２　ブール代数
2.１ブール代数の定義

公理論的定義：
集合 B 上に２つの２項演算"+","•"，および２つの特別な元０と１が定義され, 以下の公理を満たす時，代数系 $\langle B,+,\bullet,0,1\rangle$ はブール代数であると言う.

＋：　和,　　　　　●：　積
０：　零元　　　　１：　単位元
（算術演算の，和，積，０，１とは異なるので注意）

公理１：
結合律(associative law)が成り立つ

すべての $a,b,c \in B$ に対して

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$
$$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$$

公理２：
可換律(commutative law)が成り立つ

すべての $a,b \in B$ に対して

$$a+b = b+a$$
$$a \bullet b = b \bullet a$$

公理３：
零元，単位元の存在

特別な元０，１が存在して，すべての
$a \in B$ に対して

$$a + 0 = a$$

$$a \bullet 1 = a$$

公理４：
分配律(distributive law)が成り立つ

すべての $a, b, c \in B$ に対して

$$a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$$

$$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$$

公理５：
補元の存在

すべての $a \in B$ に対して

$$a \bullet \overline{a} = 0 \quad \text{かつ} \quad a + \overline{a} = 1$$

となる $\overline{a} \in B$ が存在する.

$\overline{a}$ を a の補元(complement)という.

［定理］ $a+a=a,\quad a\bullet a=a$

（巾等律）

［証明］

$$
\begin{aligned}
a+a &= (a+a)\bullet 1 && \text{(公理３)}\\
&= (a+a)\bullet(a+\overline{a}) && \text{(公理５)}\\
&= a+(a\bullet\overline{a}) && \text{(公理４)}\\
&= a+0 && \text{(公理５)}\\
&= a && \text{(公理３)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a\bullet a &= a\bullet a+0 && \text{(公理３)}\\
&= a\bullet a+a\bullet\overline{a} && \text{(公理５)}\\
&= a\bullet(a+\overline{a}) && \text{(公理４)}\\
&= a\bullet 1 && \text{(公理５)}\\
&= a && \text{(公理３)}
\end{aligned}
$$

公理１～公理５において，＋と•，および０と１を同時に交換したものも同じように成立している(互いに双対的).

公理１～公理５から導かれる関係において，＋と•，および０と１を同時に交換した関係も必ず成立する(双対性).

［定理］　$a+1=1, \quad a \bullet 0=0$

［証明］

$$
\begin{aligned}
a+1 &= a+(a+\overline{a}) && \text{(公理５)} \\
&= (a+a)+\overline{a} && \text{(公理１)} \\
&= a+\overline{a} && \text{(定理)} \\
&= 1 && \text{(公理５)}
\end{aligned}
$$

双対性より

$$a \bullet 0=0$$

も成り立つ.

［定理］

$a \bullet b = a$ ならば　$a + b = b$

逆に　$a + b = b$ ならば　$a \bullet b = a$

である.

［証明］

$a \bullet b = a$ ならば

$$
\begin{aligned}
a + b &= a \bullet b + b \\
&= b \bullet a + b \bullet 1 \\
&= b \bullet (a + 1) \\
&= b \bullet 1 \\
&= b
\end{aligned}
$$

$a+b=b$ ならば

$$
\begin{aligned}
a \bullet b &= a \bullet (a+b) \\
&= a \bullet a + a \bullet b \\
&= a + a \bullet b \\
&= a \bullet 1 + a \bullet b \\
&= a \bullet (1+b) \\
&= a \bullet 1 \\
&= a
\end{aligned}
$$

［定理］　aの補元$\overline{a}$は一意に決まる．

［証明］

aの任意の二つの補元を$\overline{a_1}, \overline{a_2}$とすると

$a \bullet \overline{a_1} = 0, \quad a + \overline{a_1} = 1, \; a \bullet \overline{a_2} = 0, \quad a + \overline{a_2} = 1$

$$
\begin{aligned}
\overline{a_1} &= \overline{a_1} \bullet 1 \\
&= \overline{a_1} \bullet (a + \overline{a_2}) \\
&= \overline{a_1} \bullet a + \overline{a_1} \bullet \overline{a_2} \\
&= \overline{a_1} \bullet \overline{a_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{a_2} &= \overline{a_2} \bullet 1 \\
&= \overline{a_2} \bullet (a + \overline{a_1}) \\
&= \overline{a_2} \bullet a + \overline{a_2} \bullet \overline{a_1} \\
&= \overline{a_2} \bullet \overline{a_1} \\
&= \overline{a_1} \bullet \overline{a_2}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \overline{a_1} = \overline{a_2}$$

すなわち，aの補元は一意に定まる．

［定理］　元$0, 1$はただ一つである.

