２．フーリエ変換

1. 次の関数のフーリエ変換を求めなさい。ただし，a は正の定数とする。

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (|x| \le a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$　　(2) $f(x) = e^{-a|x|}$

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$　（ヒント：この関数のフーリエ変換の式と，(2) の結果のフーリエ逆変換の式を見比べてみる。）

(4) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (0 \le x) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

2. 公式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ を使って，$f(x) = e^{-ax^2}$（ただし $a > 0$）のフーリエ変換 $F(k)$ を次の手順で求めなさい。（普通は，複素積分によって求める。応用数学 III が始まったばかりなので，別の方法で求めることにする。）

（a）$F(0) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ を示しなさい。

（b）$F'(k) = -kF(k)/2a$ であることを示しなさい。ヒントは，

$$\begin{aligned} F'(k) &= \frac{d}{dk}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \frac{d}{dk}\left(e^{-ikx}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -ixe^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \frac{i}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(e^{-ax^2}\right) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

で，この続きを計算しなさい。

（c）$F(k) = Ae^{-bk^2}$ だと仮定する。方程式 $F'(k) = -kF(k)/2a$ を満たし，$F(0) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ となるように定数 A, b を決めなさい。

3. 次の偶関数のフーリエ余弦変換を求めなさい。ただし，a は正の定数とする。

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \le a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} a^2 - x^2 & (|x| \le a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \cos x & (|x| \le \pi) \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$

4. 次の奇関数のフーリエ正弦変換を求めなさい。ただし，a は正の定数とする。

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x \le a) \\ -1 & (-a \le x < 0) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} \sin x & (|x| \le \pi) \\ 0 & (|x| > \pi) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} x & (|x| \le a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$