― 線形システム理論 ―

講義資料：

http://www.ic.sci.yamaguchi-u.ac.jp/Japanese/

参考書：

(1)　安倍斉著；応用微分方程式，森北出版，1987
(2) L．マゼル著　佐藤平八訳；確率・統計・ランダム過程，森北出版，1980
(3)　田代嘉宏著；ラプラス変換とフーリエ解析要論，森北出版，2005

線形システム理論

関数変換論

１　フーリエ級数

２　フーリエ変換

３　ラプラス変換

線形システム論

４　伝達関数

５　ブロック線図

６　過渡応答

７　周波数応答

８　安定判別

９　制御系性能

１．フーリエ級数（Fourier Series）

1.1 直交関数系

$C:[a,b]$で連続な関数の集合

（ｉ）任意の$f(x)\in C, g(x)\in C$に対して

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

を、fとgの内積という。

（ii）任意の、$f(x)\in C$に対して

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

をfのノルム（$Norm$）という。

（iii）$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx=0$の時、
fとgは互いに直交するという。

$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\ \varphi_n(x)$を$C$に属する
関数の列とする時

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ >0 & (i=j)\end{cases}$$

であれば関数列$\{\varphi_n(x)\}$は
直交関数系をなすという。
特に、

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases}$$

であれば、正規直交関数系である
という。

〔例〕

関数系$\{1, \sin mx, \cos nx\}$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$
$(m, n = 1, 2, 3, \cdots)$は直交関数系である
ことを示せ。

(解)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 \ \ (m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \pi \ (m = n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 (m \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi (m = n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = \left[x \right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = \left[-\frac{1}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$\therefore \{1, \sin mx, \cos nx\}$は直交関数系を作る

1.2 フーリエ級数

任意の関数をある直交関数系を用いて展開することをフーリエ展開、その時にできた級数をフーリエ級数という。
直交関数系が三角関数の場合、特に三角フーリエ級数という。
一般に、フーリエ級数とは三角フーリエ級数をさす場合が多い。

$f(x)$を$[-\pi, \pi]$で可積分な関数とする時、
$f(x)$を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

で展開表現することを考える。
a_0, a_n, b_nはどのように決定したらよいか？

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \right] \cos nx dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{a_0}{2} \cos nx + a_n \cos^2 nx) dx$$

$$= a_n \cdot \pi$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \right] \sin nx dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{a_0}{2} \sin nx + b_n \sin^2 nx) dx$$

$$= b_n \pi$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mx \right] \cdot 1 dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \cdot \pi$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 dx}$$

まとめると、

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

ただし、

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

a_n,b_nをフーリエ係数という。

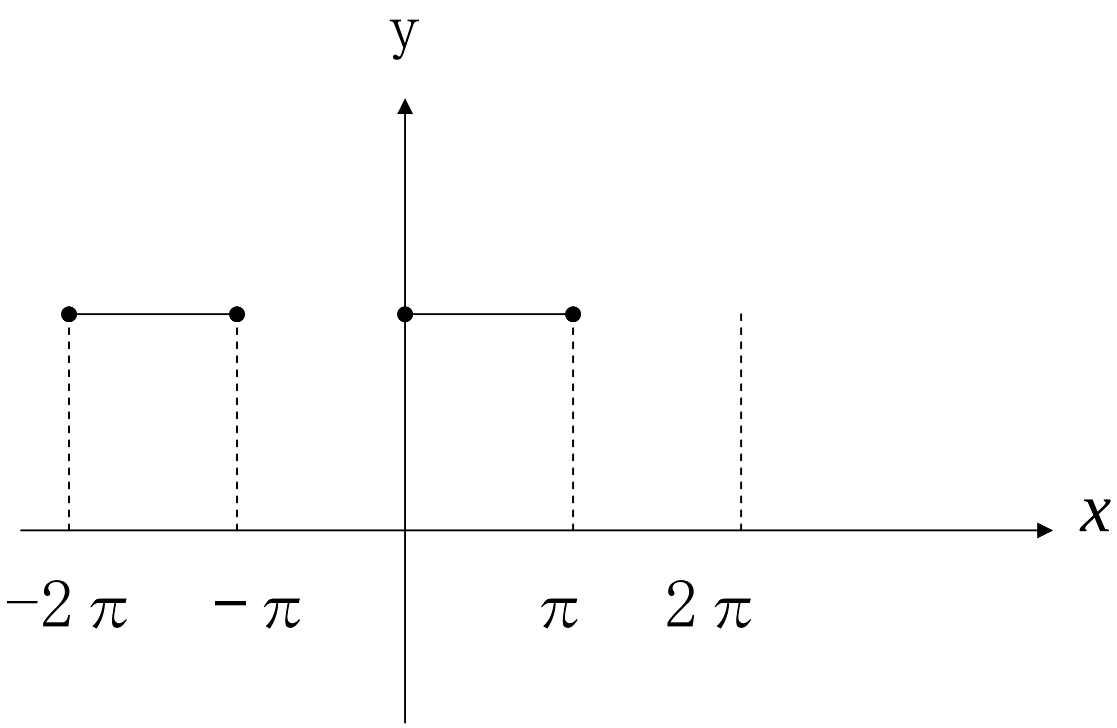
右辺の級数は周期２πの周期関数であるので、$f(x)$も周期２πを持つようにその定義域を広げておく方が便利である。

