２　正弦波交流回路

2.１　正弦波交流

$$e = E_0 \cos(\omega t + \theta)$$

E_0：振幅

$\phi = \omega t + \theta$: 位相

ω：角周波数

θ：$t = 0$での位相（初期位相）

角周波数ωとは？

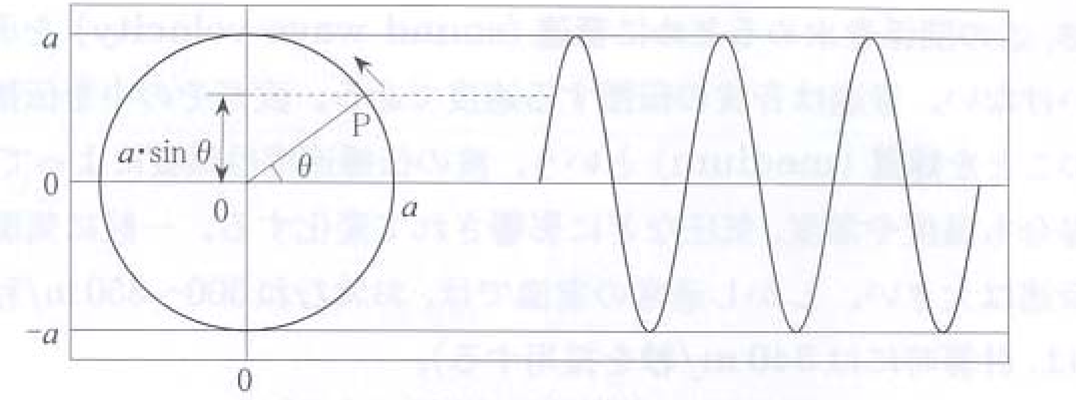

図1-4　回転運動の射影としての波動。
縦の成分はsin関数として表される。

角周波数＝２π×周波数（ω＝２πf）

$$\omega = 2\pi f, T = 1/f$$

f: 周波数　ヘルツ［herz , Hz］

T: 周期　秒［s］

（１）抵抗

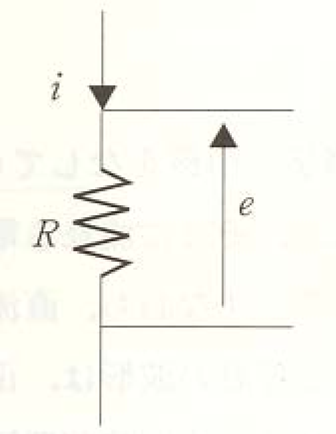

図 2.1 抵抗

$$e = Ri$$

$i = I_0 \cos \omega t$ とすると

$$e = RI_0 \cos \omega t$$

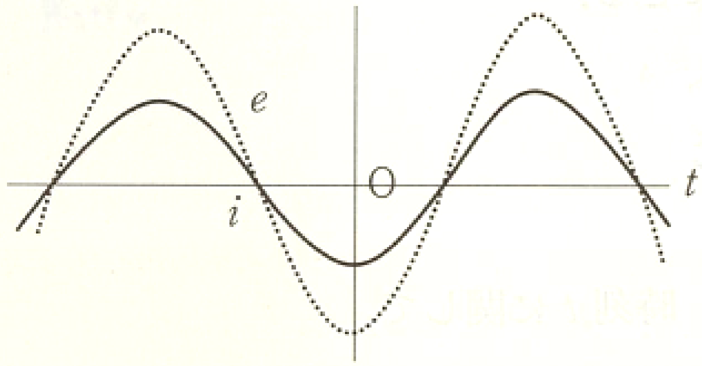

図 2.2 抵抗における電圧と電流の関係

電流 i と電圧 e は同位相

（２）インダクタ（コイル）

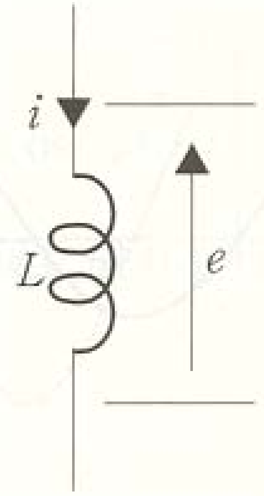

図 2.3 インダクタ

$$e = L\frac{di}{dt}$$

$i = I_0 \cos \omega t$ とすると

$$e = L\frac{di}{dt} = -\omega L I_0 \sin \omega t$$

ω,Lが大きくなると電流が大きくなる

$$e = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \pi/2\right)$$

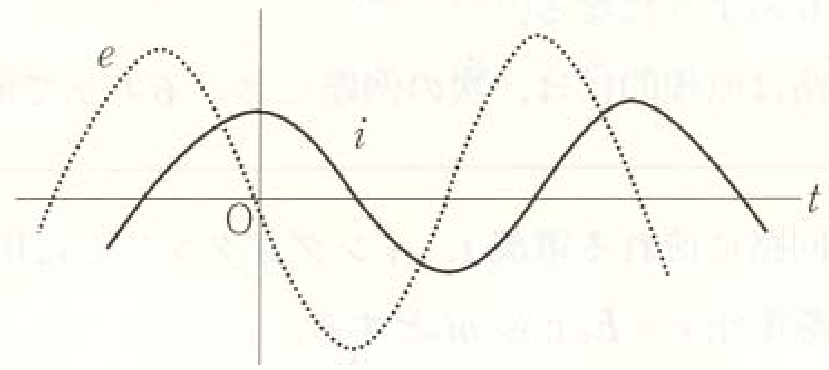

図 2.4 インダクタにおける電圧と電流の関係

電圧 e は電流 i より位相が $\pi/2$ 進む

電流 i は電圧 e より位相が $\pi/2$ 遅れる

（１）キャパシタ（コンデンサ）

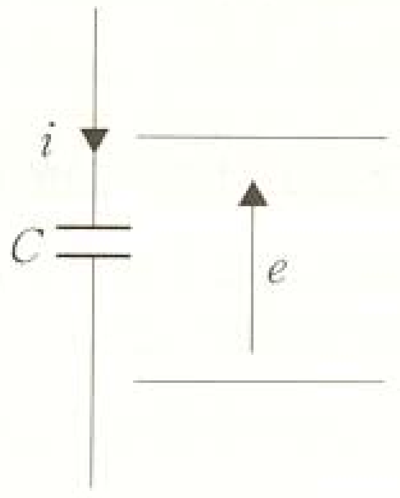

