Taylor）展開できるかどうかは簡単には判断できませんが，複素関数の場合は正則ならば何回でも微分できるので，とてもすっきりしています。

$\wp\heartsuit\wp$

定理 4.1.1 (テイラー（Taylor）展開). 関数 $f(z)$ が領域 $|z-\alpha|<\rho$ で正則ならば，この領域において $f(z)$ は α を中心とする次のべき級数に一意的に展開される。

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(\alpha)\ (z-\alpha)^n \tag{4.1}$$

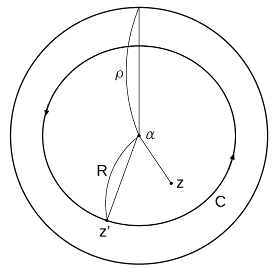


図 4.1:

証明

図4.1のように，領域 $|z-\alpha|<\rho$ の中の任意の点を z とします。$|z-\alpha|<R<\rho$ を満たす適当な値の R を半径とする円を C とすると Cauchy の積分公式より $f(z)$ は

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-z}\ dz' && (4.2)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-\alpha-(z-\alpha)}\ dz' && (4.3)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-\alpha}\ \frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{z'-\alpha}}\ dz' && (4.4)\end{aligned}$$

となります。

今，$|z-\alpha|<|z'-\alpha|$ となる様に積分路を選んでいるので

$$\frac{|z-\alpha|}{|z'-\alpha|}<1 \tag{4.5}$$

なので，式 (4.4) の分数を等比級数の公式を使って展開すると

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-\alpha}\ \frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{z'-\alpha}}\ dz' && (4.6)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{z'-\alpha}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\alpha}{z'-\alpha}\right)^n\ dz' && (4.7)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z')}{(z'-\alpha)^{n+1}}\ dz' && (4.8)\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(\alpha) \tag{4.9}$$

となります。ただし，式 (4.8) から式 (4.9) への変形には n 次導関数の公式 (3.71) を使いました。

これで，正則な関数は式 (4.1) のように展開できることが分かりましたが，この展開が一意的であることは「べき級数の一致の定理」(21 ページ）で保証されています。■

だいぶ以前(56 ページ)「 正則」と「 解析的」の話をしましたが，そこで宿題になっていた「 正則な関数は必ずべき級数で表せる」ということを示せたわけです。また,「 べき級数で表された関数は必ず収束円内で微分できます（ 57 ページ定理 2.1.1)」から，これで「 正則」と「 解析的」が等価であることを示せました。

なお，定理 4.1.1 から，次の定理が導かれることは簡単に分かりますね?

℘♡℘

定理 4.1.2 (一致の定理). 関数 $f(z)$ が領域 D で正則であり， D 内の点 α で全ての $n \geqq 0$ に対して $f^{(n)}(\alpha)=0$ のとき， $f(z)$ は D 内で恒等的に 0 である。

証明は要りませんよね。式 (4.1) の右辺で $f^{(n)}(\alpha)=0$ と置けば $f(z)=0$ は明らかですから。

注意すべき点は，これは正則な複素関数だから成り立つんだということです。実数関数 $f(x)$ では，ある点 a で全ての次数の導関数が $f^{(n)}(a)=0$ であったとしても，必ずしも $f(x)=0$ にはならないのです。

4.2　零点

複素関数 $f(z)$ の値が 0 となるような点 z を関数 $f(z)$ の**零点**といいます。

関数 $f(z)$ が領域 D で正則な場合を考えます。D 内の点 α で

$$f(\alpha)=f^{(1)}(\alpha)=f^{(2)}(\alpha)=\cdots=f^{(n-1)}(\alpha)=0 \qquad , \quad f^{(n)}(\alpha)\neq 0 \tag{4.10}$$

となるとき，α は $f(z)$ の $\boldsymbol{n}$ **位の零点**であると言います。また，n を零点 α における**位数**といいます。

え〜と，何のことだかピンと来ない人はテイラー展開の式 (4.1) に式 (4.10) を代入してみましょう。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(\alpha)\ (z-\alpha)^k \tag{4.11}$$

$$= \overbrace{f(\alpha)+f^{(1)}(\alpha)(z-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(z-\alpha)^{n-1}}^{\text{ここまで }0} + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(z-\alpha)^{n+1} + \cdots \tag{4.12}$$

$$= \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{(n+1)!}(z-\alpha)^{n+1} + \cdots \tag{4.13}$$

従って，z が α に近いとき $f(z)$ は

$$f(z) \simeq \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n \qquad (z \simeq \alpha) \tag{4.14}$$

のように振る舞うことが分かります [1]。

ところで，式 (4.13) を見ると，z が α からほんの少しでもずれていれば $f(z)$ は 0 ではありませんね [2]?

そこで次の定理が成り立ちます。

℘♡℘

定理 4.2.1. 関数 $f(z)$ が領域 D で正則であり，恒等的に 0 ではないとき，D 内にある $f(z)$ の零点は全て孤立している。

[1]大学2 年生くらいだと「 だから何だ？　何が面白いんだ」と思うかもしれませんが，あと何年か物理を勉強していくと，(4.14) の様な式が重要なんだということが分かります。$(z-\alpha)$ の何乗で 0 に近づくのかで物理的な性質が変わり，$(z-\alpha)^n$ の前の係数が「 ○○係数」とか「 ○○率」と呼ばれる物理量になっているわけで . . . 。

[2]いっぱいずれていれば後ろの方の高次の項と打ち消し合って 0 になるかもしれませんが。

つまり，点 α が零点だったとすると，α の十分近くには他の零点はないのです。

4.3 ローラン(Laurent) 展開

正則な関数はテイラー展開することができましたが，それでは正則でない関数はどうなのでしょうか？ 実は正則でない関数もテイラー展開と似たような展開式を作ることができます。

℘♡℘

定理 4.3.1 (ローラン(Laurent) 展開). 関数 $f(z)$ が円環領域 $D = \{\ z \mid \ \rho_1 < |z-\alpha| < \rho_2\ \}$ で正則ならば，この領域において $f(z)$ は次ように一意的に展開される(図 4.2 参照)。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-\alpha)^n} \tag{4.15}$$

ただし

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z')}{(z'-\alpha)^{n+1}}\ dz' \tag{4.16}$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z')(z'-\alpha)^{n-1}\ dz' \tag{4.17}$$

ここで C は中心が α で半径が R $(\rho_1 < R < \rho_2)$ の円であり，向きは正の向きとする。

この定理では ρ_2 は無限に大きくてもかまいません。また，ρ_1 は無限小でもかまいません。$\rho_2 \to \infty$, $\rho_1 \to 0$ のときは，点 α だけが正則でなくなります。例えば $f(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ のように ...。

証明

領域 $D = \{\ z \mid \ \rho_1 < |z-\alpha| < \rho_2\ \}$ 内の任意の点を z とします。D の内部に z の周りを廻る曲線を描き Γ とします(図 4.3 参照)。曲線 Γ を積分経

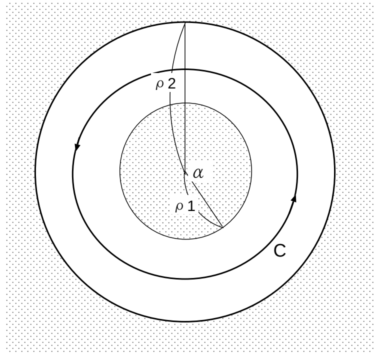


図 4.2:

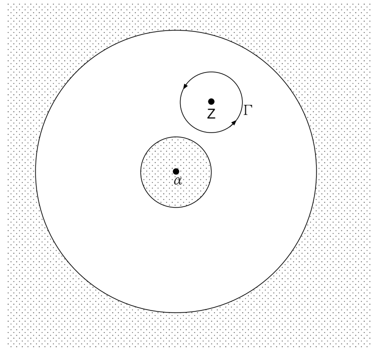


図 4.3:

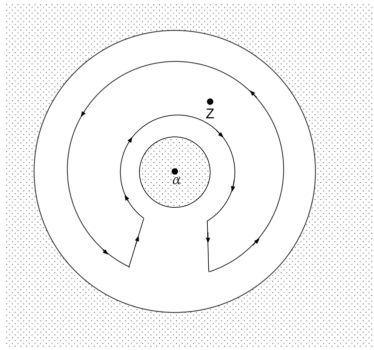


図 4.4:

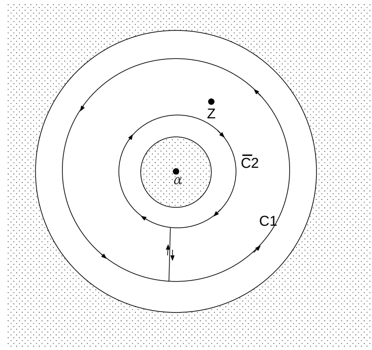


図 4.5:

路にして Cauchy の積分公式を使うと，関数 $f(z)$ は次のように表せます。

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z')}{z'-z}\ dz' \tag{4.18}$$

次に，積分経路 Γ をぐ〜〜っと図 4.4 のように引き伸ばします。最終的には図 4.5 の様に両端(？) をくっつけてしまいます。線が重なった部分はある方向とその逆向きとで積分するので，積分は打ち消し合います。従って積分

経路は図 4.5 の正の向きの円 C_1 と負の向きの円 $\overline{C}_2$ だけになります。

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' + \frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{C}_2}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' && (4.19)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' && (4.20)
\end{aligned}
$$

ただし，円 $\overline{C}_2$ の向きを正の向きにしたものを C_2 で表しました(図 4.6 参照)。

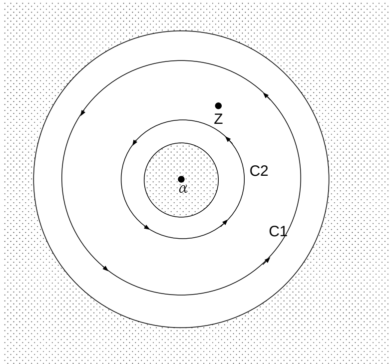


図 4.6:

さて，経路 C_1 上の点を z' とすると $|z'-\alpha| > |z-\alpha|$ であることに注意すると，C_1 での積分は以下のように変形できます。

$$
\begin{aligned}
I_1 &\equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' && (4.21)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z')}{z'-\alpha-(z-\alpha)}\,dz' && (4.22)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z')}{z'-\alpha}\,\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{z'-\alpha}}\,dz' && (4.23)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z')}{(z'-\alpha)^{n+1}}\,dz' && (4.24)
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n a_n \qquad (4.25)
$$

ここで

$$
a_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(z')}{(z'-\alpha)^{n+1}}\,dz' \qquad (4.26)
$$

と定義しました。

同様に C_2 上では $|z'-\alpha| < |z-\alpha|$ であることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
I_2 &\equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' && (4.27)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z')}{z'-\alpha-(z-\alpha)}\,dz' && (4.28)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z')}{z-\alpha}\,\frac{1}{\frac{z'-\alpha}{z-\alpha}-1}\,dz' && (4.29)\\
&= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-\alpha)^{k+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}f(z')(z'-\alpha)^k\,dz' && (4.30)\\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-\alpha)^n} && (4.31)
\end{aligned}
$$

ただし

$$
b_n \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}f(z')(z'-\alpha)^{n-1}\,dz' \qquad (4.32)
$$

と定義しました。

式 (4.20) に (4.25) と (4.31) を代入すればローラン展開の式

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-\alpha)^n} \qquad (4.33)
$$

が得られます。

なお,「 a_n, b_n の式 (4.26) と (4.32) では積分経路が異なっているから，式 (4.16)，(4.17) と矛盾する！ 」とか思っている人はいますか?

