# 1.5.4 と 1.5.5 の補足

1.5.4 の式 (28) を変形すると

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - \phi_N(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f\phi_N dx + \int_{-\pi}^{\pi} \phi_N^2 dx \tag{1}$$

となる。式 (27) を代入して右辺第 2 項，第 3 項の積分を計算すると次のようになる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\phi_N dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f}{2}\alpha_0 dx + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f\cos nx dx + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} f\sin nx dx \tag{2}$$

$$= \frac{\alpha_0}{2}\pi a_0 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \pi a_n + \sum_{n=1}^{N} \beta_n \pi b_n \tag{3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_N^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 dx + 2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)\, dx$$
$$+ \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)^2 dx \tag{4}$$

$$= \frac{\pi}{2}\alpha_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{N} \left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right) \tag{5}$$

となる。($a_0, a_n, b_n$ はフーリエ級数の係数であることに注意。) したがって (1) 式は，次の式の 2 行目までのようになる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - \phi_N(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - 2\pi \left\{\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n a_n + \beta_n b_n)\right\}$$
$$+\pi \left\{\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)\right\}$$
$$+\pi \left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)\right\} - \pi \left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)\right\} \tag{6}$$

3 行目は次の変形をする準備として，同じ項を足して引いている。第 2 項，第 3 項，第 4 項は次式の第 2 項のように 2 乗の和の形にまとめることができて

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - \phi_N(x)\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx + \pi \left[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left\{(\alpha_n - a_n)^2 + (\beta_n - b_n)^2\right\}\right]$$
$$-\pi \left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)\right\} \tag{7}$$

が得られる。結局，$\alpha_0 = a_0, \alpha_n = a_n, \beta_n = b_n$ と選んだときに，上の式は最小になることがわかる。この時，右辺第 2 項は 0 になる。左辺は必ず 0 以上なので，ベッセルの不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \geq \pi \left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)\right\} \tag{8}$$

を導くことができる。