力学 II

力学 I では質点の力学を中心に学んだ。この授業の前半では，いくつもの質点の集まり（質点系）や、大きさのある物体（ただし簡単のために変形は無視できる剛体）の力学を調べる。後半では、ニュートン力学とはまったく別の見方をする解析力学の基礎について述べる。

1　2 体問題

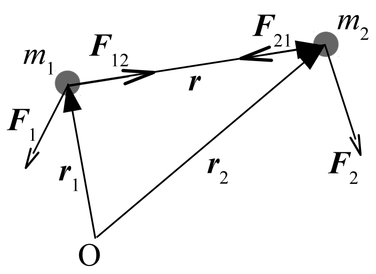

図 1　2 体系の相互作用（引力の場合）

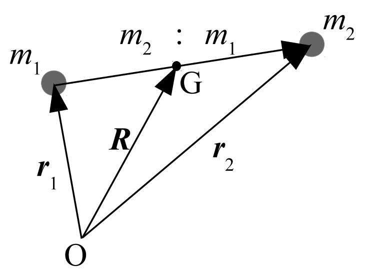

図 2　2 体の重心

図 1 のように相互作用をしている 2 つの質点の運動を考える。これを 2 体問題という。$\boldsymbol{F}_{12}$ と $\boldsymbol{F}_{21}$ は相互作用の力で内力と呼ばれる。$\boldsymbol{F}_{12}$ は質点 1 が質点 2 から受ける力であり，$\boldsymbol{F}_{21}$ は質点 2 が質点 1 から受ける力である。ニュートンの第 3 法則「作用・反作用の法則」から

$$\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0 \tag{1.1}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{F}_1$ と $\boldsymbol{F}_2$ は質点 1,2 以外の物体から働く力で外力と呼ばれる。運動方程式は次のように書ける。

$$m_1 \frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{12} \tag{1.2}$$

$$m_2 \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{21} \tag{1.3}$$

式 (1.2) と (1.3) を足し合わせ、(1.1) を使って変形すると

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2) = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

$$(m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}\right) = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{1.4}$$

となる。ここで，重心 G の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ と全質量 M を

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad M \equiv m_1 + m_2 \tag{1.5}$$

で定義する。2 体問題の場合，重心は質点 1 と 2 を結ぶ直線を $m_2 : m_1$ に内分する点である ($m_1 : m_2$ ではないことに注意)。図 2 を使って計算してみると，確かに

$$\boldsymbol{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} = \boldsymbol{R} \tag{1.6}$$

となる。(1.4), (1.5) より重心の運動方程式

$$M\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{1.7}$$

が得られる。したがって，全質量 M と全外力が重心に集中していると考えて，普通の質点の運動方程式と同様に解けばよいことになる。重心の運動に内力は影響しないことに注意！

外力が 0，または外力の合力 $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$ の場合には，重心の加速度が 0 になる。つまり，最初に重心が静止していれば静止を続け，運動していればそのままの速度で運動を続ける。(1.5) 式を使うと，系全体の運動量 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = M\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} \tag{1.8}$$

と表せ，（全質量）×（重心の速度）に等しいことがわかる。

次に，式 (1.3) を m_2 で割ったものと式 (1.2) を m_1 で割ったものの引き算をすると，

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = \frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2} - \frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1} + \frac{\boldsymbol{F}_{21}}{m_2} - \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1} = \frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2} - \frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1} + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\boldsymbol{F}_{21} \tag{1.9}$$

となる。ここで質点 1 から見た質点 2 の相対位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ と換算質量 μ を

$$\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1, \quad \frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{1.10}$$

で定義する。(1.9), (1.10) より相対位置の方程式

$$\mu\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \left(\frac{\mu}{m_2}\boldsymbol{F}_2 - \frac{\mu}{m_1}\boldsymbol{F}_1\right) + \boldsymbol{F}_{21} \tag{1.11}$$

が得られる。内力 $\boldsymbol{F}_{21}$ は相対位置 $\boldsymbol{r}$ で決まるのに対して，外力 $\boldsymbol{F}_2$ と $\boldsymbol{F}_1$ は相対位置 $\boldsymbol{r}$ だけでは決まらない。そのため，この方程式を解くのは簡単ではないことが多い。特別な場合として，(1) 外力が無い，(2) 外力が一様な重力 $\boldsymbol{F}_1 = m_1\boldsymbol{g}, \boldsymbol{F}_2 = m_2\boldsymbol{g}$，のどちらかであれば，

$$\mu\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{21}(\boldsymbol{r}) \tag{1.12}$$

となり，換算質量 μ を持った 1 個の質点の運動方程式と同じ形になる。

重心の位置 $\boldsymbol{R}$ と相対位置 $\boldsymbol{r}$ が時間の関数として求められれば，それぞれの質点の位置は次のように表せる。

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{R}(t) - \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}(t), \qquad \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{R}(t) + \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}(t) \tag{1.13}$$

【3 体以上になると，解析的に解くことができるのは特別な場合に限られる。】

2　2 体の連成振動

2.1　2 体問題の一般論を使って

図 3 のようにばねでつながれた 2 つの小物体の振動を考える。つり合いの位置からの変位を x_1, x_2 とすると運動方程式は次のようになる。

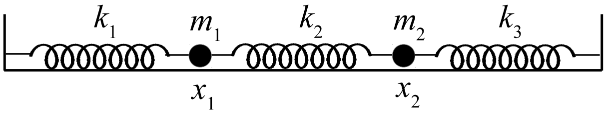

図 3　2 体の連成振動

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1),\quad (-k_1x_1\text{が外力 }F_1,\ k_2(x_2-x_1)\text{ が内力 }F_{12}) \tag{2.1}$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=-k_3x_2-k_2(x_2-x_1),\quad (-k_3x_2\text{が外力 }F_2,\ -k_2(x_2-x_1)\text{ が内力 }F_{21}) \tag{2.2}$$

前節の一般論から，重心と相対位置の「つり合いの状態からのずれ」についての方程式は次のように書ける。

$$M\frac{d^2X}{dt^2}=-k_1x_1-k_3x_2 \tag{2.3}$$

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{\mu}{m_2}(-k_3x_2)-\frac{\mu}{m_1}(-k_1x_1)\right)-k_2x \tag{2.4}$$

$$\text{ここで }M=m_1+m_2,\quad X=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\quad x=x_2-x_1,\quad \frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2} \tag{2.5}$$

簡単のために $m_1=m_2=m$, $k_1=k_2=k_3=k$ だとすると，

$$M=2m,\quad X=\frac{x_1+x_2}{2},\quad x=x_2-x_1,\quad \mu=\frac{m}{2} \tag{2.6}$$

となる。運動方程式は次のように整理できて，

$$2m\frac{d^2X}{dt^2}=-k(x_1+x_2)=-2kX \tag{2.7}$$

$$\frac{m}{2}\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{2}(x_2-x_1)-k(x_2-x_1)=-\frac{3k}{2}x \tag{2.8}$$

結局，X と x についてそれぞれ単振動の方程式

$$\frac{d^2X}{dt^2}=-\frac{k}{m}X,\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{3k}{m}x \tag{2.9}$$

