

情報理論 第2回レポート課題

提出方法 A4 のレポート用紙に答案を記述し，次回講義の際に提出すること．なお，答案はコピーをとって保管すること．

基本問題 以下の問に全て答えよ．

1. (計算問題 1:独立な確率変数の場合) 確率変数 X, Y に対して，同時確率分布が

$$P_{X,Y}(0,0) = pq, \quad P_{X,Y}(0,1) = p(1-q), \quad P_{X,Y}(1,0) = (1-p)q, \quad P_{X,Y}(1,1) = (1-p)(1-q),$$

で与えられるものとする ($0 \leq p, q \leq 1$)．このときに，次の値を計算しなさい．なお，解答には二元エントロピー関数 $h_2(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$ を用いてもよい．

- (a) 同時エントロピー $H(X, Y)$
 - (b) エントロピー $H(X), H(Y)$
 - (c) 条件付きエントロピー $H(X|Y), H(Y|X)$
 - (d) 相互情報量 $I(X; Y)$
 - (e) 以上の結果を考察しなさい．
2. (二元対称通信路の相互情報量) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ とする．周辺確率 $p_X(0) = q, p_X(1) = 1 - q$ と条件付き確率 $p_{Y|X}(0|0) = 1 - \epsilon, p_{Y|X}(0|1) = \epsilon, p_{Y|X}(1|0) = \epsilon, p_{Y|X}(1|1) = 1 - \epsilon$ が与えられた時に，以下の問に答えなさい．
- (a) 同時確率 $P_{X,Y}(0,0), P_{X,Y}(0,1), P_{X,Y}(1,0), P_{X,Y}(1,1)$ を計算しなさい．
(Hint: 条件付き確率の性質を用いよ．)
 - (b) 同時エントロピー $H(X, Y)$ を与えなさい．なお，解答には二元エントロピー関数 $h_2(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$ を用いなさい．
 - (c) 周辺確率 $P_Y(0), P_Y(1)$ を与えなさい．
 - (d) エントロピー $H(X), H(Y)$ を与えなさい．
 - (e) 条件付きエントロピー $H(Y|X), H(X|Y)$ を与えなさい．
 - (f) 相互情報量 $I(X; Y)$ を与えなさい．
 - (g) 以上の解答を元にして，以下の等式が成立していることを確認しなさい．
 - $H(X, Y) = H(Y|X) + H(X)$
3. (エントロピーの加法性) エントロピーの加法性 $H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y)$ を証明しなさい．
4. (条件付きエントロピーの上限と下限) 次の不等式を証明しなさい．

$$0 \leq H(X|Y) \leq H(X) \tag{1}$$

発展問題 余力のあるものは以下に回答しなさい．

5. (二元消失通信路の相互情報量) $\mathcal{X} = \{0, 1\}, \mathcal{Y} = \{0, 1, ?\}$ とする．周辺確率 $p_X(0) = q, p_X(1) = 1 - q$ と条件付き確率 $p_{Y|X}(0|0) = 1 - \epsilon, p_{Y|X}(?|0) = \epsilon, p_{Y|X}(1|0) = 0, p_{Y|X}(1|1) = 1 - \epsilon, p_{Y|X}(?|1) = \epsilon, p_{Y|X}(0|1) = 0$ が与えられた時に，以下の問に答えなさい．
- (a) 同時確率 $P_{X,Y}(0,0), P_{X,Y}(0,1), P_{X,Y}(0,?), P_{X,Y}(1,0), P_{X,Y}(1,1), P_{X,Y}(1,?)$ を与えなさい．
 - (b) 周辺確率 $P_Y(0), P_Y(1), P_Y(?)$ を与えなさい．
 - (c) エントロピー $H(Y)$ を与えなさい．
 - (d) 条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を与えなさい．
 - (e) 相互情報量 $I(X; Y)$ を与えなさい．
 - (f) 与えられた ϵ に対して，相互情報量を最大にする q とその時の相互情報量を示しなさい．
6. (Z 通信路の相互情報量) $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ とする．周辺確率 $p_X(0) = q, p_X(1) = 1 - q$ と条件付き確率 $p_{Y|X}(0|0) = 1, p_{Y|X}(0|1) = \epsilon, p_{Y|X}(1|0) = 0, p_{Y|X}(1|1) = 1 - \epsilon$ が与えられた時に，以下の問に答えなさい．

- (a) エントロピー $H(Y)$ を与えなさい .
- (b) 条件付きエントロピー $H(Y|X)$ を与えなさい .
- (c) 相互情報量 $I(X;Y)$ を与えなさい .
- (d) 与えられた ϵ に対して , 相互情報量を最大にする q とその時の相互情報量を示しなさい . (Hint: 解答は簡潔な式ではありません)