積分路変形の定理を使えば経路 C_1 を C_2 に変形しても積分結果が変わらないことが分かりますから，何もおかしなところはありませんよ。

例 4.3.1.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - a^2} \qquad (a > 0) \tag{4.34}$$

この関数は

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z+a)} \tag{4.35}$$

と因数分解できますから $z = a$ と $z = -a$ で正則ではありません。

ローラン展開の例として $z = a$ を中心に展開してみましょう。

その場合，$(z-a)$ のべきで書かれている部分はそのままにしておいて，$(z-a)$ 以外の部分を $(z-a)$ を使って書き直します。つまり，この例では

$$f(z) = \frac{1}{z-a}\ \frac{1}{(z-a)+2a} \tag{4.36}$$

とします。

そして，$z = a$ を中心にしたローラン展開をするのですから，$|z-a| \ll 1$ と思って $(z-a)$ で展開します。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-a}\ \frac{1}{(z-a)+2a} && (4.37)\\ &= \frac{1}{z-a}\ \frac{1}{2a}\ \frac{1}{1+\frac{z-a}{2a}} && (4.38)\\ & && (4.39) \end{aligned}$$

$\dfrac{|z-a|}{2a} \ll 1$ と思って等比級数の公式を使うと

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-a}\ \frac{1}{2a}\left\{ 1 - \frac{z-a}{2a} + \left(\frac{z-a}{2a}\right)^2 - \cdots \right\} && (4.40)\\ &= \frac{1}{2a}\ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{(2a)^2} + \frac{z-a}{(2a)^3} - \frac{(z-a)^2}{(2a)^4} + \cdots && (4.41) \end{aligned}$$

これで $z = a$ を中心にしたローラン展開の式ができました。

えっ?! a_n，b_n の式 (4.16)，(4.17) を使っていないって？

あんなものを使って計算する人はいません！

ローラン展開の式 (4.15) は，**展開できると示したことが重要なのです。**一般的に関数の性質を調べようというなら式 (4.16)，(4.17) を使うこともあるかもしれませんが，具体的に関数が与えられて，実際にローラン展開の式を作る場合には，あんな難しい積分を計算しようと考えてはいけません。

適当に工夫すれば，もっとずっと簡単に展開式を作れるはずです。そして，どんな方法で作ったとしても最終的に得られる式は同じものなんですから，なるべく簡単な方法を探しましょう。

$z = -a$ を中心にしたローラン展開も同じようにすれば求められますから，練習のため自分で計算してみましょう。

例 4.3.2.

$$f(z) = \frac{\cos z}{z} \tag{4.42}$$

この関数は $z = 0$ で正則でないので，$z = 0$ を中心にしてローラン展開してみましょう。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos z}{z} && (4.43)\\ &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\ z^{2n} && (4.44)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\ z^{2n-1} && (4.45)\\ &= \frac{1}{z} - \frac{z}{2} + \frac{z^3}{4!} - \cdots && (4.46) \end{aligned}$$

4.4 特異点

この節では複素関数 $f(z)$ が正則でない点を持つ場合の性質について調べてみましょう。正則でない点のことを**特異点**と呼びます。もう少し正確に言うと ...

℘♡℘

定義 4.4.1 (特異点). 関数 $f(z)$ が点 α では正則でないが， α の任意の近傍内に正則な点が存在するとき α を $f(z)$ の**特異点**という。

正則でない理由は，例えば $f(z)$ の値が点 α では定義されていないとか，定義はされているけど不連続だとか，その他諸々，何らかの理由で微分できないような関数なんでしょう。

この特異点のなかでも特に「 点 α の近傍では α だけが正則でない」ような特異点を**孤立特異点**と呼びます。

以下では孤立特異点について考えます。

点 α が孤立特異点であるとすると α の付近では α 以外は正則なので，関数 $f(z)$ を α を中心にしてローラン展開することができます。

$$f(z)=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-\alpha)^n}}_{\text{主要部}}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n \qquad (z\neq\alpha) \tag{4.47}$$

この第1 項の $(z-\alpha)$ の負のべきの項を主要部と呼びます。この主要部の形によって関数 $f(z)$ の特異性を分類することができます。

主要部が 0 の場合

このとき式 (4.47) は次式となります。

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n \qquad (z\neq\alpha) \tag{4.48}$$

この式を見れば，もし $f(\alpha)=a_0$ であれば $f(z)$ は点 α で正則であることが分かりますね。点 α で正則でないと思っていた理由は，点 α で $f(z)$ の値が定義されていなかったか，もしくは定義されていたけれど，その値が a_0 ではなかったからでしょう。

このような場合， 点 α での関数の値を $f(\alpha)=a_0$ と定義すれば（ 定義し直せば）$f(z)$ は点 α でも正則になります。

このような特異点を**除去可能な特異点**と呼びます。

例 4.4.1.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,z^{2n} \tag{4.49}$$

この例では $z=0$ で $f(z)$ の値を定義していないなら $z=0$ は孤立特異点です。もし $f(0)=1$ と定義されているなら $f(z)$ は $z=0$ でも正則です。

主要部が有限個の項の和の場合

この時，式 (4.47) の第1 項の部分は n がある値 k より大きくなると $b_n=0$ となっているはずです。つまり $k\geqq 1$ が存在して

$$b_k \neq 0 \tag{4.50}$$

$$b_n = 0 \qquad (\ n>k\ ) \tag{4.51}$$

このとき 関数 $f(z)$ は

$$f(z)=\sum_{n=1}^{k}\frac{b_n}{(z-\alpha)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n \qquad (z\neq\alpha) \tag{4.52}$$

となります。

従って $z\to\alpha$ とすると主要部の項が発散しますが，絶対値が最も大きくなるのは $n=k$ の項なので $z\simeq\alpha$ では

$$f(z)\simeq\frac{b_k}{(z-\alpha)^k} \qquad (z\simeq\alpha) \tag{4.53}$$

と近似されます。

関数の形がこのようになる特異点 α を **k 位の極（ pole ）**と呼びます。

数学的にはどうなのか知りませんが，複素関数論を物理などに応用して色々な計算に使う立場からすると，**最も重要で役に立つ特異性は，この「 極(pole)」です。**

ちなみに関数 $f(z)$ が極以外の特異性を持たないとき，$f(z)$ は**有理形（ 有理形関数）**であるといいます。

例 4.4.2.

$$f(z)=\frac{1}{(z-5)(z+3)^2} \tag{4.54}$$

この例では見るからに $z=5$ が 1 位の極。$z=-3$ が 2 位の極です。

例 4.4.3.

$$f(z)=\tan z \tag{4.55}$$

こういう関数の場合には，どこに特異点があるかを注意深く調べなければなりません。

$$\begin{aligned} f(z) &= \tan z=\frac{\sin z}{\cos z} && (4.56)\\ &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\,\frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}} && (4.57)\\ &= -i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} && (4.58)\end{aligned}$$

従って，分母が 0 になるのは

$$e^{2iz}=-1=e^{(2n+1)\pi i} \qquad (\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\ ) \tag{4.59}$$

のときです。

よって

$$z=z_n=\frac{(2n+1)\pi}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad (\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots\ ) \tag{4.60}$$

が特異点になります。

特異点の種類を調べるために $z=z_n+w$ と置いて特異点 z_n 付近での関数の振る舞いを見てみましょう。

$$\begin{aligned} f(z) &= \tan z=\tan(z_n+w)=\tan\left(n\pi+\frac{1}{2}\pi+w\right) && (4.61)\\ &= \tan\left(\frac{1}{2}\pi+w\right)=-\cot w=-\frac{\cos w}{\sin w} && (4.62)\\ &= -\frac{1-\frac{w^2}{2}+\cdots}{w-\frac{w^3}{3!}+\cdots}=-\frac{1}{w}\,\frac{1-\frac{w^2}{2}+\cdots}{1-\frac{w^2}{3!}+\cdots} && (4.63)\\ &= -\frac{1}{z-z_n}\,\frac{1-\frac{(z-z_n)^2}{2}+\cdots}{1-\frac{(z-z_n)^2}{3!}+\cdots} && (4.64)\end{aligned}$$

従って $z\simeq z_n$ では $f(z)\simeq -\dfrac{1}{z-z_n}$ であり，$z=z_n$ は 1 位の極であることが分かりました。

主要部が無限個の項の和の場合

このような特異点 α を**真性特異点**と呼びます。

例 4.4.4.

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \tag{4.65}$$

従って $z=0$ は $f(z)$ の真性特異点です。

真性特異点は次の定理のようにちょっと変わった性質をもっています。

定理 4.4.1 (ワイエルストラス(**Weierstrass**) の定理)**.** 点 $z=\alpha$ が $f(z)$ の孤立真性特異点ならば $z\to\alpha$ のとき $f(z)$ は一定の極限値を持たない。$f(z)\to\infty$ でもない。α に収束する数列 $\{z_n\}$ を適当に選べば任意の C に対して $f(z)\to C$ とできる。

要するに α に近づく近づけ方によって $f(z)$ の値はどんな値にでも近づけられると言っているのです。

例 4.4.5.

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}} \tag{4.66}$$

とします。

最初に $z_n=\dfrac{i}{2n\pi}\quad(n=1,2,3,\dots)$ と置くと $z_n\to0\quad(n\to\infty)$ ですから，数列 $\{z_n\}$ は $n\to\infty$ のとき 0 に収束します。このとき $f(z)$ は

$$f(z_n)=e^{\frac{1}{z_n}}=e^{\frac{2n\pi}{i}}=e^{-2n\pi i}=1 \tag{4.67}$$

となります。従って

$$f(z_n) \to 1 \qquad (n \to \infty) \tag{4.68}$$

となります。

次に $z_n = \dfrac{i}{(2n+1)\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ と置くと，やはり $z_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ ですから，数列 $\{z_n\}$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束します。このとき $f(z)$ は

$$f(z_n) = e^{\frac{1}{z_n}} = e^{\frac{(2n+1)\pi}{i}} = e^{-(2n+1)\pi i} = -1 \tag{4.69}$$

です。従って今度は

$$f(z_n) \to -1 \qquad (n \to \infty) \tag{4.70}$$

となります。

◇◇ 第 4 章の練習問題 ◇◇

【 1 】 次の関数を $z = 0$ を中心とするテイラー級数(マクローリン級数) に展開しなさい。

(1) $\dfrac{z}{z^2+1}$ (2) $\dfrac{1}{(1+z)^m} \quad (m \geqq 1)$

(3) $\mathrm{Log}\,(1+z)$ (4) $\cos(a+z)$

【 2 】 次の関数を $z = 0$ を中心とするローラン級数に展開しなさい。

(1) $\dfrac{\sin z}{z^2}$ (2) $\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{z^2-1}$

(3) $\dfrac{e^{\frac{2}{z}}}{z^2}$ (4) $ze^{\frac{1}{z}}$

第 5 章 留数定理

前章ではローラン展開を利用して複素関数の特異性について調べました。複素関数論を物理学などに応用した場合，特異点は様々な物理的性質を表すとても重要な量になります。

また，単純に積分を計算したいだけの場合でも，特異点の性質を利用すると積分計算が簡単に実行できることがしばしばあります。そのため元々は実関数の積分を，あえて複素積分の式に書き換えてから計算することも多いのです。このように，積分をする際に度々お世話になることになる留数定理について勉強しましょう。

5.1 留数定理

複素関数 $f(z)$ を正の向きの閉曲線 C に沿って積分してみましょう [1]。

$$I \equiv \int_C f(z)\, dz \tag{5.1}$$

ここで $f(z)$ の特異性は閉曲線 C の内部では N 個の孤立特異点 $z_1, z_2, \ldots, z_N$ だけであると仮定します(図 5.1 参照)。

このとき $f(z)$ は閉曲線 C の内部では孤立特異点 $z_1, z_2, \ldots, z_N$ 以外では正則なので，図 5.2 のように積分経路を変形することができます。

向きが逆向きな直線部分はぴったり重ねてしまえば積分は打ち消し合うので，結局，図 5.3 のように特異点の周りの小円の経路 $C_1, C_2, \ldots, C_N$ だけが残ります。従って積分 (5.1) は

$$I = \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{N} I_k \tag{5.2}$$

[1] C が負の向きの場合は結果の符号が反転するだけです。

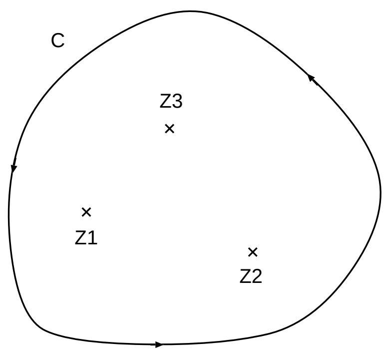


図 5.1:

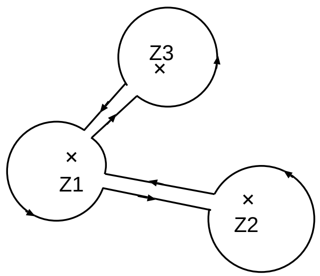


図 5.2:

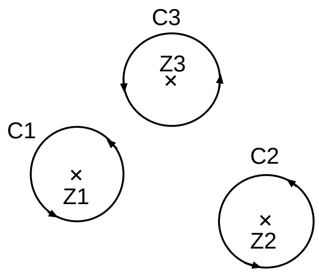


図 5.3:

となります。ただし

$$I_k \equiv \int_{C_k} f(z)\ dz \tag{5.3}$$

と置きました。

どれも同じ形の積分なので，代表として C_1 に沿う積分 I_1 について考えてみましょう。C_1 の中では特異点は z_1 しかないので，z_1 を中心にして $f(z)$ をローラン展開すると

$$I_1 \quad = \quad \int_{C_1} f(z)\ dz \tag{5.4}$$

$$= \quad \int_{C_1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_1)^n} \right\}\ dz \tag{5.5}$$

$$= \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{C_1} (z-z_1)^n\ dz + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{C_1} \frac{1}{(z-z_1)^n}\ dz \tag{5.6}$$