1. 3 フーリエ級数の例

〔例１〕

$f(x)=0(-\pi<x<0)$, $f(x)=1(0\le x\le\pi)$

のフーリエ級数を求めよ。



(解)

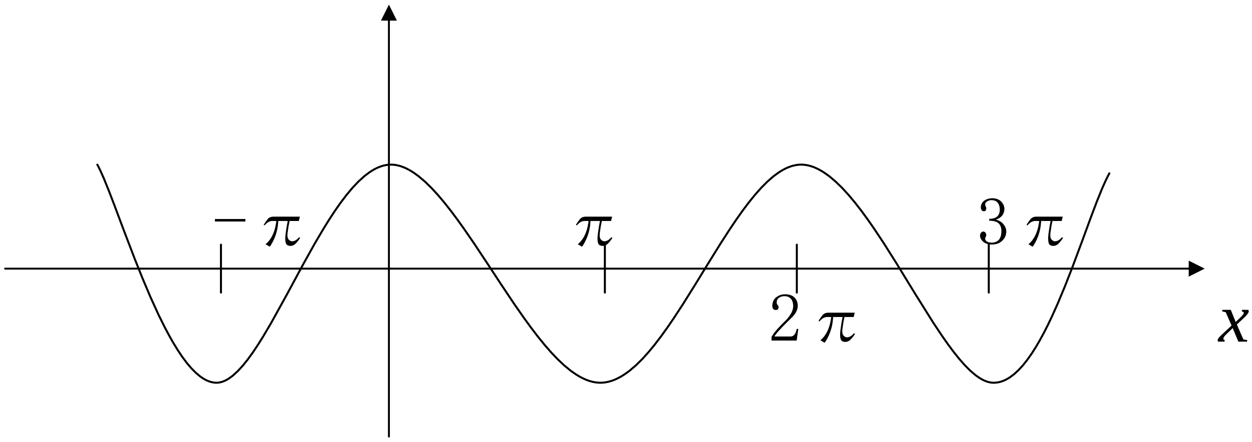
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{n\pi} = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}$$