［証明］

$0_{1}, 0_{2}$の２つが存在すると

$$0_{1} = 0_{1} + 0_{2} = 0_{2} + 0_{1} = 0_{2}$$

同様に$1_{1}, 1_{2}$の２つが存在すると

$$1_{1} = 1_{1} \bullet 1_{2} = 1_{2} \bullet 1_{1} = 1_{2}$$

$\therefore$　0と1はただ1つである.

［定理］ $\overline{\overline{a}} = a$

［証明］

aの補元を$\overline{a}$とすると

$a \bullet \overline{a} = 0, \quad a + \overline{a} = 1$

これは$\overline{a}$の補元がaであることを同時に示している．

しかし，補元はただ１つであるので，

$\overline{\overline{a}} = a$ である．

［定理］

$$a \bullet (a+b) = a + (a \bullet b) = a \qquad \text{（吸収律）}$$

［証明］

$$\begin{aligned} a \bullet (a+b) &= (a+0) \bullet (a+b) \\ &= a + (0 \bullet b) \\ &= a + 0 \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + (a \bullet b) &= (a \bullet 1) + (a \bullet b) \\ &= a \bullet (1+b) \\ &= a \bullet 1 \\ &= a \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a \bullet (a+b) = a + (a \bullet b) = a$$

［定理］

$$\overline{a+b}=\bar{a}\bullet\bar{b},\quad \overline{a\bullet b}=\bar{a}+\bar{b}$$

（ド•モルガンの法則）

［証明］

$(a+b)+\bar{a}\bullet\bar{b}=1$　かつ　$(a+b)\bullet(\bar{a}\bullet\bar{b})=$

を示すことにより $\overline{(a+b)}=\bar{a}\bullet\bar{b}$

を示す.

$$\begin{aligned}(a+b)+\bar{a}\bullet\bar{b}&=(a+b+\bar{a})\bullet(a+b+\bar{b})\\&=(b+1)\bullet(a+1)\\&=1\bullet1\\&=1\end{aligned}$$

$$(a+b)\bullet(\overline{a}\bullet\overline{b})=a\bullet(\overline{a}\bullet\overline{b})+b\bullet(\overline{a}\bullet\overline{b})$$

$$=(\overline{a}\bullet a)\bullet\overline{b}+\overline{a}\bullet(b\bullet\overline{b})$$

$$=0\bullet\overline{b}+\overline{a}\bullet 0$$

$$=0+0$$

$$=0$$

$$\therefore\quad \overline{a+b}=\overline{a}\bullet\overline{b}$$

双対性より

$$\overline{a\bullet b}=\overline{a}+\overline{b}$$

も成り立つ

2. 2 ブール代数の例

［例１］

$P=\{T,F\}$　P上の２項演算 "$\vee$", "$\wedge$"を

次のように定義する

$$
\begin{cases}
T \vee T = T \\
T \vee F = T \\
F \vee T = T \\
F \vee F = F
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
T \wedge T = T \\
T \wedge F = F \\
F \wedge T = F \\
F \wedge F = F
\end{cases}
$$

$\{T,F\}\times\{T,F\}\rightarrow\{T,F\}, \quad T:True \quad F:False$

この時 $\langle P,\vee,\wedge,F,T\rangle$はブール代数である

［証明］
（i）公理１（結合律）を満足することの証明

$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$
$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$
がすべての$a, b, c \in \{T, F\}$について成立すること を示す

① $a = F, b = F, c = F$の時
左辺＝$(F \vee F) \vee F$＝F
右辺＝$F \vee (F \vee F)$＝F　　$\therefore$ 左辺＝右辺