図 2.5　キャパシタ

$$i = C\frac{de}{dt}$$

直流の場合eは変化しない
de/dt=0

$e = E_0 \cos \omega t$ とすると

$$i = C\frac{de}{dt} = -\omega C E_0 \sin \omega t$$

$$i = \omega C E_0 \cos\left(\omega t + \pi/2\right)$$

コンデンサにかかる電流

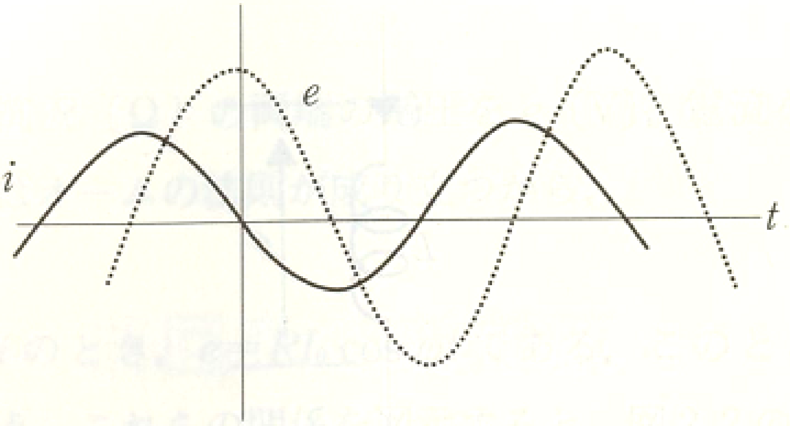

図 2.6 キャパシタにおける電圧と電流の関係

電流 i は電圧 e より位相が $\pi/2$ 進む
電圧 e は電流 i より位相が $\pi/2$ 遅れる

L: i は e より $\pi/2$ 遅れる
C: i は e より $\pi/2$ 進む

［例題 2. 1］

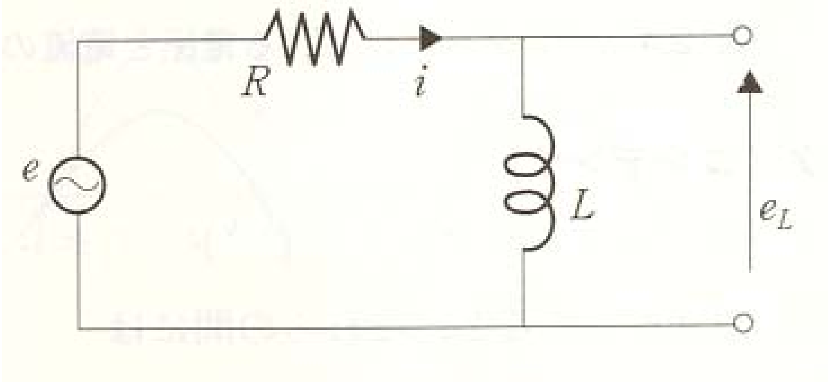

図 2.7　RL回路

$$e = L\frac{di}{dt} + Ri$$

$e = E_0 \cos \omega t$ とすると

i も同じ周波数の正弦波となる

（受動，線形，時不変）

$i = I_0 \cos\left(\omega t + \theta\right)$とすると

$$E_0 \cos \omega t = -\omega L I_0 \sin\left(\omega t + \theta\right) + R I_0 \cos\left(\omega t + \theta\right)$$

$$= I_0 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cos\left(\omega t + \theta + \phi\right) \ ,$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

$$\sin\left(\alpha \pm \beta\right) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos\left(\alpha \pm \beta\right) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

時刻 t に無関係に成立するので，振幅と位相が等しい．

$$E_0 = I_0\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$
$$\theta + \phi = 0$$

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$
$$\theta = -\phi = -\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

$$
\begin{aligned}
e_L &= L\frac{di}{dt} \\
&= -\omega L I_0 \sin\left(\omega t - \phi\right) \\
&= \frac{\omega L E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

e_L は e より位相が $\pi/2 - \phi$ 進む

2.2　複素電圧・電流法

オイラーの式

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t\ ,\quad j = \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned}\dot{E} &= E_0\, e^{j(\omega t+\theta)} \\ &= E_0\cos(\omega t+\theta) + j\,E_0\sin(\omega t+\theta)\end{aligned}$$

$\dot{E}$: 複素電圧

$e = E_0\cos(\omega t+\theta)$: 実電圧，瞬時電圧

$$\frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega \cdot e^{j\omega t}$$