となります。

明らかに $(z-z_1)^n \quad (n=0,1,2,\ldots)$ は正則ですから $\int_{C_1} (z-z_1)^n\ dz = 0$ です。

また，式 (5.6) の第2 項のうち $n=1$ の項は 82 ページの例題 3.1.1 で述べたように

$$\int_{C_1} \frac{1}{z-z_1}\ dz = 2\pi i \tag{5.7}$$

です。

第2 項で $n \geqq 2$ の項は $z - z_1 = re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$ と置いて積分すると

$$\int_{C_1} \frac{1}{(z-z_1)^n}\ dz \quad = \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n e^{in\theta}}\ re^{i\theta} i\ d\theta \tag{5.8}$$

$$= \quad \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\theta}\ d\theta \tag{5.9}$$

$$= \quad \frac{i}{r^{n-1}} \left[\frac{e^{-i(n-1)\theta}}{-i(n-1)} \right]_{\theta=0}^{2\pi} = 0 \qquad (n \geqq 2) \tag{5.10}$$

従って，式 (5.6) の右辺で 0 でないのは b_1 に比例する項だけであり，積分結果は

$$I_1 = b_1 2\pi i \tag{5.11}$$

となります。

このように閉曲線に沿って積分すると b_1 だけが残ってくるので，b_1 を $f(z)$ の点 z_1 における**留数**（ **residue** ）と言います。

留数を表す記号は本によってまちまちです。

$$\begin{array}{llll} \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) & \text{とか} & \mathrm{Res}(z_1; f) & \text{とか} \\ \mathrm{Res}_f(z_1) & \text{とか} & \mathrm{Res}(f, z_1) & \text{とか} \\ \mathrm{Res}[f, z_1] & \text{とか} & \mathrm{Res}(z_1) & \text{とか} \end{array}$$

さて，他の特異点 $z_2, z_3, \ldots, z_n$ の周りでの積分も全く同じように計算できますから

$$I_k = \int_{C_k} f(z)\ dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}(z_k) \tag{5.12}$$

となります。

従って式 (5.1) の積分は次式となります。

$$I = \int_c f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{C_k} f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(z_k) \tag{5.13}$$

この結果は留数定理として以下のようにまとめられます。

℘♡℘

定理 5.1.1 (**留数定理**)**.** 関数 $f(z)$ が正の向きの単一閉曲線 C を境界とする領域に有限個の孤立特異点 $z_1, z_2, \ldots, z_N$ を持ち，これらの点以外では境界も含めて正則であるとき

$$\int_c f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(z_k) \tag{5.14}$$

5.2 留数の求め方

前節で述べたように，留数 $\mathrm{Res}(f, \alpha)$ は $f(z)$ を α を中心にしてローラン展開したときの $\dfrac{1}{z-\alpha}$ の項の係数 b_1 です。積分結果には留数 b_1 しか残ってこないので，ローラン展開をまじめに求める必要はありません。つまり留数 $\mathrm{Res}(f, \alpha) = b_1$ だけが分かれば十分なので，$z - \alpha$ の他の次数の項は分からなくてもよいのです。

そこで留数を求める方法は色々と工夫されています。

簡単にローラン展開できる場合

関数 $f(z)$ を $z - \alpha$ のべきの和で簡単に表せる場合には，素直にローラン展開の式を書いて $\dfrac{1}{z-\alpha}$ の係数を求めましょう。

例 5.2.1.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \tag{5.15}$$

のとき，$z = 0$ が真性特異点です。

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \cdots \tag{5.16}$$

より

$$\mathrm{Res}(0) = 1 \tag{5.17}$$

$z = \alpha$ が1 位の極の場合

関数の形から $z = \alpha$ が1 位の極であることが分かっているとします。

このとき，もしローラン展開をしたならば

$$f(z) = \frac{b_1}{z-\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \tag{5.18}$$

という形になるはずです。

そこで式 (5.18) に $(z - \alpha)$ を掛けてから $z \to \alpha$ という極限を作れば

$$\lim_{z\to\alpha}\ (z-\alpha) f(z) = \lim_{z\to\alpha} \{b_1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^{n+1}\} = b_1 \tag{5.19}$$

となります。

従って留数は次の極限から求められます。

$$\mathrm{Res}(f, \alpha) = \lim_{z\to\alpha}\ (z-\alpha) f(z) \tag{5.20}$$

$z = \alpha$ が k 位の極の場合

次に $z=\alpha$ が k $(k \geqq 2)$ 位の極の場合について考えてみましょう。
もし真面目にローラン展開をしたら

$$f(z)=\frac{b_k}{(z-\alpha)^k}+\cdots+\frac{b_1}{z-\alpha}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^n \tag{5.21}$$

となります。
まず $z\to\alpha$ のときの発散をなくすために $(z-\alpha)^k$ を掛けます。

$$(z-\alpha)^k f(z)=b_k+\cdots+b_1(z-\alpha)^{k-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-\alpha)^{n+k} \tag{5.22}$$

我々は b_1 の値が欲しいので，z で $(k-1)$ 回微分してから $z\to\alpha$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-\alpha)^k f(z)\} && (5.23)\\
&= \lim_{z\to\alpha}\Big\{(k-1)!\ b_1 \\
&\qquad +\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+k)(n+k-1)\cdots(n+2)(z-\alpha)^{n+1}\Big\} && (5.24)\\
&= (k-1)!\ b_1 && (5.25)
\end{aligned}$$

従って次式で留数を求めることができます。

$$\mathrm{Res}(f,\alpha)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\{(z-\alpha)^k f(z)\} \tag{5.26}$$

例 5.2.2.

$$f(z)=\frac{1}{(z-5)(z+3)^2} \tag{5.27}$$

これは例 4.4.2（ 105 ページ）で特異性を調べた関数です。

$z=5$ は 1 位の極なので，留数は簡単に求められます。

$$\mathrm{Res}(f,5)=\lim_{z\to5}(z-5)f(z)=\lim_{z\to5}\frac{1}{(z+3)^2}=\frac{1}{(5+3)^2}=\frac{1}{8^2} \tag{5.28}$$

$z=-3$ は 2 位の極でしたから，ちょっとだけ複雑になります。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,-3) &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-3}\frac{d}{dz}\{(z+3)^2 f(z)\} && (5.29)\\
&= \lim_{z\to-3}\frac{d}{dz}\frac{1}{z-5}=\lim_{z\to-3}\frac{-1}{(z-5)^2} && (5.30)\\
&= -\frac{1}{(-3-5)^2}=-\frac{1}{8^2} && (5.31)
\end{aligned}$$

例 5.2.3.

$$f(z)=\tan z \tag{5.32}$$

これも以前，特異性を調べた関数です（ 例 4.4.3，105 ページ）。
それによると

$$z=z_n=\frac{(2n+1)\pi}{2}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad (\ n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\ ) \tag{5.33}$$

が 1 位の極でした。
また，z_n 付近では

$$f(z)\simeq-\frac{1}{z-z_n} \qquad (\ z\simeq z_n\ ) \tag{5.34}$$

でしたから，留数は明らかに -1 となります。

$$\mathrm{Res}(f,z_n)=-1 \tag{5.35}$$

5.3 留数定理の応用例

この章の初めに述べたように，物理学（ や工学も？）を学んでいると，積分の計算が必要になることがしばしばあります。実関数の積分では積分変数を色々と変換して積分を実行することもありますが，それよりも複素数に拡張して留数定理を利用した方が簡単である場合が多々あります。どのように変数変換すればよいのかと頭を悩ませるより，さっさと複素数に拡張して留数定理が利用できないかと考える方が，ずっと楽です。
この節では簡単な例を使って留数定理の利用法を学んでいきましょう。

例 5.3.1.

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\ dx \qquad (\ a>0\ ) \tag{5.36}$$

この積分は $x = a\ \tan\theta$ と積分変数を置き換えれば実行できます。

しかし，ここではあえて複素積分を利用して計算してみましょう。

積分区間が無限大というのは扱いにくいので，積分区間を有限にしておいて，最後に無限大にします。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\ dx && (5.37)\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+a^2}\ dx && (5.38)\end{aligned}$$

次に変数 x を複素数 $z = x + iy$ の実部と考えます。そうすると積分 (5.38) は複素平面の実軸上での積分と考えられます。

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \lim_{R\to\infty}\int_{C_0}\frac{1}{z^2+a^2}\ dz \tag{5.39}$$

ただし，積分路 C_0 は実軸上を $-R$ から R まで進む経路です（図 5.4)。

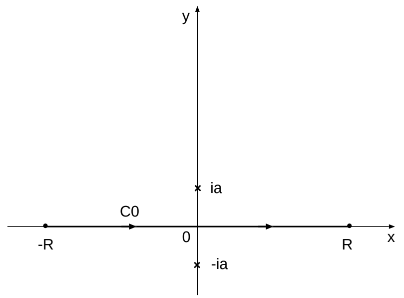


図 5.4:

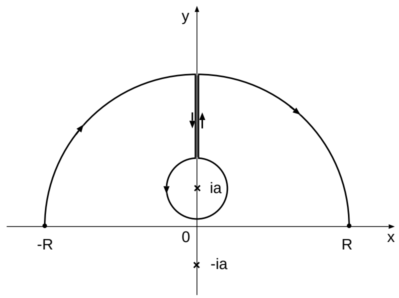


図 5.5:

この辺で被積分関数について調べてみましょう。

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{(z-ia)(z+ia)} \tag{5.40}$$

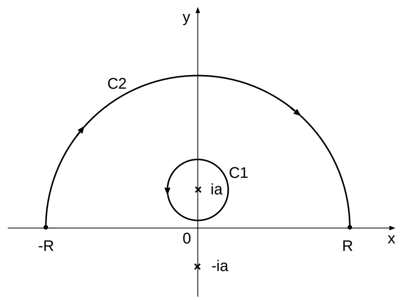


図 5.6:

ですから $z = \pm ia$ が 1 位の極になっています。この2 つの極以外の点では正則です。

そこで積分経路を両端を固定して途中をう〜〜んと上の方に持ち上げます[2]。そして半径 R の半円を作るようにします。そうすると図 5.5 のように，経路は $z = ia$ の極を通り過ぎることができないので，半円部分と，極の回りと，y 軸上の部分とになります[3]。

図 5.5 の y 軸上の部分の積分は上向きと下向きが重なっているので，ここからの積分への寄与は打ち消し合って 0 になります。従って結局，積分経路は図 5.6 のように半径 R の半円部分 C_2 と極の回りの小円 C_1 とになります。

$$I = \int_{C_1} f(z)\ dz + \lim_{R\to\infty}\int_{C_2} f(z)\ dz \tag{5.41}$$

C_1 での積分は留数定理を使えば簡単に求まります。$z = ia$ は 1 位の極でしたから留数は

$$\mathrm{Res}(f, ia) = \lim_{z\to ia}(z-ia)f(z) = \lim_{z\to ia}\frac{1}{z+ia} = \frac{1}{2ia} \tag{5.42}$$

となります。

[2]持ち上げるのは重いから厭だという人は，真ん中辺を引っ張って下に下ろしたのでもかまいません。この積分では上下どちらに変形しても計算できます。

[3]経路には進む方向が分かるように必ず矢印を描きましょう。矢印を描かない人はたいてい計算を間違います!

