1．フーリエ級数

1. プリント p.2 の例 1 の関数（$f(x) = |x| \quad (-\pi \le x < \pi)$ をつなぎ合わせた周期関数）のフーリエ級数を次の手順で求めよう。

   手順 1 $f(x)$ が，偶関数，奇関数，どちらでもない，のどれなのかを判断する。この場合は偶関数なので，p.2 式 (15) の余弦展開で表せる。

   手順 2 p.1 式 (11) に従って，展開係数を計算する。偶関数なので，0 から π の積分を 2 倍すれば良いことに注意。

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx dx \quad (n \ge 1)$$

   a_0 は簡単に求められる。a_n の方は部分積分をすれば良い。

2. プリント p.2 の例 2 の関数（$f(x) = 0 \quad (-\pi \le x < 0), \quad 1 \quad (0 \le x < \pi)$ をつなぎ合わせた周期関数）について，次の 2 つの方法でフーリエ級数を求めなさい。

   方法 1 $f(x)$ そのものは偶関数でも奇関数でもないので p.1 式 (7) の形に展開できる。式 (11), (12) の展開係数をそれぞれ求める。

   方法 2 $f(x) - 1/2$ は奇関数になるので正弦展開で表せることを使う。

3. $-\pi \le x < \pi$ で定義された次の関数をつなぎ合わせた周期関数をフーリエ級数展開しなさい。

   (1) $f(x) = x$ (2) $f(x) = x^2$ (3) $f(x) = |\sin\frac{x}{2}|$ (4) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$

   (5) $f(x) = e^x$ (6) $f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \le x < 0) \\ x & (0 \le x < \pi) \end{cases}$

4. 次の 2 つの場合について，プリント p.4 の 1.5.2 項別積分，1.5.3 項別微分で述べたことが成り立っていることを確かめなさい。

   (a) 問題 1. の $f(x) = |x| \quad (-\pi \le x < \pi)$ をつなぎ合わせた周期関数とその微分 $f'(x)$。（ヒント：$f'(x)$ のフーリエ級数は，問題 2. の結果を使うと簡単にわかる。）

   (b) $f(x) = x^2 \quad (-\pi \le x < \pi)$ をつなぎ合わせた周期関数とその微分 $f'(x)$。（ヒント：問題 3. の (1), (2) の結果を使ってよい。）

5. $f(x) = |x| \quad (-L \le x < L)$ をつなぎ合わせた周期 $2L$ の関数のフーリエ級数展開を求めなさい。

6. $f(x) = \sin\frac{\pi}{L}x \quad (0 \le x < L)$ をつなぎ合わせた周期 L の関数のフーリエ級数展開を求めなさい。（周期が $2L$ でなく，L であることに注意）

7. 問題 3. の (1)〜(6) を複素フーリエ級数（プリント p.5 の 1.6 参照）に展開しなさい。また，その結果を書き直して問題 3. の答と一致することを確かめなさい。

8. 周期 2π の関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

   と展開できるとき，a だけずらした関数 $f(x-a)$ の複素フーリエ級数展開を求めなさい。