3 命題論理
3.1 命題

命題(proposition)：
内容の真偽がはっきりしている文章

例：
「３は素数である」：真(true)
「１は偶数である」：偽(false)
「今日は雨である」：天気により true
or false
の判断がつく

○　論理演算
命題を組み合わせて別の命題を作る

P：Ｓ君は投手である
Q：Ｓ君は左ききである

ＰかつＱ：　Ｓ君は投手で左ききである
ＰまたはＱ：　Ｓ君は投手または左きき
　　　　　　　である
Ｐでない：　Ｓ君は投手でない

「かつ，または，でない」：　論理演算

○　論理積(conjunction)

P かつ Q,　　P *and* Q,　$P \wedge Q$

命題 P が真(true)の時, P の真理値(truth value)を T, 偽(false)の時 P の真理値を F で表す.

P: S 君は投手である
Q: S 君は左ききである

$P \wedge Q$ ： S 君は投手であり，左ききである

P, Q の真偽と $P \wedge Q$ の真偽の関係

真理値表(truth table)

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$P \wedge Q$ は $\{T,F\}\times\{T,F\}\rightarrow\{T,F\}$ である

○ 論理和(disjunction)

P またはQ,　P or Q,　$P \vee Q$

真理値表(truth table)

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

$P \vee Q$は$\{T,F\} \times \{T,F\} \to \{T,F\}$である

○ 否定(negation)

P でない, $not\ P$, $\overline{P}$

真理値表(truth table)

P	$\overline{P}$
T	F
F	T

$\overline{P}$ は $\{T,F\} \to \{T,F\}$ である

○ 含意（がんい）（implication）

P ならば Q,　$if\ \ P\ \ then\ \ Q$,　$P \to Q$

真理値表(truth table)

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$P \to Q$ は $\{T,F\}\times\{T,F\}\to\{T,F\}$ である

前提条件 P が間違っていれば, 何を言ってもウソではない（真）

（例）

$(P \wedge \overline{Q}) \rightarrow R$の真理値を示せ

P	Q	R	$(P \wedge \overline{Q}) \rightarrow R$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

○ その他の論理演算

$\{T,F\}^2 \to \{T,F\}$の関数で考え得る

全てを列挙すると

		f_0	f_1	f_2	f_3
P	Q	T	$P \vee Q$	$Q \to P$	P
T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F

		f_4	f_5	f_6	f_7
P	Q	$P \to Q$	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F

		f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
P	Q	$P \mid Q$	$P \oplus Q$	$\overline{Q}$	$\overline{P \to Q}$
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F

		f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q \to P}$	$P \downarrow Q$	F
T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F

$P \leftrightarrow Q$: 同値(equivalence)

$P|\ Q$: $NAND$ ($\overline{P \wedge Q}$と真理値は同じになる)

$P \oplus Q$: 排他的論理和(exclusive or)

$P \downarrow Q$: NOR ($\overline{P \vee Q}$と真理値は同じになる)

○ 完全系（任意のブール関数（論理関数）を表すために必要最小限の演算子の組）

① すべての論理演算（f_0〜f_{15}）は$\vee, \wedge, \bar{\ }$を使って表すことができる

$\{\vee, \wedge, \bar{\ }\}$は完全系を成す

(例)

f_4： $P \to Q$

P	Q	$P \to Q$	$\overline{P} \vee Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

即ち，$P \to Q$の真理値と$\overline{P} \vee Q$の真理値が同じになるので

$P \to Q = \overline{P} \vee Q$である

○　$P \to Q$の真理値表より$\overline{P} \vee Q$の
　　導出の仕方

まず，$P \to Q$の真理値で，

Tの部分に着目する

(1) $P = T$，$Q = T$

(2) $P = F$，$Q = T$

(3) $P = F$，$Q = F$

の３つの場合で

$P \to Q$はTになる

そこで，

(1)の場合のみTとなる論理式は　$P \wedge Q$

(2)の場合のみTとなる論理式は　$\overline{P} \wedge Q$

(3)の場合のみTとなる論理式は　$\overline{P} \wedge \overline{Q}$

即ち，$P \to Q$は$P \wedge Q$または$\overline{P} \wedge Q$

または$\overline{P} \wedge \overline{Q}$の時のみ$T$となり，

それ以外ではFとなる

$\therefore\ P \to Q = (P \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$

