

0 「物理と情報のための応用数学 IV」の内容

この授業では、フーリエ級数、フーリエ変換、ラプラス変換、常微分方程式、偏微分方程式の基礎を学ぶ。

1 フーリエ級数

$\sin x$ や $\cos x$ は周期 2π の周期関数である。 $\sin nx$ や $\cos nx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) では周期が $2\pi/n$ になるが、 x が 2π 変化すれば元通りになることには違いがないので、周期 2π の関数の一つと見ることもできる。これらの関数に適当な係数を掛けて足し合わせて、周期 2π の関数を表そうというのが、フーリエ級数の発想である。

1.1 三角関数の直交性

関数の組 $\sin nx, \cos nx$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) について考える。 $\sin 0x$ は 0 なので除くと、具体的には $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots$ である。これらの関数の積を積分すると次のようになる。(ただし $m, n = 1, 2, 3, \dots$ 。 δ_{mn} はクロネッカーのデルタと呼ばれる記号で、 $m = n$ のとき 1、 $m \neq n$ のとき 0。)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \delta_{mn} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \delta_{mn} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2 \quad (6)$$

つまり、これらの関数は他の関数と掛けて積分すると 0 になる。これを「関数が直交する」という。ベクトルの場合、直交座標系で表

した成分を掛けて足し合わせた内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$ のとき直交するという。関数の場合には、それぞれの x での関数の値がベクトルの成分に相当すると思えば、2つの関数を掛けて積分したものがベクトルの内積に相当する。そこで、同じ直交という言葉を使う。

1.2 フーリエ級数

詳しい話は後回しにして、とりあえず周期 2π の周期関数 $f(x)$ を係数 a_n, b_n を使って

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (7)$$

と表せたとしよう。このように表すことをフーリエ級数展開と呼び、右辺の級数をフーリエ級数と呼ぶ。両辺に $\sin mx, \cos mx$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) を掛けて積分すると、前節の関係より $n = m$ の項だけが残って、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \pi a_m \quad (8)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = \pi b_m \quad (9)$$

となる。また、そのまま積分すれば、

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2}a_0 \cdot 2\pi = \pi a_0 \quad (10)$$

となる。結局、係数 a_n, b_n は、 a_0 も含めて

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (11)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (12)$$

と表せる。 $\cos nx, \sin nx$ の平均値は 0 なので、式 (7) の定数項 $a_0/2$ は $f(x)$ の平均値という意味を持つ。

被積分関数の周期は 2π なので、積分区間の幅が 2π であれば、上限と下限を任意にずらしてもかまわないことに注意しよう。例えば、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (14)$$

でも同じ係数が求められる。

$f(x)$ が偶関数であれば $b_n = 0$ となって、 $\cos nx$ の重ね合わせ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (15)$$

となる。これをフーリエ余弦展開と呼ぶ。また、 $f(x)$ が奇関数であれば $a_n = 0$ となって、 $\sin nx$ の重ね合わせ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (16)$$

となる。これをフーリエ正弦展開と呼ぶ。

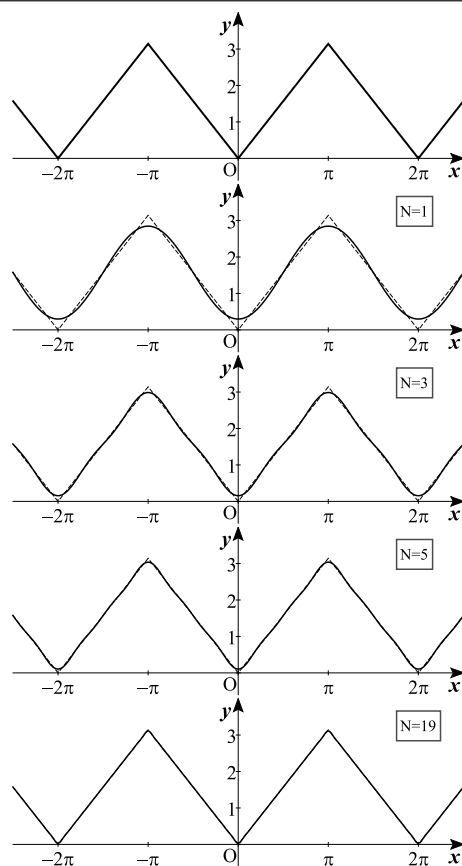


図1 $|x|$ をつなぎ合わせた周期関数

1.3 具体例

例1 図1の最上段のように

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x < \pi) \quad (17)$$

をつなぎ合わせた関数の場合。偶関数なので、式(15)の形で表せる。係数を計算してみると、 n が偶数の係数は $a_0 = \pi$ 以外は0になり、 n が奇数の係数は $a_n = -4/\pi n^2$ になる。従って、級数展開は

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \cdots \right) \quad (18)$$

となる。図1の下の方の4つの図は級数の和を有限個で打ち切った場合のグラフで、 N は n の最大値を表している。 N が小さくても(項の数が少なくても)かなりよく近似できていることがわかる。

例2 図2の最上段のように

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x < 0 \text{ のとき}), \\ 1 & (0 \leq x < \pi \text{ のとき}). \end{cases} \quad (19)$$

をつなぎ合わせた関数の場合。 $f(x) - 1/2$ は奇関数なので、式(16)の形で表せる。係数 b_n は n が偶数のとき0、奇数のとき $2/n\pi$ になる。従って、級数展開は

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots \right) \quad (20)$$

となる。図2でも下の4つの図は級数の和を有限個で打ち切ったグラフで、 N は n の最大値を表している。この場合は、 N を大きくしても近似がなかなか良くならない。また、関数が不連続に変化する $x = m\pi$ (m は整数) の付近に「とげ」のようなピークがいつまでも残っている。これらは、不連続な関数をフーリエ級数で展開した時に一般的に見られる。「とげ」のようなピークができることは「ギブスの現象」呼ばれる。

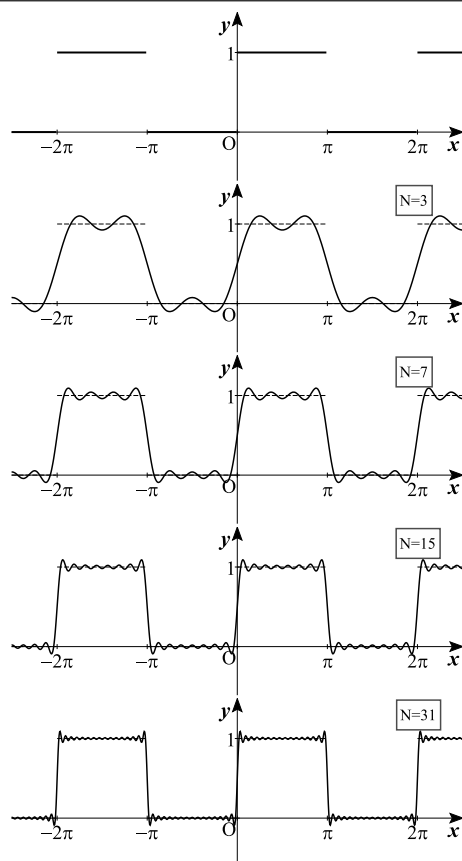


図2 矩形波

1.4 フーリエ級数の収束性

式 (7) は、右辺のフーリエ級数が左辺の関数 $f(x)$ に収束するということを意味している。どのような条件のときに収束し、どのように収束するのだろうか。まずいくつかの言葉を定義しておく。

定義 1 「区分的に連続」: 有限個の点で有限の飛びがある以外は連続な関数を「区分的に連続」とであるという。(例: $\tan x$ は無限大の飛びがあるので、区分的に連続ではない。)

定義 2 「区分的に滑らか」: $f(x)$ とその 1 階導関数 $f'(x)$ の両方が区分的に連続であるとき、 $f(x)$ は「区分的に滑らか」とであるという。(図 1, 図 2 の関数は、区分的に滑らかな関数の例である。)

定義 3 $f_N(x)$: フーリエ級数を $n \leq N$ までの

有限個の項で打ち切った関数

$$f_N(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + \sum_{n=1}^N b_n \sin nx \quad (21)$$

定義 4 「関数列 $f_N(x)$ の各点収束」: 任意の正の数 ε に対して、ある N_0 が決まり、 $N \geq N_0$ ならば $|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon$ となる。ただし、 x によって N_0 が異なってよい。このとき、各点収束するという。

定義 5 「関数列 $f_N(x)$ の一様収束」: 任意の正の数 ε に対して、ある N_0 が決まり、 $N \geq N_0$ ならば任意の x に対して $|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon$ となる。このとき、一様収束するという。各点収束よりも条件が厳しい。

定義 6 「関数列 $f_N(x)$ の平均収束」:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - f_N(x)\}^2 dx = 0 \quad (22)$$

となるとき、平均収束するという。

フーリエ級数の収束性については、次のような定理が知られている。

定理 1: 連続な周期関数のフーリエ級数は一様収束する。

定理 2: 不連続点を持つ区分的に滑らかな周期関数のフーリエ級数は、連続な部分では各点収束する。しかし一様収束はしない。また、不連続点 x_0 では平均値 $\frac{1}{2}\{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\}$ に収束する。ここで、 $f(x_0 - 0)$ は x_0 に x の小さい方から近づいたときの極限值、 $f(x_0 + 0)$ は大きい方から近づいたときの極限值を意味する。

定理 3: 区分的に滑らかな周期関数のフーリエ級数は平均収束する。

確かに、図 1 の連続な関数の場合には、 N を大きくするにつれて全領域で一様に近似が良くなっていく。それに対して、図 2 のよう

に「不連続点を持つ区分的に滑らかな関数」の場合は、いつまでも「とげ」が残る。それぞれの点 x では、 N を大きくするほど近似が良くなり、「とげ」の幅は狭くなっていく。けれども「とげ」の高さは 0 にはならず、関数の飛び $f(x_0-0) - f(x_0+0)$ の約 9% に収束することが示されている。そのため各点収束はするが、一様収束はしないことになる。さらに、 N を大きくすれば「とげ」の幅はいくらでも狭くできるので、積分への寄与は 0 にできて定理 3 が成り立つ。また、不連続点では、フーリエ級数は平均値をとっている。

1.5 フーリエ級数の性質

1.5.1 関数の滑らかさと収束の早さの関係

周期関数 $f(x)$ は $(l-1)$ 階の導関数までが連続で、 l 階の導関数が区分的に連続だとする。このとき、 $|a_n| \leq \frac{M}{n^l}$, $|b_n| \leq \frac{M}{n^l}$ という関係が成り立つ。ここで、 $M = 2\sqrt{\pi} \left(\left| \frac{d^l f}{dx^l} \right| \right)$ の最大値である。 l が大きいほど高次のフーリエ係数は早く減少する。つまり、関数が滑らかなほどフーリエ級数の収束は早くなるということになる。

1.5.2 項別積分

区分的に連続な周期関数 $f(x)$ を 0 から x まで積分して得られる関数

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (23)$$

を考える。 $f(x)$ が、

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (24)$$

とフーリエ級数展開できるとき、右辺のそれぞれの項を 0 から x まで積分（項別積分）したも

のが $F(x)$ に等しくなる。つまり、

$$F(x) = \frac{1}{2}a_0x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} (\cos nx - 1) \quad (25)$$

となる。実は、 $f(x)$ のフーリエ級数展開 (24) 式が収束しない場合でも、 $f(x)$ が区分的に連続ならば、この関係が成り立つ。 $F(x) - a_0x/2$ は連続な周期関数で、その導関数 $f(x) - a_0/2$ は区分的に連続である。つまり、 $F(x) - a_0x/2$ は区分的に滑らかな周期関数なのでフーリエ級数展開できる。

1.5.3 項別微分

周期関数 $f(x)$ が連続で、1 階導関数 $f'(x)$ が区分的に滑らかであるとする。このとき、 $f'(x)$ はフーリエ級数に展開できて、式 (24) の各項を別々に微分（項別微分）した

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx \quad (26)$$

になる。例えば、p.2 の例 1 は項別微分できるが、例 2 は不連続な関数なので項別微分できない。

1.5.4 最良近似式

式 (21) と類似の関数

$$\phi_N(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^N \alpha_n \cos nx + \sum_{n=1}^N \beta_n \sin nx \quad (27)$$

を考える。係数 α_n, β_n をいろいろ動かしてみたときに、

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - \phi_N(x)\}^2 dx \quad (28)$$

が最小になるのは、 $\phi_N(x) = f_N(x)$ の時である。つまり、フーリエ級数は最小二乗法の意味で最良の近似になっている。また、係数が N

によらないことも特徴である。つまり、近似の程度を変えても係数を再計算しなくて良い。

1.5.5 ベッセルの不等式, パーシバルの等式

前節の定理 3「区分的に滑らかな周期関数のフーリエ級数は平均収束する」が成り立つので, 式 (22) に式 (7) を代入して計算すると,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right\} \quad (29)$$

を示せる。これをパーシバルの等式という。

N が有限の場合には, 右辺が小さくなるので,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx \geq \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right\} \quad (30)$$

となる。これをベッセルの不等式という。

1.6 複素フーリエ級数

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (31)$$

を使うと,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (32)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (33)$$

x を nx に置き換えれば,

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad (34)$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad (35)$$

となる。これをフーリエ級数の式 (7) に代入して整理すると

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right\} \quad (36)$$

となる。 $c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ とおくと

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (37)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (38)$$

となる。これを複素フーリエ級数という。 $f(x)$ が実数値をとる場合, c_n と c_{-n} は複素共役の関係になる。

1.7 周期が $2L$ の場合のフーリエ級数

ここまでは, 周期が 2π の場合を考えてきた。周期が $2L$ の場合には, 周期が $2L$ の \cos や \sin を重ね合わせればよい。

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (39)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (40)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (41)$$

また, 複素フーリエ級数は,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \quad (42)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (43)$$

となる。

2 フーリエ変換

2.1 フーリエ級数からフーリエ変換へ

周期関数の周期 $2L$ を無限に大きくした極限を考えると、非周期関数とみることができる。このとき、フーリエ級数はどのような形になるだろうか。周期 $2L$ の周期関数のフーリエ級数の式 (42) に式 (43) の変数 x を s に変えたものを代入し、 $k_n = n\pi/L$, $\Delta k = k_n - k_{n-1} = \pi/L$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(s) e^{-in\pi s/L} ds \right] \cdot e^{in\pi x/L} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-L}^L f(s) e^{-in\pi s/L} ds \right] \cdot e^{in\pi x/L} \frac{\pi}{L} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-L}^L f(s) e^{-ik_n s} ds \right] \cdot e^{ik_n x} \Delta k \quad (1) \end{aligned}$$

となる。 $L \rightarrow \infty$ の極限をとると、 $\Delta k \rightarrow 0$ となり、もう一つの変数 k について積分した式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-iks} ds \right\} e^{ikx} dk \quad (2)$$

が成り立ちそうである。数学的に厳密な議論によると、関数 $f(x)$ が区分的に滑らかで、絶対可積分 ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ が有限) ならば、式 (2) が成り立つ。これを「フーリエの積分公式」という。フーリエ級数の時と同様に、不連続点では平均値 $\frac{1}{2} \{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\}$ に収束する。式 (2) を分けて書き、変数 s を x に戻すと、

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (4)$$

となる。式 (3) は関数 $f(x)$ を別の関数 $F(k)$ に変換していると見ることができるので、フーリエ変換と呼ばれる。また、求められた関数 $F(k)$ のことも、 $f(x)$ のフーリエ変換と呼ぶ。式 (4) は $F(k)$ を $f(x)$ に戻す変換なので、フーリエ逆変換と呼ぶ。 2π の分け方によって、

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (6)$$

という定義もあるし、

$$F(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (7)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (8)$$

という定義もある。また、式 (2) で $k = 2\pi k'$ と変数変換すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi k' s} ds \right\} \cdot e^{i2\pi k' x} 2\pi dk' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-2\pi i k' s} ds \right\} \cdot e^{2\pi i k' x} dk' \quad (9) \end{aligned}$$

となる。これを分けて書いて、変数 s を x に戻し、変数 k' を k に戻すと次のように定義することもできる。

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx \quad (10)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{2\pi i k x} dk \quad (11)$$

このように様々な定義があり、テキストによって異なるので注意が必要である。このプリントでは、式 (3), (4) を採用する。

2.1.1 フーリエ変換の意味すること

式 (4) は, $f(x)$ をいろいろな e^{ikx} の重ね合わせで表していると見ることができる。重ね合わせるときの係数が $F(k)$ で, それを $f(x)$ に応じて決める式が (3) である。 e^{ikx} は周期 (波長) が $2\pi/k$ なので, k は区間 2π あたりの波の数になる。そこで k のことを波数と呼ぶ。

本質的には同じことだが, f の変数が時間 t の場合は, k の代わりに ω を使って

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (12)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (13)$$

と書く。 ω は角振動数だが, フーリエ変換の教科書では便宜的に周波数と呼ぶことも多い。 $F(\omega)$ は $f(t)$ の中に成分 $e^{i\omega t}$ がどのように含まれているかを表している。

2.1.2 余弦変換と正弦変換

$f(x)$ が偶関数であれば, 式 (3) は,

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx \\ &\quad - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx \quad (14) \\ &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx \quad (15) \end{aligned}$$

