1. フーリエ級数の解答

1. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=\text{奇数}}\dfrac{\cos nx}{n^2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{\cos 3x}{9}+\dfrac{\cos 5x}{25}\cdots\right)$

2. $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=\text{奇数}}\dfrac{\sin nx}{n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\left(\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 5x}{5}\cdots\right)$

3(1). $f(x)=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}=2\left(\sin x-\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}-\dfrac{\sin 4x}{4}\cdots\right)$

3(2). $f(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{3}+4\left(-\cos x+\dfrac{\cos 2x}{4}-\dfrac{\cos 3x}{9}+\dfrac{\cos 4x}{16}\cdots\right)$

3(3). $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{4n^2-1}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{3}+\dfrac{\cos 2x}{15}+\dfrac{\cos 3x}{35}\cdots\right)$

3(4). $f(x)=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos nx=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\cos x}{3}-\dfrac{\cos 2x}{15}+\dfrac{\cos 3x}{35}-\dfrac{\cos 4x}{63}\cdots\right)$

3(5).
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n^2+1}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}\sin nx\right\}\\&=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos 2x}{5}-\frac{\cos 3x}{10}\cdots\right)+\left(\frac{\sin x}{2}-\frac{2\sin 2x}{5}+\frac{3\sin 3x}{10}\cdots\right)\right\}\end{aligned}$$

3(6).
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=\text{奇数}}\frac{\cos nx}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}\\&=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}\cdots\right)+\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{3\sin 3x}{3}\cdots\right)\end{aligned}$$

4(1). $f(x)=|x|\ (-\pi<x<\pi)$ のフーリエ級数は問 1 で求めた。
一方 $f'(x)=-1\ (-\pi<x<0), 1\ (0<x<\pi)$ のフーリエ級数は

$$f'(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}\cdots\right)\tag{1}$$

となるが，これはちょうど問 1 の答の各項を微分（項別微分）したものである。逆に式 (1) を 0 から x まで項別積分すると

$$-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}\cdots\right)+\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}\cdots\right)\tag{2}$$

となる。第 2 項は問 1 の答えに $x=\pi$ を代入した式から $\pi/2$ になることがわかるので，問 1 の答えと同じになる。

4(2). $f(x)=x^2$ のフーリエ級数は問 3(2) で求めた。$f'(x)=2x$ のフーリエ級数は問 3(1) の 2 倍。問 3(2) の答えを項別微分すると，問 3(1) の答えの 2 倍になる。また，問 3(1) の答えの 2 倍を 0 から x まで項別積分すると

$$4\left(-\cos x+\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 4x}{16}\cdots\right)-4\left(-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\cdots\right)\tag{3}$$

となる。第 2 項は，問 3(2) の答えに $x=0$ を代入した式から $\pi^2/3$ になることがわかるので，問 3(2) の答えと同じになる。

5. $f(x)=\dfrac{L}{2}-\dfrac{4L}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=\text{奇数}}\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{L}=\dfrac{L}{2}-\dfrac{4L}{\pi^2}\left(\cos\dfrac{\pi x}{L}+\dfrac{1}{9}\cos\dfrac{3\pi x}{L}+\dfrac{1}{25}\cos\dfrac{5\pi x}{L}\cdots\right)$

6. $f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos\dfrac{2n\pi x}{L}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{2\pi x}{L}+\dfrac{1}{15}\cos\dfrac{4\pi x}{L}+\dfrac{1}{35}\cos\dfrac{6\pi x}{L}\cdots\right)$

元の関数が $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{2L}(0\le x<2L)$ で周期 $2L$ の場合には，

$f(x)=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos\dfrac{n\pi x}{L}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\pi x}{L}+\dfrac{1}{15}\cos\dfrac{2\pi x}{L}+\dfrac{1}{35}\cos\dfrac{3\pi x}{L}\cdots\right)$

7(1). $f(x)=i\sum_{n\neq 0}\dfrac{(-1)^n}{n}e^{inx}=i\left(-e^{ix}+\dfrac{e^{2ix}}{2}-\dfrac{e^{3ix}}{3}\cdots\right)+i\left(e^{-ix}-\dfrac{e^{-2ix}}{2}+\dfrac{e^{-3ix}}{3}\cdots\right)$

7(2). $f(x)=\dfrac{\pi^2}{3}+2\sum_{n\neq 0}\dfrac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}=\dfrac{\pi^2}{3}+2\left(-e^{ix}+\dfrac{e^{2ix}}{4}-\dfrac{e^{3ix}}{9}\cdots\right)+2\left(-e^{-ix}+\dfrac{e^{-2ix}}{4}-\dfrac{e^{-3ix}}{9}\cdots\right)$

7(3). $f(x)=-\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{inx}}{4n^2-1}=\dfrac{2}{\pi}\left\{1-\left(\dfrac{e^{ix}}{3}+\dfrac{e^{2ix}}{15}+\dfrac{e^{3ix}}{35}\cdots\right)-\left(\dfrac{e^{-ix}}{3}+\dfrac{e^{-2ix}}{15}+\dfrac{e^{-3ix}}{35}\cdots\right)\right\}$

7(4). $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}e^{inx}=\dfrac{2}{\pi}\left\{1+\left(\dfrac{e^{ix}}{3}-\dfrac{e^{2ix}}{15}+\dfrac{e^{3ix}}{35}\cdots\right)+\left(\dfrac{e^{-ix}}{3}-\dfrac{e^{-2ix}}{15}+\dfrac{e^{-3ix}}{35}\cdots\right)\right\}$

7(5). $f(x)=\dfrac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-in}e^{inx}=\dfrac{\sinh\pi}{\pi}\left\{1+\left(-\dfrac{e^{ix}}{1-i}+\dfrac{e^{2ix}}{1-2i}\cdots\right)+\left(-\dfrac{e^{-ix}}{1+i}+\dfrac{e^{-2ix}}{1+2i}\cdots\right)\right\}$

7(6).
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\pi}{4}+\frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n}{n}e^{inx}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=\text{奇数}}\frac{e^{inx}}{n^2}\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{i}{2}\left(-e^{ix}+e^{-ix}+\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2}-\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{3}\cdots\right)\\&\qquad-\frac{1}{\pi}\left(e^{ix}+e^{-ix}+\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{9}+\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{25}\cdots\right)\end{aligned}$$

【注意：7(1) から 7(6) の結果を変形すると，当然 3(1) から 3(6) の結果と同じになる。】

8. $f(x-a)$ のフーリエ級数を c'_n とすると，$c'_n=c_ne^{-ina}$

2. フーリエ変換の解答

1. (1) $F(k)=\dfrac{\sin ka}{ka}$　(2) $F(k)=\dfrac{2a}{k^2+a^2}$　(3) $F(k)=\dfrac{\pi}{a}e^{-a|k|}$　(4) $F(k)=\dfrac{1}{a+ik}$

2. 略

3. (1) $F(k)=\dfrac{\sin ka}{k}$　(2) $F(k)=-\dfrac{2a}{k^2}\cos ka+\dfrac{2}{k^3}\sin ka$　(3) $F(k)=\dfrac{k\sin\pi k}{1-k^2}$

4. (1) $F(k)=\dfrac{1-\cos ka}{k}$　(2) $F(k)=\dfrac{\sin\pi k}{1-k^2}$　(3) $F(k)=-\dfrac{a\cos ka}{k}+\dfrac{\sin ka}{k^2}$