8．ラプラス方程式，ポアソン方程式

1. 複素関数 $f(z)=e^{az}$（a は実数の定数）について以下の問いに答えなさい。
   （a）$z=x+iy$（実部が x，虚部が y）と置いて，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ と表す。（$f(z)$ の実部が $u(x,y)$，虚部が $v(x,y)$ ということ。）$u(x,y)$ と $v(x,y)$ を求めなさい。
   （b）$u(x,y)$ と $v(x,y)$ が 2 次元のラプラス方程式を満たす（調和関数である）ことを確かめなさい。

2. p.40 の $E_3=-\dfrac{1}{4\pi r}$ について。
   （a）$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ であることを使って，$\mathrm{grad}E_3=\nabla E_3$ を求めなさい。
   （b）$r\neq 0$ では $\Delta E_3=\mathrm{div}(\mathrm{grad}E_3)=0$ であることを示しなさい。
   （c）ガウスの定理

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}dV=\int_S \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

   の $\boldsymbol{A}=\mathrm{grad}E_3=\nabla E_3$ とする。原点を中心とする半径 a の球を V，その表面を S として $\displaystyle\int_S \nabla E_3\cdot d\boldsymbol{S}$ を計算しなさい。
   （d）ΔE_3 が原点に中心を持つ 3 次元のデルタ関数であることを説明しなさい。

3. z 軸方向の一様な電場の中に半径 a の導体球を置くと，静電誘導によって導体球の表面に電荷が現れる。その結果，電場がどのように変化するかを考えよう。
   （a）導体球が無い状態で，z 軸方向を向いた大きさ E_0 の一様な電場のポテンシャル ϕ_0 は，x,y,z の座標ではどのように表せるか。また，極座標ではどのように表せるか。ただし，原点で $\phi_0=0$ とする。
   （b）導体球の表面に現れる電荷が作るポテンシャルを ϕ_1 とする。
   - 問題が軸対称で，球の外部のポテンシャルだから，p.44 の式 (51) の形

$$\phi_1(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}$$

     になる。
   - 実際のポテンシャルは $\phi=\phi_0+\phi_1$ であり，導体球の表面では，θ によらず $\phi(a,\theta)=0$ でなければならない。この条件から，上の ϕ_1 の式は $l=1$ の項だけになる。

   以上のことを使って，$r>a$ での $\phi(r,\theta)$ を求めなさい。
   （c）導体表面のすぐ外側での電場を求めなさい。
   （d）導体表面に現れる電荷の面密度 σ を θ の関数として求めなさい。

4. 2次元の正方形の領域 $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ のラプラス方程式 $\Delta u(x,y) = 0$ を，境界条件

$$u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,0) = 0$$
$$u(x,\pi) = x(\pi - x)$$

のもとで解きたい。変数分離型を仮定する。$x = 0, \pi$ で $u = 0$ なので x については正弦級数の次のような級数で表せると予想できる。

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(y) \sin nx$$

（a）上の式をラプラス方程式に代入して $a_n(y)$ についての方程式を導きなさい。

（b）$x(\pi - x)$ を正弦級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ に展開しなさい。

（c）境界条件から $a_n(0), a_n(\pi)$ についての条件を導きなさい。

（d）$a_n(y)$ についての方程式を解き，解 $u(x,y)$ を求めなさい。

5. 半径 1 の円周上で $g(\theta) = T_0 \cos^2 \theta$ という温度分布を与えたとする。定常状態での，円の内部での温度分布 $T(r,\theta)$ を求めなさい。（ヒント：解は p.42 の式 (37) の形になるはずである。境界条件を満たすように係数 A_m, Bm を決めればよい。）