となる。また, 上の式から $F(k) = F(-k)$ つまり $F(k)$ も偶関数であるので, 式 (4) は,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \cos kx dk \\ &\quad + i \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \sin kx dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \cos kx dk \quad (16) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) \cos kx dk \quad (17)$$

となる。式 (15), (17) をフーリエ余弦変換およびその逆変換と呼ぶ。

$f(x)$ が奇関数の場合に同様な計算をすると,

$$F(k) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx \quad (18)$$

$$= -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx \quad (19)$$

となり, $F(k)$ も奇関数になることがわかる。したがって,

$$f(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \sin kx dk \quad (20)$$

$$= \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) \sin kx dk \quad (21)$$

となる。式 (19), (21) をフーリエ正弦変換およびその逆変換と呼ぶ。

係数を逆変換の方にまとめると次のようにわかりやすい式になる。

・ $f(x)$ が偶関数の場合: フーリエ余弦変換

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx \quad (22)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) \cos kx dk \quad (23)$$

・ $f(x)$ が奇関数の場合: フーリエ正弦変換

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx \quad (24)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) \sin kx dk \quad (25)$$

このプリントでは, こちらの定義を採用する。

2.2 フーリエ変換の具体例

いくつかの関数の例を挙げると, フーリエ変換は次のようになる。

$$f(x) = e^{-|x|}, \quad F(k) = \frac{2}{1+k^2} \quad (26)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < -1, 1 < x) \end{cases}, \quad F(k) = 2 \frac{\sin k}{k} \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad F(k) = \pi e^{-|k|} \quad (28)$$

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad F(k) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{k^2}{4}} \quad (29)$$

2.3 フーリエ変換の基本的な性質

2.3.1 実関数のフーリエ変換

関数 $f(x)$ が実数値をとる場合、式 (3) の複素共役をとると、

$$\begin{aligned} F(k)^* &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{+ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(-k)x} dx \\ &= F(-k) \end{aligned} \quad (30)$$

であることがわかる。つまり、 $F(k)$ と $F(-k)$ は複素共役になる。

2.3.2 重ね合わせの原理

フーリエ変換の操作を \mathcal{F} 、逆フーリエ変換の操作を \mathcal{F}^{-1} で表すことがよくある。例えば、 $F = \mathcal{F}[f]$ 、 $f = \mathcal{F}^{-1}[F]$ と書ける。この表現を使うと、 a, b を定数、 f, g を関数として

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g] \quad (31)$$

が成り立つことは、フーリエ変換の定義から明らかである。2つの関数を定数倍して足し合わせたもののフーリエ変換は、それぞれをフーリエ変換してから定数倍して足し合わせたものに等しい。この性質は、フーリエ変換についての重ね合わせの原理と呼ばれる。

2.3.3 2回のフーリエ変換

関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(k)$ とする。フーリエ逆変換の式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (32)$$

において、 x を $-x$ で置き換えると

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] \end{aligned} \quad (33)$$

上の式の1行目の右辺の積分は、 e^{-ikx} を掛けて積分しているので、 $F(k) = \mathcal{F}[f]$ のフーリエ変換と見ることができる。ただし、式 (3) と比べると、 k と x の役割が入れ替わっている

ので、変換した結果は x の関数になる。結局、フーリエ変換を2回行くと

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] = 2\pi f(-x) \quad (34)$$

となる。

2.3.4 変数の定数倍

実数 $a > 0$ に対して、 $y = ax$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\frac{k}{a}y} dy \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

実数 $a < 0$ に対して、 $y = ax$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(ax)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(y) e^{-i\frac{k}{a}y} dy \\ &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\frac{k}{a}y} dy \\ &= \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right) \end{aligned} \quad (36)$$

結局、実数 $a \neq 0$ に対して

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right) \quad (37)$$

が成り立つ。

2.3.5 変数のシフト

実数 b に対して、 $y = x + b$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x+b)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+b) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ik(y-b)} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{iky} dy \cdot e^{ikb} \\ &= e^{ikb} F(k) \end{aligned} \quad (38)$$

式 (37) と合わせると、次のようになる。

$$\mathcal{F}[f(ax+b)] = \frac{1}{|a|} e^{ikb} F\left(\frac{k}{a}\right) \quad (39)$$

2.3.6 (周) 波数シフト

$f(x)$ に e^{ik_0x} (ただし k_0 は実数) を掛けたもののフーリエ変換は,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(x)e^{ik_0x}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-k_0)x} dx \\ &= F(k-k_0)\end{aligned}\quad (40)$$

となって, 元のフーリエ変換 $F(k)$ と比べて k_0 だけシフトする。これを波数シフトという。同じことだが, 変数が t と ω の場合には,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)e^{i\omega_0t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt \\ &= F(\omega-\omega_0)\end{aligned}\quad (41)$$

となる。これを周波数シフトという。

2.3.7 微分

ある関数を微分したもののフーリエ変換が存在する場合には, 次の関係が成り立つ。

$$\mathcal{F}[f'(x)] = ik\mathcal{F}[f(x)] \quad (42)$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \mathcal{F}[f(x)] \quad (43)$$

1 番目の式は, 部分積分によって次のように証明できる。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx} dx \\ &= [f(x)e^{-ikx}]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} (-ik)f(x)e^{-ikx} dx \\ &= 0 + ik\mathcal{F}[f(x)]\end{aligned}\quad (44)$$

これを繰り返せば, 2 番目の式が得られる。

2.3.8 積分

関数 $f(x)$ が $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0$ を満たす場合 (これは, 積分したものが絶対可積分になるための条件), $f(x)$ を積分した $\int_{-\infty}^x f(s)ds$ のフーリエ変換は, 部分積分によって次のようになる

ことがわかる。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^x f(s)ds\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^x f(s)ds\right) e^{-ikx} dx \\ &= \left[\left(\int_{-\infty}^x f(s)ds\right) \frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ikx}}{-ik} dx \\ &= \frac{1}{ik} \mathcal{F}[f(x)]\end{aligned}\quad (45)$$

2.3.9 合成積 (convolution)

2 つの関数 $f(x), g(x)$ に対して,

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds \quad (46)$$

を合成積またはたたみこみという。順序を入れ替えても同じになることは次のように示せる。

$$\begin{aligned}g * f &= \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(x-s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x-s')f(s')ds' \\ &= f * g\end{aligned}\quad (47)$$

ただし, $s' = x - s$ とおいた。合成積のフーリエ変換については次の関係が成り立つ。

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \quad (48)$$

$$\mathcal{F}[fg] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] \quad (49)$$

つまり, 合成積のフーリエ変換は, フーリエ変換の積になり, 積のフーリエ変換は, フーリエ変換の合成積になる。1 番目の関係の証明は次

の通り。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f * g] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(x-s)ds \right\} e^{-ikx} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(x-s)e^{-ikx} dx \right\} ds \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ik(t+s)} dt \right\} ds \\
 &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-iks} ds \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-ikt} dt \right\} \\
 &= \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]
 \end{aligned}$$

途中で変数変換 $t = x - s$ を用いている。2 番目の関係は、 $F = \mathcal{F}[f], G = \mathcal{F}[g]$ という記号を用いて次のように示せる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[fg] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-ikx} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k')e^{ik'x} dk' \right\} e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-k')x} dx \right\} dk' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k')F(k-k')dk' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]
 \end{aligned}$$

2.3.10 パーシバルの等式

式 (49) で $g(x) = f(x), k = 0$ の場合を考え。左辺と右辺はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 \text{左辺} &= \mathcal{F}[f^2] = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx \\
 \text{右辺} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k')F(-k')dk' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k')|^2 dk'
 \end{aligned}$$

となる。最後のところで式 (30) を使った。 k' を k に書き直すと

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk. \quad (50)$$

この関係は、フーリエ級数のパーシバルの等式に相当するもので、同じパーシバルの等式とい

う名前で呼ばれる。

例えば、抵抗 R に電流 $I(t)$ が流れたときに発生するジュール熱は、 $I(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を使って

$$R \int_{-\infty}^{\infty} I^2(t)dt = R \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (51)$$

と表せる。周波数ごとの熱の発生は $|F(\omega)|^2$ に比例するので、 $|F(\omega)|^2$ のことをエネルギースペクトルと呼ぶことがある。

2.3.11 自己相関関数とウィーナー・ヒンチンの定理

ある関数 $f(x)$ に対して、

$$R_{ff}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)f(s-x)ds \quad (52)$$

を自己相関関数という。 $f(x)$ という関数を全体として見た時に、 x だけ離れたところでの関数の値がどのような関係になっているかを表すもので、合成積を使うと $R_{ff}(x) = f(x)*f(-x)$ と書ける。フーリエ変換を取ると、

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[R_{ff}(x)] &= \mathcal{F}[f(x) * f(-x)] \\
 &= \mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[f(-x)] \\
 &= F(k)F(k)^* \\
 &= |F(k)|^2
 \end{aligned} \quad (53)$$

となる。つまり、 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(k)$ の絶対値の 2 乗は自己相関関数のフーリエ変換に等しい。これをウィーナー・ヒンチンの定理という。

3 ラプラス変換

3.1 ラプラス変換と逆変換

フーリエ変換が存在するためには，絶対可積分（ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ が有限）というかなり厳しい条件が付いていた。フーリエ変換が使えない場合でも， $x \rightarrow \infty$ で非常に速く 0 に収束する e^{-ax} （ただし $a > 0$ ）を掛けた関数ならば変換できそうだというのがラプラス変換のアイデアである。（任意の自然数 n に対して $x \rightarrow \infty$ で $x^n e^{-ax} \rightarrow 0$ ）

以下では， $0 \leq x$ で定義された実関数 $f(x)$ について考える。 $x < 0$ の領域では $f(x) = 0$ とする。 $f(x)$ に e^{-ax} を掛けたもののフーリエ変換は，

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ax} e^{-ikx} dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx \quad (\text{ただし } s = a + ik) \end{aligned} \quad (1)$$

と書ける。右辺の積分が存在するとき，複素数 s の関数と見て，関数 $f(x)$ のラプラス変換とよぶ。

$$L(s) = \mathcal{L}[f] = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx \quad (2)$$

ある $s_0 = a_0 + ik_0$ に対してラプラス変換が存在するならば， $a > a_0$ の $s = a + ik$ に対しても存在することは明らかだろう。ラプラス変換が存在する a の下限 α を収束座標という。

式 (2) のフーリエ逆変換をとると

$$f(x) e^{-ax} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s) e^{ikx} dk$$

となり，両辺に e^{ax} を掛けると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(s) e^{(a+ik)x} dk \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} L(s) e^{sx} ds \end{aligned}$$

これは元の関数に戻す変換なのでラプラス逆変

換という。

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[L] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} L(s) e^{sx} ds \quad (3)$$

フーリエ変換の場合と同様，不連続点 x_0 では平均値 $\frac{1}{2} \{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\}$ になる。

3.2 代表的な関数のラプラス変換

$f(x)$	$L(s)$	収束座標
1	$\frac{1}{s}$	0
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	a
$\sin \omega x$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	0
$\cos \omega x$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	0
$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	a
$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$ a $
$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$ a $
$x \sin \omega x$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	0
$x \cos \omega x$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	0
$e^{ax} \sin \omega x$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$	a
$e^{ax} \cos \omega x$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	a
$U(x-a) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{s} e^{-as}$	0
$\delta(x-a) \quad (a > 0)$	e^{-as}	$-\infty$

ここで， $U(x)$ は， $x < 0$ で 0， $0 \leq x$ で 1 となる階段関数（ヘビサイド関数）である。デルタ関数 $\delta(x-a)$ については後で述べる。

3.3 ラプラス変換の性質

実数の定数を a, b ，関数を $f(x), g(x)$ ，そのラプラス変換を $F(s), G(s)$ とする。フーリエ級数の場合と同様に，次のような関係式が成り立つ。

$$\mathcal{L}[f+g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g] = F + G \quad (4)$$

$$\mathcal{L}[af] = a\mathcal{L}[f] = aF \quad (5)$$

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g] = aF + bG \quad (6)$$

$$\mathcal{L}[f(ax)] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7)$$

$$\mathcal{L}[e^{ax}f] = \mathcal{L}[f](s-a) = F(s-a) \quad (8)$$

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0) = sF(s) - f(+0) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}] &= s^n F(s) - f(+0)s^{n-1} - f'(+0)s^{n-2} \\ &\quad - \dots - f^{(n-1)}(+0) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (11)$$

$$\mathcal{L}[xf(x)] = -\frac{dF(s)}{ds} \quad (12)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \int_s^\infty F(s)ds \quad (13)$$

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[g * f] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g] = FG \quad (14)$$

ラプラス変換の場合は $0 \leq x$ の領域を考えるので、合成積（たたみこみ）の積分範囲も $0 \leq x$ に取って、次の式で定義する。

$$f * g = \int_0^\infty f(t)g(x-t)dt \quad (15)$$

この場合も $f * g = g * f$ が成り立つ。

4 デルタ関数

4.1 デルタ関数の定義

何回でも微分可能で $|x| \rightarrow \infty$ で $\frac{1}{|x^n|}$ (n は自然数) よりも速く 0 になる関数を「滑らかで性質の良い関数」という。さて、任意の滑らかで性質の良い関数 $\phi(x)$ に掛けて積分したときに

$$\int_{-\infty}^\infty \phi(x)\delta(x)dx = \phi(0) \quad (1)$$

となるような関数をデルタ関数という。

$\phi(x) = 1$ とすれば

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(x)dx = 1 \quad (2)$$

となる。 $(\phi(x) = 1$ は滑らかで性質の良い関数ではないが、積分は存在して 1 になる。) このような関数は普通関数ではなく、超関数と呼ばれる。

デルタ関数は次のように、いろいろな関数の極限として表せる。

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} & (|x| \leq \varepsilon) \\ 0 & (x < -\varepsilon, \varepsilon < x) \end{cases} \quad (3)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{(x/\varepsilon)} \quad (4)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{(x/\varepsilon)^2} \quad (5)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{1}{(x/\varepsilon)^2 + 1} \quad (6)$$

(ローレンツ関数)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon}\right) \quad (\text{ガウス関数}) \quad (7)$$

大雑把に言うと、デルタ関数は $x = 0$ にピークを持つ偶関数の積分値を 1 に保ったまま、幅を無限に狭くしたものである。

階段関数（ヘビサイド関数）

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (0 \leq x) \end{cases} \quad (8)$$

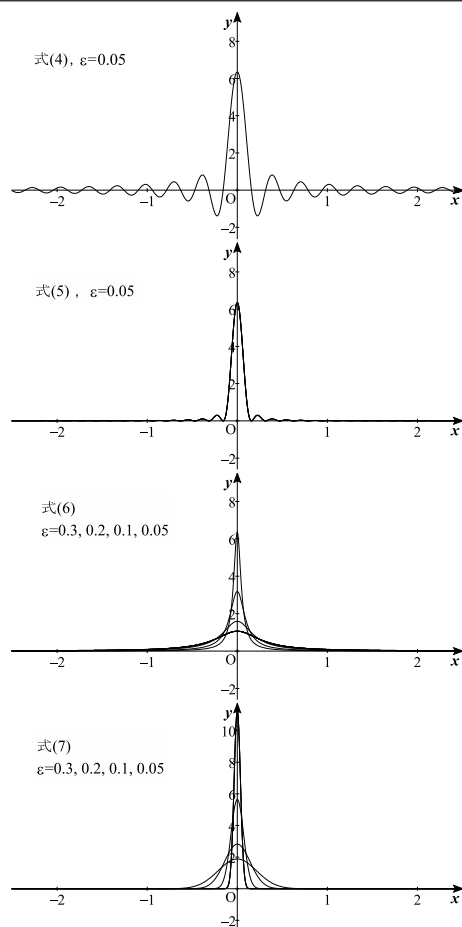


図 3 $\varepsilon \rightarrow 0$ でデルタ関数になる式 (4),(5),(6),(7) のグラフ

は $x=0$ で不連続なので、普通の微分はできない。もし微分 $U'(x)$ が考えられるとすると

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} U'(x) \phi(x) dx \\
 &= [U(x) \phi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \phi'(x) dx \\
 &= - \int_0^{\infty} \phi'(x) dx \\
 &= -\phi(\infty) + \phi(0) \\
 &= \phi(0)
 \end{aligned}$$

となるので、階段関数の微分がデルタ関数であることがわかる。

4.2 デルタ関数の性質

デルタ関数とその微分（実は何回でも微分できる）について次のような性質が成り立つ。

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (9)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (|a| \neq 0) \quad (10)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n) \quad (x_n \text{ は } g(x) \text{ の零点。 } g'(x_n) \neq 0 \text{ とする。}) \quad (11)$$

$$x\delta(x) = 0 \quad (12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -f'(0) \quad (13)$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \quad (14)$$

4.3 デルタ関数のフーリエ変換, ラプラス変換

デルタ関数のフーリエ変換とラプラス変換は、次のようになる。

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = 1 \quad (15)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \quad (16)$$

$$\mathcal{L}[\delta(x)] = \int_0^{\infty} \delta(x) e^{-sx} dx = 1 \quad (17)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{sx} ds \quad (18)$$