従って C_1 での積分は次式となります[4]。

$$\int_{C_1} f(z)\ dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}(f, ia) = 2\pi i\ \frac{1}{2ia} = \frac{\pi}{a} \tag{5.43}$$

次に C_2 での積分について考えます。

C_2 では z は次のように置けます。

$$z = Re^{i\theta} \qquad (\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\ ) \tag{5.44}$$

従って C_2 上での積分は

$$\int_{C_2} f(z)\ dz = \int_{\pi}^{0} \frac{1}{R^2 e^{2i\theta} + a^2}\ Re^{i\theta} i d\theta \tag{5.45}$$

となります。

この積分の大きさを評価してみましょう。

$$\left| \int_{C_2} f(z)\ dz \right| \leqq \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} \right| \ |\ Re^{i\theta} i\ d\theta\ | = \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} \right| R\, d\theta \tag{5.46}$$

最終的には $R \to \infty$ とするので，$R \gg a$ としてよいですから，右辺の大きさはだいたい以下のように評価できます。

$$\left| \int_{C_2} f(z)\ dz \right| \leqq \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} \right| R\ d\theta\ \simeq \frac{1}{R^2}\ R\pi = \frac{\pi}{R} \tag{5.47}$$

従って $R \to \infty$ のとき C_2 に沿った積分は 0 になります。

結局，極の回りの積分だけが寄与して以下の結果を得ます。

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2}\ dx = \frac{\pi}{a} \tag{5.48}$$

どうですか?　やっぱり $x = a\ \tan\theta$ と置いた方が簡単だと思いますか? そうですね，これくらい簡単な積分なら実関数のままで積分してもよいかもしれません。ここでやったような複素関数に拡張して積分する方法のメリットは $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + a^4} dx$ とか $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^6 + a^6} dx$ とか，時にはもっと複雑な積分でも，全く同じように留数を求めるだけで積分の計算ができてしまうということなのです。

[4]経路の向きにも注意して下さい。もし向きが逆なら符号が変わりますよ。

例 5.3.2.

$$I \equiv \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + a}\ d\theta \qquad (\ a > 1\ ) \tag{5.49}$$

実は，この積分も積分変数を適当に置き換えれば計算できます。しかし，どちらかというと複素積分を利用した方が計算は楽です。

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta + a}\ d\theta && (5.50) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} + a}\ d\theta && (5.51) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2a}\ d\theta && (5.52) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{e^{2i\theta} + 1 + 2ae^{i\theta}}\ e^{i\theta} d\theta && (5.53) \end{aligned}$$

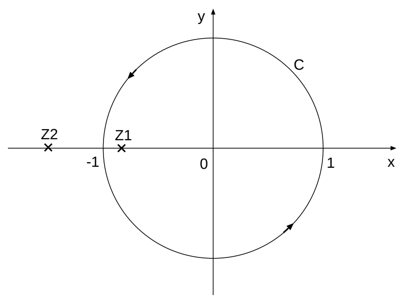


図 5.7:

ここで複素平面を考えましょう(図 5.7)。

複素平面の原点を中心とする半径 1 の円(向きは正の向き) を C とすると，C 上の点は $z = e^{i\theta}$ と表されますから，$dz = e^{i\theta} i\ d\theta$ です。

従って，式 (5.53) は次式のように書けます。

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C \frac{2}{z^2+2az+1}\,\frac{1}{i}\,dz && (5.54)\\
&= \frac{2}{i}\int_C \frac{1}{z^2+2az+1}\,dz && (5.55)\\
&= \frac{2}{i}\int_C \frac{1}{(z+a)^2+1-a^2}\,dz && (5.56)
\end{aligned}
$$

従って，被積分関数は $z=-a\pm\sqrt{a^2-1}$ で 1 位の極を持ちます。2 つの極を z_1，z_2 と置きましょう。

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -a+\sqrt{a^2-1} = \sqrt{a^2-1}-a = \frac{a^2-1-a^2}{\sqrt{a^2-1}+a}\\
&= \frac{-1}{\sqrt{a^2-1}+a} && (5.57)\\
z_2 &= -a-\sqrt{a^2-1} && (5.58)
\end{aligned}
$$

今 $a>1$ ですから

$$
-1 < z_1 < 0 \qquad (5.59)
$$

$$
z_2 < -1 \qquad (5.60)
$$

となり，積分路 C の中にある極は z_1 だけです。

$z=z_1$ での留数は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{z-z_2} = \frac{1}{z_1-z_2}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} && (5.61)
\end{aligned}
$$

従って式 (5.49) の積分は次式となります。

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{2}{i}\,2\pi i\,\mathrm{Res}(z_1) = \frac{2}{i}\,2\pi i\,\frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} && (5.62)\\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}} && (5.63)
\end{aligned}
$$

例 5.3.3.

$$
I \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-ia}\,dx \qquad (\ a>0\ ,\ t\ \text{は実数}) \qquad (5.64)
$$

この形の積分は物理学を勉強しているとよくでてきます。

例題 5.3.1 と同じように，まずは実数変数 x での積分を複素数 $z=x+iy$ での積分に拡張して考えましょう。

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{x-ia}\,dx && (5.65)\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{itx}}{x-ia}\,dx && (5.66)\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{C_0}\frac{e^{itz}}{z-ia}\,dz && (5.67)
\end{aligned}
$$

ただし，積分路 C_0 は実軸上を $-R$ から R まで進む経路です（図 5.8）。

さて，被積分関数は $z=ia$ で1 位の極を持ちます。例題 5.3.1 と同じように，この極が積分に効いてくることになりそうですが，ここで積分路をどのように変形すればよいのかを考えなければなりません。そこで被積分関数の分子に注目しましょう。

$$
e^{itz} = e^{it(x+iy)} = e^{itx-ty} \qquad (5.68)
$$

ですから分子の大きさは

$$
|e^{itz}| = e^{-ty} \qquad (5.69)
$$

となります。

従って，$t>0$ の場合は $y\longrightarrow\infty$ で指数関数的に 0 になり，$t<0$ の場合は $y\longrightarrow-\infty$ で指数関数的に 0 になります。ですから，この積分は $t>0$ の場合と $t<0$ の場合，そして $t=0$ の場合を別々に計算しなければなりません。

まずは簡単な場合からということで $t<0$ の場合を考えましょう。

この場合は被積分関数の分子が $y\longrightarrow-\infty$ で指数関数的に 0 になるので，積分路を両端を固定したまま下に下げて，図 5.9 のような半径 R の半円にしてみます。複素平面の下側には特異性は何もないので，どこにも引っかからずに積分路を変形することができます。この半円の積分路を C_1 としましょう。

さて，この C_1 に沿った積分の値はどうなるでしょうか？被積分関数の分子は $R\longrightarrow\infty$ で 0 になるから積分結果も 0 と思ってよいでしょうか？実はそう簡単な話ではありません。なぜなら，積分路の両端では $y=0$ ですか

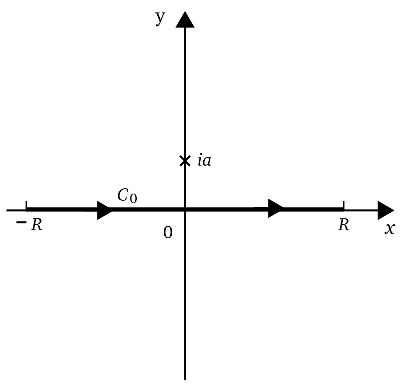


図 5.8:

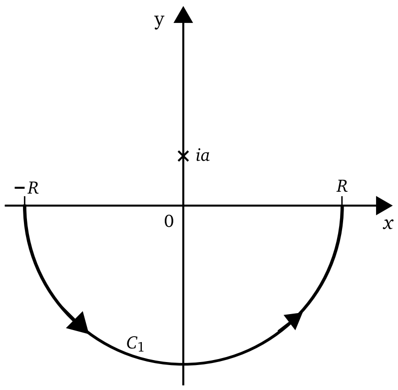


図 5.9:

ら，両端付近では必ずしも被積分関数の分子は小さくならないのです。ここはもっと真面目に大きさを評価する必要があります。

C_1 上では $z = Re^{i\theta}$ と置けますから $dz = Re^{i\theta}id\theta$ となります。従ってこの積分は以下のようになります。

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{e^{itz}}{z-ia}\,dz \tag{5.70}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{-i|t|R(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}-ia}\,Re^{i\theta}id\theta \tag{5.71}$$

この積分の値の大きさを評価してみましょう。

$$|I| \leqq \lim_{R\to\infty}\int_{-\pi}^{0}\left|\frac{e^{-i|t|R(\cos\theta+i\sin\theta)}}{Re^{i\theta}-ia}\,Re^{i\theta}id\theta\right| \tag{5.72}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{|t|R\sin\theta}}{|Re^{i\theta}-ia|}\,Rd\theta \tag{5.73}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{-\pi}^{0}e^{|t|R\sin\theta}\,d\theta \tag{5.74}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{\pi}e^{-|t|R\sin\theta}\,d\theta \tag{5.75}$$

$$= \lim_{R\to\infty}2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|R\sin\theta}\,d\theta \tag{5.76}$$

ここまでは大丈夫ですか？

式 (5.73) から式 (5.74) への変形では，$R \longrightarrow \infty$ であることを考慮すると分母の大きさは R なので，分子の R と約分しました。式 (5.74) から式 (5.75) へは $\sin\theta$ が奇関数であることを考慮して積分変数を $\theta \longrightarrow -\theta$ と置き換えました。後は $\sin\theta$ の周期性を利用しただけです。

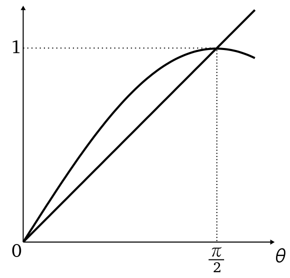


図 5.10:

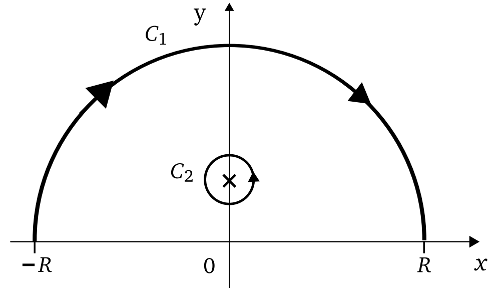


図 5.11:

さて，もう一息です。指数関数の中に $\sin\theta$ が入っていては積分が難しいので $\sin\theta$ の大きさについて考えてみます。$0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ の範囲では

$$\sin\theta \geqq \frac{2}{\pi}\theta \tag{5.77}$$

という不等式が成立します（図 5.10 参照）。従って，この積分の大きさは以下のように評価できます。

$$|I| \leqq \lim_{R\to\infty}2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|R\sin\theta}\,d\theta \tag{5.78}$$

$$\leqq \lim_{R\to\infty}2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-|t|R\frac{2}{\pi}\theta}\,d\theta \tag{5.79}$$

$$= \lim_{R\to\infty}2\frac{1}{|t|R\frac{2}{\pi}}\left[-e^{-|t|R\frac{2}{\pi}\theta}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tag{5.80}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{|t|R}\left[1-e^{-|t|R}\right] \tag{5.81}$$

$$= 0 \tag{5.82}$$

というわけで，この積分は $t<0$ の時，$R \longrightarrow \infty$ にすると R の指数関数ではなく $1/R$ で 0 になります。

次に $t>0$ の場合を考えてみましょう。

今度は被積分関数の分子は $y \longrightarrow +\infty$ で指数関数的に 0 になりますから，図 5.11 のように，積分路を上側に持ち上げてみましょう。例題 5.3.1 の時と同じように，積分路は $z=ia$ の極に引っかかるので，最終的には半径 R の半円 C_1 と極の周りの円 C_2 になります [5]。従って，この積分は以下のような 2 つの積分の和になります。

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{e^{itz}}{z-ia}\,dz + \int_{C_2} \frac{e^{itz}}{z-ia}\,dz \tag{5.83}$$

第1 項の半円 C_1 上での積分は $t<0$ の場合と同じようにすれば $1/R$ で 0 になることが分かります [6]。また，第2 項の極の周りでの積分は留数定理を使えば簡単に求められます。

$$I = \int_{C_2} \frac{e^{itz}}{z-ia}\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}(ia) = 2\pi i\ e^{-ta} \tag{5.84}$$

最後に $t=0$ の場合を計算してみます。$e^{i0z}=1$ ですから積分は以下の形になります。

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{C_0} \frac{1}{z-ia}\,dz \tag{5.85}$$

ただし，積分路 C_0 は実軸上を $-R$ から R まで進む経路です（図 5.8）。

この形の積分は，もう何度も出てきたのですぐにできると思います。まず積分路を図 5.12 のように $z=ia$ を中心とする半径 $R'=\sqrt{R^2+a^2}$ の円弧 C_1 にします。円弧 C_1 上では $z-ia=R'e^{i\theta}$ と表せますから $dz=R'e^{i\theta}id\theta$ となります。従って図のように角度 θ_0 を

$$\tan\theta_0 = \frac{R}{a} \qquad (0 \leqq \theta_0 \leqq \pi/2) \tag{5.86}$$

と定義しておけば積分は次式のようになります。

[5] ここが分からない人は例題 5.3.1 でどのように積分路を変形したのか復習してください。
[6] ぜひ一度は自分で確かめておきましょう！

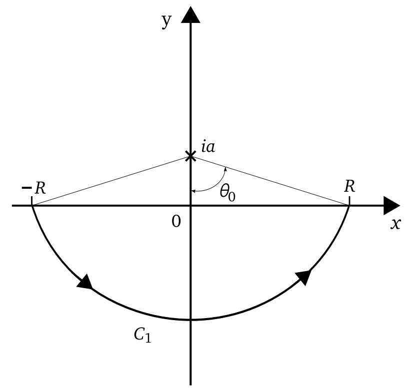


図 5.12:

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{R\to\infty} \int_{C_1} \frac{1}{z-ia}\,dz && (5.87)\\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\theta_0} \frac{1}{R'e^{i\theta}}\,R'e^{i\theta}i\,d\theta && (5.88)\\
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^{2\theta_0} i\,d\theta && (5.89)\\
&= \lim_{R\to\infty} i\,2\theta_0 && (5.90)
\end{aligned}$$

ところで θ_0 の定義 (5.86) より

$$\lim_{R\to\infty} \theta_0 = \lim_{R\to\infty} \tan^{-1}\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{5.91}$$

となりますから，結局積分の値は次式となります。

$$I = i\ 2\ \frac{\pi}{2} = \pi\ i \tag{5.92}$$

以上の結果をまとめると，この積分の値は以下となることが分かりました。

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x-ia}\,dx = \begin{cases} 2\pi i e^{-ta} & (t>0) \\ \pi i & (t=0) \\ 0 & (t<0) \end{cases} \tag{5.93}$$

この結果は t の値によって変化するので，t の関数と考えることができます。そこで次のような t の関数を定義してみましょう。

$$\theta(t) \equiv \lim_{a \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x - ia}\, dx = \begin{cases} 1 & (t > 0) \\ \frac{1}{2} & (t = 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases} \tag{5.94}$$

この関数 $\theta(t)$ は物理学の分野では**階段関数**（step function）と呼ばれています[7]。

例題として書いておきたい積分は他にも色々あるのですが，ひとまずこれくらいにしておきます。複素積分の仕方はだいたい分かっていただけたと思いますが，ほとんどの場合，以下の手順になります。

- 被積分関数の特異性について調べる。（極や切断はあるか？）
- 積分経路を適当に変形する。（無限遠点ではどうなる？）
- 留数定理などを用いる。

あとは慣れです。色々な本の演習問題を解いてみましょう。

◇◇ 第 5 章の練習問題 ◇◇

【 1 】 次の関数の特異性について調べなさい。もし，極ならば留数も求めなさい。

(1) $\frac{1}{z}\frac{1}{z-1}$　　(2) $\frac{z+1}{(z-1)^2}$

(3) $z^2 e^{\frac{1}{z}}$　　(4) $\frac{\sin z}{z^3}$

【 2 】 次の積分を計算しなさい。但し，積分路 C は複素平面の原点を中心とする半径 1 の円であり，向きは正の向き（反時計回り）とする。

$$\int_C \frac{1}{z^2 - 2z}\, dz$$

【 3 】 次の積分を計算しなさい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 1}\, dx$$

[7] 数学の分野ではヘヴィサイド関数と呼び $H(t)$ と書くことが多いようです。

付 録 A　積分経路の変形方法

積分路の変形定理では「両端を止めて途中の経路を正則な点のみを使って変形する」ことになっていました。

ある日，閉曲線の積分経路を変形しようとしたら

「先生，閉曲線には両端がないから変形できません！」

という学生がいました。

こういう学生[1]が一人いるということは，言わないだけで内心ではそう思っている学生が１０人くらいはいるに違いありません。皆さん，頭が固いんですよ。もっと柔軟に考えましょう。

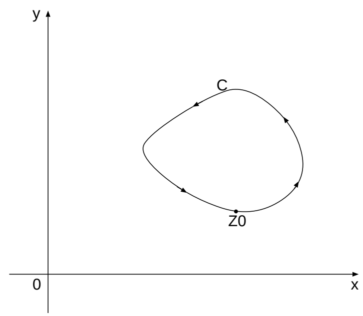


図 A.1:
始点が z_0 で終点も z_0 と考える。

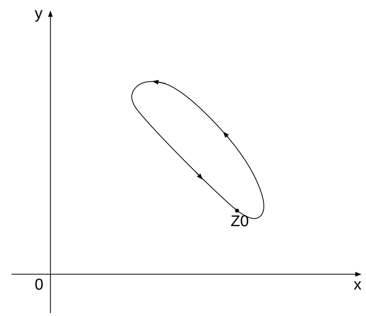


図 A.2:
z_0 を固定して変形する。

閉曲線を C とします。C のどこでも好きなところを z_0 として，ここから出発してここに戻ると考えます（図 A.1)。つまり積分の始点が z_0 で終点も z_0 だと思えばよいのです。

[1] 疑問をちゃんと口に出して質問できる有望な学生

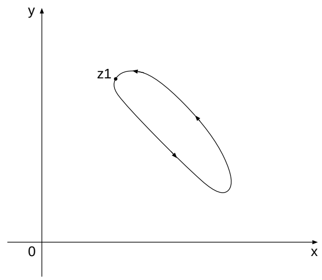


図 A.3:
始点が z_1 で終点も z_1 と考える。

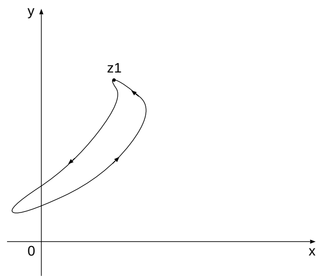


図 A.4:
z_1 を固定して変形する。

z_0 を固定して閉曲線を，正則でない点に引っかからないように気をつけながら，変形しましょう（図 A.2）。

適当に変形したら，新しくできた曲線上の別の点を z_1 として（図 A.3），今度は z_1 を始点かつ終点と思って，z_1 を固定して変形してみましょう（図 A.4）。

こうして曲線上の点を，適宜，端点と思って変形を繰り返せば，正則でない点に引っかからない限り，大きさも形も位置も自由自在に変形できます。

特に元の閉曲線の内部の点が全て正則である場合には，閉曲線をどんどん縮めて半径無限小の円にすることもできます。

付録B　解答と解説

解答と解説というタイトルですが，主として解説の方に重点を置いています。そのため，解き方の方針とか式変形の説明とか，解答としては余分な記述が多くあります。また，文体も解答としては適切なものではありません。

皆さんが類題の解答を書く場合には余分な部分を削除し，論理を明確にし，文体も「〇〇だ。」「〇〇となる。」というようにすっきり仕上げましょう。

B.1　第１章の練習問題の解答と解説

【１】の解答と解説

(1) と (2) はあまりにも簡単だから解説は要らないでしょうね。

(1)

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

より　実部：$ac-bd$　　虚部：$(ad+bc)$

(2)

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}$$

より　実部：$\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}$　　虚部：$\dfrac{-ad+bc}{c^2+d^2}$

(3) この問題は a が実数ですから

$$\sin(az) = \sin(a(x+iy)) = \sin(ax+iay)$$

より 式 (1.152) で x, y を ax, ay に置き換えればよいだけですね。

従って

$$\begin{aligned} \sin(az) &= \sin(a(x+iy)) = \sin(ax+iay) && \text{(B.1)} \\ &= \cosh(ay)\ \sin(ax) + i\ \sinh(ay)\ \cos(ax) && \text{(B.2)} \end{aligned}$$

となるはずです。

または加法定理 (1.124) と三角関数と双曲線関数の関係式 (1.144) を使えば

$$\begin{aligned} \sin(az) &= \sin(a(x+iy)) = \sin(ax+iay) && \text{(B.3)} \\ &= \sin(ax)\cos(iay) + \cos(ax)\sin(iay) && \text{(B.4)} \\ &= \sin(ax)\cosh(ay) + i\ \cos(ax)\sinh(ay) && \text{(B.5)} \end{aligned}$$

となります。

しかし，これらの関係式を公式として覚えておくことは，あまりお薦めできません！

> **本に載っている式をとりあえず全て覚えてしまおうという人がいますが，勉強の仕方を間違っています！**

覚えておくべきは，定義式といくつかの基本的な関係式だけです。色々な式を公式として覚えようとするより，**それらの式がどうやって導かれたのかを理解しようと心掛けましょう。**どれが基本的な式なのかを判断できないなら，まだちゃんと理解できていないということです。もう一度勉強し直しましょう。回り道のようでも，結局それが一番の早道です。

さて，この問題をどのように解くのが最もよいかは人によって判断が分かれるところですが，私なら三角関数や双曲線関数と指数関数の関係を使います。

$$\sin(az) = \frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{2i} \tag{B.6}$$

と

$$\begin{aligned} e^{\pm iaz} &= e^{\pm ia(x+iy)} = e^{\pm axi \mp ay} = e^{\mp ay} e^{\pm axi} && \text{(B.7)} \\ &= e^{\mp ay}(\cos(\pm ax) + i\sin(\pm ax)) && \text{(B.8)} \\ &= e^{\mp ay}(\cos(ax) \pm i\sin(ax)) && \text{(B.9)} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \sin(az) &= \frac{e^{iaz} - e^{-iaz}}{2i} && \text{(B.10)} \\ &= \frac{1}{2i}\{e^{-ay}(\cos(ax) + i\sin(ax)) - e^{ay}(\cos(ax) - i\sin(ax))\} && \text{(B.11)} \\ &= \frac{1}{2i}\{(e^{-ay} - e^{ay})\cos(ax) + i(e^{-ay} + e^{ay})\sin(ax)\} && \text{(B.12)} \\ &= \frac{e^{-ay} + e^{ay}}{2}\sin(ax) + \frac{e^{-ay} - e^{ay}}{2i}\cos(ax) && \text{(B.13)} \\ &= \frac{e^{ay} + e^{-ay}}{2}\sin(ax) - i\frac{e^{-ay} - e^{ay}}{2}\cos(ax) && \text{(B.14)} \\ &= \frac{e^{ay} + e^{-ay}}{2}\sin(ax) + i\frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2}\cos(ax) && \text{(B.15)} \\ &= \cosh(ay)\sin(ax) + i\ \sinh(ay)\cos(ax) && \text{(B.16)} \end{aligned}$$

従って　実部: $\cosh(ay)\sin(ax)$　虚部: $\sinh(ay)\cos(ax)$

(4)

$$\begin{aligned} & e^{cz}(a+bz) && \text{(B.17)} \\ =\ & e^{cx+icy}\{a + b(x+iy))\} && \text{(B.18)} \\ =\ & e^{cx}\{\cos(cy) + i\sin(cy)\}\{(a+bx) + iby\} && \text{(B.19)} \\ =\ & e^{cx}[\cos(cy)(a+bx) - \sin(cy)by + i\{\cos(cy)by + \sin(cy)(a+bx)\}] && \text{(B.20)} \end{aligned}$$

従って

実部: $e^{cx}\{\cos(cy)(a+bx)-\sin(cy)by\}$
虚部: $e^{cx}\{\cos(cy)by+\sin(cy)(a+bx)\}$

(5)

$$\log(-2) = \log(2e^{\pi i}) \tag{B.21}$$
$$= \log(2e^{(2n+1)\pi i}) \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{B.22}$$
$$= \mathrm{Log}\ 2+(2n+1)\pi i \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{B.23}$$

より

実部: Log 2
虚部: $(2n+1)\pi \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

注意) $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ を書き忘れてはいけません!

(6) こういう問題では,まず複素平面を描いて $1+\sqrt{3}i$ の位置を描き込みましょう。(図 B.1 参照)皆さんがこの問題を間違える原因の大部分は図を描かないで頭の中だけで考えることにあります。

$$\log(1+\sqrt{3}i) \tag{B.24}$$
$$= \log(2e^{\frac{\pi}{3}i}) \tag{B.25}$$
$$= \log(2e^{(\frac{1}{3}+2n)\pi i}) \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{B.26}$$
$$= \mathrm{Log}\ 2+\left(\frac{1}{3}+2n\right)\pi i \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{B.27}$$

より

実部: Log 2
虚部: $\left(\frac{1}{3}+2n\right)\pi \qquad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

注意) $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ を書き忘れてはいけません!