が得られることになる。一般解は A_1,A_2,ϕ_1,ϕ_2 を任意定数として

$$X=A_1\cos(\omega_1t+\phi_1),\quad x=A_2\cos(\omega_2t+\phi_2),\quad \text{ここで }\omega_1\equiv\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \omega_2\equiv\sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{2.10}$$

である。それぞれの質点の座標は

$$x_1=X-\frac{1}{2}x=A_1\cos(\omega_1t+\phi_1)-\frac{A_2}{2}\cos(\omega_2t+\phi_2) \tag{2.11}$$

$$x_2=X+\frac{1}{2}x=A_1\cos(\omega_1t+\phi_1)+\frac{A_2}{2}\cos(\omega_2t+\phi_2) \tag{2.12}$$

となる。定数に適当な値を入れてグラフを描くと，例えば図 4 のように複雑な時間変化をする。これは，2 つの角振動数の比が無理数になっているからである。

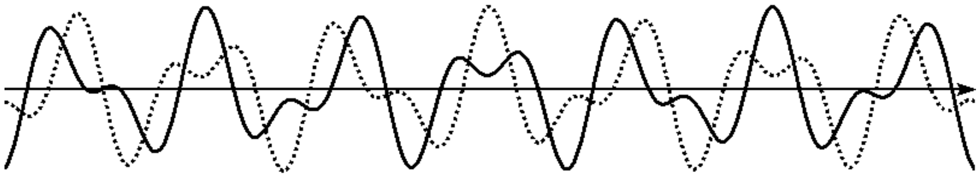

図 4　2 体の連成振動の解の一例（実線が x_1，点線が x_2，横軸は時間 t，$\omega_2/\omega_1 = \sqrt{3}$ の場合）

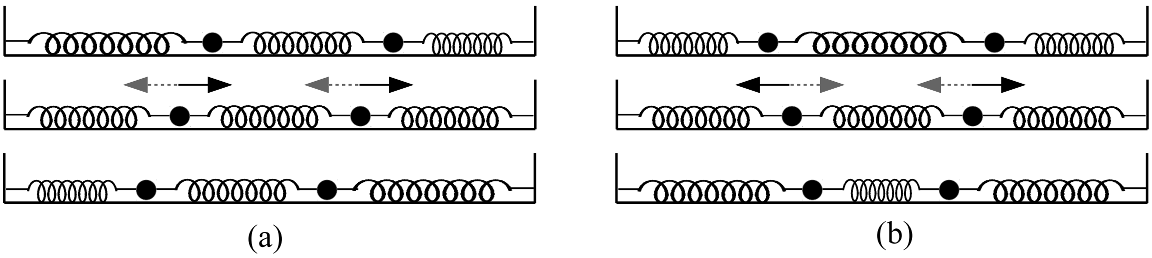

図 5　2 体の連成振動の基準振動: (a) 角振動数 ω_1 の基準振動，(b) 角振動数 ω_2 の基準振動

$A_2 = 0$ の場合には，

$$x_1 = x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{2.13}$$

となり，図 5(a) のように，質点 1 と 2 が角振動数 ω_1 で同位相の単振動をする。このとき，質点 1 と 2 の距離は一定で変化しない。逆に $A_1 = 0$ の場合には，

$$x_1 = -x_2 = -\frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \tag{2.14}$$

となり，図 5(b) のように，質点 1 と 2 が角振動数 ω_2 で逆位相の単振動をする。質点 1 と 2 が左右対称に動いていることに注意。一般解は，この 2 種類の単振動の重ね合わせで表されるので，この 2 種類の振動を**基準振動**と呼ぶ。また，座標 X, x のことを**基準座標**と呼ぶ。

2.2　線形代数を使って

同じ問題を線形代数を使って解いてみよう。方程式 (2.1), (2.2) の解として

$$x_1 = c_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = c_2 e^{i\omega t} \qquad \text{（ここで } c_1, c_2 \text{は複素数の定数）} \tag{2.15}$$

を仮定して方程式に代入すると，

$$\left\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\right\} c_1 - k_2 c_2 = 0 \tag{2.16}$$

$$-k_2 c_1 + \left\{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\right\} c_2 = 0 \tag{2.17}$$

が得られる。行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.18}$$

となる。$c_1 = c_2 = 0$ という自明な解以外の解を持つための必要十分条件は，係数行列の行列式が 0 になることである。

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + (k_2 + k_3) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.19}$$

$$\left\{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\right\}\left\{-m_2\omega^2 + (k_2 + k_3)\right\} - k_2^2 = 0 \tag{2.20}$$

これは ω^2 についての 2 次方程式なので解くことができる。

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{2m_1} + \frac{k_2 + k_3}{2m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_2}{2m_1} + \frac{k_2 + k_3}{2m_2}\right)^2 - \frac{k_2(k_1 + k_3) + k_1 k_3}{m_1 m_2}} \tag{2.21}$$

これを (2.16) または (2.17) に代入すると，c_1 と c_2 の比が決まる。具体的な値は初期条件を与えないと決まらない。

前と同様に $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ の場合を考えると，(2.20) 式は

$$0 = (-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2 = (-m\omega^2 + 3k)(-m\omega^2 + k) \tag{2.22}$$

となるので，

$$\omega^2 = \frac{k}{m},\quad \frac{3k}{m} \Longrightarrow \omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \pm\sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{2.23}$$

と解ける。これらを (2.16) に代入すると，係数 c_1 と c_2 は

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\text{のとき } c_1 = c_2, \qquad \omega^2 = \frac{3k}{m}\text{のとき } c_1 = -c_2 \tag{2.24}$$

であることがわかる。方程式は線形斉次なので，(2.23)，(2.24) で決まる解の重ね合わせが一般解になる。任意の複素係数を C, D, E, F とすると，一般解は

$$\begin{aligned} x_1 = C\exp\left(i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ + E\exp\left(i\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) + F\exp\left(-i\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} x_2 = C\exp\left(i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ - E\exp\left(i\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) - F\exp\left(-i\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right) \end{aligned} \tag{2.26}$$

と書ける。(2.24) と対応して，(2.25) と (2.26) の 1 行目は同じ形であるのに対して，2 行目は逆符号になっていることに注意しよう。x_1, x_2 が実数になるためには，C と D，E と F はそれぞれ複素共役の関係でなければならない。そこで，オイラー表示 $C = D^* = \frac{A}{2}e^{i\alpha}, E = F^* = \frac{B}{2}e^{i\beta}$（こ

こで A, B は 0 以上の実数，α, β は実数）を使って整理すると，

$$x_1 = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \beta\right) \tag{2.27}$$

$$x_2 = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right) - B\cos\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t + \beta\right) \tag{2.28}$$

となる。この式を前に求めた (2.11), (2.12) と比べると，任意定数の表し方が違うだけで，同等の結果になっている。普通は，(2.23) と (2.24) が求まったら，ここまで詳しい説明をせずに，いきなり (2.27) と (2.28) を書き下してよい。

2.3　基準振動と基準座標

まず前節の話を整理してみよう。$m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k_3 = k$ の場合に，(2.15) を方程式 (2.1), (2.2) に代入した結果を行列で表すと

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.29}$$

$$\begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

$x_1 = x_2 = 0$ という自明な解以外の解を持つための必要十分条件は (2.29) の係数行列の行列式が 0 という条件である。

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + 2k & -k \\ -k & -m\omega^2 + 2k \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (-m\omega^2 + 2k)^2 - k^2 = 0 \tag{2.31}$$