フーリエ変換のいろいろな性質はデルタ関数についても成り立つ。例えば、

$$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(x)] = (ik)^n \quad (19)$$

$$\mathcal{F}[x^n] = 2\pi i^n \delta^{(n)}(k) \quad (20)$$

$$\mathcal{F}[e^{ik_0 x}] = 2\pi \delta(k - k_0) \quad (21)$$

$$\mathcal{F}[\sin k_0 x] = -i\pi \{\delta(k - k_0) - \delta(k + k_0)\} \quad (22)$$

$$\mathcal{F}[\cos k_0 x] = \pi \{\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)\} \quad (23)$$

などの関係を導ける。

デルタ関数を周期 $2L$ で並べた関数

$$\delta_{2L}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2nL) \quad (24)$$

もよく出てくる。複素フーリエ級数の係数を計算すると、

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \delta(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2L} \quad (25)$$

となるので、 $\delta_{2L}(x)$ は次のようにフーリエ級数展開できる。

$$\delta_{2L}(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n\pi x}{L}} \quad (26)$$

$$= \frac{1}{2L} + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi x}{L} \quad (27)$$

確認のために、複素フーリエ級数の $n = -N$ から $n = N$ までの和を計算してみると

$$\frac{1}{2L} \sum_{n=-N}^N e^{i\frac{n\pi x}{L}} = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2L}\pi x\right)}{2L \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)} \quad (28)$$

となる。 $|x| \ll L$ の範囲に限定すると、分母は πx と近似できる。 $\pi(2N+1)/2L \equiv 1/\varepsilon$ とおくと、 $N \rightarrow \infty$ で $\varepsilon \rightarrow 0$ なので、

$$\frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n\pi x}{L}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} \quad (29)$$

(ただし $|x| \ll L$ の範囲でのみ成立)

となることがわかる。これは 4.1(4) 式と同じなので原点に中心を持つデルタ関数である。 x の範囲を限定しなければ、左辺は周期 $2L$ の周期関数なので、デルタ関数を周期 $2L$ で並べたものになることがわかる。

5 常微分方程式

1 変数の関数とその導関数についての方程式を常微分方程式という。次のように言葉を定義しておく。

- 次数：最高階数の導関数の次数（何乗かということ）
- 階数：方程式に含まれる導関数の最高階数（何階微分まで含まれているかということ）
- 線形：方程式が関数とその導関数についての 1 次式になっている場合

例えば、変数 x の関数 $y(x)$ について、

$$y''^3 + 2y' + 3 = 0 \quad (\text{2 階 3 次常微分方程式})$$

$$y'' + P(x)y = Q(x) \quad (\text{2 階線形常微分方程式})$$

である。力学の例では、

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg \quad (\text{重力による落下運動}) \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (\text{ばねによるおもりの振動}) \quad (2)$$

のように時間 t の関数である位置 (z, x など) を方程式を解いて求めることが多い。

あらゆる場合に適用できる一般的な解き方は無い。ここでは、基本的ないくつかの型について解き方を説明する。

5.1 単純に積分できる場合

一番簡単なタイプの方程式は、

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \quad (3)$$

である。これは積分を繰り返して解くことができる。

例えば、 a を定数として 1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = a \quad (4)$$

は、不定積分すれば $y(x)$ が求められて

$$y = ax + c \quad (5)$$

となる。ここで c は積分定数であり、 c を選ぶことによってすべての解を表すことができる。このような解を一般解という。(n 階の微分方程式の一般解は n 個の任意定数を含む。)

同様に、2 階微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = a \quad (6)$$

の場合は、不定積分を 2 回繰り返して一般解

$$\frac{dy}{dx} = ax + c_1 \quad (7)$$

$$y = \frac{a}{2}x^2 + c_1x + c_2 \quad (8)$$

を求められる (c_1, c_2 は積分定数)。この場合は、2 階微分方程式なので、一般解は 2 個の任意定数を含んでいる。重力による落下運動の方程式 (1) はこのタイプである。 y, x, a の代わりに $z, t, -g$ になっていることに注意すると、

$$\frac{dz}{dt} = -gt + c_1 \quad (9)$$

$$z = -\frac{g}{2}t^2 + c_1t + c_2 \quad (10)$$

となる。物理学 I や力学 I で学んだように、位置の時間微分は速度になる。上の式に $t = 0$ を代入すると、 c_1 は $t = 0$ での速度、 c_2 は $t = 0$ での位置になる。そこで c_1 の代わりに v_0 、 c_2 の代わりに z_0 と書くことにすれば、

$$v_z = \frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \quad (11)$$

$$z = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + z_0 \quad (12)$$

が得られる。条件に応じて v_0 と z_0 を選べば、すべての場合を表せることは明らかだろう。

5.2 1 階微分方程式

5.2.1 変数分離型

次の形の微分方程式を変数分離型という。

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y) \quad (13)$$

変数分離型の方程式は、以下のように両辺を $Y(y)$ で割り、 x について積分して解くことが

できる。

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{dy}{dx} = X(x) \quad (14)$$

$$\int \frac{1}{Y(y)} dy = \int X(x) dx + c \quad (15)$$

これが一般解で、 c は積分定数 (任意定数) である。

例: $y' = \mu y$ (ただし μ は定数, $y \neq 0$)

このとき、 $X(x) = \mu, Y(y) = y$ とおける。

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \mu dx + c$$

$$\log |y| = \mu x + c$$

$$|y| = e^{\mu x + c} = e^c e^{\mu x}$$

$$y = \pm e^c e^{\mu x}$$

$$y = A e^{\mu x} \quad \text{ここで } A = \pm e^c$$

5.2.2 同次型

次の形の微分方程式を同次型という。

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (16)$$

同次型の例としては、次のようなものがある。

例 1: $y' = -x/y$

例 2: $y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{1 + (y/x)^2}{y/x}$

例 2 は同次型でないように見えるが、分子分母を x^2 で割ると最右辺のようになる。 x と y の次数の合計が、分子分母のどの項でも同じ (この場合は 2 次) になっているのがポイントである。

同次型方程式を解くには、 $u = y/x$ において、 u についての方程式に変形する。 $y = xu$ なので、これを x について微分すると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(xu) = x \frac{du}{dx} + u$$

これを式 (16) に代入すると

$$x \frac{du}{dx} + u = f(u)$$

これを整理すれば、

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(f(u) - u) \quad (17)$$

となる。 $f(u) - u \neq 0$ なら変数分離型なので、前節の方法で解くことができる。

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{1}{x} dx + c = \log |x| + c \quad (18)$$

結局、解は

$$x = A \exp \left\{ \int \frac{du}{f(u) - u} \right\},$$

ここで $A = \pm e^{-c}$, $u = y/x$ (19)

によって得られる。また、 $f(u_0) - u_0 = 0$ となる u_0 があれば、 $u = u_0$ で式 (17) は $du/dx = 0$ つまり、 $u = y/x = \text{一定} = u_0$ なので $y = u_0 x$ も解になる。

例 1: $y' = -x/y$

変数分離型として解く方が簡単だが、ここでは同次型として解いてみよう。 $f(u) = -1/u$ を式 (19) に入れて計算すると

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{f(u) - u} &= \int \frac{1}{-\frac{1}{u} - u} du = -\frac{1}{2} \log(u^2 + 1) \\ x &= A(u^2 + 1)^{-1/2} \\ x^2 + y^2 &= A^2 \end{aligned}$$

となる。

5.2.3 1 階線形微分方程式

次の形の微分方程式を 1 階線形非斉次微分方程式といい、 $q(x)$ を非斉次項という。

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x) = 0 \quad (20)$$

$q(x) = 0$ の場合、つまり

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad (21)$$

を斉次方程式という。(斉次の代わりに「同次」という言い方もあり、同次型と紛らわしい。) 斉次方程式は、変数分離型なので次のように解くことができる。

$$\int \frac{dy}{y} = \log |y| = - \int p(x) dx + c \quad (22)$$

$$y = A \exp \left(- \int p(x) dx \right), \quad A = \pm e^c \quad (23)$$

非斉次型方程式 (20) を解くには、上の斉次型の解 (23) の係数 A を関数 $a(x)$ で置き換えるとうまく解けることがわかっている。これを定数変化法という。

$$y = a(x) \exp \left(- \int p(x) dx \right) \equiv a(x) z(x) \quad (24)$$

を方程式 (20) に代入すると、 $y' = az' + a'z = a(-pz) + a'z = -py + a'z$ なので、

$$\begin{aligned} -py + a'z + py + q &= 0 \\ a'z + q &= 0 \\ \frac{da}{dx} &= -\frac{q(x)}{z(x)} \\ a(x) &= - \int \frac{q(x)}{z(x)} dx + c' \end{aligned} \quad (25)$$

となる。以上をまとめると次のような手順になる。

1. $z(x) = \exp \left(- \int p(x) dx \right)$ を求める。
2. $a(x) = - \int \frac{q(x)}{z(x)} dx + c'$ を求める。
3. $y = a(x)z(x) = -z(x) \int \frac{q(x)}{z(x)} dx + c'z(x)$ を計算する。

第 2 項は斉次方程式の一般解である。第 1 項は非斉次項 $q(x)$ があるために出てきた項であり、非斉次方程式の一つの解 (特解) になっている。

例: 空気抵抗があるときの雨滴の運動

運動方程式は次のような形になる。

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \mu v \quad (26)$$

$$\frac{dv}{dt} + \lambda v - g = 0, \text{ ただし } \lambda = \frac{\mu}{m} \quad (27)$$

$v \leftrightarrow y, t \leftrightarrow x, p \leftrightarrow \lambda, q \leftrightarrow -g$ という対応関係になる。上で説明した手順で計算すると、

$$z(t) = \exp \left(- \int \lambda dt \right) = e^{-\lambda t} \quad (28)$$

$$a(t) = - \int -g e^{\lambda t} dx + c' = \frac{g}{\lambda} e^{\lambda t} + c' \quad (29)$$

となり、結局、次の解が得られる。

$$v(t) = a(t)z(t) = \frac{g}{\lambda} + c'e^{-\lambda t} \quad (30)$$

第2項は斉次方程式の一般解になっている。第1項は非斉次方程式の特解であり、 $t \rightarrow \infty$ で速度が一定になったときの値（終端速度）になっている。

5.2.4 完全微分型

次の形の微分方程式を考えよう。

$$Q(x, y) \frac{dy}{dx} + P(x, y) = 0 \quad (31)$$

両辺に dx を掛けると

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (32)$$

となる。

さて、 x と y の関数 $\Phi(x, y)$ を考える。位置を少しだけずらしたときの関数の変化 $d\Phi$ は次のように近似できる。

$$\begin{aligned} d\Phi &= \Phi(x + dx, y + dy) - \Phi(x, y) \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (33)$$

この $d\Phi$ を $\Phi(x, y)$ の全微分という。式 (32) と比較して、

$$P(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (34)$$

であれば、式 (32) は、

$$\begin{aligned} Q(x, y)dy + P(x, y)dx \\ = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = d\Phi = 0 \end{aligned}$$

のように $\Phi(x, y)$ の全微分で表せるので完全微分型という。このとき、解は

$$\Phi(x, y) = c \text{ (定数)} \quad (35)$$

で与えられる。

別の見方で式 (34) を見てみよう。ベクトル場の x 成分が $P(x, y)$ 、 y 成分が $Q(x, y)$ だと思えば、式 (34) は $\Phi(x, y)$ の勾配 (gradient) がベクトル場を与えること、つまり $\Phi(x, y)$ は

このベクトル場のポテンシャルだという式になっている。ポテンシャルが存在するための必要十分条件は、物理数学 I で習ったように回転 (rotation) が 0 になることである。従って、完全微分型であるための必要十分条件は、

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (36)$$

である。ポテンシャル $\Phi(x, y)$ は基準点 (x_0, y_0) から (x, y) まで適当な経路に沿っての次の積分によって与えられる。

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^x P dx + \int_{y_0}^y Q dy + \Phi_0 \quad (37)$$

ただし、 Φ_0 は定数で $\Phi(x_0, y_0)$ である。始点と終点と同じであれば、途中の経路の選び方によらないことは保証されている。

$$\text{例: } (3x + 4y) \frac{dy}{dx} + (2x + 3y) = 0$$

$P(x, y) = 2x + 3y, Q(x, y) = 3x + 4y$ なので、 $\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x = 3$ が成り立つ。 $(x_0, y_0) \rightarrow (x, y_0) \rightarrow (x, y)$ という経路で積分すると、

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \int_{x_0}^x (2x + 3y_0) dx + \int_{y_0}^y (3x + 4y) dy + \Phi_0 \\ &= [x^2 + 3y_0 x]_{x_0}^x + [3xy + 2y^2]_{y_0}^y \\ &= x^2 + 3xy + 2y^2 - (x_0^2 + 3x_0 y_0 + 2y_0^2) \end{aligned}$$

が得られる。解は $\Phi(x, y) = c$ (定数) で与えられるので、

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = c + (x_0^2 + 3x_0 y_0 + 2y_0^2)$$

となる。右辺は定数になるので c' とおくと、解は

$$x^2 + 3xy + 2y^2 = c'$$

となることがわかる。また、方程式を次のように変形して解くこともできる。

$$\begin{aligned} (2x + 3y)dx + (3x + 4y)dy &= 0 \\ 2x dx + (3y dx + 3x dy) + 4y dy &= 0 \\ d(x^2 + 3xy + 2y^2) &= 0 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 &= c' \end{aligned}$$

この変形では、例えば $3ydx + 3xdy = d(3xy)$ というように、式 (33) の関係を逆に使っている。

式 (32) が完全微分型でないときでも、適当な関数 $\mu(x, y)$ を掛けて

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad (38)$$

を完全微分型にできる場合がある。このとき、 $\mu(x, y)$ を積分因子と呼ぶ。積分因子がどのような場合にどのようにして求められるかについての詳しい話は省略する。

5.3 2階微分方程式

5.3.1 定数係数の2階線形微分方程式

$r(x)$ を与えられた関数、 p, q を定数として、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x) \quad (39)$$

を定数係数の2階線形微分方程式とよぶ。 $r(x) = 0$ の場合、

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0 \quad (40)$$

は斉次方程式と呼ばれる。一方、 $r(x) \neq 0$ の場合は非斉次方程式と呼ばれる。

5.3.2 定数係数2階線形斉次方程式の解き方

方程式 (40) は次のようにして解くことができる。 $y = e^{\lambda x}$ を方程式に代入すると、

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0 \quad (41)$$

となる。 $e^{\lambda x} \neq 0$ なので、

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (42)$$

が成り立たなければならない。これを特性方程式という。特性方程式（今の場合は2次方程式）が2つの解 λ_1, λ_2 を持てば、任意定数を C_1, C_2 として一般解は、

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (43)$$

と表される。 $e^{\lambda_1 x}$ と $e^{\lambda_2 x}$ を基本解と呼ぶ。一般解はそれらの一次結合になっている。

$p^2 - 4q = 0$ で特性方程式が重根 $\lambda = -p/2$ を持つ場合は、定数変化法を用いて $y = C(x)e^{\lambda x}$ を方程式 (40) に代入してみる。

$$\{C'' + (2\lambda + p)C' + (\lambda^2 + p\lambda + q)C\} e^{\lambda x} = 0 \quad (44)$$

条件から、中括弧の中の第2項と第3項は0になるので、 $C''(x) = 0$ となる。任意定数を C_1, C_2 として、 $C(x) = C_1 + C_2 x$ と書けるので一般解は、

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x} = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \quad (45)$$

となる。この場合も、一般解は2つの基本解 $e^{\lambda x}$ と $x e^{\lambda x}$ の一次結合になっている。（以上のような解法は2階に限らず、定数係数の線形微分方程式に一般的に適用できる。）

5.3.3 定数係数2階線形非斉次方程式

定数係数2階線形斉次方程式の一般解 (43) と (45) はどちらも、

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (46)$$

という形になっている。非斉次方程式 (39) の一般解を作るには、任意定数を含まない一つの解 $Y(x)$ （特解または特殊解という）を見つけて、

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + Y(x) \quad (47)$$

とすればよい。この式は任意定数を2個含み、方程式 (39) を満たす。（線形の微分方程式では一般的に、【非斉次方程式の一般解】＝【斉次方程式の一般解】＋【非斉次方程式の特解】という関係が成り立つ。）

特解 $Y(x)$ を作るには、この場合も定数変化法が使える。

$$Y(x) = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x) \quad (48)$$

と置いて、方程式 (39) を満たすような

$z_1(x), z_2(x)$ を求めると,

こういう難しいのはテストに出ない

$$z_1(x) = \frac{-\int y_2(x)e^{px}r(x)dx}{y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0)} \quad (49)$$

$$z_2(x) = \frac{\int y_1(x)e^{px}r(x)dx}{y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0)} \quad (50)$$

となる。この式を導くのは難しいが、丁寧に計算すれば、方程式 (39) を満たすことは確かめられる。

一般的にこのような方法で特解を求められるが、場合によっては特解の形が予想できることもある。例えば $y'' - y = \sin x$ の場合、 $y = A \sin x$ になりそうなのは簡単にわかる。たとえば $y = \sin x$ が答えだろう。あとは、方程式を満たすように係数 A を決めればよい。

係数 p, q が変数 (というよりは x の関数) になった変数係数 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \quad (51)$$