$$\int e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} + C$$

微分，積分が非常に容易にできる．

（１）フェーザ（phasor）

フェーザ：複素ベクトル

$$\dot{E} = E_0 \cdot e^{j(\omega t+\theta)}$$

$$= E_0 e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t}$$

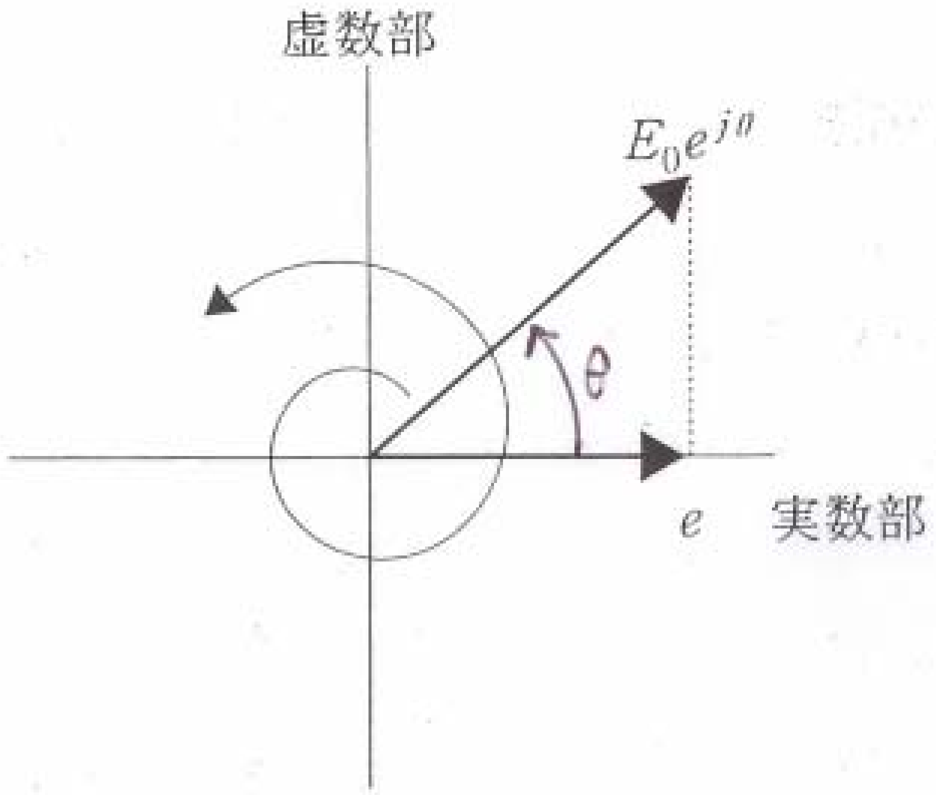

図 2.8 フェーザ

$\dot{E}$ は $E_0 e^{j\theta}$ を初期位置として，
t と共に反時計回りに回転する
フェーザ

実電圧はこのフェーザの
実軸上の成分(投影)で
単振動となる．

［例題 2. 2］

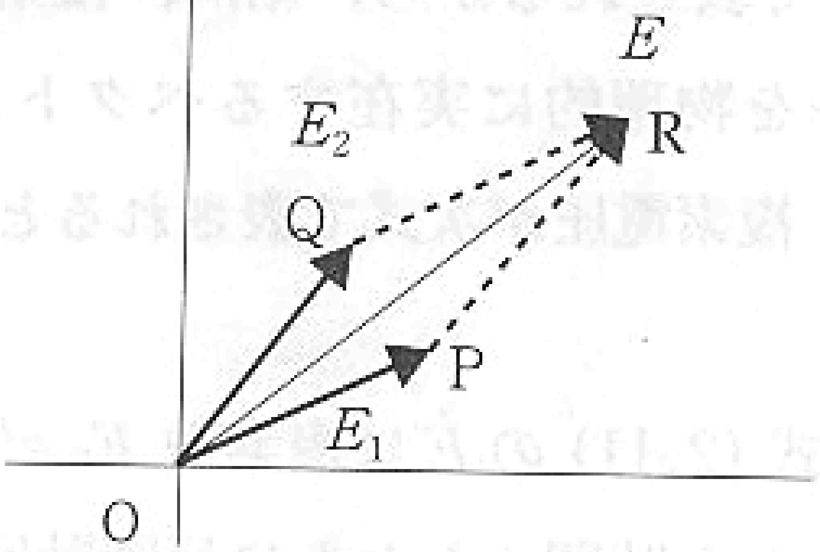

図 2.9 電圧フェーザ

E_1 : 振幅10V， 初期位相30°

E_2 : 振幅10V， 初期位相60°

$$E = E_1 + E_2$$

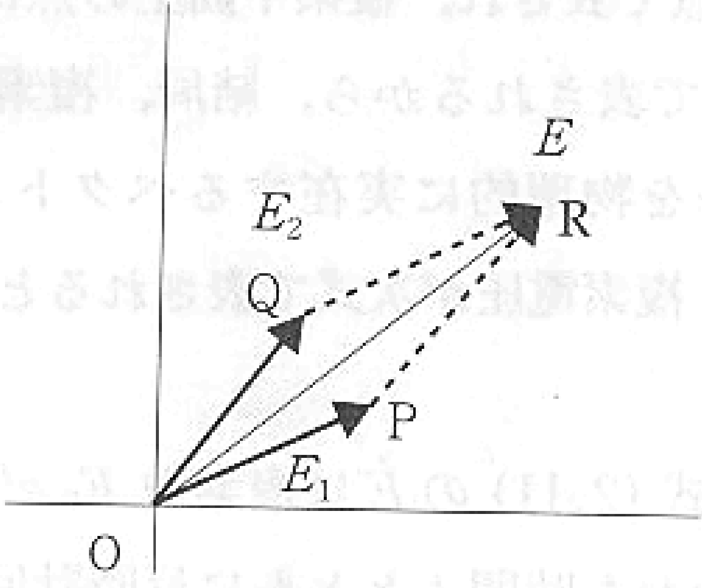