この条件から 2 つの ω^2 が決まる。区別をするために添え字を付けて

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m} \tag{2.32}$$

とする。それぞれに対応する (2.29) の解は簡単に求められて，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

となる（係数については後で述べる）。これらを固有ベクトルと呼ぶ。固有ベクトルを並べてできる行列

$$U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2m} & -1/\sqrt{2m} \\ 1/\sqrt{2m} & 1/\sqrt{2m} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

は次のような性質を持つ。

$$U^t \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

$$U^t \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \tag{2.36}$$

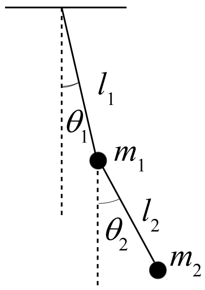

図 6　2 重振り子

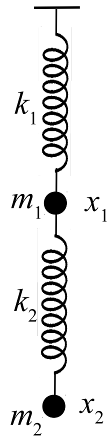

図 7　2 重ばね振子

(2.33) の係数は (2.35) の右辺が単位行列になるように決めてある。ここで新しい座標 ξ_1, ξ_2 を次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \xi_1 \boldsymbol{u}_1 + \xi_2 \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m/2} & \sqrt{m/2} \\ -\sqrt{m/2} & \sqrt{m/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{m}{2}} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

(2.37) を (2.30) に代入して，左側から U^t を掛けると

$$U^t \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \omega^2 U^t \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

となる。(2.35), (2.36) の関係を使うと，結局

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

が得られる。この式から

$$\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{k}{m} \text{ のとき } \xi_1 \neq 0,\ \ \xi_2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 (\text{固有ベクトル } \boldsymbol{u}_1 \text{に対応}) \tag{2.41}$$

$$\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{3k}{m} \text{ のとき } \xi_1 = 0,\ \ \xi_2 \neq 0 \Longleftrightarrow x_1 = -x_2 (\text{固有ベクトル } \boldsymbol{u}_2 \text{に対応}) \tag{2.42}$$

であることがわかる。ξ_1, ξ_2 はそれぞれ異なる振動パターンと角振動数を持つ独立な単振動（**基準振動**と呼ぶ）を表し，実際の変位 x_1, x_2 はそれらの重ね合わせとなる（式 (2.37) 参照)。ξ_1, ξ_2 を**基準座標**，ω_1, ω_2 を**基準振動数**と呼ぶ。

3　いろいろな連成振動

連成振動には他にもいろいろな例がある。図 6 のように質量 m_1 と m_2 のおもりが長さ l_1 と l_2

の棒で吊るされて微小振動している場合，運動方程式は

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2=-(m_1+m_2)gl_1\theta_1 \tag{3.1}$$

$$m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1+m_2l_2^2\ddot{\theta}_2=-m_2gl_2\theta_2 \tag{3.2}$$

となる。振れ角 θ_1,θ_2 が同じ角振動数 ω で振動するとして行列を使ってまとめると次のようになる。

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)gl_1 & 0 \\ 0 & m_2gl_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}=\omega^2\begin{pmatrix} (m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \\ m_2l_1l_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

また，図 7 のように 2 つのばねで 2 つのおもりを吊るした場合，つり合いの位置からの変位を x_1,x_2 とすると，運動方程式は

$$m_1\ddot{x}_1=-k_1x_1+k_2(x_2-x_1) \tag{3.4}$$

$$m_2\ddot{x}_2=-k_2(x_2-x_1) \tag{3.5}$$

である。これも角振動数 ω で振動するとして変形すれば

$$\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\omega^2\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

となる。

多数の質点が相互作用しながら微小振動をしている場合には，(2.30) を一般化した

$$K\boldsymbol{x}=\omega^2M\boldsymbol{x} \tag{3.7}$$

という方程式になる。（右辺に M があるので線形代数の普通の固有値問題とは異なることに注意！）自由度が n の系では，$\boldsymbol{x}$ は n 成分のベクトル，K と M は $n\times n$ の対称行列である。上の 2 つの例では確かにこの形になっている。ここから後は前節で述べたことを一般化すればよい。

(1) 基準振動数 $\omega_1,\omega_2,\cdots$ を

$$\left|-\omega^2M+K\right|=0 \tag{3.8}$$

から求める。（つり合いの位置のまわりの微小振動であれば，$\omega^2\geq 0$ つまり基準振動数が実数であることも証明できる。）

(2) それぞれの基準振動数に対して (3.7) を解いて，固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots$ を求める。

(3) 行列 $U=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots)$ は次の性質を持つ。（いくつかの基準振動数が等しい場合もこのようにできる。）

$$U^tMU=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix},\quad U^tKU=\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

(4) 基準座標 $\xi_1,\xi_2,\cdots$ を次のように定義する。

$$\boldsymbol{x}=\xi_1\boldsymbol{u}_1+\xi_2\boldsymbol{u}_2+\cdots=U\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

(5) 基準座標を使うと方程式 (3.7) は次のようになる。この式は，固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots$ に対応するパターンの独立な単振動の重ね合わせとして表せることを意味する。

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2\xi_1 \\ \omega_2^2\xi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

4　質点系の重心とその運動

n 個の質点があるとしよう。これを質点系という。$1, 2, 3, \cdots$ と番号を付けて j 番目の質点の質量を m_j，位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_j$，k 番目の他の質点から受ける力（内力）を $\boldsymbol{F}_{jk}$，質点系以外のものから受ける力（外力）を $\boldsymbol{F}_j$ とする。j 番目の質点の運動方程式は次のように書ける。

$$m_j\ddot{\boldsymbol{r}}_j = \boldsymbol{F}_j + \boldsymbol{F}_{j1} + \cdots + \boldsymbol{F}_{jn} = \boldsymbol{F}_j + \sum_{k\neq j}^{n} \boldsymbol{F}_{jk} \tag{4.1}$$

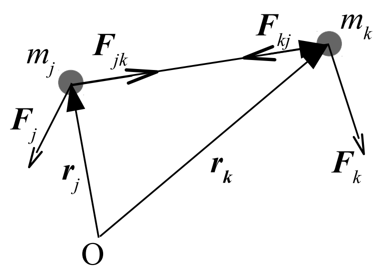

図 8　質点系の記号の定義

それぞれの質点の運動方程式

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \cdots + \boldsymbol{F}_{1n} \\ m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 &= \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + \cdots + \boldsymbol{F}_{2n} \\ m_3\ddot{\boldsymbol{r}}_3 &= \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_{31} + \boldsymbol{F}_{32} + \cdots + \boldsymbol{F}_{3n} \\ &\vdots \\ m_n\ddot{\boldsymbol{r}}_n &= \boldsymbol{F}_n + \boldsymbol{F}_{n1} + \boldsymbol{F}_{n2} + \cdots + \boldsymbol{F}_{nn-1} \end{aligned} \tag{4.2}$$

の辺々を足し合わせると，右辺に現れる $\boldsymbol{F}_{jk} + \boldsymbol{F}_{kj}$ は作用・反作用の法則から 0 になるので

$$\sum_{j=1}^{n} m_j\ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j \tag{4.3}$$

