５． １次元波動方程式

1. ストークスの公式は，無限区間での１次元波動方程式の解を与える。次のそれぞれの初期条件について，$t>0$ での解を求めなさい。また，解の時間変化の様子を説明しなさい。

   (1) $u(x,0)=e^{-x^2},\quad u_t(x,0)=0$
   (2) $u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=\sin x$

2. 半無限区間 $0\le x$ の場合にも，ストークスの公式を応用できる。
   （a）まず，固定端

   $$\text{境界条件}\ u(0,t)=0 \tag{1}$$
   $$\text{初期条件}\ u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)\quad (0\le x) \tag{2}$$

   の場合を考える。次のように，初期条件を奇関数として $x<0$ 側に拡張する。

   $$\Phi(x)=\begin{cases}\phi(x) & (0\le x)\\ -\phi(-x) & (x<0)\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & (0\le x)\\ -\psi(-x) & (x<0)\end{cases}$$

   これにストークスの公式を適用すると，

   $$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\Phi(x-vt)+\Phi(x+vt)\right\}+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\Psi(s)ds \tag{3}$$

   となる。この $u(x,t)$ が境界条件 (1) を満たすことを示しなさい。（初期条件 (2) を満たすのは明らか。）
   （b）次に，自由端

   $$\text{境界条件}\ u_x(0,t)=0 \tag{4}$$
   $$\text{初期条件}\ u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x)\quad (0\le x) \tag{5}$$

   の場合は，初期条件を偶関数として $x<0$ 側に拡張する。

   $$\Phi(x)=\begin{cases}\phi(x) & (0\le x)\\ \phi(-x) & (x<0)\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x) & (0\le x)\\ \psi(-x) & (x<0)\end{cases}$$

   この場合には，式 (3) で与えられる $u(x,t)$ が境界条件 (4) を満たすことを示しなさい。

3. 有限区間 $0<x<L$ において，次の条件の下で解を求めなさい。

   sinπ と一緒だからa=1

   (1) $u(x,0)=\sin 3\pi x/L,\ u_t(x,0)=0\quad (0<x<L)$
   $u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0$
   (2) $u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=5\sin\pi x/L\quad (0<x<L)$
   $u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0$
   (3) $u(x,0)=\begin{cases}\frac{2hx}{L} & (0\le x\le L/2)\\ \frac{2h(L-x)}{L} & (L/2\le x\le L)\end{cases},\quad u_t(x,0)=0\quad (0<x<L)$

   -Lまで拡張すると周期2Lの奇関数になる

   $u(0,t)=0,\quad u(L,t)=0$