7．熱伝導方程式

1. 長さ L の棒についての一次元熱伝導方程式について考える。方程式と境界条件は

$$\begin{aligned} &\text{方程式} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ &\text{境界条件} \quad T(0,t) = T(L,t) = 0 \end{aligned}$$

で共通とする。次の 3 種類の初期条件に対する解を求めなさい。

(1) $T(x,0) = C \sin \dfrac{\pi x}{L}$

(2) $T(x,0) = \begin{cases} Dx & (0 < x < L/2) \\ D(L-x) & (L/2 < x < L) \end{cases}$

(3) $T(x,0) = \begin{cases} C & (L/4 < x < 3L/4) \\ 0 & (0 < x < L/4, 3L/4 < x < L) \end{cases}$

2. 無限領域の 1 次元熱伝導で，初期条件が

$$T(x,0) = \phi(x) = C \exp\left\{-\frac{x^2}{B}\right\}$$

であるとする (B, C は正の定数)。p.36 の式 (7)

$$\begin{aligned} T(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} U(x,\xi,t)\phi(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right\} C \exp\left\{-\frac{\xi^2}{B}\right\} d\xi \end{aligned}$$

を計算して，$T(x,t)$ を求めなさい。ただし，$a > 0$ のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

となることを使ってよい。