となる。

重心（質量中心）を次の式で定義する。

$$\boldsymbol{R} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j\boldsymbol{r}_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n} m_j\boldsymbol{r}_j \tag{4.4}$$

ここで M は質点系の全質量である。2 体問題の (1.5) は $n = 2$ の場合の式である。この関係と (4.3) から

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_{j=1}^{n} m_j\ddot{\boldsymbol{r}}_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j = \text{（外力の合計）} \tag{4.5}$$

が導ける。これが重心の運動方程式である。すべての質量と外力が重心に集中していると考えて，

普通の質点の運動方程式と同じように解けばよい。内力は重心の運動に影響しない。例えばボールを投げたとき，外部から働く力が重力だけであれば，重心は放物運動をする。このように，大きさがある物体でも，重心に注目すると質点の力学の方法と結果がそのまま使える。

質点系の全運動量 $\boldsymbol{P}$ は各質点の運動量 $\boldsymbol{p}_j = m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j$ の和をとって

$$\boldsymbol{P} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{p}_j = \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j = M\dot{\boldsymbol{R}} \tag{4.6}$$

と表せる。式の上では，重心に全質量 M があり，重心の速度 $\dot{\boldsymbol{R}}$ で運動しているという形になっている。全運動量を使うと式 (4.5) は

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j = \text{（外力の合計）} \tag{4.7}$$

となる。(4.5), (4.7) から外力の合計が 0 であれば，質点系の全運動量は保存し，重心は静止しつづけるか等速直線運動をすることになる。

5　質点系の角運動量

j 番目の質点の，座標原点 O に対する角運動量 $\boldsymbol{l}_j$ は

$$\boldsymbol{l}_j = \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{r}_j \times m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \tag{5.1}$$

である。その時間変化は (4.1) 式を使って

$$\dot{\boldsymbol{l}}_j = \dot{\boldsymbol{r}}_j \times m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j + \boldsymbol{r}_j \times m_j \ddot{\boldsymbol{r}}_j = 0 + \boldsymbol{r}_j \times \left(\boldsymbol{F}_j + \sum_{k \neq j}^{n} \boldsymbol{F}_{jk} \right) \tag{5.2}$$

となる。座標原点 O に対する全角運動量 $\boldsymbol{L}$ は

$$\boldsymbol{L} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{l}_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j \times m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \tag{5.3}$$

である。全角運動量の時間変化は (5.2) 式を使って

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{j=1}^{n} \dot{\boldsymbol{l}}_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j \times \left(\boldsymbol{F}_j + \sum_{k \neq j}^{n} \boldsymbol{F}_{jk} \right) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k \neq j}^{n} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{jk} \tag{5.4}$$

右辺第 2 項の和の中には j と k を入れ替えたペアがある。それだけを取り出して作用・反作用の法則を使うと，

$$\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{jk} + \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{F}_{kj} = \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{jk} + \boldsymbol{r}_k \times (-\boldsymbol{F}_{jk}) = (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k) \times \boldsymbol{F}_{jk} \tag{5.5}$$

となる。普通の場合，質点間に働く力 $\boldsymbol{F}_{jk}$ は質点 j と質点 k を結ぶ線に沿って働くので，$(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k)$ に平行になる。したがって (5.5) のベクトル積は 0 になり，(5.4) の右辺第 2 項の和も 0 になる。

全角運動量の時間変化は

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j \equiv \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{N}_j \tag{5.6}$$

と外力だけで決まり，内力には影響されないことになる。 上の式で質点 j に働く外力の力のモーメント $\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j$ を $\boldsymbol{N}_j$ と置いた。

6　重心に対する相対位置，相対運動の運動エネルギーと角運動量

図 9 のように，質点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_j$ は，重心 G の位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ と重心に相対的な（重心から見た）位置ベクトル $\boldsymbol{r}'_j$ に分解できて，次の関係が成り立つ。

$$\boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_j \tag{6.1}$$

両辺に m_j を掛けて，すべての j について足し合わせ，重心の定義 (4.4) を使うと

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{r}_j &= \sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{R} + \sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{r}'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{r}_j + \sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{r}'_j \end{aligned} \tag{6.2}$$

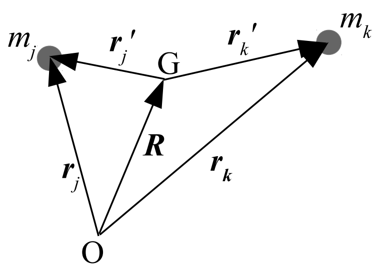

図 9　重心に対する位置ベクトル

となる。したがって

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{r}'_j = 0 \tag{6.3}$$

が成り立つ。この式を時間で微分すると

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\boldsymbol{r}}'_j = 0 \tag{6.4}$$

も成り立つ。

全運動エネルギー K は (6.4) を使って計算すると

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j^2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \left(\dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{r}}'_j\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\boldsymbol{r}}'_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\boldsymbol{r}}'^2_j \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\boldsymbol{r}}'^2_j \end{aligned} \tag{6.5}$$

となる。つまり，全運動エネルギーは重心の運動エネルギー（正確には，重心に全質量が集まっていて，重心の速度で運動しているとしたときの運動エネルギー）と重心に対する各質点の相対運動のエネルギーの和となる。($\dot{\boldsymbol{r}}'_j$ は重心から見た各質点の速度であることに注意。)

全角運動量も同様に (6.1) を使って表すと

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{L} &= \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}'_j)\times m_j(\dot{\boldsymbol{R}}+\dot{\boldsymbol{r}}'_j) \\
&= \boldsymbol{R}\times\sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{R}\times\sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\boldsymbol{r}}'_j + \sum_{j=1}^{n} m_j\boldsymbol{r}'_j\times\dot{\boldsymbol{R}} + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{r}'_j\times m_j\dot{\boldsymbol{r}}'_j \\
&= \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P} + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{r}'_j\times\boldsymbol{p}'_j \qquad (6.6) \\
&\equiv \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}' \qquad (6.7)
\end{aligned}
$$

となり，重心の角運動量 $\boldsymbol{L}_G$（正確には，重心に全運動量が集中しているとしたときの角運動量）と重心に対する相対運動の角運動量 $\boldsymbol{L}'$ に分離できる。（2 行目の第 2 項と第 3 項は (6.3) と (6.4) の関係によって 0 になる。）

重心の角運動量 $\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}$ の時間変化は

$$
\dot{\boldsymbol{L}}_G = \dot{\boldsymbol{R}}\times\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}\times\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{R}\times\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{R}\times\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_j \qquad (6.8)
$$

となる。右辺は，重心に外力の合計が働くとしたときの力のモーメントで，これによって重心の角運動量の時間変化が決まる。

相対運動の角運動量 $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}_G$ を時間で微分して，式 (5.6) と (6.8) を利用すると

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{L}}' &= \dot{\boldsymbol{L}} - \dot{\boldsymbol{L}}_G = \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_j - \boldsymbol{R}\times\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_j = \sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{F}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{r}'_j\times\boldsymbol{F}_j \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

となる。したがって相対運動の角運動量の時間変化は，重心のまわりの外力のモーメントに支配される。

ここからは，質点系が一様な重力場に置かれている場合を考える。外力 $\boldsymbol{F}_j$ を重力とそれ以外の外力 $\boldsymbol{F}'_j$ に分けて

$$
\boldsymbol{F}_j = m_j\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}'_j \qquad (6.10)
$$