$$\therefore\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+$$

$$\cdots+\frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}+\cdots)$$

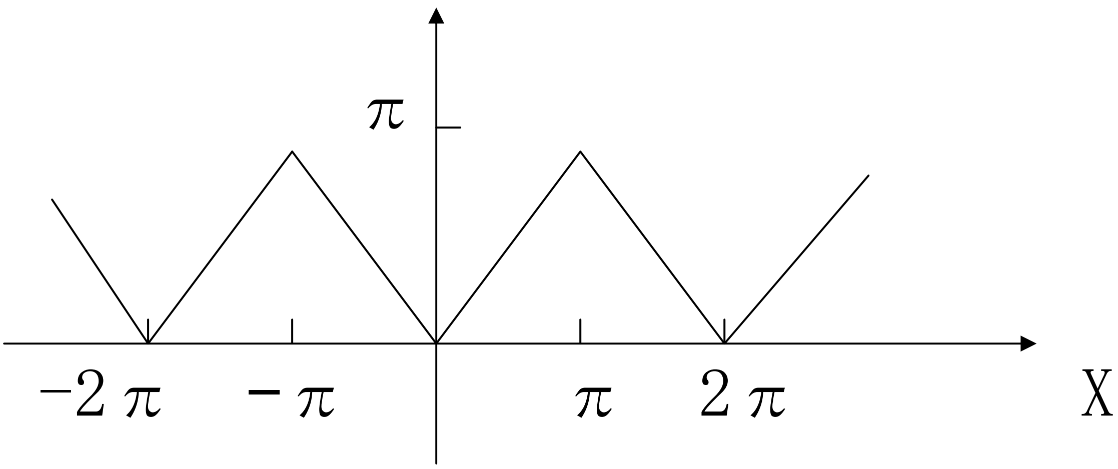
(注)フーリエ級数は不連続点 $x=0$では

$\frac{1}{2}\{f(+0)+f(-0)\}=\frac{1}{2}$ の値を取る

〔例２〕

$$f(x)=|x| \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

をフーリエ級数に展開せよ



(解)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$\left(\begin{aligned} &\int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \end{aligned} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nxdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \left[x\frac{1}{n}\sin nx \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nxdx \right\}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx = -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = 0$$

$\therefore$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left\{(-1)^n-1\right\}\cos nx$$

$n=2m-1$とすると

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{-4}{(2m-1)^2\pi}\cos(2m-1)x$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-$$

$$\frac{4}{\pi}\left(\begin{array}{l}\cos x+\dfrac{\cos 3x}{3^2}+\dfrac{\cos 5x}{5^2}+\cdots \\ +\dfrac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2}+\cdots\end{array}\right)$$

$x=0$とすると

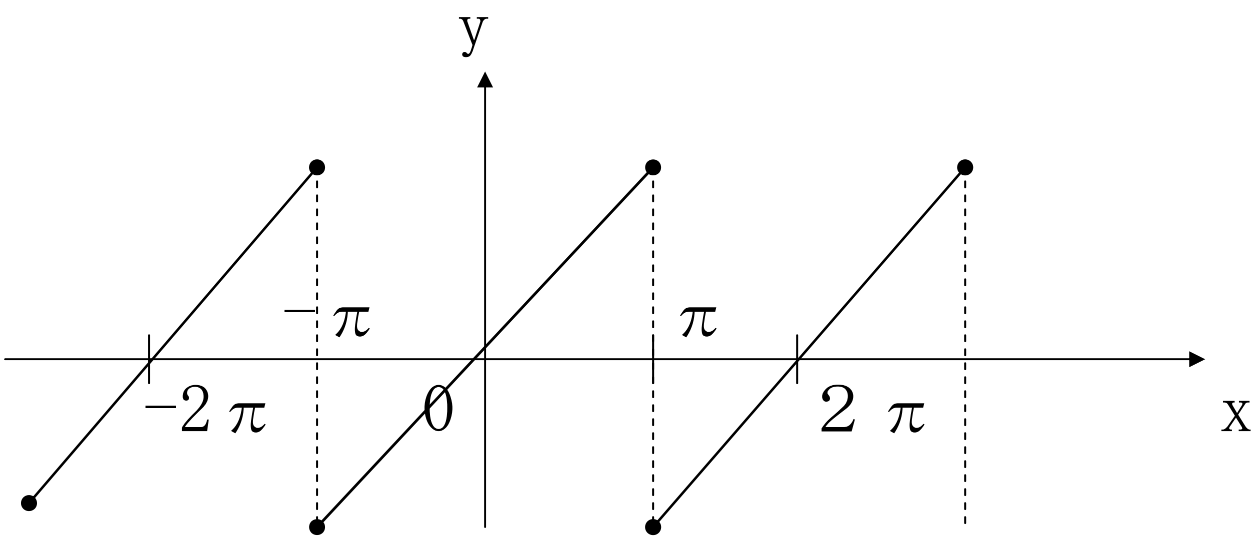
$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$$