の一般的な解法はない。いろいろな工夫がされているが、ここでは扱わない。

5.4 連立微分方程式の初歩

図 4 のように、質量 m のおもり 2 個をばね定数 k の 3 つのばねでつないだ系の振動を考える。このような振動を連成振動という。つり合いの位置からの変位を x_1, x_2 とする。それ

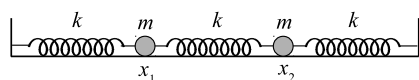


図 4 3 つのばねと 2 つのおもりの連成振動

ぞれのおもりに働く力を考えると、運動方程式は次のようになる。

$$m \frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \quad (52)$$

$$m \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \quad (53)$$

$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, x_2 = A_2 e^{i\omega t}$ という形の解を仮定してみよう。方程式に代入して整理すると、係

数 A_1, A_2 について

$$(-m\omega^2 + 2k)A_1 - kA_2 = 0 \quad (54)$$

$$-kA_1 + (-m\omega^2 + 2k)A_2 = 0 \quad (55)$$

という方程式が得られる。この 2 つから得られる解が等しくなって、 $A_1 = A_2 = 0$ 以外の解を持つためには、

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{-m\omega^2 + 2k}{k} = \frac{k}{-m\omega^2 + 2k} \quad (56)$$

でなければならない。これから、 ω についての方程式

$$(-m\omega^2 + 2k)^2 = k^2 \quad (57)$$

が得られる。この方程式を解くと

$$\omega^2 = \frac{3k}{m}, \quad \frac{k}{m} \equiv \omega_1^2, \quad \omega_2^2 \quad (58)$$

という 2 つの ω が求まる。行列を使うと、式 (54), (55) は

$$\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (59)$$

と表せる。この式は、行列 $\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix}$ の固有値が $m\omega^2$ で、固有ベクトルが $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ であることを意味する。物理と情報のための基礎数学 III で学んだように、この行列の固有値 $m\omega^2$ は固有方程式

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \quad (60)$$

から求められる。これは、式 (57) と同等である。

$\omega^2 = 3k/m$ を式 (56) に代入すると、 $A_1 = -A_2$ したがって、 $x_1 = -x_2$ となる。これは、図 5(a) のように、おもり 1 とおもり 2 が逆位相で振動することを意味する。一方、 $\omega^2 = k/m$ を式 (56) に代入すると、 $A_1 = A_2$ したがって、 $x_1 = x_2$ となる。これは、図 5(b) のように、お

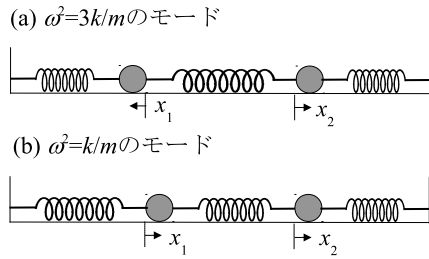


図5 2つのモードの振動の様子

もり1とおもり2が同位相で振動することを意味する。

2つのモードを重ね合わせて実数部を取ると次のような一般解が得られる。

$$x_1 = B \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_1\right) + C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_2\right) \quad (61)$$

$$x_2 = -B \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \phi_1\right) + C \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_2\right) \quad (62)$$

任意定数は B, C, ϕ_1, ϕ_2 の4個あるので、おもり1と2の位置と初速度の初期条件4つを満たすことができる。

もっと一般的には、おもりとばねの個数を増やしたり、質量やばね定数を一つ一つ変化させた場合が考えられる。そのような問題も原理的には同様に解くことができる。

5.5 ラプラス変換による常微分方程式の解き方

ラプラス変換は常微分方程式を解くために利用できる。定数係数の2階線形非斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x) \quad (63)$$

を例にとって説明しよう。この方程式のラプラス変換をとる。 $y(x)$ のラプラス変換を $Y(s)$, $r(x)$ のラプラス変換を $R(s)$ とする。p.12 の

ラプラス変換の性質 (9),(10) を使うと、

$$\{s^2Y - y(0)s - y'(0)\} + p\{sY - y(0)\} + qY = R \quad (64)$$

これを Y について解くと

$$Y = \frac{R + (s+p)y(0) + y'(0)}{s^2 + ps + q} \quad (65)$$

となる。これを逆変換して、元の方程式の解 $y(x)$ を求めるのがラプラス変換による解法である。うまくいくかどうかは、ラプラス変換と逆変換が計算できるかどうかによる。

例えば、

$$\begin{aligned} \text{方程式: } & \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \sin x, \\ \text{初期条件: } & y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

の場合、p.11 の表から $\sin x$ のラプラス変換は $1/(s^2 + 1)$ なので

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{(s^2 + 2s + 1)(s^2 + 1)} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2(s+i)(s-i)} \\ &= \frac{1/2}{(s+1)^2} + \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/4}{s+i} + \frac{-1/4}{s-i} \end{aligned} \quad (67)$$

と部分分数に展開し、p.11 の表を使って逆変換すると、次のように解が求められる。

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}xe^{-x} + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{4}e^{-ix} - \frac{1}{4}e^{ix} \\ &= \frac{1}{2}(xe^{-x} + e^{-x}) - \frac{1}{2}\cos x \end{aligned} \quad (68)$$

同じ方程式で、初期条件 $y(0), y'(0)$ が0でない場合には、

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{(s^2 + 2s + 1)(s^2 + 1)} \\ &\quad + \frac{(s+p)y(0) + y'(0)}{s^2 + 2s + 1} \\ &= \frac{1/2 + y(0) + y'(0)}{(s+1)^2} + \frac{1/2 + y(0)}{s+1} \\ &\quad + \frac{-1/4}{s+i} + \frac{-1/4}{s-i} \end{aligned} \quad (69)$$

と部分分数展開できて、解は

$$y = \left(\frac{1}{2} + y(0) + y'(0) \right) x e^{-x} + \left(\frac{1}{2} + y(0) \right) e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x \quad (70)$$

となる。

6 偏微分と偏微分方程式の例

6.1 偏微分の復習

1 変数の関数 $u(x)$ の微分 (の操作) は次のように定義される。

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

その結果得られるのは x の関数で導関数と呼ばれる。これは、 x の変化に対する関数の値の変化率を表し、グラフでは接線の傾きになる。

2 変数の関数 $u(x, y)$ の場合には、同様な操作

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \quad (3)$$

を考え、それぞれ x についての偏微分、 y についての偏微分という。得られる関数を偏導関数といい、 x 軸方向と y 軸方向に動いたときの関数の値の変化率を表す。

x について偏微分するときは、 y を止めておくので、 y は定数だとみなして普通に x について微分すれば良い。 y について偏微分するときは、逆に x は定数だとみなして y について微分すれば良い。例えば、 $u(x, y) = x^2 y^3$ の場合、 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3$ 、 $\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 y^2$ となる。

偏微分を次の例のように添え字で表すことがよくある。この書き方にも慣れてほしい。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u_x, & \frac{\partial u}{\partial y} &= u_y \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= u_{xx}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= u_{xy}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= u_{yy} \end{aligned}$$

また、ラプラシアン

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2 \text{ 次元の場合}) \quad (4)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3 \text{ 次元の場合}) \quad (5)$$

は非常に重要な微分演算子なのでここで確認し

ておく。例えば、3次元では

$$\begin{aligned}\Delta u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\end{aligned}\quad (6)$$

という意味になる。

6.2 偏微分方程式、分類と具体例

例えば、ある大きさを持つ物体の温度は、場所によっても違おうし、時間的にも変化するだろう。この場合、温度 T は位置 x, y, z と時間 t の関数、つまり $T = u(x, y, z, t)$ という4変数の関数になる。ある点の温度がまわりよりも低ければ、まわりから熱が流れ込み、時間が経つと温度は上がるだろう。温度の時間変化は時間 t についての微分で表され、まわりの温度との比較は位置 x, y, z についての微分（具体的にはラプラシアン）で表される。物体中での熱の流れの法則に基いて現象を方程式で表すと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u \quad (7)$$

という熱伝導方程式が導かれる（ κ は熱拡散率と呼ばれる定数）。この方程式を解いて唯一の解を求めるためには、適当な条件が必要になる。例えば時刻 $t = 0$ での温度分布 $u(x, y, z, 0)$ （初期条件）と任意の時刻での表面温度（境界条件）を指定すれば、それ以降（ $t > 0$ ）の u が決まりそうである。

常微分方程式と同様に偏微分方程式についても次の用語を使う。

- 階数：方程式に含まれる偏導関数の最高階数
- 線形・非線形：方程式が関数とその偏導関数についての1次式になっている場合が線形、そうでない場合が非線形
- 斉次・非斉次：未知関数とその偏導関数を含まない項がない場合が斉次、ある場合が非斉次

この授業で扱う主な方程式としては、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u \quad (\text{熱伝導方程式}) \quad (8)$$

$$\Delta u = 0 \quad (\text{ラプラス方程式}) \quad (9)$$

$$\Delta u = f \quad (\text{ポアソン方程式, ただし } f \text{ は与えられた関数}) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u \quad (\text{波動方程式, } v \text{ は速度}) \quad (11)$$

がある。分類としては、どれも2階線形偏微分方程式である。ポアソン方程式だけが非斉次で、残りの3つは斉次方程式である。

非線形の偏微分方程式を解くのは格段に難しい話になるのでここでは扱わない。例えば、Korteweg-de Vries 方程式（KdV 方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad (12)$$

からは形状が安定なソリトン（孤立波）と呼ばれる解が出てくるなど、興味深い話題が多い。

6.3 偏微分方程式の一般解

2変数の関数 $u(x, y)$ について、最も簡単な偏微分方程式は

$$u_x = 0 \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ のこと} \right) \quad (13)$$

である。この解は簡単にわかるように、 $u(x, y) = g(y)$ である（ただし $g(y)$ は y の任意関数）。方程式の解はすべてこの形になるので、 $u(x, y) = g(y)$ がこの方程式の一般解である。1階常微分方程式の一般解は任意定数を1個含んでいた。これに対して、1階偏微分方程式の一般解は任意関数を1つ含む。解となる関数のグループがはるかに大きいと言ってもよい。

偏微分方程式

$$u_{xy} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \text{ のこと} \right) \quad (14)$$

の場合は、 $u(x, y) = f(x) + g(y)$ が一般解である。2階偏微分方程式なので、一般解は2つの任意関数 $f(x), g(y)$ を含んでいる。

上の 2 つの例では一般解が簡単にわかったが、これは例外である。偏微分方程式では一般解が求められることは少なく、与えられた条件に適合するある一つの解（特解または特殊解）を求める場合が多い。

7 1 階偏微分方程式

次の形の 1 階偏微分方程式を考える。

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u) \quad (1)$$

$a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u)$ は与えられた関数である。例としては、

$$xu_x + 2yu_y = 0 \quad (2)$$

$$au_x + bu_y = 1 \quad (a, b \text{ は定数}) \quad (3)$$

$$u_x + uu_y = u^2 \quad (4)$$

などがある。 u_x, u_y については線形だが、 u については非線形でもよい。このタイプの方程式は準線形とよばれる。

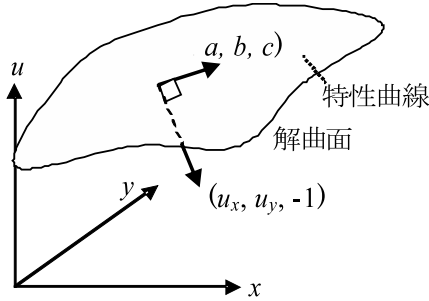


図 6 解曲面, $(u_x, u_y, -1), (a, b, c)$ の関係

さて、 (x, y, u) の空間に解 $u(x, y)$ のグラフを描くと曲面になるので、これを解曲面という。解曲面の上で少しだけ動いたとき、つまり (x, y, u) から $(x + dx, y + dy, u + du)$ に動いたとき、

$$du = u_x dx + u_y dy \quad (5)$$

$$u_x dx + u_y dy - 1 du = 0 \quad (6)$$

という関係がある。ベクトル (dx, dy, du) は解曲面上での任意の微小変位なので、この式は

$(u_x, u_y, -1)$ が解曲面の法線ベクトルであることを意味する。また、方程式 (1) を

$$au_x + bu_y - 1c = 0 \quad (7)$$

と書き直せば、解曲面の法線ベクトル $(u_x, u_y, -1)$ とベクトル (a, b, c) が直交すること、つまり、図 6 のようにベクトル (a, b, c) は解曲面に接することがわかる。

そこで、電場ベクトルに対する電気力線と同じように、曲線の接線方向が各点でのベクトル (a, b, c) の方向になるような特性曲線というものを考える。特性曲線上での微小変位 (dx, dy, du) は (a, b, c) の定数倍なので、

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)} = ds \quad (8)$$

という方程式が特性曲線を決める方程式である。ここで、 s は曲線に沿って変化する新しい座標である。この特性曲線を連続的に並べて曲面を作れば、それが解曲面になる。（簡単のために 2 変数の場合を説明したが、3 変数以上になっても同様にできる。）

例として次の方程式を解いてみよう。

$$u_x + 2u_y = 1 \quad (9)$$

特性曲線を決める方程式は、

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{1} = ds \quad (10)$$

であり、これを解くと

$$x = x_0 + s \quad (11)$$

$$y = y_0 + 2s \quad (12)$$

$$u = u_0 + s \quad (13)$$

となる。この場合、特性曲線は (x_0, y_0, u_0) を通る直線になる。条件として、例えば $u(x, 0) = f(x)$ を与えたとすると $(x_0, y_0, u_0) = (x_0, 0, f(x_0))$ から特性曲線はスタートすることになる。これを初期曲線という。初期曲線を

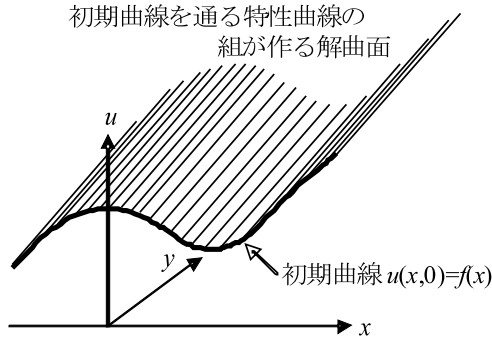


図7 初期曲線，特性曲線と解曲面の関係

通る特性曲線の組は，

$$x = x_0 + s \quad (14)$$

$$y = 2s \quad (15)$$

$$u = f(x_0) + s \quad (16)$$

で表され，パラメータ s と x_0 を動かすと図7のような解曲面ができる。また， s と x_0 を消去すると，

$$u = f\left(x - \frac{y}{2}\right) + \frac{y}{2} \quad (17)$$

が得られる。 f は任意の関数なので，これが一般解である。方程式を満たすことは簡単に確かめられるだろう。

【初期曲線の選び方についての注意】：初期曲線を xy 平面上に投影した曲線は，任意の特性曲線を xy 平面上に投影した曲線と接することなく交わっていなければならない。（そうでないと，初期曲線の上での u の値を勝手に指定できなくなる。）

8 波動方程式

波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u \quad (1)$$

という形の方程式である。後で説明するように定数 v は波の速さという意味を持つ。演算子 Δ （ラプラシアン）は空間の次元によって次のようになる。

$$1 \text{ 次元の場合 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$2 \text{ 次元の場合 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$3 \text{ 次元の場合 } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4)$$

8.1 波動方程式の導出

まず，いくつかの基本的な系について波動方程式を導いてみよう。

8.1.1 弦の振動

ギターの弦のように両端を固定して，ある張力 T で張られた弦の振動を考える。振動によ

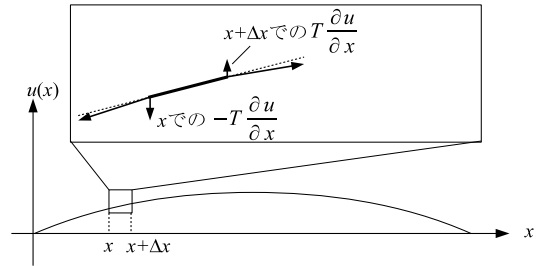


図8 弦の微小部分に働く力

る張力の変化は無視する。図8のように，平衡位置からの変位を $u(x)$ とする。 x から $x + \Delta x$ の微小部分について，上下方向の運動方程式を作ってみよう。単位長さあたりの質量（線密度，次元は【質量／長さ】）を μ とすると，長さ Δx の微小部分の質量は $\mu \Delta x$ である。弦が曲がっているために，弦の接線方向に働く張力の方向は微妙に変化する。そのため，図8の挿入図のように力が釣り合わなくなる。（図では，

下向きの成分の方が大きい。) 運動方程式は

$$\begin{aligned} (\mu \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \\ &= T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \end{aligned}$$

となり, 両辺を Δx で割ると,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

という 1 次元の波動方程式が導ける。波の速さは $v = \sqrt{T/\mu}$ となる。($\sqrt{T/\mu}$ は速さの次元を持つ。各自確かめること。)

8.1.2 膜の振動

今度は, 一定の張力で張られた膜の振動を考える。膜の中に仮想的に線を引くと, 線をはさんで隣合う部分は長さ 1 あたり張力 T で線に垂直な方向に引っ張り合う。(T の次元は【力/長さ】) この場合も振動による張力の変動は無視できると仮定する。図 9 に示した $x \sim x + \Delta x, y \sim y + \Delta y$ の微小部分について運動方程式を作ろう。各辺に働く張力の大き