と書ける。全角運動量の時間変化は (5.6) より

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{L}} &= \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{r}_j\times(m_j\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F}'_j) = \sum_{j=1}^{n} m_j\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{g} + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}'_j \\
&= \boldsymbol{R}\times M\boldsymbol{g} + \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}'_j \qquad (6.11)
\end{aligned}
$$

となるので，**重力は重心に集中して作用すると考えてよい。**重力以外の力は作用点を考慮して力のモーメントを求める必要がある。重心の角運動量の時間変化は (6.8) より

$$
\dot{\boldsymbol{L}}_G = \boldsymbol{R}\times\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{R}\times M\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}\times\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{F}'_j \qquad (6.12)
$$

に従う。重力も含めてすべての外力が重心に集中して作用すると考えてよい。相対運動の角運動量の時間変化は (6.9) より

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{L}}' &= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}'_j \times \boldsymbol{F}_j = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}'_j \times (m_j \boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}'_j) = \sum_{j=1}^{n} m_j \boldsymbol{r}'_j \times \boldsymbol{g} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}'_j \times \boldsymbol{F}'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}'_j \times \boldsymbol{F}'_j \end{aligned} \tag{6.13}$$

となり，重力の影響は消えてしまうので，重力以外の外力による力のモーメントだけを考えればよい。

7　剛体のつり合い

7.1　剛体

質点系にもいろいろある。太陽と太陽系の惑星は，それぞれの大きさに比べて距離が十分離れているので，質点系とみなして扱える。もちろんお互いの位置関係は時間とともに変化していく。一方，ボール，フリスビー，矢などは，質量が連続的に分布した質点系の例である。これらの物体の運動では，わずかな変形（各部分の相対的な位置関係の変化）は無視して，重心の運動とそのまわりの回転的運動（物体の姿勢）を調べれば十分なことが多い。そこで，力が作用しても変形しない**剛体**という概念が生まれた。もちろん厳密には，そんな物体は在在しないので仮想的なものであるが，現実の物体の運動をかなりよく近似できるので，剛体の力学を調べることには十分意味がある。

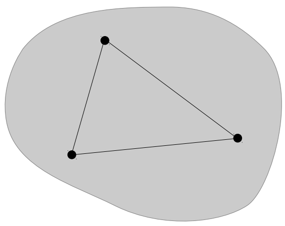

図 10　剛体の自由度

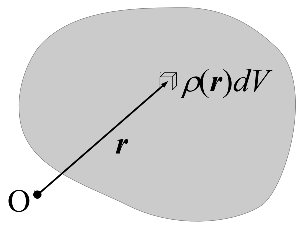

図 11　質量が連続分布した剛体の重心の計算

物体の「位置」を表すのに必要な変数の数を**自由度**という。3 次元の空間を運動する質点の位置は，3 つの変数（座標）を使って表せるので，自由度は 3 である。n 個の質点が，お互いの距離に特別な制限無く運動している場合，自由度は $3n$ である。質量が連続的に分布していると自由度は無限大になってしまう。剛体の場合には，図 10 のように目印となる 3 点の位置を指定すればよい。ただし，距離が一定という条件が 3 つあるので $3 \times 3 - 3 = 6$ が剛体の自由度である。

7.2 連続分布の場合の重心

質量が連続分布している場合には，図 11 のように微小部分に分け，和の代わりに積分をする。位置 $\boldsymbol{r}$ での密度が $\rho(\boldsymbol{r})$ であれば，微小体積 dV の中の質量は $\rho(\boldsymbol{r})dV$ となるので

$$M = \sum m_j = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV \tag{7.1}$$

$$M\boldsymbol{R} = \sum m_j \boldsymbol{r}_j = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}dV \tag{7.2}$$

と書ける。実際に計算する時は，計算が簡単になるような座標系を選ぶ。また，いくつかの部分 $V_1, V_2, \cdots$ に分けて計算することもできる。各部分の質量と重心の位置を $M_1, M_2, \cdots$，$\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \cdots$ とすれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} &= \frac{\sum m_j \boldsymbol{r}_j}{\sum m_j} = \frac{\int_V \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}dV}{\int_V \rho(\boldsymbol{r})dV} = \frac{\int_{V_1} \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}dV + \int_{V_2} \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}dV + \cdots}{\int_{V_1} \rho(\boldsymbol{r})dV + \int_{V_2} \rho(\boldsymbol{r})dV + \cdots} \\ &= \frac{M_1\boldsymbol{R}_1 + M_2\boldsymbol{R}_2 + \cdots}{M_1 + M_2 + \cdots}\end{aligned} \tag{7.3}$$

となるので，連続でない（離散的な）質点系の場合の (4.4) と同様に計算できる。

7.3 剛体のつり合い

質点系で一般的に導いた式 (4.5) と (5.6) は，剛体でも成り立つ。剛体がつり合いの状態を続けるということは，運動量も角運動量も 0 のまま変化しないということなので，

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j = (\text{外力の合計}) = 0 \tag{7.4}$$

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j \equiv \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{N}_j = (\text{外力の力のモーメントの合計}) = 0 \tag{7.5}$$

がつり合いの条件である。3 成分の式が 2 つで 6 つの方程式になり，ちょうど剛体の自由度 6 と対応している。

8 固定軸まわりの剛体の回転運動

8.1 角運動量と慣性モーメント

図 12 のように，ある固定軸のまわりに剛体が回転しているとする。固定軸を z 軸とし，回転の角速度を ω とする。回転角度を指定すれば剛体の位置は決まるので，この場合は自由度 1 である。図の微小体積 dV は z 軸のまわりで，半径 $|\boldsymbol{r}_2| = \sqrt{x^2+y^2} \equiv \xi$，速さ $v = \omega\xi$ の円運動をする。図のように，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を z 軸に平行な $\boldsymbol{r}_1$ と垂直な $\boldsymbol{r}_2$ に分けると，角運動量は

$$\boldsymbol{r} \times \rho\boldsymbol{v}dV = \boldsymbol{r}_1 \times \rho\boldsymbol{v}dV + \boldsymbol{r}_2 \times \rho\boldsymbol{v}dV \tag{8.1}$$

となる。ベクトル積の性質から，右辺第 1 項は xy 面内のベクトルになり，第 2 項は z 軸方向のベクトルになる。したがって，角運動量の z 成分 dL_z は

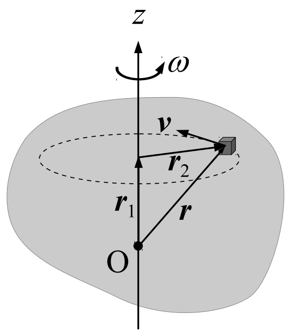

図 12　固定軸まわりの回転運動

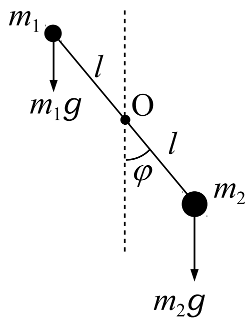

図 13　1 軸回転の例

$$dL_z = r_2 \rho v dV = \rho\omega\xi^2 dV \tag{8.2}$$

となるので，剛体全体の角運動量の z 成分は次のように表せる。

$$L_z = \int_V \rho\omega\xi^2 dV = \omega \int_V \rho\xi^2 dV = I_z \omega \tag{8.3}$$

$$\text{ここで } I_z \equiv \int_V \rho\xi^2 dV \quad \left(\text{離散的な場合は } I_z \equiv \sum_i m_i \xi_i^2\right) \tag{8.4}$$