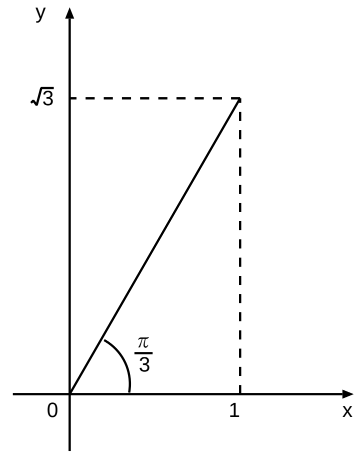


図 B.1: $1+\sqrt{3}i$ の位置

(7) この問題を出すと $-1+i$ を 11 回掛ける人が必ず何人かいます。まあ,確かにそれでも答えは出るんですが . . . 。でも,それじゃ,高校生のやり方ですよね。19876 乗とかだったら,どうするんだろう?せっかく大学に入って複素関数論を学んだのですから,もう少しスマートに計算して欲しいところです。

まず,複素平面を描いて(自分で描いてね)$-1+i$ の位置を確かめましょう。

$$(-1+i)^{11} = (\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i})^{11} = \sqrt{2}^{11}e^{\frac{33}{4}\pi i} \tag{B.28}$$
$$= \sqrt{2}^{(10+1)}e^{\frac{32+1}{4}\pi i} = 2^5\sqrt{2}e^{8\pi i}e^{\frac{1}{4}\pi i} \tag{B.29}$$
$$= 2^5\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i} = 2^5\sqrt{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}} = 2^5(1+i) \tag{B.30}$$

より 実部: 2^5 虚部: 2^5

(8)

$$(1+\sqrt{3}i)^{10} = (2e^{\frac{\pi}{3}i})^{10} = 2^{10}e^{\frac{10}{3}\pi i} \quad \text{(B.31)}$$
$$= 2^{10}e^{\frac{9+1}{3}\pi i} = 2^{10}e^{3\pi i}e^{\frac{1}{3}\pi i} \quad \text{(B.32)}$$
$$= 2^{10}(-1)\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = -2^9(1+\sqrt{3}i) \quad \text{(B.33)}$$

より　実部：-2^9　　虚部：$-2^9\sqrt{3}$

【 **2** 】の解答と解説

(1) ～ (4) まではどれも同じように考えれば証明できますから，ここには (1) の証明だけ書いておきます。

(1) 証明の方法は色々ありますが，オーソドックスに定義式 (1.108) から導いてみます。

$$(\cos z)^* = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)^* = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(z^{2n}\right)^* \quad \text{(B.34)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z^*)^{2n} = \cos(z^*) \quad \text{(B.35)}$$

(5) $\arg z = \theta \quad (-\pi < \theta \leqq \pi)$ と置くと

$$(\log z)^* = [\ \log(|z|e^{i(\theta+2n\pi)})\ ]^* \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \quad \text{(B.36)}$$
$$= \{\mathrm{Log}\ |z| + (\theta+2n\pi)i\}^* \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \quad \text{(B.37)}$$
$$= \mathrm{Log}\ |z| - (\theta+2n\pi)i \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \quad \text{(B.38)}$$
$$= \log(z^*) \quad \text{(B.39)}$$

(6) これはべき関数の定義式と (5) の結果を利用すればよいでしょう。

$$(z^a)^* = (e^{a\log z})^* = e^{(a\log z)^*} = e^{a\log z^*} \quad \text{(B.40)}$$
$$= (z^*)^a \quad \text{(B.41)}$$

【 **3** 】の解答と解説

こういう問題を出すと $z = x + iy$ と置いて x, y についての方程式にして解こうとする人がけっこう大勢いますが，あまり良い発想とは言えません。大抵の場合 z のままで解く方が簡単です。まずは z のままで解いてみてから，暇があったら $z = x + iy$ と置いて解いたり $z = re^{i\theta}$ と置いて解いたりして比較してみるとよいでしょう。

(1)

$$z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i+2n\pi i} \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \quad \text{(B.42)}$$

より

$$z = \left\{2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi}{4}i+2n\pi i}\right\}^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{\pi}{12}i+\frac{2n\pi}{3}i} \quad \text{(B.43)}$$

よって独立な解は

$$z = 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{\pi}{12}i},\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3}{4}\pi i},\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17}{12}\pi i} \quad \text{(B.44)}$$

の3 個である。

(2) まず，複素平面を描いて（自分で描いてね）$\sqrt{3}+i$ の位置を確かめましょう。（図を描かないで偏角の値を間違える人がけっこう大勢います。）

対数の定義より　$e^z = \sqrt{3}+i$ のとき

$$z = \log(\sqrt{3}+i) = \log(2e^{\frac{\pi}{6}i}) \quad \text{(B.45)}$$
$$= \mathrm{Log}\ 2 + \left(\frac{1}{6}+2n\right)\pi i \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \quad \text{(B.46)}$$

注意） $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ **を書き忘れてはいけません！**

(3) 対数の定義より $\mathrm{Log}\ z = 4 + \frac{\pi}{2}i$ のとき

$$z = e^{4+\frac{\pi}{2}i} = e^4 i \quad \text{(B.47)}$$

(4) $\cos z = 3$ より

$$(e^{iz} + e^{-iz})/2 = 3 \tag{B.48}$$

よって

$$u = e^{iz} \tag{B.49}$$

とおくと

$$u + 1/u = 6 \tag{B.50}$$

より

$$u^2 - 6u + 1 = 0 \tag{B.51}$$
$$\therefore \quad u = 3 \pm \sqrt{3^2 - 1} = 3 \pm 2\sqrt{2} \tag{B.52}$$
$$\therefore \quad e^{iz} = 3 \pm 2\sqrt{2} \tag{B.53}$$

よって

$$iz = \log(3 \pm 2\sqrt{2}\ ) \tag{B.54}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad z &= -i\log(3 \pm 2\sqrt{2}\ ) \\ &= 2n\pi - i\mathrm{Log}\ (3 \pm 2\sqrt{2}\ ) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{aligned} \tag{B.55}$$

なお

$$3 + 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 - 2\sqrt{2}} \tag{B.56}$$

より

$$z = 2n\pi \pm i\mathrm{Log}\ (3 + 2\sqrt{2}\ ) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{B.57}$$

と書いてもよい。

注意） $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ **を書き忘れてはいけません！**

【 4 】の解答と解説

どれも同じようにすれば示せますから (1) だけ証明します。

(1) 逆関数の定義より

$$w = \arcsin z \tag{B.58}$$

と置くと

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \tag{B.59}$$

よって

$$u = e^{iw} \tag{B.60}$$

と置けば

$$z = \sin w = \frac{u - \frac{1}{u}}{2i} \tag{B.61}$$

より

$$2iz = u - \frac{1}{u} \tag{B.62}$$
$$\therefore \ u^2 - 2izu - 1 = 0 \tag{B.63}$$
$$\therefore \ u = e^{iw} = iz + (-z^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \tag{B.64}$$
$$\therefore \ iw = \log\{iz + (-z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\} \tag{B.65}$$
$$\therefore \ w = -i\log\{iz + (-z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\} \tag{B.66}$$

よって

$$\arcsin z = w = -i\log\{iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}\} \tag{B.67}$$

なお，$(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ は2 価であることに注意して下さい。

【 5 】の解答と解説

【 4】と同様ですから (1) だけ証明してみます。

(1) 逆関数の定義より

$$w = \text{arcsinh } z \tag{B.68}$$

と置くと

$$z = \sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} \tag{B.69}$$

よって

$$u = e^w \tag{B.70}$$

と置けば

$$z = \sinh w = \frac{u - \frac{1}{u}}{2} \tag{B.71}$$

より

$$2z = u - \frac{1}{u} \tag{B.72}$$

$$\therefore\ u^2 - 2zu - 1 = 0 \tag{B.73}$$

$$\therefore\ u = e^w = z + (z^2+1)^{\frac{1}{2}} \tag{B.74}$$

$$\therefore\ w = \log\{z + (z^2+1)^{\frac{1}{2}}\} \tag{B.75}$$

よって

$$\text{arcsinh } z = w = \log\{z + (z^2+1)^{\frac{1}{2}}\} \tag{B.76}$$

B.2 第 2 章の練習問題の解答と解説

【 1 】の解答と解説

微分可能かどうかを知りたかったらコーシー・リーマンの関係式を満たしているか否かを調べるのが王道でしょうね。

つまり $f = u + iv$ のとき

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{B.77}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{B.78}$$

を満たしていれば関数 f は z で微分可能なわけです。

(1) $f = y + ix$ より $u = y,\ v = x$ 。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{B.79}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{B.80}$$

よってコーシー・リーマンの関係式の $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ は満たしている。

一方

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 \tag{B.81}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \tag{B.82}$$

よってコーシー・リーマンの関係式の $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ は満たしていない。

従って $f = y + ix$ は z で微分可能ではない。

これが正統的な解答だと思います。ただ，私のように頭のちょっと弱くなった人間はコーシー・リーマンの関係式を正確に覚えていられる自信がないのです。

そこでちょっと見方を変えて関数 f を z と z^* で表してみます。実はもし f が z だけで表されるときには，関数の形を見れば微分可能かどうかが一目瞭然であることが多いのです。もし f の中にどうしても z^* が残ってしまうときには，関数 f は z で微分可能ではありません。

この問題で f を z と z^* で表し直してみると ...。

$$f = y + ix = ix + y = i(x - iy) = iz^* \tag{B.83}$$

よって f は z で微分可能ではありません。

(2) $f = x - y + (x+y)i$ より

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \tag{B.84}$$

よって

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \end{cases} \tag{B.85}$$

より $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ を満たしている。

また

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \end{cases} \tag{B.86}$$

より $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ を満たしている。

よってコーシー・リーマンの関係式が成立しているので f は z で微分可能である。f の導関数は

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = 1 + i \tag{B.87}$$

別解）

$$\begin{aligned} f &= x(1+i) + y(i-1) = x(1+i) + yi(1+i) && \text{(B.88)} \\ &= (x+iy)(1+i) = (1+i)z && \text{(B.89)} \end{aligned}$$

よって明らかに f は z で微分可能であり

$$\frac{df}{dz} = 1 + i \tag{B.90}$$

(3) $f = e^{ay}(\cos ax + i \sin ax)$ より

$$\begin{cases} u = e^{ay} \cos ax \\ v = e^{ay} \sin ax \end{cases} \tag{B.91}$$

よって

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -ae^{ay} \sin ax \\ \frac{\partial v}{\partial y} = ae^{ay} \sin ax \end{cases} \tag{B.92}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = ae^{ay} \cos ax \\ \frac{\partial v}{\partial x} = ae^{ay} \cos ax \end{cases} \tag{B.93}$$

よって，コーシー・リーマンの関係式が成立しないので f は z で微分できない。

別解）

$$\begin{aligned} f &= e^{ay}(\cos ax + i \sin ax) = e^{ay} e^{iax} && \text{(B.94)} \\ &= e^{ay+iax} = e^{ia(x-iy)} = e^{iaz^*} && \text{(B.95)} \end{aligned}$$

よって明らかに f は z で微分できない。

(4) $f = e^{-ay}(\cos ax + i \sin ax)$ より

$$\begin{cases} u = e^{-ay} \cos ax \\ v = e^{-ay} \sin ax \end{cases} \tag{B.96}$$

よって

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -ae^{-ay} \sin ax \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -ae^{-ay} \sin ax \end{cases} \tag{B.97}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = -ae^{-ay} \cos ax \\ \frac{\partial v}{\partial x} = ae^{-ay} \cos ax \end{cases} \tag{B.98}$$

よってコーシー・リーマンの関係式が成立しているので f は z で微分可能である。f の導関数は

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\partial f}{\partial x} = -ae^{-ay} \sin ax + iae^{-ay} \cos ax && \text{(B.99)} \\ &= iae^{-ay}(\cos ax + i \sin ax) = iae^{-ay+iax} && \text{(B.100)} \\ &= iae^{ia(x+iy)} = iae^{iaz} && \text{(B.101)} \end{aligned}$$

別解）

$$f = e^{-ay}(\cos ax + i\sin ax) = e^{-ay}e^{iax} \quad \text{(B.102)}$$
$$= e^{-ay+iax} = e^{ia(x+iy)} = e^{iaz} \quad \text{(B.103)}$$

よって明らかに f は z で微分可能であり

$$\frac{df}{dz} = iae^{iaz} \quad \text{(B.104)}$$

(5) $f = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy))$ より

$$\begin{cases} u = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \\ v = e^{x^2-y^2}\sin(2xy) \end{cases} \quad \text{(B.105)}$$

よって

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2-y^2}(2x\cos(2xy) - 2y\sin(2xy)) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x^2-y^2}(-2y\sin(2xy) + 2x\cos(2xy)) \end{cases} \quad \text{(B.106)}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2-y^2}(-2y\cos(2xy) - 2x\sin(2xy)) \\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^{x^2-y^2}(2x\sin(2xy) + 2y\cos(2xy)) \end{cases} \quad \text{(B.107)}$$

よってコーシー・リーマンの関係式が成立しているので f は z で微分可能である。f の導関数は

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{(B.108)}$$
$$= e^{x^2-y^2}(2x\cos(2xy) - 2y\sin(2xy)) + ie^{x^2-y^2}(2x\sin(2xy) + 2y\cos(2xy)) \quad \text{(B.109)}$$

別解）

$$f = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy)) = e^{x^2-y^2}e^{i2xy} \quad \text{(B.110)}$$
$$= e^{x^2-y^2+i2xy} = e^{(x+iy)^2} = e^{z^2} \quad \text{(B.111)}$$

よって明らかに f は z で微分可能であり

$$\frac{df}{dz} = 2ze^{z^2} \quad \text{(B.112)}$$

【 2 】の解答と解説

この問題はほとんどの人ができるでしょう。関数の微分公式も合成関数の微分公式も高校生のころから慣れ親しんできたものですから，うっかり計算ミスをしない限り問題ないはずです。