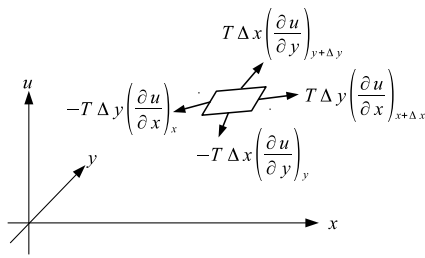


図 9 膜の微小部分に働く力。図中の式は u 方向の力の成分を表す。

さは, $T\Delta x$ と $T\Delta y$ である。弦の場合と同様に上下方向 (u 方向) の力の成分を取ったものが, 図中の式である。単位面積あたりの質量 (面密度, 次元は【質量/面積】) を σ とする。微小部分の面積は $\Delta x \Delta y$ なので質量は $\sigma \Delta x \Delta y$ であ

る。運動方程式は

$$\begin{aligned} (\sigma \Delta x \Delta y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x, y} - T \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x, y} \\ &\quad + T \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x, y+\Delta y} - T \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x, y} \\ &= T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

となる。両辺を $\Delta x \Delta y$ で割ると,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

という 2 次元の波動方程式が導ける。波の速さは $v = \sqrt{T/\sigma}$ となる。($\sqrt{T/\sigma}$ は速さの次元を持つ。各自確かめること。)

8.1.3 音波

気体や液体の中を伝わる音波は, 密度の変化が伝わっていく波である。簡単のために, 断面積 S のパイプの中に空気を入れて, 長さ方向に音波が伝わる 1 次元の場合を考える。図 10(a) の網掛け部分について, まず質量の

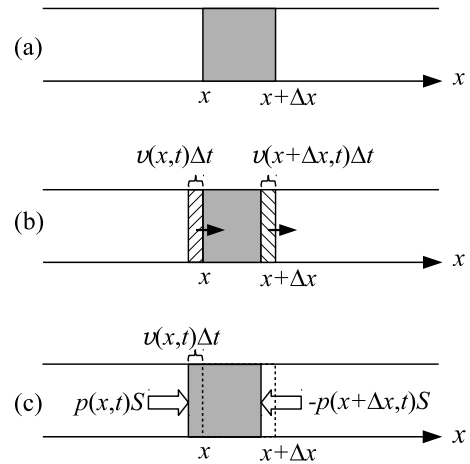


図 10 音波

変化を式で表してみよう。時刻 t から $t + \Delta t$ の短い時間 Δt の間に, 図 10(b) の左側の境界から入ってくる質量は $\rho(x, t) S v(x, t) \Delta t$ である。また, 右側の境界から出て行く質量は

$\rho(x + \Delta x, t)Sv(x + \Delta x, t)\Delta t$ である。この差によって網掛け部分の質量が変化するので、

$$\begin{aligned} & \{\rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)\} S\Delta x \\ &= -\{\rho(x + \Delta x, t)v(x + \Delta x, t) \\ & \quad - \rho(x, t)v(x, t)\} S\Delta t \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} S\Delta t \Delta x = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} S\Delta t \Delta x \end{aligned}$$

となり、連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} \quad (7)$$

が得られる。一方、時刻 $t + \Delta t$ での運動量 $\rho v S\Delta x$ は、 $v\Delta t$ だけ離れた部分が移動してくること、また、圧力による力 pS の差の力積だけ変化することを考慮して

$$\begin{aligned} & \rho(x, t + \Delta t)v(x, t + \Delta t)S\Delta x \\ &= \rho(x - v\Delta t, t)v(x - v\Delta t, t)S\Delta x \\ & \quad + \{p(x, t) - p(x + \Delta x, t)\} S\Delta t \end{aligned}$$

と表される。運動量の時間変化は、時刻 t での値との差をとって

$$\begin{aligned} & \{\rho(x, t + \Delta t)v(x, t + \Delta t) - \rho(x, t)v(x, t)\} S\Delta x \\ &= \{\rho(x - v\Delta t, t)v(x - v\Delta t, t) \\ & \quad - \rho(x, t)v(x, t)\} S\Delta x \\ & \quad + \{p(x, t) - p(x + \Delta x, t)\} S\Delta t \\ & \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} S\Delta t \Delta x \\ &= \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} S\Delta x (-v\Delta t) - \frac{\partial p}{\partial x} S\Delta x \Delta t \end{aligned}$$

から、

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (8)$$

が得られる。さて、平衡状態では $\rho = \rho_0 =$ 一定、 $p = p_0 =$ 一定、 $v = 0$ であり、音波が発生しても変化はごくわずかだとする。方程式 (7) と (8) を 1 次の微小量まで残して変形すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} \quad (9)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (10)$$

となる。求めたいものは ρ, p, v の 3 つなので、3 つ目の方程式が必要である。ここでは気体の断熱変化の状態方程式

$$p = C\rho^\gamma \quad (C, \gamma \text{ は定数}) \quad (11)$$

を使うことにする。この 3 つの方程式から

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} &= -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\ &\cong \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (12)$$

という 1 次元の波動方程式が得られる。ここで音速 $\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ を c と置いた (v は使ってしまったため)。空気の場合、1 モルあたりの質量 m は約 0.029 kg である。理想気体の状態方程式が近似的に成り立つとして、密度は $\rho_0 = mn/V = mp_0/RT$ なので、 $c \cong \sqrt{\gamma RT_0/m}$ と書ける。空気の場合 $\gamma = 1.4$ なので、 $R = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ 、 $T = 290 \text{ K}$ 、 $m = 0.029 \text{ kg/mol}$ を代入すると $c = 3.4 \times 10^2 \text{ m/s}$ となる。

8.1.4 電磁波

真空中での Maxwell の方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (16)$$

である。式 (16) の両辺を t で偏微分して、式 (14) と (13) を使って変形すると

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}\} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \Delta \mathbf{E} \end{aligned}$$

となる。式 (14) から出発すれば \mathbf{H} について同様に計算できて、結局

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \mathbf{E} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \mathbf{H} \quad (18)$$

となる。これは電場ベクトル \mathbf{E} と磁場ベクトル \mathbf{H} についての 3 次元波動方程式である。波の速さは $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ で、ふつうこれを c (光速) と書く。

8.2 1次元波動方程式

8.2.1 無限区間での一般解

無限に広がった 1 次元の領域の場合、1 次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (19)$$

の一般解は、任意関数を f と g として

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (20)$$

の形になる。これをダランベール解という。方程式を満たすことは簡単にわかるし、任意関数を 2 つ含むので一般解である。 $f(x - vt)$ は図

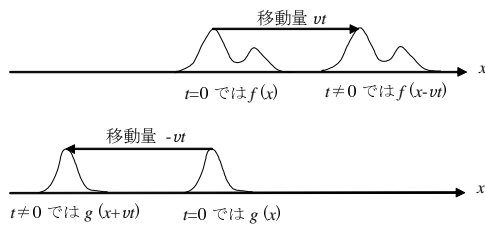


図 11 進行波

11 のように、時間が経つにつれて、波の形を変えずに速度 v で移動していく。このような波を進行波という。 $g(x + vt)$ は逆に速度 $-v$ で移動していく。以上のようなわけで、方程式 (19) のパラメータ v は波が進む速さである。

8.2.2 ストークスの公式

$t = 0$ での波の形 (初期変位) と各点での初速度が、初期条件

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad (22)$$

として与えられたとする。ダランベール解 (20) を代入すると、

$$f(x) + g(x) = \phi(x) \quad (23)$$

$$-vf'(x) + vg'(x) = \psi(x) \quad (24)$$

となる。2 番目の式を 0 から x の範囲で定積分すると、

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{v} \int_0^x \psi(s) ds + A \quad (25)$$

ただし $f(0) - g(0) = A$ と置いた。 $f(x), g(x)$ の連立方程式を解くと、

$$f(x) = \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2v} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{A}{2} \quad (26)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2v} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{A}{2} \quad (27)$$

となり、ダランベール解 (20) に入れると

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x - vt) + g(x + vt) \\ &= \frac{1}{2} \phi(x - vt) - \frac{1}{2v} \int_0^{x-vt} \psi(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \phi(x + vt) + \frac{1}{2v} \int_0^{x+vt} \psi(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \{ \phi(x - vt) + \phi(x + vt) \} \\ &\quad + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(s) ds \end{aligned} \quad (28)$$

が得られる。これをストークスの公式という。

1. 初速度が 0 ($\psi(x) = 0$) の場合

このとき、(28) は

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \phi(x - vt) + \frac{1}{2} \phi(x + vt) \quad (29)$$

となる。この式は、初期変位 $\phi(x)$ が半分ずつに分かれ、それぞれ右向きと左向きの進行波と

なって速度 v と $-v$ で伝わることを示している。初期変位 $\phi(x)$ が三角形の場合について、時間変化のようすを図 12 に示した。図のよう

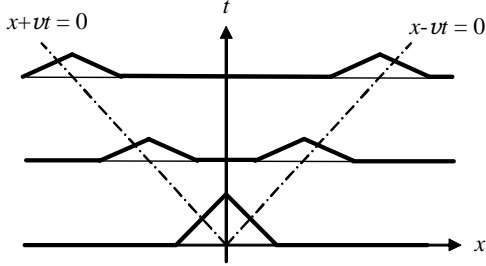


図 12 初速度が 0 の場合のストークスの公式の例

に、初期変位が有限の範囲に限られている場合には、ある点が変位するのは波が通過して行く有限の時間だけである。それ以外の時間では変位は 0 である。

2. 初期変位が 0 ($\phi(x) = 0$) の場合

この場合、(28) は

$$u(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(s) ds \quad (30)$$

となる。簡単な例として、有限区間 $-a < x < a$ でだけ初速度が一定でそれ以外は 0 という場合を考えよう。

$$\psi(x) = \begin{cases} C = \text{一定} & (-a < x < a) \\ 0 & (x < -a, a < x) \end{cases} \quad (31)$$

この場合も影響は速度 $\pm v$ で左右に伝わって行く。 $t > a/v$ 以降では、図 13 の上段のよう

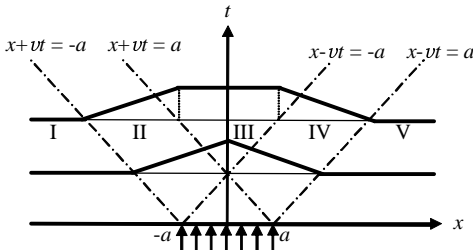


図 13 初期変位が 0 の場合のストークスの公式の例

に 5 つの領域に分かれる。領域 I と V では初

速度の影響がまだ伝わらないので $u(x, t) = 0$ になる。領域 II については、 $-a < x + vt < a, x - vt < -a$ より

$$u(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{-a}^{x+vt} C ds = \frac{C}{2v} (x + vt + a) \quad (32)$$

となる。同様に領域 IV では、 $-a < x - vt < a, a < x + vt$ より

$$u(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^a C ds = \frac{C}{2v} (a - x + vt) \quad (33)$$

となる。領域 III では、 $x - vt < -a, a < x + vt$ なので

$$u(x, t) = \frac{1}{2v} \int_{-a}^a C ds = \frac{Ca}{v} = \text{一定} \quad (34)$$

となる。以上の結果をグラフにしたのが図 13 の上段である。初速度が 0 の場合と違い、中央部分の変位が一定値のまま、いつまでも残るのが特徴である。

一般的には、初期変位と初速度の両方が影響する。時刻 t_0 、位置 x_0 の点 P の状態は、図 14 の太線で示した領域の初期値で完全に決まる。そのため、この領域を点 P の依存領域という。

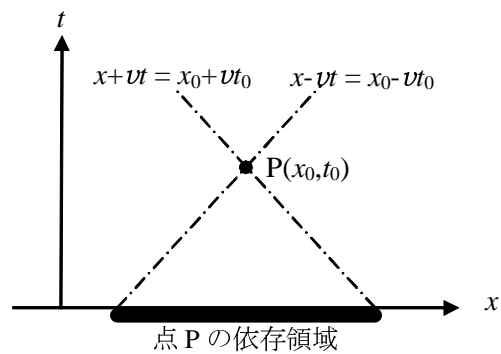


図 14 依存領域

また、 $t = 0$ でのある領域の初期状態の影響は、速度 $\pm v$ で左右に伝わって行く。 xt 平面上で表すと、図 15 の網掛け部分が影響を受ける。これを影響領域という。

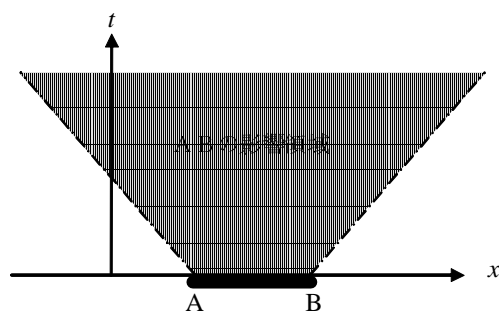


図 15 影響領域

8.2.3 半無限区間での解

一つの端を持ち、片側には無限に広がった領域を半無限区間という。以下では $0 \leq x$ を考える。解を求めるためには初期条件だけでなく、端点での条件を与える必要がある。主要な条件には次の2つがある。

- 固定端：端をある点に固定。ふつうは、 $u(0, t) = 0$ とする。
- 自由端：端を自由に動けるようにする。式で表すと $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ となる。(自由に動けるのなら傾きは0になるはず。)

これ以外に、適当な外力を加えたり、端におもりを付けたりするような条件もある。

固定端と自由端のどちらでも、 $+x$ 方向に進む進行波 $u(x, t) = f(x - vt)$ は、そのまま進んで行くだけである。これに対して、 $-x$ 方向に進む進行波 $u(x, t) = g(x + vt)$ は、いつかは端にぶつかり反射する。

固定端での反射： $u(x, t) = g(x + vt)$ だけだと $u(0, t) = 0$ という条件を満たせない。そこで

$$u(x, t) = g(x + vt) - g(-x + vt) \quad (35)$$

としてみると、任意の t に対して端点 $x = 0$ で

$$u(0, t) = g(0 + vt) - g(0 + vt) = 0 \quad (36)$$

となり固定端の条件を満たす。また、波動方程式を満たすことも明らかである。図 16 にその例を示した。上から下に向かって時間が進

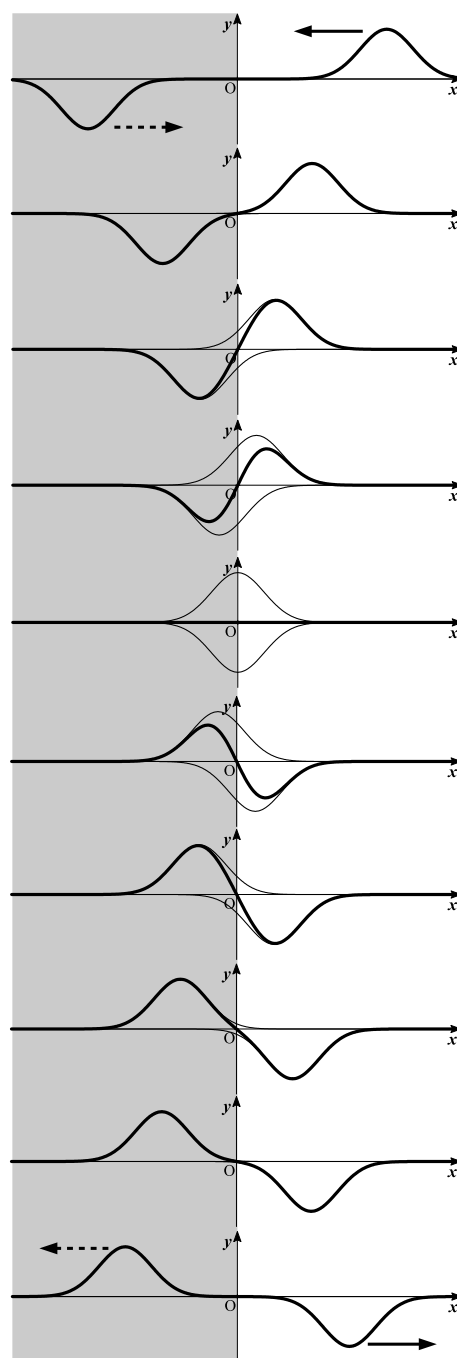


図 16 固定端での反射

む。太い線が $u(x, t)$ ，細い線が $g(x + vt)$ と $-g(-x + vt)$ を表す。実際に観測されるのは $0 \leq x$ の部分である。+の波が逆転して-の波として反射されてくることがわかる。ある瞬間に変位が0になっているのは左右対称な波形で図を描いたためである。