I_z のことを（z 軸のまわりの）慣性モーメントと呼ぶ。角運動量 L_z は角速度 ω に比例し，その比例係数が慣性モーメント I_z である。

回転運動の方程式は (5.6) の z 成分 $dL_z/dt = N_z$ に (8.3) を代入して

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = N_z = (\text{外力の力のモーメントの } z \text{ 成分}) = \sum_j (x_j F_{jy} - y_j F_{jx}) \tag{8.5}$$

となる。この方程式から角速度 ω が時間の関数として求められ，それを積分すれば回転角の時間変化がわかる。

運動エネルギー K は，

$$K = \sum \frac{1}{2} m_j v_j^2 = \int_V \frac{1}{2}\rho(\xi\omega)^2 dV = \frac{1}{2}\left(\int_V \rho\xi^2 dV\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \tag{8.6}$$

と表せる。ここまで求めてきた剛体の角運動量 $L_z = I_z\omega$ とその方程式 $I_z \dfrac{d\omega}{dt} = N_z$，回転の運動エネルギー $K = \dfrac{1}{2} I_z \omega^2$ は，質点の運動量 $p = mv$，運動方程式 $m\dfrac{dv}{dt} = F$，運動エネルギー $K = \dfrac{1}{2} mv^2$ ときれいに対応している。慣性モーメント I_z は質量 m に対応し，回転運動の変化のさせにくさを表す。

例題：図 13 のように，質量が無視できる長さ $2l$ の棒の両端に，質量 m_1, m_2 の 2 個のおもりを付ける。棒の中央に水平な軸を取り付けて，鉛直面内で棒を回転させたときの運動を考える。z 軸は紙面に垂直，手前向きにとる。この場合の慣性モーメントは，

$$I_z = m_1 l^2 + m_2 l^2 = (m_1 + m_2) l^2 \tag{8.7}$$

である。一方，支点に働く力のモーメントは 0 なので，力のモーメントの z 成分は，

$$\begin{aligned} N_z &= \sum (\boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_j)_z = m_1 gl \sin\varphi - m_2 gl \sin\varphi \\ &= (m_1 - m_2) gl \sin\varphi \end{aligned} \tag{8.8}$$

である。角速度 $\omega = d\varphi/dt$ だから，回転の運動方程式 (8.5) は

$$(m_1 + m_2) l^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = (m_1 - m_2) gl \sin\varphi \tag{8.9}$$

となる。振れ角 φ が小さいとして，$\sin\varphi \cong \varphi$ と近似すると，

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{g}{l}\right)\varphi \tag{8.10}$$

となる。$m_2 > m_1$ であれば単振動の方程式で，振動の周期 T は次のようになる。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} \cdot \frac{l}{g}} \tag{8.11}$$

8.2 慣性モーメントについての定理

8.2.1 平行軸の定理

質量 M の剛体の重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントを I_G とする。図 14 のように，この軸に平行に h だけ離れた回転軸のまわりの慣性モーメントを I_h とすると

$$I_h = I_G + Mh^2 \tag{8.12}$$

という関係が成り立つ。これを平行軸の定理という。証明は次の通り。

$$I_h = \sum m_j (x_j^2 + y_j^2) \tag{8.13}$$

図の記号を使うと $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'$ であり，成分表示では $(x_j, y_j, z_j) = (X, Y, Z) + (x_j', y_j', z_j')$ となるので

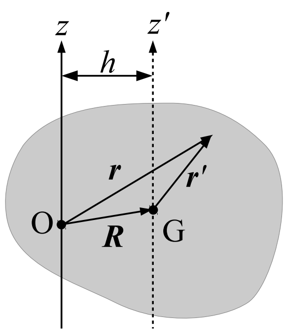

図 14 平行軸の定理

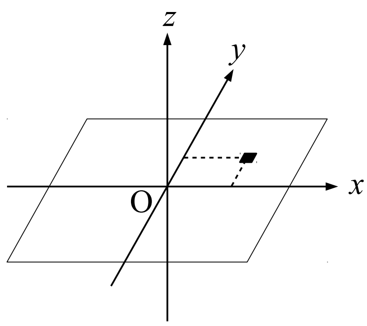

図 15 平板の定理

$$
\begin{aligned}
I_h &= \sum m_j \left\{(X+x'_j)^2 + (Y+y'_j)^2\right\} \\
&= \sum m_j (x'^2_j + y'^2_j) + \sum m_j (X^2+Y^2) + 2X\sum m_j x'_j + 2Y \sum m_j y'_j \\
&= I_G + Mh^2 + 0 + 0
\end{aligned} \tag{8.14}
$$

が示せる。後ろの 2 項は (6.3) より 0 になる。（証明終わり）

8.2.2　平板の定理

厚さが十分に薄い平板を考える。図 15 のように面に垂直に z 軸をとり，面内に x, y 軸をとる。（図の板は平行四辺形だが，平らであれば形は何でもよい。）板の面密度（単位面積あたりの質量）を $\sigma(x,y)$ とする。回転軸を x, y, z それぞれの軸にとったとき，それぞれの慣性モーメントは

$$
I_x = \int_S \sigma(x,y) y^2 dS \tag{8.15}
$$

$$
I_y = \int_S \sigma(x,y) x^2 dS \tag{8.16}
$$

$$
I_z = \int_S \sigma(x,y)(x^2+y^2) dS \tag{8.17}
$$

となる。したがって，

$$
I_z = I_x + I_y \tag{8.18}
$$

が成り立つ。

8.3　単純な形をした物体の慣性モーメント

密度が一様で単純な形の物体で，回転軸も対称性のよい方向である場合には，比較的簡単に慣性モーメントが求められる。表 1 に棒，長方形，直方体，リング，円板，球の慣性モーメントをまとめておく。

例として図 16 のように，長さ l で質量 M の細い棒の重心を通って棒に垂直な回転軸に関する慣性モーメントを求めてみよう。まず，棒に沿って x 軸を取り重心を原点とする。次に棒を細かく刻んで小部分に分ける。図の小部分は回転軸からの距離が x，質量が Mdx/l なので，慣性モーメントへの寄与は質量に距離の 2 乗を掛けて Mx^2dx/l となる。これを棒全体で合計するには積分をすればよい。したがって慣性モーメント I は次のように計算できる。

$$
I = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{Mx^2}{l} dx = \frac{Ml^2}{12} \tag{8.19}
$$

このように，(1) 細かく分けて，(2) 各部分の慣性モーメントへの寄与を求め，(3) 積分計算などによって合計する，というのが基本方針である。この他の例については演習問題とする。

9　剛体の平面運動

図 17 の円柱が坂を転がる場合のように，剛体の各点が一つの平面に平行に運動する場合を「剛体の平面運動」という。回転軸はこの平面に垂直な一定方向を保ちながら平行移動していく。この

