3.6 ラプラス変換の微分方程式への応用

$$L\frac{d^n y}{dt^n} = s^n Y(s) - \left(y^{(n-1)}(0) + sy^{(n-2)}(0) + \cdots + s^{n-1}y(0)\right)$$

［例 1］

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (\omega > 0)$$

を 初 期 条 件 $y(0) = A$, $y'(0) = B$ の も と に 解 け

（解）

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \leftrightarrow s^2 Y(s) - y'(0) - sy(0)$$ よ り

与 式 の 両 辺 を ラ プ ラ ス 変 換 す れ ば

$$s^2 Y(s) - B - sA + \omega^2 Y(s) = 0$$

$$\left(s^2 + \omega^2\right) Y(s) = sA + B$$

$$\therefore Y(s) = \frac{sA + B}{s^2 + \omega^2} = A \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{B}{\omega} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

こ こ で

$$\frac{s}{s^2 + \omega^2} \leftrightarrow \cos \omega \mathrm{t}, \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \leftrightarrow \sin \omega t$$ よ り

$$y(t) = A\cos \omega t + \frac{B}{\omega}\sin \omega t$$

［例 2］

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 2$$ を初期条件

$y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$ のもとに解け

(解)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \leftrightarrow s^2 Y(s) - y'(0) - sy(0) = s^2 Y(s) - s$$

$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

与式の両辺をラプラス変換すれば

$$s^2 Y(s) - s - sY(s) + 1 - 6Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$\left(s^2 - s - 6\right) Y(s) = s - 1 + \frac{2}{s} = \frac{s^2 - s + 2}{s}$$

$$\therefore\ Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s\left(s^2 - s - 6\right)} = \frac{s^2 - s + 2}{s(s-3)(s+2)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{s+2}$$

$A, B.C$を係数比較で求めると

$$A = -\frac{1}{3},\quad B = \frac{8}{15},\quad C = \frac{4}{5}$$

$$\therefore\ y(t) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{15} e^{3t} + \frac{4}{5} e^{-2t}$$

[例 3]

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = \sin t$$ を $y(0) = y'(0) = 0$

のもとに解け

(解)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \leftrightarrow s^2 Y(s)$$

$$\therefore\ s^2 Y(s) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}$$

$$= \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+4}$$

$$= \frac{A(s^2+4) + B(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$= \frac{(A+B)s^2 + 4A + B}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$\therefore\ A + B = 0, \quad 4A + B = 1$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+4}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{6}\frac{2}{s^2+4}$$

$$\therefore\ y(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$$

〔例 4〕

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=\cos\omega t$ を初期条件

$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1$ のもとに解け

(解)

$$\frac{d^2y}{dt^2}\leftrightarrow s^2Y(s)-y'(0)-sy(0)$$

$$=s^2Y(s)-y_1-sy_0$$

与式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2Y(s)-y_1-sy_0+\omega^2Y(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\left(s^2+\omega^2\right)Y(s)=sy_0+y_1+\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\therefore Y(s)=\frac{sy_0+y_1}{s^2+\omega^2}+\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$=y_0\frac{s}{s^2+\omega^2}+\frac{y_1}{\omega}\cdot\frac{\omega}{s^2+\omega^2}+\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$Ltf(t)=\int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt$$

$$=-\frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$=-\frac{d}{ds}F(s)$$

$$tf(t)\leftrightarrow -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$ より

$$\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = -\frac{\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\cdot 2s$$

$$= -\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$\therefore (-1)\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = 2\omega\cdot\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$\therefore t\sin\omega t \leftrightarrow (-1)\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$= 2\omega\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$$

$$i.e.\quad \frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} \leftrightarrow \frac{t}{2\omega}\sin\omega t$$

$$\therefore y(t) = y_0\cos\omega t + \frac{y_1}{\omega}\sin\omega t + \frac{t}{2\omega}\sin\omega t$$

［例５］

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2x-\dfrac{dy}{dt}=1 \\ \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2y}{dt^2}+2y=0 \end{cases}$$ を初期条件

$$x(0)=1,\ x'(0)=0$$

$$y(0)=y'(0)=0$$ のもとに解け

（解）

$$\frac{d^2x}{dt^2}\leftrightarrow s^2X(s)-x'(0)-sx(0)=s^2X(s)-s$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\leftrightarrow s^2Y(s)-y'(0)-sy(0)=s^2Y(s)$$

$$\frac{dx}{dt}\leftrightarrow sX(s)-x(0)=sX(s)-1$$

$$\frac{dy}{dt}\leftrightarrow sY(s)-y(0)=sY(s)$$

$$\begin{cases} s^2X(s)-s+2X(s)-sY(s)=\dfrac{1}{s} \\ sX(s)-1+s^2Y(s)+2Y(s)=0 \end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases} \left(s^2+2\right)X(s)-sY(s)=s+\dfrac{1}{s} \\ sX(s)+\left(s^2+2\right)Y(s)=1 \end{cases}$$

これを$X(s), Y(s)$について解くと

$$X(s)=\frac{s^4+4s^2+2}{s\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}$$

$$=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}+\frac{Ds+E}{s^2+4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{6}\frac{s}{s^2+4}$$

$$Y(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4\right)}$$

$$=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{6}\frac{2}{s^2+4}$$

$\therefore$

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{6}\cos 2t$$

$$y(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t$$