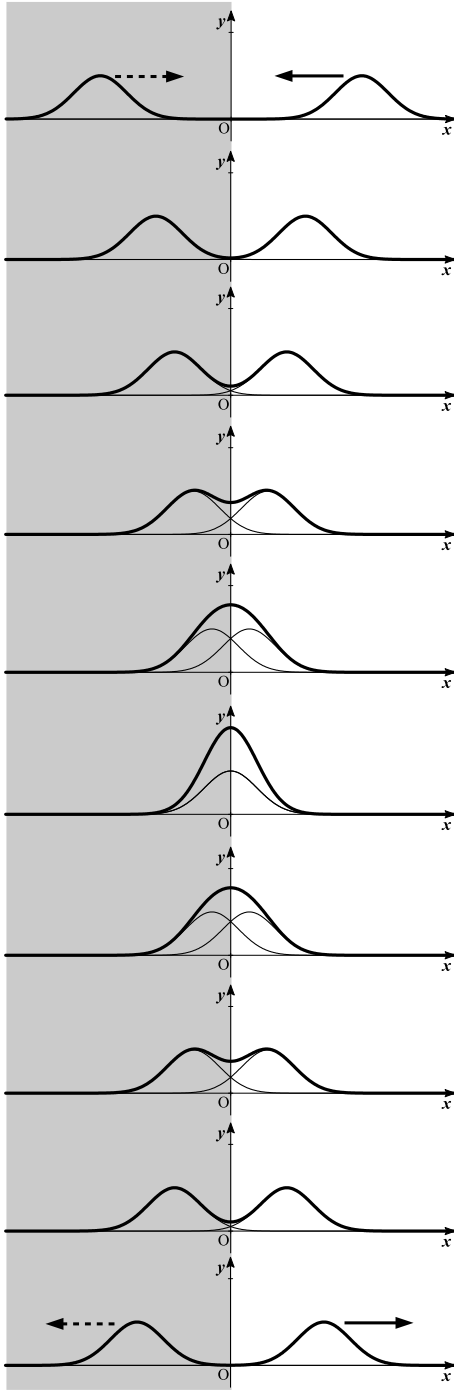


図 17 自由端での反射

自由端での反射：自由端の場合には,

$$u(x, t) = g(x + vt) + g(-x + vt) \quad (37)$$

が解になる。任意の t に対して端点 $x = 0$ で

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g'(0 + vt) - g'(0 + vt) = 0 \quad (38)$$

となり自由端の条件を満たす。また、波動方程式を満たすことも明らかである。図 17 にその例を示した（線の意味は図 16 と同様）。固定端の場合とは異なり、+の波は+のままで反射されてくる。この図を見ると、式 (37) が x についての偶関数になっていて、 $x = 0$ での傾きが 0 という境界条件を満たすことが納得できる。

8.2.4 有限区間での解

長さ L の有限区間 $0 \leq x \leq L$ で、両端が固定されている場合を考える。方程式と境界条件は,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (39)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (40)$$

である。この方程式は x の関数 $X(x)$ と t の関数 $T(t)$ の積の形の解 $u(x, t) = X(x)T(t)$ を仮定して解くことができる。これを変数分離法という。方程式に代入すると

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{X(x)T(t)\} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{X(x)T(t)\} \quad (41)$$

$$X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v^2 T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad (42)$$

$$\frac{1}{v^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \quad (43)$$

となる。左辺は t の関数であり、右辺は x の関数である。両辺が等しくなるためには t にも x にもよらない定数でなければならない。この定数を k とおく。 k の値によって 3 つの場合に分けて $X(x)$ の方程式を解いてみる。

1. $k = 0$ の場合。 $\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = 0$ なので一般解は 1 次式 $X(x) = C_1 x + C_2$ になる。境界条件から任意定数を決めると $C_1 = C_2 = 0$ となり、 $X(x) = 0$ つまり平衡状態の解になる。
2. $k = \lambda^2 > 0$ の場合。 $\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \lambda^2 X(x)$ なので一般解は $X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$ となる。境界条件から任意定数を決めると、この場合も $X(x) = 0$ になってしまう。

3. $k = -\lambda^2 < 0$ の場合 $\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\lambda^2 X(x)$ なので一般解は $X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x$ となる。境界条件から

$$X(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_2 = 0$$

$$X(L) = C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L = 0$$

となる。 $C_2 = 0$ なので、 C_1 も 0 にならないためには、

$$\lambda L = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (44)$$

となる必要がある。 $n\pi/L \equiv \lambda_n$ を固有値といい、

$$X(x) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (45)$$

が得られる。これに対して $T(t)$ の方程式は

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\left(\frac{n\pi}{L}v\right)^2 T(t) \quad (46)$$

となる。 $\omega_n = n\pi v/L$ とおけば、一般解は

$$T(t) = C_3 \cos \omega_n t + C_4 \sin \omega_n t \quad (47)$$

である。

結局、 $u(x, t) = 0$ という平衡状態の解以外の解は、3 番目の場合の $n = 1, 2, 3, \dots$ の解を重ね合わせて

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (48)$$

両はし固定ならこの式になる

となる。初期条件として $t = 0$ での変位 $\phi(x)$ と速度 $\psi(x)$ が条件として与えられると、係数 a_n, b_n について

上の式の a, b は初期条件で決まる

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \phi(x) \quad (49)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \psi(x) \quad (50)$$

という条件になる。これは関数 $\phi(x)$ と $\psi(x)$ のフーリエ級数展開になっている。(両端が固定されているので \cos の項は入らない。) 物理的に妥当な任意の初期条件に対して係数 a_n, b_n が決まり、解が得られるはずである。

式 (48) は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (51)$$

の形にまとめることもできる。ある n に対する項を取り出すと、時間に対しては角振動数 $\omega_n = n\pi v/L$ で振動し、空間的には \sin 関数で振動する。 $n = 1, 2, 3$ の項のグラフを図 18 に示す。変位が常に 0 になる点を節という。節の数は n が増えるにつれて 1 つずつ増える。このような波はこれまでに述べたような進行波ではない。節の位置は動かず、時間が経つにつれて正負の振動を繰り返すだけである。このような波を定在波または定常波という。

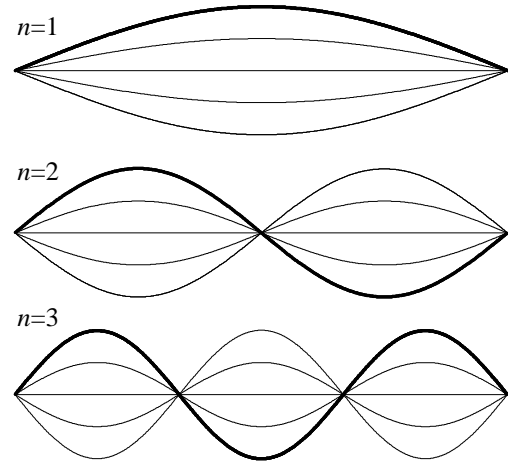


図 18 $n = 1, 2, 3$ の固有振動

8.3 2次元空間の波動の例

空間が2次元の場合、波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u \quad (52)$$

である。

8.3.1 長方形境界

図 19 左のように、長方形の枠に膜や板が張られている場合を考える。この問題は、前節

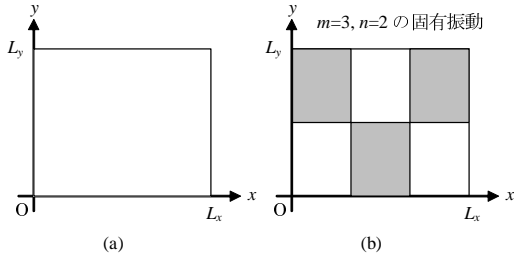


図 19 (a) 長方形膜, (b) $m = 3, n = 2$ の場合の固有振動（網掛けと白抜きは符号の違いを表す）

と同様に変数分離法で解くことができる。まず、解の形を $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ と仮定し、方程式に代入する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{X(x)Y(y)T(t)\} \\ = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \{X(x)Y(y)T(t)\} \end{aligned}$$

1次元の場合と同様に変形して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \\ = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} \end{aligned}$$

それぞれの項が定数になるはずなので、固有値を λ_x, λ_y と置いて

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\lambda_x^2 X(x) \quad (53)$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\lambda_y^2 Y(y) \quad (54)$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -v^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2) T(t) \quad (55)$$

となる。境界線上で固定されていて変位 $u(x, y, t) = 0$ という境界条件の場合には、前

ページと同様に

$$\begin{aligned} u(x, y, t) \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{mn} \cos \omega_{mn} t + b_{mn} \sin \omega_{mn} t) \\ \sin \left(\frac{m\pi}{L_x} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{L_y} y \right) \end{aligned} \quad (56)$$

$$\omega_{mn} = v \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2} \quad (57)$$

という解が得られる。係数 a_{mn}, b_{mn} は初期条件に応じて決められる。整数 m, n の組で指定される各項を固有振動と呼ぶ。図 19(b) に $m = 3, n = 2$ の場合の例を示した。

8.3.2 円形境界

太鼓のように円形の枠で固定された膜が振動する場合には、2次元の極座標 r, θ を用いるのが便利である。極座標表示のラプラシアンは

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (58)$$

である。波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u \quad (59)$$

となる。この場合も変数分離型の解 $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$ を仮定する。方程式に代入して変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \\ = \frac{1}{R(r)} \left(\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} \right) \\ + \frac{1}{r^2 \Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (60)$$

となる。少し複雑だが左辺と右辺は定数になるのでこれを $-k^2$ とおく。さらに、右辺の最後の項は θ を含まない形になる必要がある。したがって、3つの方程式

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2 v^2 T(t) \quad (61)$$

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} = -m^2 \Theta(\theta) \quad (62)$$

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R(r) = -k^2 R(r) \quad (63)$$

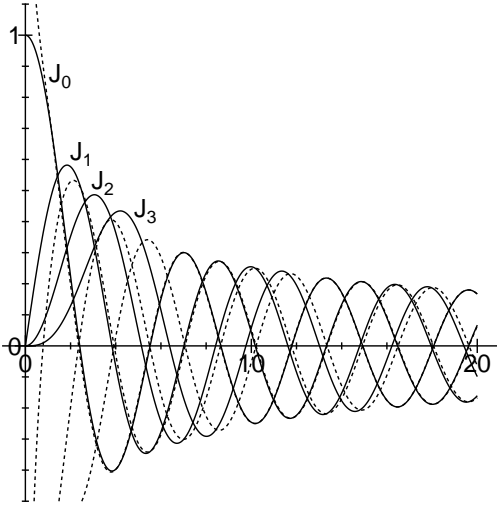


図 20 ベッセル関数 J_0, J_1, J_2, J_3 。破線は漸近形 (68) のグラフ

に分解できる。 $\Theta(\theta)$ の一般解は,

$$\Theta(\theta) = A \cos(m\theta + \phi) \quad (64)$$

である (A と ϕ は任意定数)。 $\Theta(\theta)$ は周期 2π の関数でなければならないので, m は 0 以上の整数である。 $m = 0$ の場合は $\Theta(\theta) = \text{一定}$ で, 解は θ によらず等方的になる。

方程式 (63) は, 両辺を k^2 で割ると

$$\frac{d^2 R(r)}{d(kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{dR(r)}{d(kr)} + \left(1 - \frac{m^2}{(kr)^2}\right) R(r) = 0 \quad (65)$$

と変形できる。これは, ベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) u = 0 \quad (66)$$

の u を R に, x を kr に置き換えたものになっている。方程式 (66) の解で, $x = 0$ で有限の値を持つものは, ベッセル関数

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \quad (67)$$

で与えられる (m が整数の場合の表式であることに注意)。図 20 に $J_0 \sim J_3$ のグラフを示す。

J_0 だけが $x = 0$ で 0 でない値を持つ。また, x が大きいところでは,

$$J_m(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left\{x - \frac{(2m+1)\pi}{4}\right\} \quad (68)$$

と近似できる。図 20 の破線はこの式をグラフにしたもので, m が小さいときには, x が小さいところから良く近似できることがわかる。

以上のことから $R(r) = J_m(kr)$ となる。太鼓のように, 半径 a の枠で固定されている場合は, $R(a) = J_m(ka) = 0$ でなければならない。 $J_m(x)$ が 0 になる点は図 20 のように飛び飛びにある。これらに番号 p を付けて, x_{mp} ($p = 1, 2, 3, \dots$) としよう。 ka はこのどれかに等しいので, k の値は自由に動かさず, $k = x_{mp}/a$ となる。これを k_{mp} と置く。

方程式 (61) の解は, この k_{mp} を使って,

$$T(t) = \cos(k_{mp}vt + \varphi) \quad (69)$$

となる。それぞれの m, p に対する解を固有振動という。最終的な解は, さまざまな固有振動を重ね合わせて,

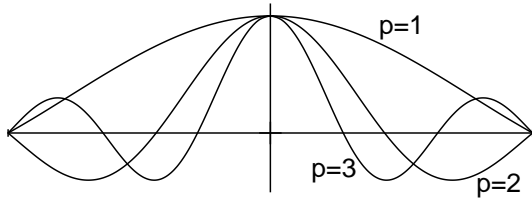
$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{mp} J_m(k_{mp}r) \cos(m\theta + \phi_{mp}) \cos(\omega_{mp}t + \varphi_{mp}) \quad (70)$$

と書ける。ただし, $k_{mp}v = \omega_{mp}$ と置いた。また A_{mp} は係数である。

例えば, $m = 0$ に限定すると解は θ によらず,

$$u(r, t) = \sum_{p=1}^{\infty} A_{0p} J_0(k_{0p}r) \cos(\omega_{0p}t + \varphi_{0p}) \quad (71)$$

となる。これは, 太鼓の中心を叩いた場合の振動を表す。 $J_0(x)$ の零点は $x_{01} = 2.4048, x_{02} = 5.5201, x_{03} = 8.6537, \dots$ 等間隔ではない。それに比例する ω_{0p} も弦の振動の場合とは異なり, $1:2:3 \dots$ とはならないのが特徴である。図 21 は, $p = 1, 2, 3$ の場合

図 21 $m = 0, p = 1, 2, 3$ の固有振動の様子。

について $J_0(k_0 p r)$ をグラフにしたもので、太鼓の中心を通る断面での振動の様子を表している。実際の振動は、さまざまな固有振動を重ね合わせたものになる。

8.4 3次元の平面波

位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 、波数ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 、角振動数 ω を使って、

$$u(\mathbf{r}, t) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad (72)$$

あるいは複素表示で、

$$u(\mathbf{r}, t) = A \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)\} \quad (73)$$

$$= B \exp \{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\} \quad (74)$$

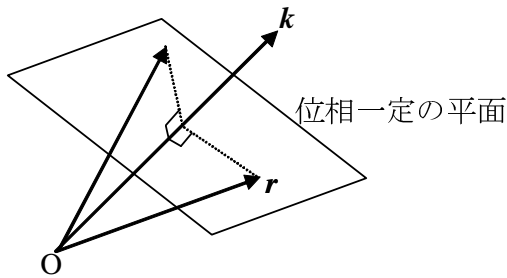
という関数（ただし、 $B = Ae^{i\phi}$ は複素数）は、

$$\omega^2 = k^2 v^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) v^2 \quad (75)$$

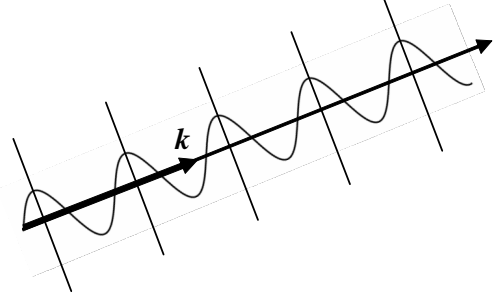
という関係が成り立てば、3次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u \quad (76)$$

の解になる。電磁波などのベクトル量の波の場合は、係数 A, B をベクトルにすればよい。

図 22 平面波の位相一定の面と波数ベクトル \mathbf{k} の関係

波の位相が一定になる面を波面という。今の場合は、 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{一定}$ の面が波面である。このような \mathbf{r} は、図 22 のように \mathbf{k} に垂直な平面を作る。そこで、このような波を平面波と呼ぶ。 \mathbf{k} に垂直な方向から見ると図 23 のようにな

図 23 \mathbf{k} に垂直な方向から見た図

る。 \mathbf{k} に沿って $2\pi/k$ だけ進むと位相が 2π 変化するの、波長 $\lambda = 2\pi/k$ という関係がある。逆に $k = 2\pi/\lambda$ だから、 k は長さ 2π あたりの「波の数」になることから、 \mathbf{k} は波数ベクトルと呼ばれる。また、 \mathbf{k} の方向は波の進行方向を表す。

8.5 3次元の球面波

3次元の極座標表示のラプラシアンは

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (77)$$

である。角度 θ, ϕ によらない解 $u(r, t)$ の場合の波動方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ &= v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (78)$$

という簡単な形になる。ここで、 $w(r, t) = ru(r, t)$ を考える。 t と r についての微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= u + r \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= 2 \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \end{aligned}$$

となる。式 (78) と合わせると、 w について

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (79)$$

という 1 次元波動方程式が成り立つ。この方程式の一般解が、ダランベール解 (20) になることは前に述べた。 $u = w/r$ に戻すと、

$$u(r, t) = \frac{f(r - vt)}{r} + \frac{g(r + vt)}{r} \quad (80)$$

が一般解になる（変数 x の代わりに r になっていることに注意）。第 1 項は原点から外向きに進む波を表す。第 2 項は原点に向かって内向きに進む波を表す。いずれにしても球対称な波になるので球面波と呼ばれる。

また、式 (80) にはダランベール解 (20) と異なり、 $1/r$ が掛けられている。そのため、波は単純に移動するのではなく、波の大きさが r に反比例して変化する。外向きの波では原点から離れるにつれて波は小さくなる。逆に、内向きの波では原点に近づくにつれて波が大きくなる。このことは、波のエネルギーの保存と関係している。