ここで，$\langle \{T, F\}, \vee, \wedge, F, T \rangle$はブール代数，

即ち命題論理はブール代数であるので，

結合律，分配律，ド・モルガンの法則，

その他が成立する．

即ち,

$$P \to Q = (P \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$$

$$= (P \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge \overline{Q})$$

$$= ((P \vee \overline{P}) \wedge Q) \vee (\overline{P} \wedge (Q \vee \overline{Q}))$$

$$= Q \vee \overline{P}$$

$$= \overline{P} \vee Q$$

同様にf_0〜f_{15}の全てについても,
上記のような方法で$\vee, \wedge, \overline{\ }$により
全て表現できる

$$f_0 = T(= P \vee \overline{P})$$

$$f_1 = P \vee Q$$

$$f_2 = Q \rightarrow P = \overline{Q} \vee P$$

$$f_3 = P$$

$$f_4 = P \rightarrow Q = \overline{P} \vee Q$$

$$f_5 = Q$$

$$f_6 = P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$= (\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{Q} \vee P)$$

$$= ((\overline{P} \vee Q) \wedge \overline{Q}) \vee ((\overline{P} \vee Q) \wedge P)$$

$$= (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge Q)$$

$$f_7 = P \wedge Q$$

$$f_8 = P \mid Q = \overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$$

$$f_9 = P \oplus Q = (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$$

$$f_{10} = \overline{Q}$$

$$f_{11} = \overline{P \to Q} = \overline{\overline{P} \vee Q} = P \wedge \overline{Q}$$

$$f_{12} = \overline{P}$$

$$f_{13} = \overline{Q \to P} = \overline{\overline{Q} \vee P} = Q \wedge \overline{P}$$

$$f_{14} = P \downarrow Q = \overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

$$f_{15} = F \ (= P \wedge \overline{P})$$

② $\{\wedge, \bar{\ }\}$は完全系をなす

$\because\ P \vee Q = \overline{\overline{P} \wedge \overline{Q}}$より

$\vee$は$\wedge$と$\bar{\ }$より表される

③ $\{\vee, \bar{\ }\}$は完全系をなす

$\because\ P \wedge Q = \overline{\overline{P} \vee \overline{Q}}$より

$\wedge$は$\vee$と$\bar{\ }$より表される

④ $\{\rightarrow, \bar{\ }\}$は完全系をなす

$\because\ P \rightarrow Q = \overline{P} \vee Q$より

$P \vee Q = \overline{P} \rightarrow Q$となり

$\vee$は$\rightarrow$と$\bar{\ }$より表される

⑤ $\{|\}$は完全系をなす

$\because\ P|Q=\overline{P\wedge Q}$より

$P|\ P=\overline{P\wedge P}=\overline{P}$

$(P|Q)|(P|Q)=\overline{\overline{P\wedge Q}\wedge\overline{P\wedge Q}}$

$=(P\wedge Q)\vee(P\wedge Q)$

$=P\wedge Q$

i.e. $\overline{P}=P|\ P,$

$P\wedge Q=(P|Q)|(P|Q)$より

$\overline{\ }$および$\wedge$は$|$により表される

⑥ $\{\downarrow\}$は完全系をなす

$\because\ P\downarrow Q=\overline{P\vee Q}$より

$P\downarrow P=\overline{P\vee P}=\overline{P}$

$(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)=\overline{\overline{P\vee Q}\vee\overline{P\vee Q}}$

$=(P\vee Q)\wedge(P\vee Q)$

$=P\vee Q$

i.e. $\overline{P}=P\downarrow P,$

$P\vee Q=(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)$より

$\overline{\quad}$および$\vee$は$\downarrow$により表される

○　命題論理の論理式

$\left\langle \{T,F\},\vee,\wedge,F,T \right\rangle$はブール代数である

この代数のブール式を命題論理の

論理式という

ブール式αが表すブール関数

$f_\alpha : \{T,F\}^n \to \{T,F\}$

を（命題）論理関数という

論理式αの各変数にTまたはFの値を

代入することを，論理式αに解釈を

与えるという．その結果，論理式αの

値TまたはFが決定される．

(例)