図 2.9 電圧フェーザ

偏角ORは45°

$\angle OPR = 150°$

$\triangle ROP$に余弦定理

$$\overline{OR}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PR}^2 - 2\overline{OP} \cdot \overline{PR} \cos 150°$$

$$\overline{OR} = 19.3$$

E : 振幅19.3V, 初期位相45°

（２）回路素子

（ｉ）抵抗

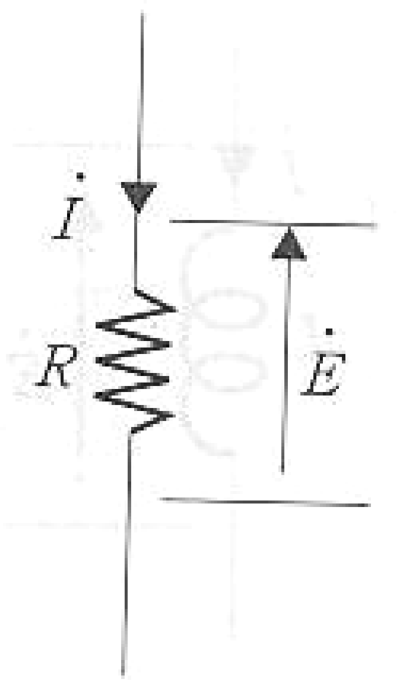

図 2.10　抵抗

複素電圧 $\dot{E}$，複素電流 $\dot{I}$

$$\dot{E} = R\dot{I}$$

$\dot{E}$ と $\dot{I}$ は同位相

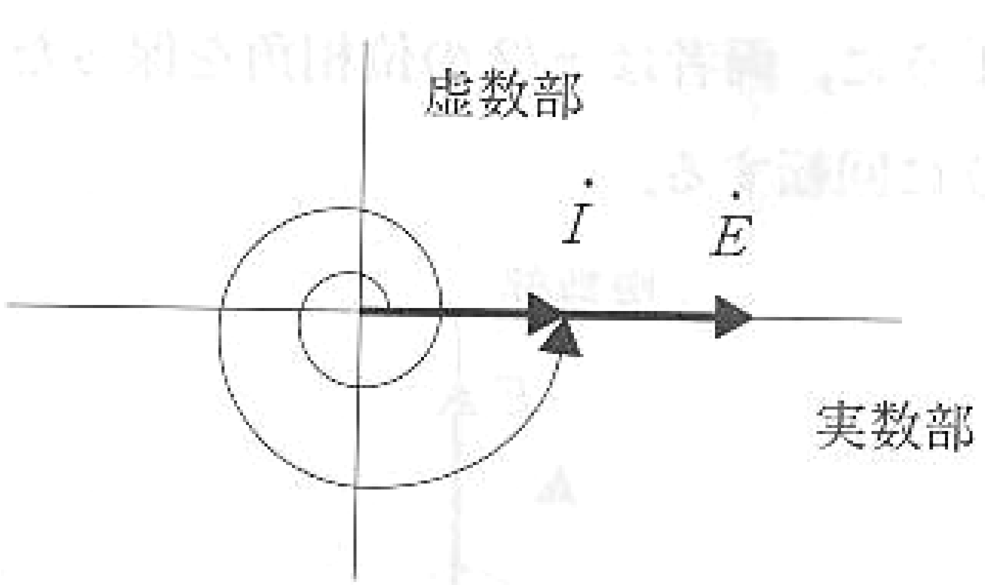

図 2.11　抵抗における複素電圧・電流の関係

$$Z = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} = R$$

（ii）インダクタ(コイル)