8.6 キルヒホフの公式、ホイヘンスの原理、ポアソンの公式

障害物や壁の無い、無限に広がった 3 次元空間を考える。 $t = 0$ での関数を

$$u(\mathbf{r}, 0) \equiv \varphi(\mathbf{r}) \quad (81)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r}, 0) \equiv \psi(\mathbf{r}) \quad (82)$$

とおくと、波動方程式からキルヒホフの公式と呼ばれる関係

$$u(\mathbf{r}_0, t) = \frac{1}{4\pi v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_S \varphi(\mathbf{r}) dS \right) + \frac{1}{4\pi v^2 t} \int_S \psi(\mathbf{r}) dS \quad (83)$$

が成り立つことを証明できる。図 24 に示したように、 S は注目している点 \mathbf{r}_0 を中心とする半径 vt の球面である。この公式は、ある点のある時刻での状態は、その点を中心とする半径

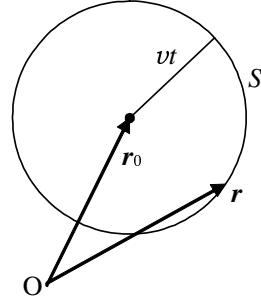


図 24 キルヒホフの公式の記号の意味

vt の球面上の時間 t だけ前の状態によって完全に決まることを意味している。つまり球面 S 上の状態が速さ v で伝わって来ることによってその点の状態が決まるということであり、それ以外の部分は影響をおよぼさない。

ある有限の範囲で音や光を出すと、その影響は速さ v で周りに伝わるが、有限の時間で通り過ぎてしまうので、その後は影響が完全に消滅する。これをホイヘンスの原理という。これは 3 次元空間の特徴で、1 次元の場合は図 13 で説明したように、初速度の影響がいつまでも残る。

障害物の無い 2 次元空間の場合には、

$$u(x, y, 0) \equiv \varphi(x, y) \quad (84)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) \equiv \psi(x, y) \quad (85)$$

とおくと、

$$u(x_0, y_0, t) = \frac{1}{2\pi v} \frac{\partial}{\partial t} \int_D \frac{\varphi(x, y) dx dy}{\sqrt{v^2 t^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} + \frac{1}{2\pi v} \int_D \frac{\psi(x, y) dx dy}{\sqrt{v^2 t^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} \quad (86)$$

となる。ここで、 D は注目している点 (x_0, y_0) を中心とする半径 vt の円である。3 次元の場合とは異なり、積分は円 D の内部で行う。これをポアソンの公式という。積分が円の境界（円周）だけでないために、ホイヘンスの原理は成り立たない。ある有限の範囲で音や光を出

すと、その影響は次第に小さくなるが、3次元のように完全に消滅することはない。実は、ホイヘンスの原理は、1次元の場合を除いて空間の次元が奇数であれば成立する。

8.7 1次元波動方程式についての補足、位相速度と群速度

無限区間での1次元波動方程式の解として

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad \text{ただし } \omega = kv \quad (87)$$

という形のものがある。実数部を取れば、振幅 A' 、初期位相 ϕ を使って

$$u(x, t) = A' \cos(kx - \omega t + \phi) \quad (88)$$

となる。 $kx - \omega t = k(x - \frac{\omega}{k}t)$ と変形すると、位相がある値をとる位置は速度

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (89)$$

で移動する。これを位相速度と呼ぶ。

次に、波数 k_0 を中心とする狭い範囲の波数 k の波を次のように重ね合わせてみる。

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2/2\sigma^2} e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (90)$$

時刻 $t = 0$ では、

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2/2\sigma^2} e^{ikx} dk \quad (91)$$

となる。これは $u(x, 0)$ のフーリエ変換が $e^{-(k-k_0)^2/2\sigma^2}$ であること、つまり、

$$\mathcal{F}[u(x, 0)] = e^{-(k-k_0)^2/2\sigma^2}. \quad (92)$$

を意味する。一方、フーリエ変換の演習問題2で、ガウス関数 $f(x) = e^{-ax^2}$ のフーリエ変換が $F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a}$ となることを示した。 $a = \sigma^2/2$ とすれば、

$$\mathcal{F}[e^{-\sigma^2 x^2/2}] = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{-k^2/2\sigma^2} \quad (93)$$

となる。これに2.3.6で説明した(周)波数シフトの性質を用いると

$$\mathcal{F}[e^{-\sigma^2 x^2/2} e^{ik_0 x}] = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} e^{-(k-k_0)^2/2\sigma^2} \quad (94)$$

だから、(92)と見比べて、

$$u(x, 0) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2 x^2/2} e^{ik_0 x} \quad (95)$$

であることがわかる。実部をとって

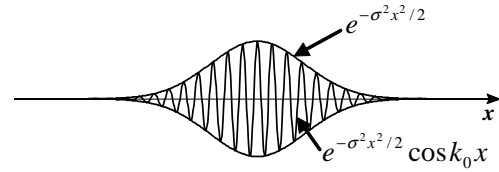


図25 波束 ($\sigma = 1, k_0 = 20$) の場合

$e^{-\sigma^2 x^2/2} \cos k_0 x$ のグラフを描くと、図25のようになる。 $e^{-\sigma^2 x^2/2}$ は $x = 0$ を中心とする幅 $1/\sigma$ のガウス関数を表し、図では包絡線となる。 $\cos k_0 x$ の因子があるため、包絡線の内部で図のように振動する。このような波は波束 (wavelet) と呼ばれる。【足し合わせる波の波数 k の広がり (正確には標準偏差) σ に対して、波束の広がり (標準偏差) $1/\sigma$ が逆数になっていることに注意しよう。これは量子力学の不確定性原理と関係している。】

では、式(90)の関数が時間と共にどのように変化するかを考えてみよう。 σ が小さい時、 k が k_0 付近だけが積分に寄与する。そこで、角振動数 $\omega(k)$ を k_0 のまわりで展開して一次の項までをとることにすれば、

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g(k - k_0) \quad \text{ただし、} \omega_0 = \omega(k_0), v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} \quad (96)$$

となる。これを式 (90) に代入すると、

$$u(x, t) = e^{-i(\omega_0 t - v_g k_0 t)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-k_0)^2/2\sigma^2} e^{ik(x-v_g t)} dk \quad (97)$$

となる。2行目の部分は、式 (91) の x を $x-v_g t$ で置き換えたものなので、式 (95) の x を $x-v_g t$ で置き換えたものに等しくなる。これを使うと

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{-i(\omega_0 t - v_g k_0 t)} \\ &\cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2(x-v_g t)^2/2} e^{ik_0(x-v_g t)} \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma^2(x-v_g t)^2/2} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \end{aligned} \quad (98)$$

が得られる。この式で $t = 0$ とすれば、当然ながら式 (95) になる。ガウス関数の部分 $e^{-\sigma^2(x-v_g t)^2/2}$ は、図 25 の包絡線が速度 v_g で進むことを意味する。また、 $e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$ は包絡線の内部での細かい振動が位相速度 $v = \omega/k$ で進むことを意味する。エネルギーの塊としての波束が進む速度は位相速度ではなく、群速度 v_g の方である。

波動方程式の v が波数 k や角振動数 ω によらない定数であれば、 $\omega = kv$ から

$$\text{群速度 } v_g = \frac{d\omega}{dk} = v = \frac{\omega}{k} = \text{位相速度} \quad (99)$$

である。しかし、一般的には波動方程式の v は波数 k や角振動数 ω に依存する。例えば、物質中の光の速さは、光の波長や振動数によって変化するので、プリズムを通すことによって色を分けることができる。このような場合を分散があるという。そうすると、 $\omega = kv(k)$ なので、

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv(k))}{dk} \\ &= v(k) + k \frac{dv(k)}{dk} \neq \text{位相速度 } v(k) \end{aligned} \quad (100)$$

ω と k の関係が比例関係からずれると、群速度と位相速度が異なってくる。

9 熱伝導方程式

9.1 熱伝導方程式の導出

9.1.1 1次元の熱伝導

図 26 のように、断面積 S の細長い棒の長さ方向 (x 軸方向) に温度分布があるとしよう。温度 T は位置 x と時間 t の関数で $T(x, t)$ と書ける。ある断面を通して単位時間あたりに流れる

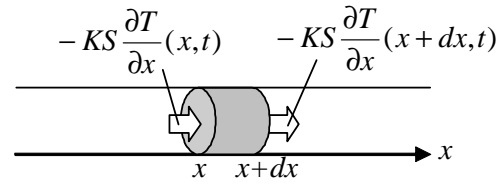


図 26 細長い棒の熱伝導

熱量は、温度勾配と断面積に比例し、 $-KS \frac{\partial T}{\partial x}$ と表せる。これをフーリエの法則という。比例係数 K は熱伝導度と呼ばれる。マイナス符号が付いているのは、 $+x$ 方向への熱流をプラスと約束しているためである。温度勾配がマイナスのとき、つまり、 x が大きくなるにつれて温度が低くなるときに、 $+x$ 方向に熱が流れる。これは、高温側から低温側に向かって熱が流れるという法則を表している。

棒の内部で熱が発生することはないと仮定すると、時間 dt の間の微小部分 $x \sim x+dx$ の温度変化は、両側の断面からの熱の出入りによって決まる。単位質量あたりの比熱を c 、密度を ρ とすると、熱容量は $c\rho Sdx$ なので

$$\begin{aligned} &c\rho Sdx \{T(x, t+dt) - T(x, t)\} \\ &= -KS \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x+dx, t) \right) dt \end{aligned}$$

という関係が成り立つ。これを変形すると、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{ただし } \kappa = \frac{K}{c\rho} \quad (1)$$

という1次元の熱伝導方程式が得られる。定数 κ は熱拡散率とよばれる。

9.1.2 3次元の熱伝導

3次元の場合には、ある点での単位時間、単位面積あたりの熱の流れは、温度勾配 $\text{grad } T = \nabla T$ に比例し、 $-K \text{grad } T = -K \nabla T$ と表せる。この式は、温度が等しい点をつなげた等温面に対して垂直方向に、温度が高い方から低い方へ、温度勾配に比例して熱が流れることを意味する。発散 $\text{div}(-K \text{grad } T)$ は、単位時間、単位体積あたりの熱の流出量になる。微小体積 dV を考えると、

$$\begin{aligned} & c\rho dV \{T(\mathbf{r}, t+dt) - T(\mathbf{r}, t)\} \\ & = -K \text{div}(-\text{grad } T) dV dt = K \Delta T dV dt \end{aligned}$$

なので、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \Delta T \quad \text{ただし } \kappa = \frac{K}{c\rho} \quad (2)$$

という3次元の熱伝導方程式が得られる。(Tが座標 x だけに依存する場合には、1次元の熱伝導方程式になる。)

9.1.3 拡散

水の中にインクを垂らすと時間が経つにつれてインクは広がっていく。このような現象を拡散という。インクの濃度を $\rho(\mathbf{r}, t)$ とする。水の中でのインクの流れは、濃度勾配に比例して $-\kappa \text{grad } \rho = -\kappa \nabla \rho$ と表せる。

$$\begin{aligned} & \{\rho(\mathbf{r}, t+dt) - \rho(\mathbf{r}, t)\} dV \\ & = -\kappa \text{div}(-\text{grad } \rho) dV dt = \kappa \Delta \rho dV dt \end{aligned}$$

から、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \Delta \rho \quad (3)$$

という3次元の拡散方程式が得られる。形としては、熱伝導方程式と同じである。

9.2 無限領域での基本解

まず、1次元の熱伝導で棒の長さが無限に長い場合を考える。次の性質をもつ関数 $U(x, \xi, t)$ を基本解という。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{t \searrow 0} U(x, \xi, t) = \delta(x - \xi) \quad (5)$$

つまり、熱伝導方程式を満たす関数で、 $t \rightarrow 0$ の極限では中心が ξ にあるデルタ関数になるものである。導出は省略するが、基本解はガウス関数

$$U(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp \left\{ -\frac{(x - \xi)^2}{4\kappa t} \right\} \quad (6)$$

である。上の2つの条件を満たすことを確かめるのは簡単である。時間が経過して t が大きくなるにつれて熱は拡散し、関数の幅は $\sqrt{\kappa t}$ に比例して広がっていく。

基本解がわかっていると、初期条件 $T(x, 0) = \phi(x)$ を満たす解は、

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \xi, t) \phi(\xi) d\xi \quad (7)$$

で与えられる。確かに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U}{\partial t} \phi(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \kappa \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \phi(\xi) d\xi \\ &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, \xi, t) \phi(\xi) d\xi \\ &= \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{aligned}$$

となって熱伝導方程式をみたす。また、

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow 0} T(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \searrow 0} U(x, \xi, t) \phi(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) \phi(\xi) d\xi \\ &= \phi(x) \end{aligned}$$

だから初期条件も満たしている。

3次元の場合、基本解は次の式のような3次元のガウス関数で与えられる。

$$U(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t) = \frac{1}{(4\pi\kappa t)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})^2}{4\kappa t} \right\} \quad (8)$$

1次元の場合と同様に、初期条件から解を作ることができる。

9.3 有限領域の問題

考える領域が有限の場合には、初期条件だけでなく、境界での条件（境界条件）も与える必要がある。このような初期境界値問題を解くためには、フーリエ級数の方法が使われることが多い。

例題 1 長さ L の棒があり、 $t = 0$ での温度分布が $\phi(x)$ だったとする。両端の温度を 0 に保ったときの、その後の温度分布を求めるには、次のような問題を解けばよい。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (0 < x < L, t > 0) \quad (9)$$

$$T(x, 0) = \phi(x) \quad (0 < x < L) \quad (10)$$

$$T(0, t) = T(L, t) = 0 \quad (11)$$

境界条件から、 $T(x, t)$ は正弦級数で、

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (12)$$

と表せる。これを熱伝導方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{db_n}{dt} \sin \frac{n\pi}{L} x \\ = \sum_{n=1}^{\infty} -\kappa \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \end{aligned}$$

各項の係数が両辺で等しいはずなので、係数 $b_n(t)$ についての常微分方程式

$$\frac{db_n}{dt} = -\kappa \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 b_n$$

が得られる。この解は

$$b_n(t) = b_n(0) \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \kappa t \right)$$

である。一方、初期条件から

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin \frac{n\pi}{L} x = \phi(x)$$

が成り立つので、 $\phi(x)$ のフーリエ係数として次のように $b_n(0)$ が求められる。

$$b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (13)$$

結局、解は次のようになる。

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \kappa t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (14)$$

n が大きい項ほど、指数関数の中の t の係数が大きく、減衰が速いことに注意しよう。このため、時間が経つと細かく波打つ成分や複雑な起伏は消えていく。これを熱伝導方程式の平滑化作用という。その例を図 27 に示す。 $t = 0$ で

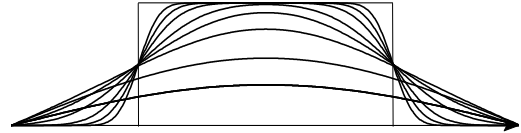


図 27 平滑化作用の例

矩形波の温度分布であったものが、時間がたつとなだらかになり、実質的に $n = 1$ の \sin 関数だけになっていく。

例題 2 両端の温度が 0 でなく T_0 の場合。 $u(x, t) = T(x, t) - T_0$ を考えると、例題 1 と同じ問題になる。

例題 3 両端の温度が違って $T(0, t) = T_1$, $T(L, t) = T_2$ の場合。初期条件と境界条件は、

$$T(x, 0) = \phi(x) \quad (15)$$

$$T(0, t) = T_1, \quad T(L, t) = T_2 \quad (16)$$

である。十分時間が経って温度が時間変化しなくなると、

$$0 = \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

なので、 T は x の一次式になるはずである。境界条件を考えると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

となる。そこで,

$$u(x, t) = T(x, t) - \left(\frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \right)$$

とすると, $u(x, t)$ についての初期条件と境界条件は,

$$u(x, 0) = \phi(x) - \left(\frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \right) \quad (17)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (18)$$

となるので, 例題 1 と同じ問題になる。

例題 4 棒の両端で断熱されているとき。両端で熱の流れがないので, 温度勾配が 0 になる。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (0 < x < L, t > 0) \quad (19)$$

$$T(x, 0) = \phi(x) \quad (0 < x < L) \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (21)$$

境界での勾配が 0 という条件から $T(x, t)$ は余弦級数で展開できる。

$$T(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (22)$$

例題 1 と同様に計算すると

$$T(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \kappa t \right) \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (23)$$

$$a_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \quad (24)$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L \phi(x) dx \quad (25)$$

となる。

10 ラプラス方程式とポアソン方程式

ラプラス方程式

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

は, 空間の次元によってそれぞれ次のようになる。

$$1 \text{ 次元: } \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

$$2 \text{ 次元: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

$$3 \text{ 次元: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

1 次元の場合は簡単で, $u(x) = C_1 x + C_2$ が一般解になる。以下では, 2 次元と 3 次元の場合について説明する。ラプラス方程式をみたす関数を調和関数 (**harmonic function**) という。調和関数はさまざまな興味深い性質を持つ。

10.1 ラプラス方程式とポアソン方程式の導出

これまでに述べた波動方程式や熱伝導方程式で時間変化がなくなると, ラプラス方程式になる。つまり, 波動や熱伝導の定常状態を決める方程式であると言える。これ以外にも重要な現象がラプラス方程式で記述される。