$\alpha = (P \to Q) \vee R$で

αに$P = T, Q = F, R = T$という

解釈を与えると

$\alpha = (T \to F) \vee T = T$となる

P	Q	R	$(P \to Q) \vee R$	$\overline{(P \to Q) \vee R}$
T	T	T	T	F
T	T	F	T	F
T	F	T	T	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	T	F	T	F
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

$$f_\alpha : \ \{T, F\}^3 \to \{T, F\}$$

$$\begin{aligned} f_\alpha(P, Q, R) &= (P \to Q) \vee R \\ &= \overline{P} \vee Q \vee R \end{aligned}$$

真理値表から$f_\alpha(P,Q,R)$の論理式の求め方

記号簡単のため$\vee$を＋で,
$\wedge$を・で, Fを０, Tを１で
表すことにすると

$$
\begin{aligned}
& f_\alpha(P,Q,R) \\
&= f_\alpha(0,0,0)\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} + f_\alpha(0,0,1)\overline{P}\,\overline{Q}\,R \\
&+ f_\alpha(0,1,0)\overline{P}\,Q\,\overline{R} + f_\alpha(0,1,1)\overline{P}\,Q\,R \\
&+ f_\alpha(1,0,0)P\,\overline{Q}\,\overline{R} + f_\alpha(1,0,1)P\,\overline{Q}\,R \\
&+ f_\alpha(1,1,0)P\,Q\,\overline{R} + f_\alpha(1,1,1)P\,Q\,R \\
&= \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} + \overline{P}\,\overline{Q}\,R + \overline{P}\,Q\,\overline{R} + \overline{P}\,Q\,R \\
&+ P\,\overline{Q}\,R + P\,Q\,\overline{R} + P\,Q\,R \qquad (1)
\end{aligned}
$$

（主加法標準形）

$$\overline{f_\alpha(P,Q,R)}$$

$$= \overline{f_\alpha(0,0,0)}\,\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} + \overline{f_\alpha(0,0,1)}\,\overline{P}\,\overline{Q}\,R$$

$$+ \overline{f_\alpha(0,1,0)}\,\overline{P}\,Q\,\overline{R} + \overline{f_\alpha(0,1,1)}\,\overline{P}\,Q\,R$$

$$+ \overline{f_\alpha(1,0,0)}\,P\,\overline{Q}\,\overline{R} + \overline{f_\alpha(1,0,1)}\,P\,\overline{Q}\,R$$

$$+ \overline{f_\alpha(1,1,0)}\,P\,Q\,\overline{R} + \overline{f_\alpha(1,1,1)}\,P\,Q\,R$$

$$= \overline{f_\alpha(1,0,0)}\,P\,\overline{Q}\,\overline{R} = P\,\overline{Q}\,\overline{R}$$

$$\therefore\ f_\alpha(P,Q,R) = \overline{P\,\overline{Q}\,\overline{R}} = \overline{P} + Q + R$$

$$(= \overline{P} \vee Q \vee R) \quad (2)$$

(主乗法標準形)

(1) から (2) への式変形

$$
\begin{aligned}
f_\alpha &= \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} + \overline{P}\,\overline{Q}\,R + \overline{P}\,Q\,\overline{R} + \overline{P}\,Q\,R \\
&\quad + P\,\overline{Q}\,R + P\,Q\,\overline{R} + P\,Q\,R \\
&= (\overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} + \overline{P}\,\overline{Q}\,R + \overline{P}\,Q\,\overline{R} + \overline{P}\,Q\,R) \\
&\quad + (\overline{P}\,\overline{Q}\,R + \overline{P}\,Q\,R + P\,\overline{Q}\,R + P\,Q\,R) \\
&\quad + (\overline{P}\,Q\,\overline{R} + \overline{P}\,Q\,R + P\,Q\,\overline{R} + P\,Q\,R) \\
&= (\overline{P}\,\overline{Q} + \overline{P}\,Q) + (\overline{P}\,R + P\,R) + (\overline{P}\,Q + P\,Q) \\
&= \overline{P} + Q + R \\
&= \overline{P} \vee Q \vee R
\end{aligned}
$$

［問題］

$$f(P,Q,R)=\begin{cases} T:\ P,Q,R\text{の値で}T\text{の値を} \\ \quad\text{とるものが多い場合} \\ F:\text{その他の場合} \end{cases}$$

となるような関数$f(P,Q,R)$を作れ.