左辺＝$(F \wedge F) \wedge F$＝F
右辺＝$F \wedge (F \wedge F)$＝F　　$\therefore$ 左辺＝右辺

② $a = F, b = F, c = T$の時

左辺＝$(F \vee F) \vee T$＝T

右辺＝$F \vee (F \vee T)$＝T　　$\therefore$ 左辺＝右辺

左辺＝$(F \wedge F) \wedge T$＝F

右辺＝$F \wedge (F \wedge T)$＝F　　$\therefore$ 左辺＝右辺

同様に

③ $a = F, b = T, c = F$

④ $a = F, b = T, c = T$

⑤ $a = T, b = F, c = F$

⑥ $a = T, b = F, c = T$

⑦ $a = T, b = T, c = F$

⑧ $a = T, b = T, c = T$

についてもそれぞれ左辺＝右辺となる

ことが示せるので

公理１を満足することがわかる

(ii) 公理２（可換）を満足することの証明

$a+b=b+a, \quad a \bullet b=b \bullet a$

がすべての$a,b \in \{T,F\}$について成立することを示す

$\vee, \wedge$の定義より明らか

(iii) 公理３（零元，単位元）

$a+0=a, \quad a \bullet 1=a$

$\vee$に対してはFが零元となり

$\wedge$に対してはTが単位元となる

（iv）公理４（分配律）

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

がすべての$a, b, c \in \{T, F\}$について

成立することを示す

(i) と同様に証明できる

（v）公理５（補元）

$\overline{T} = F$, $\overline{F} = T$　と定義すると

$a = T$の時

$a \wedge \overline{a} = T \wedge F = F$

$a \vee \overline{a} = T \vee F = T$

$a = F$の時

$a \wedge \overline{a} = F \wedge T = F$

$a \vee \overline{a} = F \vee T = T$

よりTの補元はF,

Fの補元はTとなっている

［例２］

Aを任意の集合とするとき，2^A上の２項演算を "+"として "$\bigcup$", "•", として"$\bigcap$"を考え，
補元を普遍集合Aに対する補演算とすると，
$\left\langle 2^A, \bigcup, \bigcap, \phi, A \right\rangle$はブール代数（集合ブール代数）である．

［証明］

（i）公理１（結合律）

集合演算の定義より明らか

（ii）公理２（可換律）

集合演算の定義より明らか

（iii）公理３（零元，単位元）

$a \in 2^A$ の時

明らかに，$a \bigcup \phi = a$，$a \bigcap A = a$

（$\because A$は普遍集合）

（iv）公理４（分配律）

集合演算の定義より明らか

（v）公理５（補元）

$a \in 2^{A}$とする時,

$\overline{a} = A - a$ とすると

$a \cap \overline{a} = \phi$

$a \cup \overline{a} = A$

が成立する.

2. 3 ブール式とブール関数

○ ブール式

$\langle B, +, \bullet, 0, 1 \rangle$をブール代数とする

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$を値として$B$の要素をとる変数（ブール変数）とする

即ち, $x_i \in B \ (i = 1, \cdots, n)$

ブール式を次のように定義する

(再帰的定義)