(1) $$\frac{df}{dz} = 3(az^2+b)^2 a2z = 6az(az^2+b)^2 \quad \text{(B.113)}$$

(2) $$\frac{df}{dz} = \frac{2z}{z+ib} - \frac{z^2+ia}{(z+ib)^2} \quad \text{(B.114)}$$

または

$$\frac{df}{dz} = \frac{2z(z+ib) - (z^2+ia)}{(z+ib)^2} = \frac{z^2+i2bz-ia}{(z+ib)^2} \quad \text{(B.115)}$$

(3) $$\frac{df}{dz} = a\cos az \quad \text{(B.116)}$$

(4) $$\frac{df}{dz} = ae^{az} \quad \text{(B.117)}$$

(5) $$\frac{df}{dz} = -(3az^2+b)\sin(az^3+bz) \quad \text{(B.118)}$$

(6) $$\frac{df}{dz} = -2a(z+b)e^{-a(z+b)^2} \quad \text{(B.119)}$$

(7) $$\frac{df}{dz} = \frac{2z}{z^2-1} \quad \text{(B.120)}$$

(8) $$\frac{df}{dz} = \frac{2aze^{az^2}}{1+e^{az^2}} \quad \text{(B.121)}$$

(9) $$\frac{df}{dz} = \frac{1}{3}(z^2+a)^{\frac{1}{3}-1}2z = \frac{2z}{3}(z^2+a)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{(B.122)}$$

(10) $$\frac{df}{dz} = \frac{2}{5}(a+iz^3)^{\frac{2}{5}-1}i3z^2 = i\frac{6}{5}z^2(a+iz^3)^{-\frac{3}{5}} \quad \text{(B.123)}$$

B.3　第3章の練習問題の解答と解説

【 1 】の解答と解説

積分の問題が出たら，とりあえず図を描きましょう。図B.2のように，複素平面を描いて積分路を記入します。積分路には向きを表す矢印を必ず記入します。次に被積分関数の形を見ます。もし被積分関数が特異点（分母が0

になる点など）を持っている場合には，特異点の位置を×印などで記入しましょう。

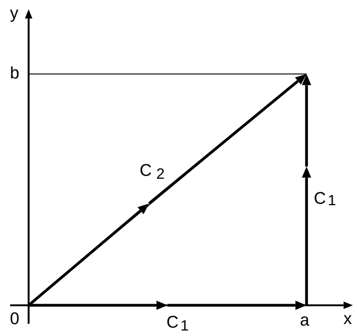


図 B.2: 積分路 C_1 と C_2

(1) $f = z^2$ は見るからに正則な関数ですから，定理より $\int_{C_1} f\ dz = \int_{C_2} f\ dz$ となるはずです。しかし，この問題の主眼は **実際に経路 C_1 と C_2 に沿って積分してみて積分結果が等しくなることを確かめる**ことにあります。ですから真面目に経路に沿って積分してみましょう。

まず経路 C_1 を 0 から a までと a から $a + ib$ までの2 つに分けます。

C_1'： 0 から a まで
C_1''： a から $a + ib$ まで

$$I_1 \equiv \int_{C_1} f\ dz = \int_{C_1'} f\ dz + \int_{C_1''} f\ dz \tag{B.124}$$

C_1' 上では $z = x$ より $dz = dx$ なので [1]

$$\int_{C_1'} f\ dz = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3} \tag{B.125}$$

となります。

[1]経路を表すパラメーターとして x を用いています。

また C_1'' 上では $z = a + iy$ より $dz = idy$ なので [2]

$$\int_{C_1''} f\ dz = \int_0^b (a+iy)^2 idy = \left[\frac{(a+iy)^3}{3}\right]_0^b \tag{B.126}$$

$$= \frac{1}{3}(a+ib)^3 - \frac{a^3}{3} \tag{B.127}$$

となります。

よって

$$I_1 = \frac{a^3}{3} + \frac{1}{3}(a+ib)^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}(a+ib)^3 \tag{B.128}$$

一方

$$I_2 \equiv \int_{C_2} f\ dz \tag{B.129}$$

と置くと C_2 上では $y = \frac{b}{a}x$ なので $z = x + i\frac{b}{a}x = (1 + i\frac{b}{a})x$ より $dz = (1 + i\frac{b}{a})dx$ となります [3]。

従って

$$I_2 = \int_0^a \left\{\left(1 + i\frac{b}{a}\right)x\right\}^2 \left(1 + i\frac{b}{a}\right) dx \tag{B.130}$$

$$= \left(1 + i\frac{b}{a}\right)^3 \int_0^a x^2 dx = \left(1 + i\frac{b}{a}\right)^3 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a \tag{B.131}$$

$$= \left(1 + i\frac{b}{a}\right)^3 \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}(a+ib)^3 \tag{B.132}$$

よって式 (B.128) と式 (B.132) より

$$I_1 = I_2$$

が確かめられました。

[2]経路を表すパラメーターとして y を用いています。
[3]経路を表すパラメーターとして x を用いています。

別解）

C_2 上の z を $z = re^{i\theta}$ と，極形式で表すと偏角 θ は一定なので $dz = e^{i\theta}dr$ となります [4]。

従って $r_f = \sqrt{a^2+b^2}$ と置くと

$$I_2 = \int_0^{r_f} (re^{i\theta})^2 e^{i\theta} dr = e^{3i\theta}\int_0^{r_f} r^2 dr \tag{B.133}$$

$$= e^{3i\theta}\frac{r_f^3}{3} = \frac{1}{3}(r_f e^{i\theta})^3 = \frac{1}{3}(a+ib)^3 \tag{B.134}$$

(2) $f = |z|^2 = x^2+y^2$ は正則ではないので真面目に経路に沿って積分するしかありません。積分の仕方は (1) と同じなので簡単に済ませますよ。

まず経路 C_1 を 0 から a までと a から $a+ib$ までの2 つに分けます。

C_1'： 0 から a まで
C_1''： a から $a+ib$ まで

$$I_1 \equiv \int_{C_1} f\ dz = \int_{C_1'} f\ dz + \int_{C_1''} f\ dz \tag{B.135}$$

C_1' 上では $z = x$ より $dz = dx$ なので

$$\int_{C_1'} f\ dz = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3} \tag{B.136}$$

となります。

また C_1'' 上では $z = a+iy$ より $dz = idy$ なので

$$\int_{C_1''} f\ dz = \int_0^b (a^2+y^2) i dy = i\left[a^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^b \tag{B.137}$$

$$= i\left(a^2 b + \frac{b^3}{3}\right) \tag{B.138}$$

となります。

[4]経路を表すパラメーターとして r を用います。

よって

$$I_1 = \frac{a^3}{3} + i\left(a^2 b + \frac{b^3}{3}\right) \tag{B.139}$$

一方

$$I_2 \equiv \int_{C_2} f\ dz \tag{B.140}$$

と置くと C_2 上では $y = \frac{b}{a}x$ なので $z = x + i\frac{b}{a}x = (1+i\frac{b}{a})x$ より $dz = (1+i\frac{b}{a})dx$ となります。また

$$|z|^2 = x^2+y^2 = \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2$$

従って

$$I_2 = \int_0^a \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2\left(1+i\frac{b}{a}\right)dx \tag{B.141}$$

$$= \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1+i\frac{b}{a}\right)\int_0^a x^2 dx \tag{B.142}$$

$$= \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1+i\frac{b}{a}\right)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a \tag{B.143}$$

$$= \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\left(1+i\frac{b}{a}\right)\frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}(a^2+b^2)(a+ib) \tag{B.144}$$

別解

C_2 上の z を $z = re^{i\theta}$ と，極形式で表すと偏角 θ は一定なので $dz = e^{i\theta}dr$ となります。

従って $r_f = \sqrt{a^2+b^2}$ と置くと

$$I_2 = \int_0^{r_f} r^2 e^{i\theta} dr = e^{i\theta}\int_0^{r_f} r^2 dr \tag{B.145}$$

$$= e^{i\theta}\frac{r_f^3}{3} = \frac{1}{3}r_f e^{i\theta} r_f^2 = \frac{1}{3}(a+ib)(a^2+b^2) \tag{B.146}$$

【 2 】の解答と解説

この積分は被積分関数 $f(z)$ が

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{z-2}$$

なので，$z=0$ と $z=2$ で分母が 0 になります。従って $z=0$ と $z=2$ のところで $f(z)$ は正則ではありません。

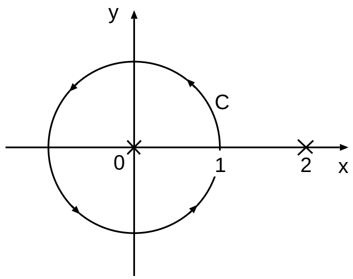


図 B.3: 問【 2 】の積分路

計算方法は何通りかあるのですが，ここでは2 通りの方法を紹介しておきます。後で第 5 章の留数定理を勉強したら，留数定理を使って計算してみて下さい。

解答例 1

被積分関数 $f(z)$ を部分分数に分解する。

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right) && \text{(B.147)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} && \text{(B.148)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} && \text{(B.149)} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} && \text{(B.150)} \end{aligned}$$

従ってこの積分は以下のように 3 つの積分の和となる。

$$I \equiv \frac{1}{4}\int_C \frac{1}{z-2}\,dz - \frac{1}{4}\int_C \frac{1}{z}\,dz - \frac{1}{2}\int_C \frac{1}{z^2}\,dz \qquad \text{(B.151)}$$

第1 項の被積分関数は積分路 C 上および C の内部で正則である。よってコーシーの積分定理より，第1 項の積分は 0 となる。

第2 項と第3 項の積分を計算するために C 上の z を極形式で表す。C は原点を中心にする半径 1 の円なので

$$z = e^{i\theta} \qquad (\ 0 \leqq \theta < 2\pi\ ) \qquad \text{(B.152)}$$

と置くと

$$dz = e^{i\theta} i\ d\theta \qquad \text{(B.153)}$$

よって第2 項の積分は

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}}\ e^{i\theta} i\ d\theta = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i \qquad \text{(B.154)}$$

また第3 項の積分は

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z^2}\,dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2i\theta}}\ e^{i\theta} i\ d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta && \text{(B.155)} \\ &= i\left[\ \frac{1}{-i}e^{-i\theta}\ \right]_0^{2\pi} = -(e^{-2\pi i} - e^0) = 0 && \text{(B.156)} \end{aligned}$$

以上の結果を式 (B.151) に代入すれば

$$I = 0 - \frac{1}{4}2\pi i - 0 = -\frac{\pi}{2}i \qquad \text{(B.157)}$$

となる。

解答例 2

$$f(z) \equiv \frac{1}{z-2} \qquad \text{(B.158)}$$

と置くと，この積分は以下のように書ける。

$$I = \int_C \frac{1}{z^2}\frac{1}{z-2}\,dz = \int_C \frac{f(z')}{z'^2}\,dz' \qquad \text{(B.159)}$$

$f(z')$ は積分路 C の上および中で正則であるから定理 3.2.2（グルサの定理）で $n=1,\ z=0$ とおけば

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C \frac{f(z')}{z'^2}\,dz = \frac{2\pi i}{1!} f^{(1)}(0) && \text{(B.160)}\\
&= 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\frac{1}{z-2} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{-1}{(z-2)^2} && \text{(B.161)}\\
&= -2\pi i \frac{1}{2^2} = -\frac{\pi}{2} i && \text{(B.162)}
\end{aligned}
$$

B.4 第 4 章の練習問題の解答と解説

【 1 】の解答と解説

(1) $f(z)=\frac{z}{z^2+1}$ と置くと，関数 $f(z)$ は $z=\pm i$ のところに特異点があります。従って $f(z)$ は原点を中心とする半径 1 の円の内部で正則であり，この円の内部でテイラー展開（マクローリン展開）できます。

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{1-(-z^2)} = z\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n && \text{(B.163)}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1} && \text{(B.164)}
\end{aligned}
$$

式 (B.163) の変形が分からないという人がごくまれにいますが，等比級数の公式 $\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+\cdots$ で $r=-z^2$ としているだけです。等比級数の公式はしょっちゅう使いますよ。

(2) $f(z)=\frac{1}{(1+z)^m}\quad(m\geqq 1)$ と置くと，関数 $f(z)$ は $z=-1$ のところに特異点があります。従って $f(z)$ は原点を中心とする半径 1 の円の内部で正則であり，この円の内部でテイラー展開（マクローリン展開）できます。