このような関数を多数決関数という.

［解答］

P	Q	R	$f(P,Q,R)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

真理値表より

$$f(P,Q,R) = (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \overline{R})$$
$$\vee (P \wedge \overline{Q} \wedge R) \vee (\overline{P} \wedge Q \wedge R)$$

［問題］

次の等式を式の変形により証明せよ．

(1) $P \to Q = \overline{Q} \to \overline{P}$ （対偶）

(2) $P \to (Q \vee R) = (P \wedge \overline{Q}) \to R$

(3) $(P_1 \wedge P_2) \to (P_3 \wedge P_4)$

$= (P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \to P_4$

［解答］

(1) $P \to Q = \overline{P} \vee Q$

$= Q \vee \overline{P} = \overline{Q} \to \overline{P}$

(2) $P \to (Q \vee R)$

$= \overline{P} \vee (Q \vee R) = (\overline{P} \vee Q) \vee R$

$= \overline{(P \wedge \overline{Q})} \vee R$

$= (P \wedge \overline{Q}) \to R$

(3) 等式は成立しない

反例：$P_1 = T, P_2 = T, P_3 = F, P_4 = T$

とすると

左辺＝$(T \wedge T) \to (F \wedge T) = T \to F = F$

右辺＝$(T \wedge T \wedge F) \to T = F \to T = T$

より左辺$\neq$右辺

○ 同値な論理式

（例）　$P \to Q = \overline{Q} \to \overline{P}$　　（対偶）

「PならばQ」と

「QでないならばPでない」

こととは同値であるため,

前者を示すのが難しい場合には

後者を示してもよい

（例）

「Pでないならば(QまたはR)である」

を証明するには,

$$\overline{P} \to (Q \vee R)$$

$$= P \vee (Q \vee R)$$

$$= \overline{Q} \to (P \vee R)$$

$$= \overline{R} \to (P \vee Q)$$

より，上記のいずれか一つを

証明すればよい.

○ 恒真命題

(tautology トートロジー)

任意の解釈のもとで真となる命題

(例) $P \vee (P \to Q)$ はトートロジーである

$$
\begin{aligned}
(\because)\ P \vee (P \to Q) &= P \vee (\overline{P} \vee Q) \\
&= (P \vee \overline{P}) \vee Q \\
&= T \vee Q \\
&= T
\end{aligned}
$$

［問題］以下の命題はトートロジーであることを示せ．

（1）　$P \to (Q \to P)$

（2）　$(P \land (P \to Q)) \to Q$

[解答]

(1) $P \to (Q \to P)$

$= P \to (\overline{Q} \vee P)$

$= \overline{P} \vee \overline{Q} \vee P = T$

(2) $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$

$= (P \wedge (\overline{P} \vee Q)) \to Q$

$= (\overline{(P \wedge P)} \vee (P \wedge Q)) \to Q$

$= (P \wedge Q) \to Q$

$= \overline{P \wedge Q} \vee Q$

$= \overline{P} \vee \overline{Q} \vee Q$

$= T$

○推論

トートロジーの利用

「A君またはB君の意見が正しい；

B君の意見は正しくない；

ならばA君の意見が正しい」

この推論は正しいか？

P＝「A君の意見が正しい」

Q＝「B君の意見が正しい」

上記の推論は

「$(P \vee Q$かつ$\overline{Q})$ ならばP」

としているが，これは

$$((P \vee Q) \wedge \overline{Q}) \to P = \overline{((P \vee Q) \wedge \overline{Q})} \vee P$$

$$= \overline{P \vee Q} \vee Q \vee P$$

$$= \overline{(P \vee Q)} \vee (P \vee Q)$$

$$= T$$

より$((P \vee Q) \wedge \overline{Q}) \to P$は
トートロジーである.

即ち，いかなる解釈に対しても
これは成立するので上記の推論は
正しいと言える.