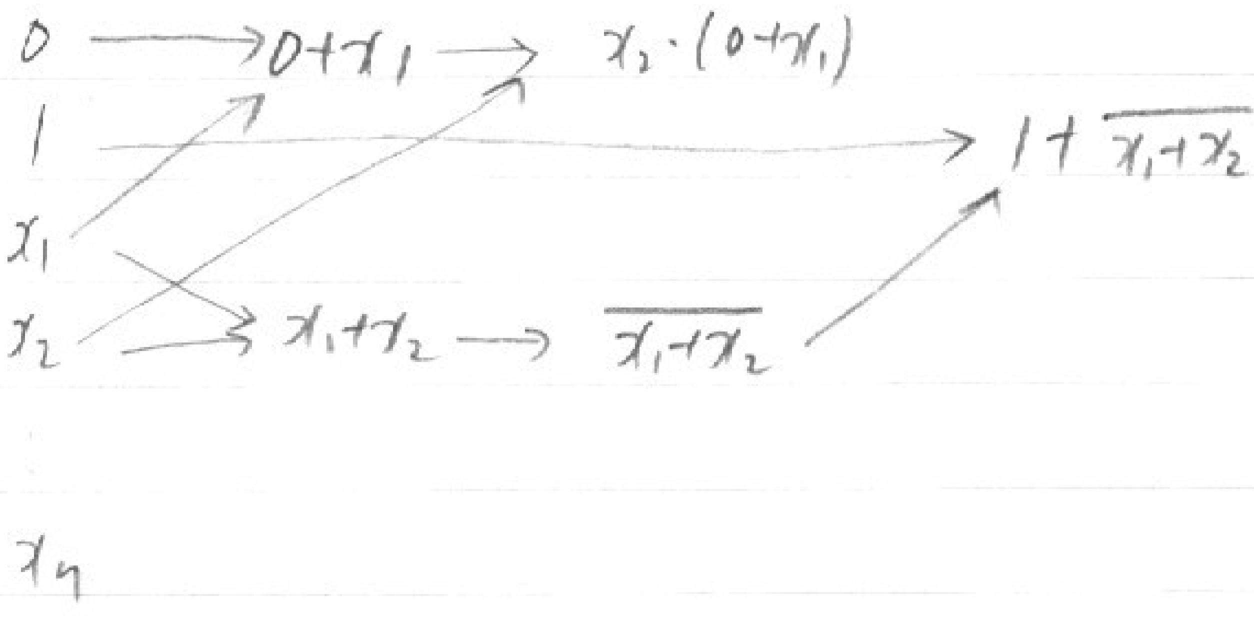
1） 0, 1はブール式である

2） $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$はブール式である

3） αがブール式ならば, $\overline{\alpha}$もブール式である

4） α, βがブール式ならば, $\alpha+\beta$, $\alpha \bullet \beta$ もブール式である

5） 1)–4) で作られるもののみがブール式である



○ ブール関数

変数$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$に$B$の

要素を代入するとブール式は

Bのある要素になる

$a, b \in B$ならば

$\bar{a},\ a+b,\ a \bullet b \in B$である

(Bは$\bar{\ }$, $+$, $\bullet$ の演算に関して

閉じている)

即ち，ブール式はB^nからBへの関数とみなせる

ブール式αが作る関数をf_αと書く

B^nからBへの関数のなかで，
ブール式により作られるものをブール関数という

(例)

$$\alpha = (x_1 + x_2) \bullet \overline{x}_3$$

$$f_\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \bullet \overline{x}_3$$

$B^3 \to B$への写像

○ ブール式を書く約束

1） 結合律より

$$(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$(x_1 \bullet x_2) \bullet x_3 = x_1 \bullet (x_2 \bullet x_3) = x_1 \bullet x_2 \bullet x_3$$

などカッコを省略してもよい

2） $\bullet$を＋より先に計算するように約束する即ち,

$$x_1 + x_2 \bullet x_3 = x_1 + (x_2 \bullet x_3) \neq (x_1 + x_2) \bullet x_3$$

3） 混乱が生じないカッコは
省略してもよい

4） 混乱が生じない限り,
$x_1 \bullet x_2$等は$x_1 x_2$と略記してもよい

○ 等価なブール式

α，βをブール式とするとき，α，βの各変数にどんなBの要素を代入しても$f_\alpha = f_\beta$となる時，αとβは等価であるといいα=βと書く

（例）

$$\alpha = (x_1 + \overline{x}_3)(\overline{x}_2 + x_3) + x_1 x_2$$

$$\beta = x_1 + \overline{x}_2\,\overline{x}_3$$

を考えると，これはα=βである

［証明］

式を変形して，一方から一方を導出する

$$\alpha = (x_1 + \overline{x}_3)(\overline{x}_2 + x_3) + x_1 x_2$$

$$= (x_1 + \overline{x}_3)\overline{x}_2 + (x_1 + \overline{x}_3)x_3 + x_1 x_2$$

$$= x_1 \overline{x}_2 + \overline{x}_3 \overline{x}_2 + x_1 x_3 + \overline{x}_3 x_3 + x_1 x_2$$

$$= x_1(\overline{x}_2 + x_2) + x_1 x_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_2$$

$$= x_1 + x_1 x_3 + \overline{x}_3 \overline{x}_2$$

$$= x_1 + \overline{x}_3 \overline{x}_2$$

$$= x_1 + \overline{x}_2 \overline{x}_3$$

$$= \beta$$

2.4 ブール関数（論理関数）の展開

○ リテラル(literal)

ブール変数（論理変数）および
その否定形

(例)　$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \cdots, \bar{x}_n$

○ 基本積(elementary conjunction)

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$からなるリテラルの積
(論理積）で，各x_iが１回ずつ現れるもの

(例)　$x_1 x_2$, $\bar{x}_1 x_2$,　$x_1 \bar{x}_2$,　$\bar{x}_1 \bar{x}_2$　（２変数)

○ 基本和(elementary disjunction)

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$からなるリテラルの和(論理和）で，各$x_i$が１回ずつ現れるもの

(例） $x_1 + x_2$, $\overline{x}_1 + x_2$, $x_1 + \overline{x}_2$, $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ （２変数)

○ 加法標準形

(disjunctive canonical form)

リテラルの論理積を論理和でつなげたもの

(例） $\overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \overline{x}_3 + x_2$

［定理］

任意のブール式に対して，それと等価な加法標準形をしたブール式が存在する

［証明］

与えられたブール式を加法標準形に変形するアルゴリズムを示すことにより証明する

（1） ド・モルガンの法則より $\bar{\ }$ を各変数の上に持ってくる

（2） $\bar{\bar{x}} = x$ を使う

（3） 分配律を使い，論理積の論理和の形にする

（4） 出来れば式を簡単にする

(例)

$$\overline{\overline{x_1+x_2}+x_3}$$

$$=\overline{\overline{x_1}\bullet\overline{x_2}+x_3}$$

$$=\overline{\overline{x_1}\bullet\overline{x_2}}\bullet\overline{x_3}$$

$$=\left(\overline{\overline{x_1}}+\overline{\overline{x_2}}\right)\bullet\overline{x_3}$$

$$=(x_1+x_2)\bullet\overline{x_3}$$

$$=x_1\bullet\overline{x_3}+x_2\bullet\overline{x_3}$$

$$=x_1\overline{x_3}+x_2\overline{x_3}$$

○ 乗法標準形

(conjunctive canonical form)