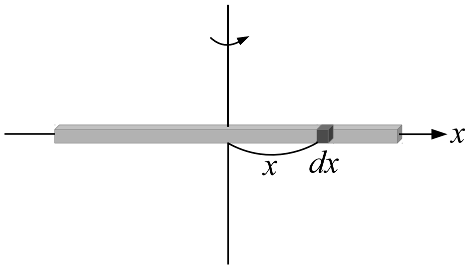

図 16　棒の慣性モーメント

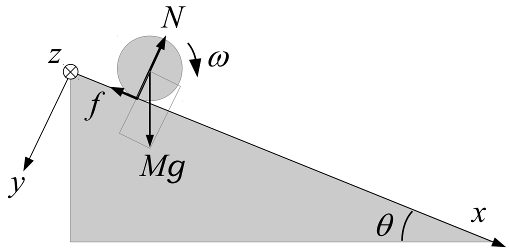

図 17　坂を転がる円柱

表 1　基本的な形をした物体の慣性モーメント。密度が一様で全質量が M とする。

形	パラメータ	回転軸	I
棒	長さ l	棒の中心を通り棒に垂直	$Ml^2/12$
棒	長さ l	棒の端を通り棒に垂直	$Ml^2/3$
長方形	辺の長さ a, b	重心を通り板に垂直	$M(a^2+b^2)/12$
長方形	辺の長さ a, b	重心を通り辺 a に平行	$Mb^2/12$
直方体	辺の長さ a, b, c	重心を通り辺 c に平行	$M(a^2+b^2)/12$
リング	半径 a	リングの中心を通りリングに垂直	Ma^2
リング	半径 a	リングの中心を通りリングに平行	$Ma^2/2$
円筒	半径 a，長さ l	中心軸	Ma^2
円板	半径 a	円の中心を通り板に垂直	$Ma^2/2$
円板	半径 a	円の中心を通り板に平行	$Ma^2/4$
円柱	半径 a，長さ l	中心軸	$Ma^2/2$
円柱	半径 a，長さ l	重心を通り中心軸に垂直	$Ma^2/2+2Ml^2/3$
円錐	半径 a，高さ l	中心軸	$3Ma^2/10$
球	半径 a	球の中心を通る軸	$2Ma^2/5$

ような運動は「重心の並進運動」＋「重心を通る回転軸のまわりの回転運動」と見ることができて，自由度は 3（並進 2，回転 1）である。重心の運動は方程式 (4.5) に従う。一方，回転軸を z' 軸とし，そのまわりの慣性モーメントを I とすると，重心から見た角運動量（相対運動の角運動量）の z' 成分は (8.3) と同様に $L'_z = I\omega$ と表せる。L'_z の時間変化は (6.13) で示したように，重力以外の外力のモーメントだけで決まり，次の方程式に従う。

$$\frac{dL'_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = N'_z = (\text{重力以外の外力のモーメントの } z'\text{成分}) \tag{9.1}$$

ただし，N'_z は重心を原点にとって計算することに注意。

例題：坂を滑らずに転がる円柱　円柱の半径を a，長さを l，質量を M とする。図 17 のように坂に沿って x 軸，垂直斜め下向きに y 軸，向こう向きに z 軸を取る。回転の向きと z 軸の向きが右

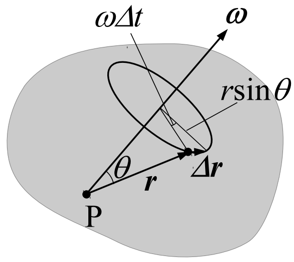

図 18　剛体の角速度と変位，速度

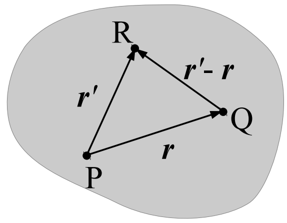

図 19　剛体の異なる点で見た角速度

ねじの関係になっているので，回転の角速度 ω は正である。円柱には重力 Mg，垂直抗力 N，摩擦力 f が図の方向に働く。重心の運動方程式は (4.5) を成分に分けて

$$M\ddot{X} = Mg\sin\theta - f \tag{9.2}$$

$$M\ddot{Y} = Mg\cos\theta - N = 0 \tag{9.3}$$

であり，回転運動の方程式は (8.5) より，回転軸まわりの慣性モーメントを I として

$$I\dot{\omega} = fa \tag{9.4}$$

となる。さらに，滑らずに転がるという条件から

$$\dot{X} = a\omega \tag{9.5}$$

が成り立つ。(9.4), (9.5) より $f = I\dot{\omega}/a = I\ddot{X}/a^2$，これを (9.2) に代入して x 軸方向の加速度を求めると

$$\ddot{X} = \frac{1}{1+\frac{I}{Ma^2}} g\sin\theta \tag{9.6}$$

となる。円柱の場合は $I = Ma^2/2$ なので $\ddot{X} = (2/3)g\sin\theta$ となる。円筒や球でも (9.6) が成り立ち，加速度はそれぞれ $(1/2)g\sin\theta$，$(5/7)g\sin\theta$ となる。円筒＜円柱＜球の順に加速度が大きくなるのは，この順で回転軸の近くの質量分布が多くなるためである。

10　剛体の一般的な回転運動

10.1　回転の角速度ベクトル

図 18 のように剛体の点 P から見たとき，ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で表される軸のまわりに角速度 ω で剛体が回転しているとする。位置 $\boldsymbol{r}$ の点は $\boldsymbol{\omega}$ を中心軸として円運動をする。速度は円の接線方向でベクトル積 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ の方向である。短い時間 Δt の間の変位 $\Delta\boldsymbol{r}$ の大きさは半径 $r\sin\theta$ に中心角 $\omega\Delta t$ を掛けて $r\omega\Delta t\sin\theta$ である。これを時間 Δt で割って速さを求めると $v = r\omega\sin\theta$ で，ちょうど $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ の大きさになっている。したがって，点 P から見た各点の速度は $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ で表せる。慣性系に対して点 P が速度 $\boldsymbol{v}_P$ で運動しているとすると，剛体の各点の慣性系に対する速度は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{10.1}$$

と表せる。ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を角速度ベクトルという。

剛体の回転運動の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は，剛体のどの点から見ても同じになる。これは次のようにして証明できる。図 19 の P 点と Q 点から見た角速度を $\boldsymbol{\omega}_P, \boldsymbol{\omega}_Q$，P 点と Q 点の速度を $\boldsymbol{v}_P, \boldsymbol{v}_Q$ とする。(10.1) 式より，

$$\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times \boldsymbol{r} \tag{10.2}$$

となる。また，図の R 点の速度は P 点の量を使って表すと

$$\boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times \boldsymbol{r}' \tag{10.3}$$

である。一方，Q 点の量を使って表し，$\boldsymbol{v}_Q$ に (10.2) を代入すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_R &= \boldsymbol{v}_Q + \boldsymbol{\omega}_Q \times (\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) \\ &= \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega}_P \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_Q \times (\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{10.4}$$

(10.3) と (10.4) をまとめると

$$(\boldsymbol{\omega}_P - \boldsymbol{\omega}_Q) \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = 0 \tag{10.5}$$

が任意の $\boldsymbol{r}'$ に対して成り立たなければならない。したがって $\boldsymbol{\omega}_P$ と $\boldsymbol{\omega}_Q$ は等しい。【証明終り】