各種の推論規則

○ $((P \vee Q) \wedge \overline{Q}) \rightarrow P$

○ $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$

(modus ponens)

$$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$$

$$= \overline{((P \rightarrow Q) \wedge P)} \vee Q$$

ドモルガン

$$= \overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee \overline{P} \vee Q$$

$$= \overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee (\overline{P} \vee Q)$$

$$= T$$

○ $((P \to Q) \land \overline{Q}) \to \overline{P}$

(modus tollens)

$$((P \to Q) \land \overline{Q}) \to \overline{P}$$

$$= \overline{(\overline{P} \lor Q) \land \overline{Q}} \lor \overline{P}$$

$$= \overline{(\overline{P} \lor Q)} \lor Q \lor \overline{P}$$

$$= \overline{(\overline{P} \lor Q)} \lor (\overline{P} \lor Q)$$

$$= T$$

○ $((P \to Q) \land (Q \to R)) \to (P \to R)$

(三段論法)

$$
\begin{aligned}
&((P \to Q) \land (Q \to R)) \to (P \to R) \\
&= \overline{(\overline{P} \lor Q) \land (\overline{Q} \lor R)} \lor (\overline{P} \lor R) \\
&= (P \land \overline{Q}) \lor (Q \land \overline{R}) \lor (\overline{P} \lor R) \\
&= ((P \land \overline{Q}) \lor \overline{P}) \lor ((Q \land \overline{R}) \lor R) \\
&= ((P \lor \overline{P}) \land (\overline{Q} \lor \overline{P})) \lor \\
&\quad ((Q \lor R) \land (R \lor \overline{R})) \\
&= (\overline{Q} \lor \overline{P}) \lor (Q \lor R) \\
&= T
\end{aligned}
$$

○ $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S))$
$\rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S))$

$$
\begin{aligned}
&((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \\
&\rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S)) \\
&= ((\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{R} \vee S)) \\
&\rightarrow (\overline{(P \wedge R)} \vee (Q \wedge S)) \\
&= \overline{(\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{R} \vee S)} \\
&\vee (\overline{(P \wedge R)} \vee (Q \wedge S)) \\
&= \overline{(\overline{P} \vee Q)} \vee \overline{(\overline{R} \vee S)} \\
&\vee (\overline{(P \wedge R)} \vee (Q \wedge S))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (P \wedge \overline{Q}) \vee (R \wedge \overline{S}) \\
&\vee (\overline{P} \vee \overline{R}) \vee (Q \wedge S) \\
&= ((P \vee \overline{P}) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q})) \\
&\vee ((R \vee \overline{R}) \wedge (\overline{S} \vee \overline{R})) \vee (Q \wedge S) \\
&= (\overline{P} \vee \overline{Q}) \vee (\overline{S} \vee \overline{R}) \vee (Q \wedge S) \\
&= (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{S} \vee \overline{R} \vee Q) \\
&\wedge (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{S} \vee \overline{R} \vee S) \\
&= T \wedge T \\
&= T
\end{aligned}
$$

(P*orR*)は式全体でor式だから
カッコ外してもいい

○ $(((P \to Q) \wedge (R \to S))$

$\wedge (\overline{Q} \vee \overline{S})) \to (\overline{P} \vee \overline{R})$

$$((P \to Q) \wedge (R \to S))$$

$$\wedge(\overline{Q} \vee \overline{S}) \to (\overline{P} \vee \overline{R})$$

$$= \overline{(\overline{P} \vee Q) \wedge (\overline{R} \vee S) \wedge (\overline{Q} \vee \overline{S})}$$

$$\vee(\overline{P} \vee \overline{R})$$

$$= (P \wedge \overline{Q}) \vee (R \wedge \overline{S})$$

$$\vee(Q \wedge S) \vee (\overline{P} \vee \overline{R})$$

orだからカッコ外していい

$$= (P \wedge \overline{Q}) \vee \overline{P} \vee (R \wedge \overline{S})$$

$$\vee \overline{R} \vee (Q \wedge S)$$

$$= ((P \vee \overline{P}) \wedge (\overline{P} \vee \overline{Q}))$$

$$\vee((R \vee \overline{R}) \wedge (\overline{S} \vee \overline{R})) \vee (Q \wedge S)$$

$$= (\overline{P} \vee \overline{Q}) \vee (\overline{S} \vee \overline{R}) \vee (Q \wedge S)$$

$$= (\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{S} \vee \overline{R} \vee Q)$$

$$\wedge(\overline{P} \vee \overline{Q} \vee \overline{S} \vee \overline{R} \vee S)$$

$$= T \wedge T$$

$$= T$$

その他多数