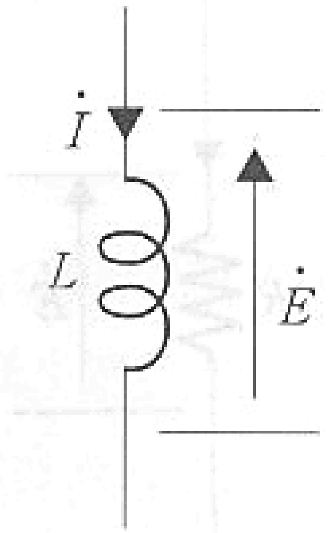

図 2.12　インダクタ

$$\dot{E} = L\frac{d\dot{I}}{dt}$$

$\dot{I} = I_0 e^{j(\omega t + \theta)}$ とすると

$$\dot{E} = L \cdot j\omega I_0 e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$= j\omega L\dot{I}$$

$$\dot{E} = j\omega L\,\dot{I}$$

$\dot{E}$ は $\dot{I}$ より j の位相角 $\pi/2$ 進む

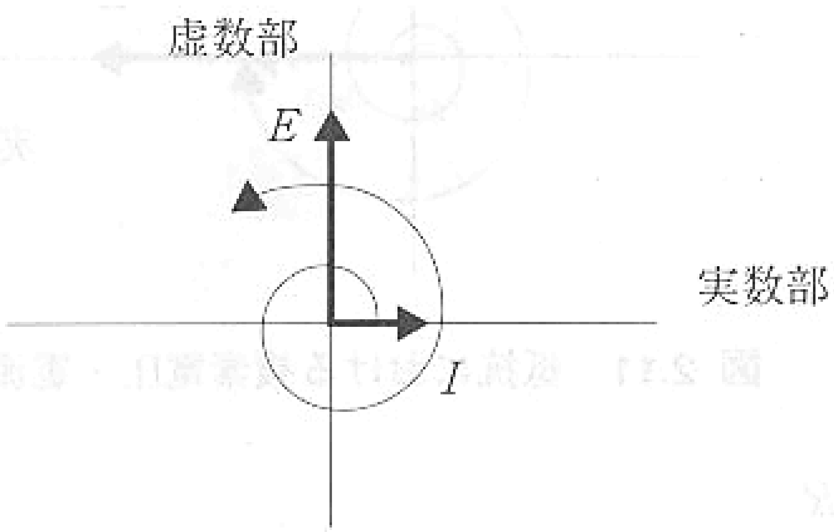

図 2.13 インダクタにおける複素電圧と電流の関係

$$Z = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} = j\omega L$$

（iii）キャパシタ（コンデンサ）

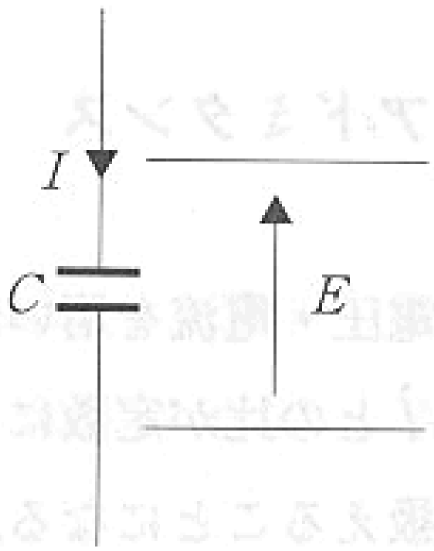

図 2.14　キャパシタ

$$\dot{I} = C\frac{d\dot{E}}{dt}$$

$\dot{E} = E_0 e^{j(\omega t+\theta)}$ とすると

$$\dot{I} = C \cdot j\omega E_0 e^{j(\omega t+\theta)}$$

$$= j\omega C \cdot \dot{E}$$

$$\dot{I} = j\omega C \cdot \dot{E}$$

$\dot{I}$ は $\dot{E}$ より j の位相角 $\pi/2$ 進む.

