6．波動方程式

1. プリント p.31 のように辺の長さが L_x, L_y の長方形膜があり，方程式 (52) が成り立つとする。$t=0$ で $u(x,y,0)=x(L_x-x)y(L_y-y)$, $u_t(x,y,0)=0$ という条件の場合について解いてみよう。
   (a) $f(x)=x(L_x-x)$ を $\sin(m\pi x/L_x)$ の級数で表しなさい。
   (b) $g(y)=y(L_y-y)$ を $\sin(n\pi y/L_y)$ の級数で表しなさい。
   (c) 初速度が 0 なので，p.30 の式 (56) で $\sin\omega_{mn}t$ の項は 0，つまり係数 $b_{mn}=0$ になる。係数 a_{mn} は，$u(x,y,0)=f(x)g(y)$ の級数展開と式 (56) で $t=0$ とおいた式を比較して決めることができる。この方法で $u(x,y,t)$ の式を求めなさい。

2. 3次元極座標の方位角 θ, ϕ の方向に速さ v で進む，波長 λ の 3 次元の平面波を x, y, z の座標系で表す式を書きなさい。（ヒント：波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ を θ, ϕ, λ で表す。）

3. 1次元の場合を考える。振幅が等しくて，波数 k と角振動数 ω が少しだけ違う 2 つの波を次のように重ね合わせたものについて考える。

$$u(x,t)=A\cos(k_1x-\omega_1t)+A\cos(k_2x-\omega_2t)$$

   (a) 三角関数の公式を使って，コサインの積の形にまとめると，

$$u(x,t)=2A\cos(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(kx-\omega t)$$

   となることを示しなさい。ただし，$k=(k_1+k_2)/2$, $\omega=(\omega_1+\omega_2)/2$, $\Delta k=k_1-k_2$, $\Delta\omega=\omega_1-\omega_2$ とする。
   (b) $\Delta k \ll k$，$\Delta\omega \ll \omega$ のとき，波はどのようになるか，図を描いて説明しなさい。
   (c) $\cos(\frac{\Delta k}{2}x-\frac{\Delta\omega}{2}t)$ の波が進む速さと $\cos(kx-\omega t)$ の波が進む速さは，それぞれどのような式で表せるか，説明しなさい。
   (d) 次の 2 つの場合について，(c) で求めた 2 種類の速さを比べなさい。ただし，v と α は定数とする。
      i. $\omega=vk$
      ii. $\omega=vk+\alpha k^3$