10.1.1 静電ポテンシャル

時間的に一定の状態にある電場を静電場という。真空中の静電場についてのマクスウェルの方程式は, 電荷密度を ρ , 誘電率を ε_0 として,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (6)$$

である。2 番目の式から, $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ となる静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ が存在することを示せる。1 番目の式を用いて

$$\Delta \phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi) = -\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7)$$

が導かれる。これは電荷分布から静電ポテンシャルを決めるポアソン方程式である。特に, 電荷が存在しない領域では, ラプラス方程式 $\Delta \phi = 0$ になる。

10.1.2 重力ポテンシャル

質点の間に働く万有引力と電荷の間に働くクーロン力はほとんど同じ形をしている。例えば, 原点にある質量 M の質点が位置 \mathbf{r} にある

質量 m の質点に及ぼす万有引力は

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (8)$$

である (G は万有引力定数)。一方, 原点にある点電荷 Q が位置 \mathbf{r} にある点電荷 q に及ぼすクーロン力は

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (9)$$

である。この式を $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ とおくと, 点電荷 Q がそのまわりに作る電場

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (10)$$

が得られる。万有引力についても同様に, $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ とおくと, 質点 M がそのまわりに作る重力場

$$\mathbf{g} = -G \frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (11)$$

が得られる。重力場についても, 電場の場合と同様に $\mathbf{g} = -\text{grad}\phi$ となる重力ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を定義できる。質量が連続的に分布している場合には, 質量の密度を ρ として,

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho \quad (12)$$

というポアソン方程式が成り立つ。また, 質量が存在しない領域では, ラプラス方程式 $\Delta\phi = 0$ になる。

10.1.3 複素関数についてのコーシー・リーマンの条件

変数が複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(z)$ を複素関数という。 $f(z)$ の実部 u と虚部 v は x, y の関数と見ることができて, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表せる。複素関数の微分は実関数の場合と同様に

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (13)$$

と定義される。実軸方向に動いて $\Delta z = \Delta x$ とすると

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \\ &\quad + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

となる。一方, 虚軸方向に動いて $\Delta z = i\Delta y$ とすると

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} \\ &\quad + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i\Delta y} \\ &= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

微分が定義できるためには, この二つの結果が等しく,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (15)$$

という関係が成り立つ必要がある。これをコーシー・リーマンの条件という。1 番目の式を x で偏微分し, 2 番目の式を y で偏微分して, 左辺と右辺をそれぞれたし合わせると,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (16)$$

となるので, u は 2 次元の調和関数である。同様に, v も 2 次元の調和関数であること, つまり,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

を示せる。

例えば, $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ の場合, $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ となる。確かにどちらも 2 次元の調和関数である。このように, 2 次元の調和関数は微分可能な複素関数から無数に作ることができる。

10.2 調和関数の性質

調和関数 u は次のような性質を持つ（証明は省略）。

1. **最大値原理**：有限な領域での調和関数は、領域の境界で最大値、最小値をとる。（領域の内部で最大値、最小値をとることはない。）
2. もし、境界上で $u = \text{一定}$ であれば、 u は領域全体で一定になる。
【証明：最大値原理から、最大値と最小値が同じになるので、領域内のどこでも一定値になる。】
3. **境界値問題の解の一意性**：境界での u の値を与えると、ラプラス方程式の解は（存在するとすれば）ただ一つに決まる。
【証明：二つの解 u, v があるとする。 $u - v$ は境界上で 0 になるので、性質 2. から領域内のどこでも $u - v = 0$ 、つまり、 $u = v$ となる。】
4. **球面平均の定理**：
3次元の場合：球面上での調和関数の平均値は、球の中心での関数の値に等しい。
2次元の場合：円周上での調和関数の平均値は、円の中心での関数の値に等しい。
（実は、 $\Delta u \leq 0$ ならば、中心での値は平均値以上になり、 $\Delta u \geq 0$ ならば、中心での値は平均値以下になる。）
5. 任意の調和関数は無限回微分可能である。

10.3 極座標による表現

2次元極座標でのラプラス演算子は、

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (18)$$

であり、3次元極座標でのラプラス演算子は、

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (19)$$

である。

ラプラス方程式の解が角度によらず、原点からの距離 r だけに依存する場合には、ラプラス方程式は、それぞれ次のようになる。

$$2 \text{次元} : \Delta u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad (20)$$

$$3 \text{次元} : \Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0 \quad (21)$$

解は簡単に求められて

$$2 \text{次元} : u = C_1 \log r + C_2 \quad (22)$$

$$3 \text{次元} : u = \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (23)$$

となる。ただし、原点 $r = 0$ では発散するので、原点を除いてラプラス方程式を満たすことに注意する。

実は、任意定数を選んで

$$2 \text{次元} : E_2 = \frac{1}{2\pi} \log r \quad (24)$$

$$3 \text{次元} : E_3 = -\frac{1}{4\pi r} \quad (25)$$

とすれば、 ΔE_2 と ΔE_3 は、それぞれ、原点を中心とする2次元と3次元のデルタ関数になる。そのため、 E_2 と E_3 はラプラス演算子の基本解と呼ばれる。

10.4 無限領域でのポアソン方程式

無限に広い空間におけるポアソン方程式

$$\Delta u = f \quad (26)$$

の解は、上で述べたラプラス演算子の基本解 E を使って次のように作ることができる。

$$u(\mathbf{r}) = \int E(|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (27)$$

この式のラブラシアンをとると、確かに

$$\begin{aligned} \Delta u(\mathbf{r}) &= \int \Delta E(|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \int \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= f(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

となる。

3次元の静電場の場合には、 $f = -\rho/\varepsilon_0$ なので、

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \int \frac{-1}{4\pi|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|} \frac{-\rho(\boldsymbol{\xi})}{\varepsilon_0} d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (28)$$

となり、電磁気学で習った電荷密度とポテンシャルの関係式になっている。

重力場の場合には、 $f = 4\pi G\rho$ （ただし ρ は質量の密度）なので、

$$u(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho(\boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi} \quad (29)$$

となる。このようにして作った解は、電荷や質量の密度 ρ が0のところでは、当然、ラプラス方程式を満たす。

2次元の場合には、次のようになる。

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int f(\boldsymbol{\xi}) \log |\mathbf{r}-\boldsymbol{\xi}| d\boldsymbol{\xi} \quad (30)$$

10.5 境界値問題

考える領域が境界を持つ場合、境界での条件を与えて、それを満たす関数を求めることになる。これを境界値問題という。ラプラス方程式とポアソン方程式では時間変化がないので、初期条件は必要ない。次の2種類が代表的である。

- **ディリクレ問題**：境界での関数の値 $u = \psi$ を指定。
- **ノイマン問題**：境界での法線方向の微分係数 $\frac{\partial u}{\partial n} = \eta$ を指定。

領域が境界の内部の場合を**内部問題**、外部の場合を**外部問題**という。例えば、導体に電荷を与えて、その外部の電位を求める問題は外部問題である。

ディリクレ問題の場合、境界の形が特異でなく、境界条件の関数 ψ が連続であれば、解がただ一つ存在することがわかっている。

ノイマン問題の場合には、境界条件の関数 η を勝手に与えることはできない。ベクトル解析

のガウスの定理

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

に $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$ を代入すると（マイナス符号はあってもなくても同じだが）

$$\int_V \Delta\phi dV = \int_S \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$$

となる。ポアソン方程式から $\Delta\phi = f$ であり、境界条件から境界面上で $\partial\phi/\partial n = \eta$ なので、結局

$$\int_V f dV = \int_S \eta dS \quad (31)$$

でなければならない。この条件を満たし、境界の形が特異でなく f や η が適当な滑らかさを持てば、ノイマン問題の解を定数を除いて求めることができる。

10.6 円と球に対する内部ディリクレ問題、ポアソンの公式

2次元のラプラス方程式で境界が円周の場合、内部ディリクレ問題の解は、境界条件の関数 ψ の次のような積分

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2a \cos(\theta - \alpha) + r^2} \psi(a, \alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (32)$$

で与えられる。ここで、 a は円の半径、 α は円周上の位置を表す角度である。これをポアソンの公式という。同様に、3次元のラプラス方程式で境界が球面の場合には、内部ディリクレ問題の解は、

$$u(\mathbf{r}) = \frac{a}{4\pi} \int_S \frac{a^2 - r^2}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{r}|^3} \psi(\boldsymbol{\xi}) d\Omega \quad (33)$$

で与えられる。ここで、 $\boldsymbol{\xi}$ は球面上の位置ベクトル、 Ω は立体角である。

ポアソン方程式の場合には、無限領域での解 v を作って $w = u - v$ とおく。 w はラプラス方程式に従うので、上の公式を使って w を求め、 $u = w + v$ とすれば解くことができる。

10.7 ラプラス方程式の変数分離型の級数解

10.7.1 2次元極座標

2次元極座標で、変数分離型の解 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ を仮定してラプラス方程式に代入すると

$$0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) \Theta(\theta) + \frac{R(r)}{r^2} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2}$$

$$\frac{r}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR(r)}{dr} \right) = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2}$$

となる。この両辺は定数でなければならないので λ^2 と置くと、

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda^2 R = 0 \quad (34)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda^2 \Theta = 0 \quad (35)$$

という方程式が得られる。

まず、原点を含む領域についての内部ディリクレ問題を考える。 $\lambda = 0$ の場合、

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = 0$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0$$

から、

$$R(r) = c_1 + c_2 \log r$$

$$\Theta(\theta) = c_3 + c_4 \theta$$

となるが、 $r = 0$ で有限値になることと、 θ については周期 2π の周期関数になることから、 $c_2 = 0, c_4 = 0$ で、 $R(r)\Theta(\theta) = \text{定数}$ となる。 $\lambda \neq 0$ の場合、 Θ については、周期 2π の周期関数であることから、 $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ を m とすると、

$$\Theta(\theta) = A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta \quad (36)$$

となる。一方、 $R(r)$ の方程式は、 r^n という形を仮定して代入すると

$$\{n(n-1) + n - m^2\} r^n = 0$$

となるので、 $n = m$ または $-m$ となる。 $r = 0$ で有限値になるためには、 $n = m$ の方を採用

する。以上のことから、解は次のような級数で表せる。

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \quad (37)$$

境界が原点を中心とする半径 a の円の場合、境界条件は

$$u(a, \theta) = \psi(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \quad (38)$$

となり、与えられた関数 ψ のフーリエ級数展開から係数が決まる。(係数を ψ で表して、式 (37) に代入して計算をするとポアソンの公式 (32) を導くことができる。) 内部ノイマン問題の場合、境界条件は

$$\eta(\theta) = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m a^{m-1} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \quad (39)$$

となり、与えられた関数 η のフーリエ級数展開から係数が決まる。ただし、定数項の A_0 は定まらない。

外部問題の場合は、 $r \rightarrow \infty$ で発散しないように r^{-m} の方を採用して、解は

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r^{-m} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) \quad (40)$$

となる。

10.7.2 3次元極座標

3次元極座標で、変数分離型の解 $u(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ を仮定してラプラス方程式に代

入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) \Theta(\theta) \Phi(\phi) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) R(r) \Phi(\phi) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} R(r) \Theta(\theta) \end{aligned}$$

となる。両辺を $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)/r^2$ で割ると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) \\ &+ \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) \\ &+ \frac{1}{\Phi(\phi) \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} \end{aligned}$$

なので、まず

$$\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = \text{定数} = -m^2$$

でなければならない。

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}, e^{-im\phi}$$

が解で、 ϕ についての周期性から m は整数である。そうすると、角度変数を含む部分について

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) \\ - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = \text{定数} = -\lambda \end{aligned}$$

でなければならない。 $z = \cos \theta$ と変数変換すると、 $d/d\theta = -\sin \theta dz$ だから

$$\frac{d}{dz} \left\{ (1-z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right\} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-z^2} \right) \Theta = 0$$

となる。 $-1 \leq z \leq 1$ の範囲で有限値をとる解を探すと、定数 $\lambda = l(l+1)$ ($l = 0, 1, 2, 3, \dots$)、 $|m| \leq l$ という条件を導ける。方程式

$$\frac{d}{dz} \left\{ (1-z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right\} + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right\} \Theta = 0 \quad (41)$$

をルジャンドルの同伴（随伴）微分方程式と呼ぶ。この方程式の解は

$$P_l^{|m|}(z) = \frac{(1-z^2)^{|m|/2}}{2^l l!} \frac{d^{|m|+l}}{dz^{|m|+l}} (z^2-1)^l \quad (42)$$

で、ルジャンドルの陪関数と呼ばれる。最初のいくつかは次のようになる。

$$\begin{aligned} P_0^0(z) &= 1 \\ P_1^0(z) &= z \\ P_1^1(z) &= \sqrt{1-z^2} \\ P_2^0(z) &= \frac{3z^2-1}{2} \\ P_2^1(z) &= 3z\sqrt{1-z^2} \\ P_2^2(z) &= 3(1-z^2) \end{aligned}$$

最後に、 $R(r)$ についての方程式

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) &= l(l+1) \\ \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - l(l+1)R(r) &= 0 \end{aligned}$$

に $R(r) = r^n$ を仮定して代入すると

$$n(n+1) - l(l+1) = 0$$

となり、 $n = l, -(l+1)$ が得られる。原点を含む内部問題の場合は $n = l$ の方を採用して、解

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \phi) \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} r^l P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l r^l P_l^{|m|}(\cos \theta) \\ (a_{lm} \cos m\phi + b_{lm} \sin m\phi) \end{aligned} \quad (44)$$

が得られる。角度に依存する部分

$$Y_{lm}(\theta, \phi) \propto P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (45)$$

を球面調和関数という。 l か m が異なるものを掛けて積分すると

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^* Y_{l'm'} \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (l \neq l' \text{ または } m \neq m') \quad (46)$$

のように 0 になる (直交関係)。さらに, θ と ϕ の関数は球面調和関数の級数で表せるという性質もある (完全系)。というわけで, 境界面が球面であれば, 境界条件を球面調和関数で表すことによって, 係数 A_{lm} を決めて解を求められる。

$m = 0$ の項だけをとると, 角度 ϕ によらない解となる。 $m = 0$ のルジャンドルの陪関数はルジャンドル関数と呼ばれ, $P_l(\cos \theta)$ と書かれる。($m = 0$ の場合のルジャンドルの同伴 (随伴) 微分方程式のことを, 単にルジャンドルの微分方程式という。) ラプラス方程式の解は

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) \quad (47)$$

という級数になる。問題が軸対称で角度 ϕ によらない場合はこの形の解になる。

$l = 0, 1, 2, 3$ のルジャンドル関数は

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= z \\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(3z^2 - 1) \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(5z^3 - 3z) \end{aligned}$$

である。ルジャンドル関数の積の積分は

$$\int_{-1}^1 P_l(z) P_{l'}(z) dz = \begin{cases} 2/(2l+1) & (l = l') \\ 0 & (l \neq l') \end{cases} \quad (48)$$

となり, l が異なるルジャンドル関数は直交する。また, $-1 \leq z \leq 1$ で定義された任意の連続関数を, ルジャンドル関数の級数で表すことができる。(つまり直交完全系を作る。) 境界面が球面の場合には, 与えられた境界条件 (ϕ にはよらない θ のみの関数) から係数 A_l を決めて解を求めることができる。

外部問題の場合は, $R(r)$ の方程式の解の $n = -(l+1)$ の方を採用する。一般の場合

には,

$$u(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} \frac{P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}}{r^{l+1}} \quad (49)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{P_l^{|m|}(\cos \theta)}{r^{l+1}} (a_{lm} \cos m\phi + b_{lm} \sin m\phi) \quad (50)$$

となり, 角度 ϕ によらない場合には,

$$u(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{P_l(\cos \theta)}{r^{l+1}} \quad (51)$$

となる。静電ポテンシャルとの関係では, $l = 0$ の項は $1/r$ に比例し, 点電荷のポテンシャルに対応する。 $l = 1$ の項は $\cos \theta / r^2$ に比例し, z 軸方向を向いた電気双極子のポテンシャルに対応する。

10.7.3 デカルト座標

2次元の長方形領域や3次元の直方体の領域の場合には, x, y または x, y, z の座標系を用いる。2次元の場合, 変数分離型の解 $u(x, y) = X(x)Y(y)$ を仮定してみる。2次元のラプラス方程式に代入すると

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

となり, 両辺を XY で割ると

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \text{定数}$$

となる。定数が正の場合, λ^2 とおくと, $X(x)$ は $e^{\pm \lambda x}$ という指数関数型の解になり, $Y(y)$ は $e^{\pm i \lambda y}$ または $\sin \lambda y, \cos \lambda y$ という三角関数型の解になる。定数が負の場合には $-\lambda^2$ とおくと, $X(x)$ が $e^{\pm i \lambda x}$ または $\sin \lambda x, \cos \lambda x$ という三角関数型の解になり, $Y(y)$ が $e^{\pm \lambda y}$ という指数関数型の解になる。境界条件を満たすように解の形と λ の値を選び, その級数で解を作れる場合がある。

【グリーン関数の方法や，複素解析を使った等角写像の方法など，まだまだ他にも重要なことがたくさんあるけれども時間がなくなってしまった。これから先はいろいろな本を読んだり，問題を解いたりして自分で勉強してください。】