リテラルの論理和の論理積

（例）　$\left(\overline{x}_1 + x_2\right) \bullet \left(x_1 + \overline{x}_3\right)$

［定理］

任意のブール式に対して，それと等価な乗法標準形をしたブール式が存在する

［証明］

与えられたブール式を乗法標準形に変形するアルゴリズムを示すことにより証明する

(1)　与えられたブール式をαとし，$\overline{\alpha}$の加法標準形βを作る

(2)　$\alpha=\overline{\beta}$となるので，$\overline{\beta}$にド・モルガンの法則を適用する

（例）

$$\alpha = \overline{x_1 + x_2} + x_3$$

$$\overline{\alpha} = \overline{\overline{x_1 + x_2} + x_3}$$

$$= (x_1 + x_2)\overline{x_3}$$

$$= x_1\overline{x_3} + x_2\overline{x_3} = \beta$$

$$\overline{\beta} = \overline{x_1\overline{x_3} + x_2\overline{x_3}}$$

$$= \overline{x_1\overline{x_3}}\ \ \overline{x_2\overline{x_3}}$$

$$= (\overline{x_1} + x_3)(\overline{x_2} + x_3)$$

$$= \alpha$$

○　主加法標準形

(principal disjunctive canonicalform)

基本積の論理和

(例)

$$
\begin{aligned}
\alpha &= x + \bar{y}\,\bar{z} \\
&= x(y+\bar{y})(z+\bar{z}) + \bar{y}\,\bar{z}(x+\bar{x}) \\
&= (xy + x\bar{y})(z+\bar{z}) + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \\
&= xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\,\bar{z} + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z} \\
&= xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\,\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}
\end{aligned}
$$

○ 主乗法標準形

(principal conjunctive canonical form) 基本和の論理積

(例)

$$\alpha = x + \overline{y}\,\overline{z}$$

$$\overline{\alpha} = \overline{x + \overline{y}\,\overline{z}}$$

$$= \overline{x}(y + z)$$

$$= \overline{x}y + \overline{x}z$$

$$= \overline{x}y(z + \overline{z}) + \overline{x}z(y + \overline{y})$$

$$= \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z$$

$$= \overline{x}yz + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \overline{\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\,\bar{y}z} \\
&= \overline{\bar{x}yz}\ \ \overline{\bar{x}y\bar{z}}\ \ \overline{\bar{x}\,\bar{y}z} \\
&= (x + \bar{y} + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(x + y + \bar{z})
\end{aligned}
$$

○ ブール関数（論理関数）の
主加法標準形への展開

一変数論理関数を$\varphi(x)$とすると
次のことが成立する

$$\varphi(x)=\varphi(0)\overline{x}+\varphi(1)\,x$$

二変数論理関数の場合には

$$\varphi(x,y)=\varphi(0,0)\overline{x}\,\overline{y}+\varphi(0,1)\overline{x}y+\varphi(1,0)\,x\overline{y}+\varphi(1,1)\,xy$$

n変数論理関数に対しても同様の
ことが成り立つ

（例）

$$f(x, y, z) = x + \overline{y}\,\overline{z}$$ とすると

$$
\begin{aligned}
& f(x, y, z) \\
= \ & f(0,0,0)\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + f(0,0,1)\overline{x}\,\overline{y}z \\
& + f(0,1,0)\overline{x}y\overline{z} + f(0,1,1)\overline{x}yz \\
& + f(1,0,0)x\overline{y}\,\overline{z} + f(1,0,1)x\overline{y}z \\
& + f(1,1,0)xy\overline{z} + f(1,1,1)xyz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(x, y, z) \\
= \ & 1 \bullet \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + 0 \bullet \overline{x}\,\overline{y}z \\
&+ 0 \bullet \overline{x}y\overline{z} + 0 \bullet \overline{x}yz \\
&+ 1 \bullet x\overline{y}\,\overline{z} + 1 \bullet x\overline{y}z \\
&+ 1 \bullet xy\overline{z} + 1 \bullet xyz \\
= \ & \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz
\end{aligned}
$$