〔例３〕

$f(x) = x \ (-\pi < x < \pi)$をフーリエ級数に展開せよ。



(解)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nxdx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nxdx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-x\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nxdx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \left[\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$\therefore\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

$$=2\left(\begin{array}{l}\dfrac{\sin x}{1}-\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}-\dfrac{\sin 4x}{4}+\cdots \\ +(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}+\cdots\end{array}\right)$$

（注）フーリエ級数は不連続点

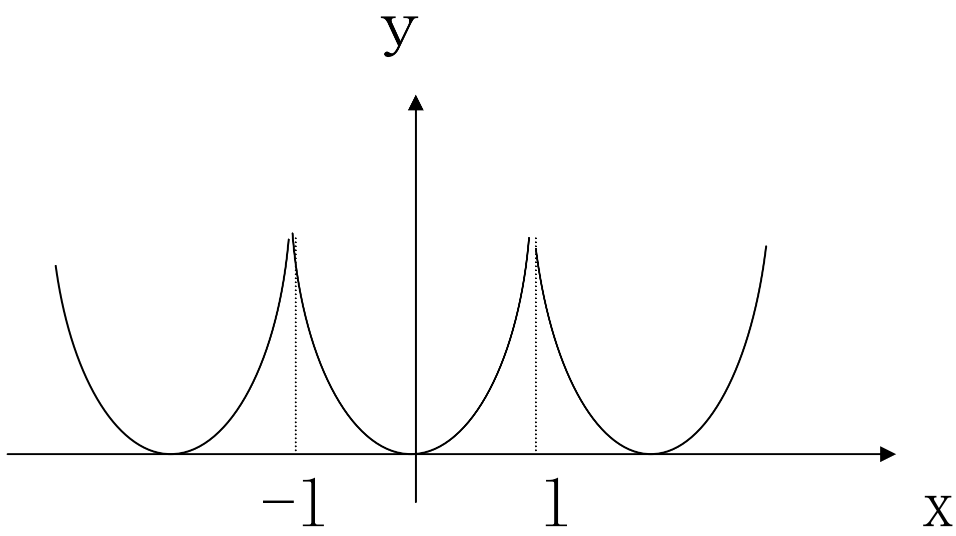
$x=\pi$ では $\dfrac{1}{2}\big(f(\pi+0)+f(\pi-0)\big)=0$

の値をとる。

〔例４〕

$$f(x)=x^2 \ (-l \leq x \leq l)$$

をフーリエ級数に展開せよ。



(解)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}x^2dx$$

$$=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}x^2dx=\frac{2}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{2}{3}l^2$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \\
&= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x^2\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l x^2\cos\frac{n\pi}{l}xdx \\
&= \frac{2}{l}\left\{\left[x^2\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]_0^l - \int_0^l 2x\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}xdx\right\} \\
&= -\frac{4}{n\pi}\int_0^l x\sin\frac{n\pi}{l}xdx \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left\{\left[-x\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\right]_0^l + \int_0^l \frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}xdx\right\} \\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{l^2}{n\pi}\cos n\pi + \left[\frac{l}{n\pi}\cdot\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]_0^l\right) \\
&= \frac{4l^2}{n^2\pi^2}(-1)^n
\end{aligned}
$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} x^2 \sin\frac{n\pi}{l}xdx = 0$$

$$\therefore f(x) = \frac{l^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l^2}{n^2\pi^2}(-1)^n \cdot \cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$= \frac{l^2}{3}$$

$$+\frac{4l^2}{\pi^2}\left(-\frac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1^2} + \frac{\cos\frac{2\pi}{l}x}{2^2} + \cdots + (-1)^n\frac{\cos\frac{n\pi}{l}x}{n^2} + \cdots \right)$$

ここで　$l=\pi, x=0$ とすれば

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots\right)$$

$$\frac{\pi^2}{12}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$