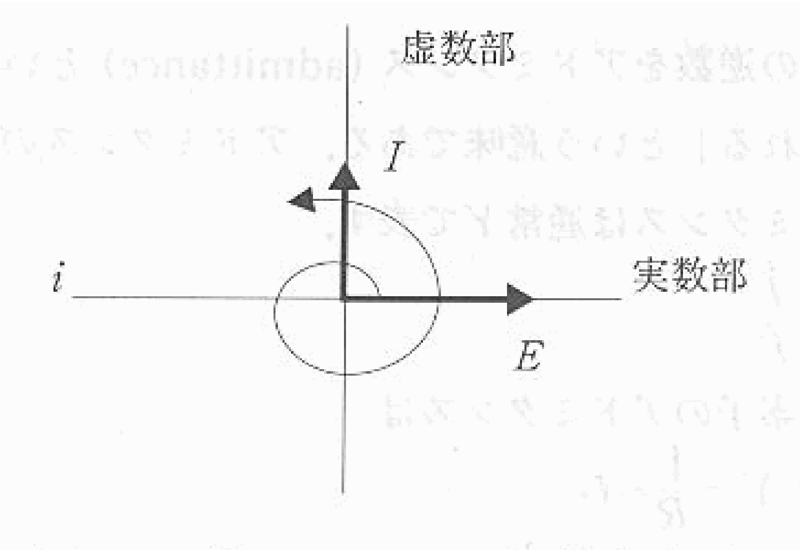

図 2.15　キャパシタにおける複素電圧と電流の関係

$$Z = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} = \frac{1}{j\omega C}$$

2.3　インピーダンス，アドミタンス

$$Z = \frac{\dot{E}}{\dot{I}} \quad \left(\text{インピーダンス，impedance}\right)$$

電流の流れにくさ

抵抗 R:　　$Z = R$

インダクタ L:　　$Z = j\omega L$

キャパシタ C:　　$Z = \dfrac{1}{j\omega C}$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{\dot{I}}{\dot{E}}$$ （アドミタンス，admittance）

電流の流れやすさ

抵抗 R:　$Y = \frac{1}{R} = G$

インダクタ L:　$Y = \frac{1}{j\omega L}$

キャパシタ C:　$Y = j\omega C$

（１） 直列接続・並列接続

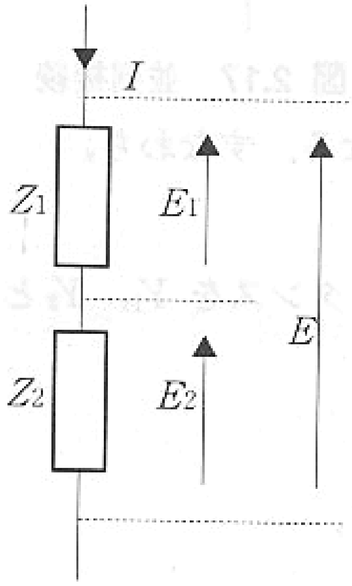

図 2.16 直列接続

$$\dot{E} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2$$

$$\dot{E}_1 = Z_1 \dot{I}$$

$$\dot{E}_2 = Z_2 \dot{I}$$

$$\dot{E} = \left(Z_1 + Z_2\right)\dot{I}$$

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad \left(\text{合成インピーダンス}\right)$$