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(1+z)^m} && \text{(B.165)}\\
f^{(1)}(z) &= -\frac{m}{(1+z)^{m+1}} && \text{(B.166)}\\
f^{(2)}(z) &= \frac{m(m+1)}{(1+z)^{m+2}} && \text{(B.167)}\\
&\ \ \vdots && \text{(B.168)}\\
f^{(n)}(z) &= (-1)^n\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{(1+z)^{m+n}} && \text{(B.169)}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
f(z) &= f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)z^n && \text{(B.170)}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^n m(m+1)\cdots(m+n-1)z^n && \text{(B.171)}\\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}z^n && \text{(B.172)}\\
&= 1-mz+\frac{m(m+1)}{2!}z^2-\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}z^3+\cdots && \text{(B.173)}
\end{aligned}
$$

(3) $f(z)=\mathrm{Log}\,(1+z)$ と置くと，関数 $f(z)$ は $z=-1$ のところに特異点がありますから，この関数も原点を中心とする半径 1 の円の内部で正則であり，この円の内部でテイラー展開（マクローリン展開）できることになります。

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \mathrm{Log}\,(1+z) && \text{(B.174)}\\
f^{(1)}(z) &= \frac{1}{1+z} && \text{(B.175)}\\
f^{(2)}(z) &= -\frac{1}{(1+z)^2} && \text{(B.176)}\\
f^{(3)}(z) &= \frac{2}{(1+z)^3} && \text{(B.177)}
\end{aligned}
$$

$$\vdots \tag{B.178}$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+z)^n} \qquad (n \geqq 1) \tag{B.179}$$

よって

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)z^n \tag{B.180}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!z^n \tag{B.181}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \tag{B.182}$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots \tag{B.183}$$

(4)

$$\begin{array}{rclcrcl} f(z) &=& +\cos(a+z) & & f^{(1)}(z) &=& -\sin(a+z) \\ f^{(2)}(z) &=& -\cos(a+z) & & f^{(3)}(z) &=& +\sin(a+z) \\ f^{(4)}(z) &=& +\cos(a+z) & & f^{(5)}(z) &=& -\sin(a+z) \\ & & \vdots & & & & \vdots \end{array}$$

よって

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)z^n \tag{B.184}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}z^{2n+1} \tag{B.185}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos a}{(2n)!}\ z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin a}{(2n+1)!}\ z^{2n+1} \tag{B.186}$$

$$= \cos a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} - \sin a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \tag{B.187}$$

別解）

この問題は加法定理を用いてもよいでしょう。

$$f(z) = \cos(a+z) = \cos a\ \cos z - \sin a\ \sin z \tag{B.188}$$

$$= \cos a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} - \sin a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \tag{B.189}$$

【 **2** 】の解答と解説

(1)

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-1} \tag{B.190}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \cdots \tag{B.191}$$

(2)

$$\frac{1}{z}\frac{1}{z^2-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n} \tag{B.192}$$

$$= -\frac{1}{z} - z - z^3 - z^5 - \cdots \tag{B.193}$$

(3)

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!} \tag{B.194}$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots \tag{B.195}$$

(4)

$$ze^{\frac{1}{z}} = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-1}} \tag{B.196}$$

$$= z + 1 + \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^3} + \cdots \tag{B.197}$$

B.5　第 5 章の練習問題の解答と解説

【 1 】の解答と解説

(1) $f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{z-1}$ より $z=0$ と $z=1$ がともに 1 位の極であり，留数は

$$\mathrm{Res}(0)=\lim_{z\to 0}(zf(z))=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1}=-1$$

$$\mathrm{Res}(1)=\lim_{z\to 1}\{(z-1)f(z)\}=\lim_{z\to 1}\frac{1}{z}=1$$

(2) $f(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2}$ より $z=1$ が 2 位の極であり，留数は

$$\mathrm{Res}(1)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2f(z)\right\}=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z+1)=1$$

または

$$f(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2}=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}$$

としてから $\frac{1}{z-1}$ の係数を見て $\mathrm{Res}(1)=1$ としてもよいでしょう。

(3)

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2e^{\frac{1}{z}} && \text{(B.198)}\\ &= z^2\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{4!\,z^4}+\cdots\right) && \text{(B.199)}\\ &= z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{6\,z}+\frac{1}{4!\,z^2}+\cdots && \text{(B.200)}\end{aligned}$$

より $z=0$ が真性特異点であり，留数は $\mathrm{Res}(0)=\frac{1}{6}$ 。

(4)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{z^3} && \text{(B.201)}\\ &= \frac{1}{z^3}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right) && \text{(B.202)}\\ &= \frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\cdots && \text{(B.203)}\end{aligned}$$

より $z=0$ が 2 位の極であり，留数は $\mathrm{Res}(0)=0$ 。

【 2 】の解答と解説

$f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z}=\dfrac{1}{z(z-2)}$ より積分路 C の中にある特異性は $z=0$ の 1 位の極だけであり，留数は

$$\mathrm{Res}(0)=\lim_{z\to 0}(zf(z))=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2} \tag{B.204}$$

よって留数定理より

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\mathrm{Res}(0)=2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)=-\pi i \tag{B.205}$$

【 3 】の解答と解説

この積分は例 5.3.1 と同じように積分経路を変形すれば計算できます。

まず例 5.3.1 と同じように積分区間を有限にしておいて，最後に無限大にします。そして実数での積分を実軸上での複素積分にします。(図 B.4 参照)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}\,dx && \text{(B.206)}\\ &= \lim_{R\to\infty}\int_C\frac{1}{z^4+1}\,dz && \text{(B.207)}\end{aligned}$$

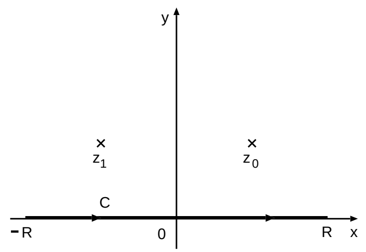


図 B.4:

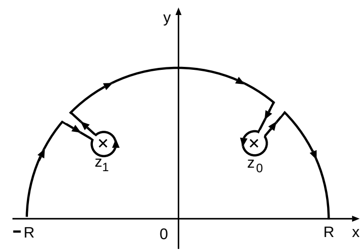


図 B.5:

積分路 C を変形するために被積分関数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ の特異性を調べましょう。$f(z)$ は $z^4=-1$ で分母が 0 になります。

$$z^4=-1=e^{\pi i}=e^{(2n+1)\pi i}\qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots) \tag{B.208}$$

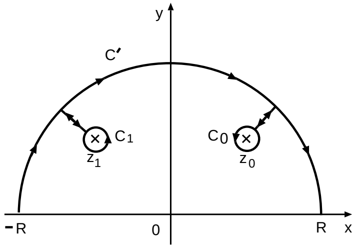


図 B.6:

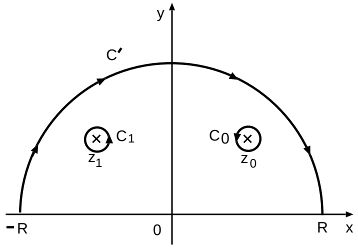


図 B.7:

従って $f(z)$ は $z = e^{\pm\frac{\pi}{4}i}$, $e^{\pm\frac{3\pi}{4}i}$ で 1 位の極を持ちます。複素平面の上半平面にある極を $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ と置くことにします。

さて，図 B.5 のように積分路 C の両端を固定して真ん中辺をぐうっと上に持ち上げます [5]。すると特異点 z_0 と z_1 を横切ることはできないので，経路は特異点に引っかかります。さらに変形して図 B.6 のように，半径 R の半円 C' と特異点の周りを回る円 C_0 と C_1 と，C' と C_0, C_1 を結ぶ直線に変形します。

C' と C_0, C_1 とを結ぶ直線上の積分は行きと帰りが同じ線の上で行われるので 0 になります。従って積分に寄与するのはは C' と C_0, C_1 での積分だけです。(図 B.7 参照)

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{R\to\infty}\int_C f(z)dz && \text{(B.209)}\\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{C'} f(z)dz + \int_{C_0} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz && \text{(B.210)}
\end{aligned}
$$

C' での積分の大きさを評価してみましょう。

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C'} f(z)\ dz\right| &\leqq \int_0^{\pi}\left|\frac{1}{R^4e^{4i\theta}+1}\right|\,|\ Re^{i\theta}i\ d\theta\ | && \text{(B.211)}\\
&= \int_0^{\pi}\left|\frac{1}{R^4e^{4i\theta}+1}\right|\ R\ d\theta && \text{(B.212)}\\
&\simeq \frac{1}{R^4}\ R\pi = \frac{\pi}{R^3} && \text{(B.213)}
\end{aligned}
$$

従って $R\to\infty$ のとき C' に沿った積分は 0 になります。

[5]この積分では下に下ろしたのでもよいです。

よって，例 5.3.1 と同様に特異点の周りの積分だけが寄与することになり，留数定理から以下のようになります。

$$
I = 2\pi i\ \{\ \mathrm{Res}(z_0) + \mathrm{Res}(z_1)\ \} \tag{B.214}
$$

さて，ここで留数 $\mathrm{Res}(z_0)$ と $\mathrm{Res}(z_1)$ を求めなければなりませんが，この計算方法は色々あります。なるべく以下を見ないでまずは自分で計算してみて下さい。とりあえず結果は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(z_0) &= -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} && \text{(B.215)}\\
\mathrm{Res}(z_1) &= \frac{1-i}{4\sqrt{2}} && \text{(B.216)}
\end{aligned}
$$

となり，積分結果は以下となります。

$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi i\ \{\ \mathrm{Res}(z_0) + \mathrm{Res}(z_1)\ \} && \text{(B.217)}\\
&= 2\pi i\frac{1}{4\sqrt{2}}\{\ -(1+i)+(1-i)\} && \text{(B.218)}\\
&= \pi i\frac{1}{2\sqrt{2}}(-2i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} && \text{(B.219)}
\end{aligned}
$$

留数の計算その1)

$z^4+1=0$ の解は z_0, z_1, z_0^*, z_1^* ですから $f(z)$ は以下のように書けます。

$$
f(z) = \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_0^*)(z-z_1^*)}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) && \text{(B.220)}\\
&= \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_0^*)(z-z_1^*)} && \text{(B.221)}\\
&= \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_0^*)(z_0-z_1^*)} && \text{(B.222)}\\
&= (\ \text{自分で計算してみよう！}\ )\\
&= -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} && \text{(B.223)}
\end{aligned}
$$

同様にして

$$\mathrm{Res}(z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) \tag{B.224}$$
$$= \lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_0^*)(z-z_1^*)} \tag{B.225}$$
$$= \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_0^*)(z_1-z_1^*)} \tag{B.226}$$
$= $（ 自分で計算してみよう！ ）
$$= \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \tag{B.227}$$

この計算はちょっと面倒ですが，$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$，$z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ を代入して是非自分で計算してみてください。

留数の計算その２）
極を z_n と書くと $z_n^4 = -1$ ですから

$$\mathrm{Res}(z_n) = \lim_{z\to z_n}(z-z_n)f(z) \tag{B.228}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{z^4+1} \tag{B.229}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{z^4-(-1)} \tag{B.230}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{z^4-z_n^4} \tag{B.231}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{(z^2-z_n^2)(z^2+z_n^2)} \tag{B.232}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{(z-z_n)(z+z_n)(z^2+z_n^2)} \tag{B.233}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{1}{(z+z_n)(z^2+z_n^2)} \tag{B.234}$$
$$= \frac{1}{(z_n+z_n)(z_n^2+z_n^2)} \tag{B.235}$$
$$= \frac{1}{2z_n\ 2z_n^2} \tag{B.236}$$
$$= \frac{1}{4z_n^3} \tag{B.237}$$

よって

$$\mathrm{Res}(z_0) = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{1}{4(e^{\frac{\pi}{4}i})^3} = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi}{4}i}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i} \tag{B.238}$$
$$= -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} \tag{B.239}$$

$$\mathrm{Res}(z_1) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4(e^{\frac{3\pi}{4}i})^3} = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}i}} = \frac{1}{4e^{\frac{\pi}{4}i}} \tag{B.240}$$
$$= \frac{1}{4}e^{-\frac{\pi}{4}i} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \tag{B.241}$$

留数の計算その３）
最後に一番簡単な方法を紹介します。

$$\mathrm{Res}(z_n) = \lim_{z\to z_n}(z-z_n)f(z) \tag{B.242}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{z^4+1} \tag{B.243}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{z^4-(-1)} \tag{B.244}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{z^4-z_n^4} \tag{B.245}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{1}{\frac{z^4-z_n^4}{z-z_n}} \tag{B.246}$$
$$= \lim_{z\to z_n}\frac{1}{\frac{dz^4}{dz}} \tag{B.247}$$
$$= \frac{1}{4z_n^3} \tag{B.248}$$

以下は，その2 と同様です。

なぜこういう簡単な方法を最初に教えてくれないかって？
苦労して計算した経験がないと何も身に付かないからです！
この微分を利用する方法がどういう場合に使えるのかは自分で考えてみてください。

索 引