10.2　慣性モーメント，慣性乗積，慣性主軸

ここからは，剛体がある固定点のまわりに回転する場合に話を限定し，固定点を原点にとって運動を調べてみる。位置 $\boldsymbol{r}$ の点の速度は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ である。剛体の全角運動量は

$$\boldsymbol{L} = \sum_j m_j \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{v}_j = \int \rho \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) dV \tag{10.6}$$

となる。ここでベクトル積の公式

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{10.7}$$

を使って変形すると，

$$\boldsymbol{L} = \int \rho \left\{ r^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r} \right\} dV = \left(\int \rho r^2 dV \right) \boldsymbol{\omega} - \int \rho (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{r} dV \tag{10.8}$$

となる。x, y, z 成分を使って表すと，例えば角運動量の x 成分は

$$\begin{aligned} L_x &= \int \rho (y^2 + z^2) \omega_x dV - \int \rho (y\omega_y + z\omega_z) x dV \\ &= \int \rho (y^2 + z^2) dV \omega_x - \int \rho xy dV \omega_y - \int \rho xz dV \omega_z \\ &\equiv I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \end{aligned} \tag{10.9}$$

と書ける。 $I_{xx} = \int \rho (y^2 + z^2) dV$ を慣性モーメント，$I_{xy} = -\int \rho xy dV$，$I_{xz} = -\int \rho xz dV$ を慣性乗積という。y, z 成分も同様で，行列形式にまとめると

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{L} = \tilde{I} \boldsymbol{\omega} \tag{10.10}$$

となる。慣性モーメントおよび慣性乗積を成分とする 3×3 の正方行列を慣性テンソルといい，このテキストでは $\tilde{I}$ で表す。慣性テンソルは実対称行列であるので，（直交変換をして）座標軸 X, Y, Z を適当に選ぶと対角行列になる。この時の座標軸を慣性主軸という。

$$\begin{pmatrix} L_X \\ L_Y \\ L_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_X\omega_X \\ I_Y\omega_Y \\ I_Z\omega_Z \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

慣性モーメント I_{XX}, I_{YY}, I_{ZZ} を主慣性モーメントとよび，I_X, I_Y, I_Z と書くことが多い（上の式の右辺でもそうした）。定義から $I_X = I_{XX} = \int \rho(Y^2+Z^2)dV$ なので，主慣性モーメントは必ず正になる。

原点から見た全運動エネルギー K は次のように表せる。

$$K = \frac{1}{2}\sum m_j(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_j)^2 = \frac{1}{2}\sum m_j\boldsymbol{\omega}\cdot\{\boldsymbol{r}_j\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_j)\} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^t\tilde{I}\boldsymbol{\omega} \tag{10.12}$$

最初の変形では公式 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$ を $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_j), \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{r}_j$ として適用した。慣性主軸座標系では，以下のように簡単な形になる。

$$K = \frac{1}{2}\left(I_X\omega_X^2 + I_Y\omega_Y^2 + I_Z\omega_Z^2\right) \tag{10.13}$$

10.3　オイラーの運動方程式

ここでも固定点（原点）O のまわりに角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している場合を考える。並進なしで回転だけなので，角運動量についての方程式 (5.6) によって運動が決まる。さて，（慣性系での）角運動量を剛体とともに回転する主軸座標系の成分で表そう。X, Y, Z 軸方向の単位ベクトル（基底ベクトル）を $\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y, \boldsymbol{e}_Z$ とすると

$$\boldsymbol{L} = L_X\boldsymbol{e}_X + L_Y\boldsymbol{e}_Y + L_Z\boldsymbol{e}_Z \tag{10.14}$$

となる。これを時間で微分する。位置ベクトルと同様に，基底ベクトルの時間変化についても $\dot{\boldsymbol{e}}_X = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_X$ などが成り立つので，

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= \frac{dL_X}{dt}\boldsymbol{e}_X + \frac{dL_Y}{dt}\boldsymbol{e}_Y + \frac{dL_Z}{dt}\boldsymbol{e}_Z + L_X\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_X + L_Y\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_Y + L_Z\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_Z \\ &= \left(\frac{dL_X}{dt}\boldsymbol{e}_X + \frac{dL_Y}{dt}\boldsymbol{e}_Y + \frac{dL_Z}{dt}\boldsymbol{e}_Z\right) + \boldsymbol{\omega}\times(L_X\boldsymbol{e}_X + L_Y\boldsymbol{e}_Y + L_Z\boldsymbol{e}_Z) \\ &= \left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right)_{\text{主軸座標系}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{L} \end{aligned} \tag{10.15}$$

となる。第 1 項は主軸座標系から見た時間変化である。第 2 項は主軸座標系が剛体とともに回転しているために現れる。主軸座標系の成分で書くと次のようになる。

$$\frac{dL_X}{dt} + \omega_Y L_Z - \omega_Z L_Y = N_X \tag{10.16}$$

$$\frac{dL_Y}{dt} + \omega_Z L_X - \omega_X L_Z = N_Y \tag{10.17}$$

$$\frac{dL_Z}{dt} + \omega_X L_Y - \omega_Y L_X = N_Z \tag{10.18}$$

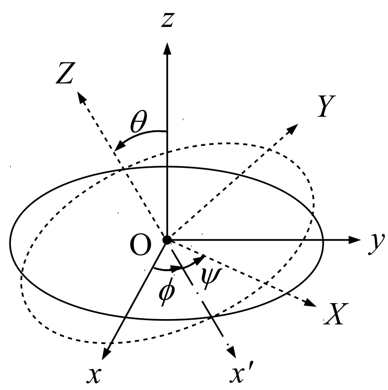

図 20　オイラー角

主軸座標系では $L_X = I_X\omega_X, L_Y = I_Y\omega_Y, L_Z = I_Z\omega_Z$ が成り立ち，I_X, I_Y, I_Z が一定であることを使うと，オイラーの運動方程式

$$I_X\frac{d\omega_X}{dt} - (I_Y - I_Z)\omega_Y\omega_Z = N_X \tag{10.19}$$

$$I_Y\frac{d\omega_Y}{dt} - (I_Z - I_X)\omega_Z\omega_X = N_Y \tag{10.20}$$

$$I_Z\frac{d\omega_Z}{dt} - (I_X - I_Y)\omega_X\omega_Y = N_Z \tag{10.21}$$

が得られる。この方程式は剛体の回転運動を記述する基本方程式である。

10.4　オイラー角

剛体の向きを表すのによく使われるのがオイラー角である。図 20 で xyz は空間に固定された静止座標系である。一方，XYZ は剛体に固定され，剛体とともに回転する主軸座標系である。2 つの座標系の関係は，図の 3 つの角度 ϕ, θ, ψ で決まる。XYZ が xyz に重なった状態からスタートすると，次のような 3 回の回転で図 20 の位置に持っていける。(1)z 軸のまわりに角度 ϕ だけ回転する（x 軸が x' 軸に移動，図では y' 軸は省略）。(2)x' 軸のまわりに角度 θ だけ回転する（z 軸が傾いて Z 軸に移動）。(3)Z 軸のまわりに角度 ψ だけ回転する（x' 軸が X 軸に移って移動完了）。

オイラー角やオイラーの運動方程式を使って，剛体の回転運動を調べることができるが，かなり難しい話になるのでここで一区切りとし，授業の後半で時間があれば紹介する。