$$\dot{E} = Z\dot{I}$$

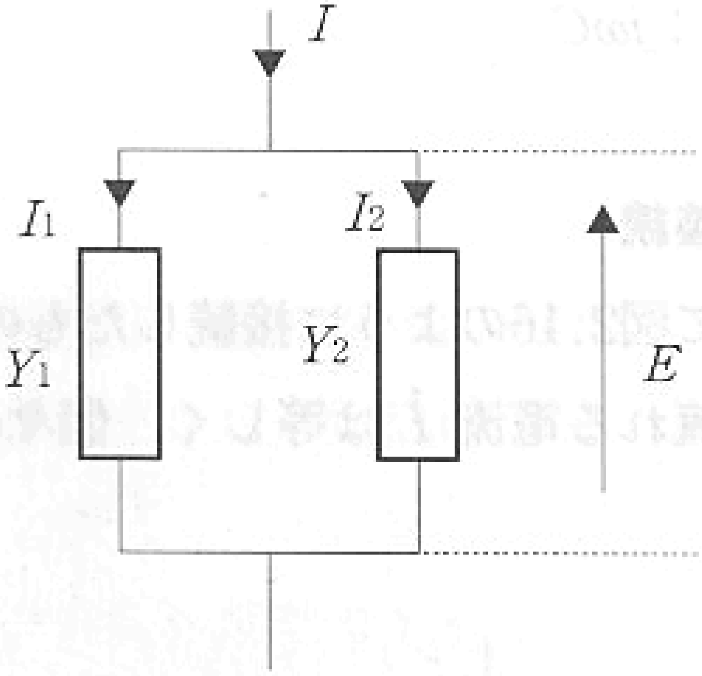

図 2.17　並列接続

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

$$\dot{I}_1 = Y_1 \dot{E}$$

$$\dot{I}_2 = Y_2 \dot{E}$$

$$\dot{I} = \left(Y_1 + Y_2\right)\dot{E}$$

$Y = Y_1 + Y_2$ （合成アドミタンス）

$$\dot{I} = Y \dot{E}$$

（２） 実数部・虚数部

インピーダンスZを実数部と虚数部に分け

$$Z = R + jX$$

実数部 R: 抵抗

虚数部 X: リアクタンス

$X > 0$ の時　誘導性リアクタンス

$X < 0$ の時　容量性リアクタンス

アドミタンスYを実数部と虚数部に分け

$$Y = G + jB$$

実数部G: コンダクタンス

虚数部B: サセプタンス

$B > 0$の時　容量性サセプタンス

$B < 0$の時　誘導性サセプタンス

［例題 2. 3］

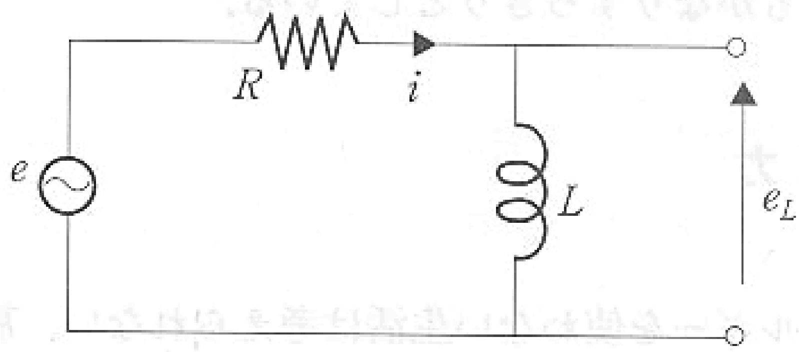

図 2.18 RL回路

$$e = E_0 \cos \omega t$$

$$\dot{E} = E_0 e^{j\omega t}$$

$$Z = R + j\omega L$$

$$= Z_0 e^{j\theta}$$

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{Z_0 e^{j\theta}} = \frac{E_0}{Z_0} e^{j(\omega t - \theta)}$$

$$\dot{E}_L = j\omega L \dot{I}$$

$$= e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \omega L \cdot \frac{E_0}{Z_0} e^{j(\omega t - \theta)}$$

$$= \frac{\omega L E_0}{Z_0} e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ であることを利用

瞬時値 i , e_L は $\dot{I}$, $\dot{E}_L$ の実数部

$$i = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \theta)$$

$$e_L = \frac{\omega L E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \theta + \frac{\pi}{2}\right)$$