論理学演習問題

学科：　　　　　　　　　　　　番号：　　　　　　　　　　　　氏名：

[1] $(A \cup B \cup C)^C = A^C \cap B^C \cap C^C$，$(A \cap B \cap C)^C = A^C \cup B^C \cup C^C$

であることを示せ．２変数のド・モルガンの定理は使ってよい．

[2] $A+K=B+K$ならば$A=B$であることを証明せよ．

[3] 次の関係を証明せよ．

(1) $(A-B)+B=A \cup B$

(2) $C \cap (A-B)=(C \cap A)-(C \cap B)$

(3) $A-B \subset A$

(4) $(A \cup B) \cup (B-A)=A \cup B$

(5) $A+C \subset (A+B) \cup (B+C)$

[1]

$$\left(A\cup B\cup C\right)^c=\left\{\left(A\cup B\right)\cup C\right\}^c=\left(A\cup B\right)^c\cap C^c=A^c\cap B^c\cap C^c,$$

$$\left(A\cap B\cap C\right)^c=\left\{\left(A\cap B\right)\cap C\right\}^c=\left(A\cap B\right)^c\cup C^c=A^c\cup B^c\cup C^c.$$

一般的な結果は

$$\left(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\right)^c=A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_n^c,\quad \left(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\right)^c=A_1^c\cup A_2^c\cup\cdots\cup A_n^c.$$

(証明は数学的帰納法による．)

[2]

両辺にKを加えれば，$A+K+K=B+K+K.$

しかるに，$K+K=\phi$であるから，$A+\phi=B+\phi.$

また，$A+\phi=(A-\phi)\cup(\phi-A)=(A\cap\phi^c)\cup(\phi\cap A^c)=A$

より，$A=B$

[3]

(1)

$$\left(A-B\right)+B=A\cap B^c+B=(A\cap B^c-B)\cup(B-A\cap B^c)$$

$$=(A\cap B^c\cap B^c)\cup(B\cap(A\cap B^c)^c)=(A\cap B^c)\cup(B\cap(A^c\cup B))$$

$$=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)\cup B=(A\cap B^c)\cup B=(A\cup B)\cap\Omega=A\cup B$$

(2)

$$(C\cap A)-(C\cap B)=(C\cap A)\cap(C\cap B)^c=(C\cap A)\cap(C^c\cup B^c)$$

$$=(C\cap A\cap C^c)\cup(C\cap A\cap B^c)=C\cap(A\cap B^c)=C\cap(A-B)$$

(3) $A-B=A\cap B^c\subset A.$

(4) $\left(A\cup B\right)\cup\left(B-A\right)=A\cup B\cup\left(B\cap A^c\right)=(A\cup B\cup B)\cap(A\cup B\cup A^c)$

$$=(A\cup B)\cap\Omega=A\cup B$$

(5)

$$A+B=(A-B)\cup\left(B-A\right)=(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)$$

$$A+C=(A\cap C^c)\cup(C\cap A^c)$$

$$B+C=(B\cap C^c)\cup(C\cap B^c)$$

$$A+B=(A\cap B^c\cap(C\cup C^c))\cup(B\cap A^c\cap(C\cup C^c))$$

$$=(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C^c)$$

$$B+C=(B\cap C^c\cap(A\cup A^c))\cup(C\cap B^c\cap(A\cup A^c))$$

$$=(A\cap B\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C^c)$$

$$A+C=(A\cap C^c\cap(B\cup B^c))\cup(C\cap A^c\cap(B\cup B^c))$$

$$=(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B^c\cap C^c)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)$$

$\therefore\ A+C\subset(A+B)\cup(B+C)$