# Graph Coloring

## 1 Definición del problema

Dado un grafo $G$ no dirigido de $n$ nodos, no dirigido, y tres números enteros $n_1, n_2 y n_3$ que cumplen $n_1, n_2 y n_3 = n$, el problema consiste en asignar a cada vértice un número 1, 2 o 3 de forma tal que se cumpla que la cantidad de 1, 2 y 3 asignados sea igual a $n_1, n_2, n_3$ respectivamente. Una vez realizada la distribución, debe cumplirse para toda arista $(u, v)$ de $G$, que si los valores asignados a los extremos son a y b, entonces $|a - b| = 1$. Veamos un ejemplo. Sea G grafo $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 1$.

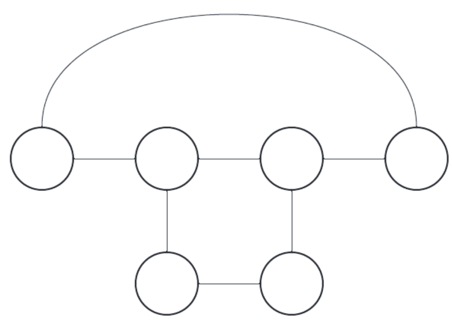


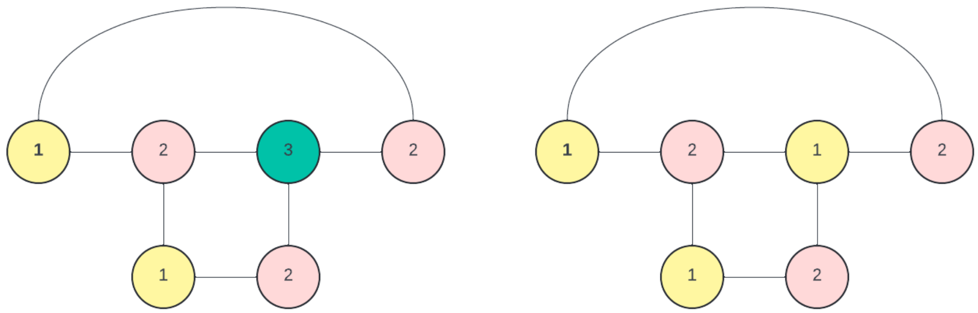
Figure 1: Grafo

En la figura No. 2(a) se muestra una distribución correcta. Cumple $\#1s = n_1$, $\#2s = n_2$ y $\#3s = n_3$. Se cumple también que para todo arista del grafo los valores que son asignados a sus extremos difieren en exactamente 1.

En cuanto a la figura No. 3 para grafo presentado no existe solución. Notemos que contiene un ciclo de tamaño 3 imposibilitando la existencia de una asignación que cumpla con la restricción $|a - b| = 1$ donde a y b son lo svalores asignados a los extremos de una arista del grafo.

## 2 Análisis

El problema en cuestión exige la asignación de valores a cada uno de los vértices del grafo donde los valores de nodos adyacentes cumplen $|a - b| = 1$. Definamos entonces las siguientes restricciones:




(a) Solución corecta.

(b) Solución incorrecta.

Figure 2: Posibles asignaciones de los valores 1, 2 y 3 a los nodos del grafo

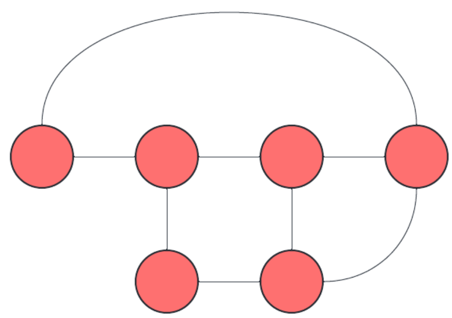


Figure 3: Para un grafo como este el problema no tendría solución.

1. La cantidad de 1, 2 y 3 asignados sea igual a $n_1, n_2, n_3$ respectivamente.

2. Sea $(u, v)$ arista de $G$, si los valores asignados a los vértices de dicha arista son a y b, entonces $|a - b| = 1$.

La restricción No.2 indica que entre los valores asignados a los vértice adyacentes solo debe existir una diferencia de 1 lo que implica que debene tener distinta paridad. Esto nos divide al grafo en dos subconjutnos $X_1, X_2$ disjuntos que cumplen que si $v, w$ vértices del grafo pertenecen a $X_i$ entonces no existe en $G$ la arista $(v, w)$. Esto añade una restricción al problema: (3) El grafo G tiene que ser bipartito.

Tenemos entonces que sinedo $G$ grafo de n nodos, si $G$ es bipartito entonces tenemos en $G$ dos subconjuntos disjuntos $X_1$ y $X_2$ tales que $\forall v, w \in X_i$ se cumple que la arista (v, w) $\notin G$, luego asignando 2 a los nodos de uno de los conjunto y 1 o 3 a los nodos del otro conjunto tenemos una distribución de valoresque cumplen con la condición (2). Para que una tenga del problema tenga solución solo debe entonces cumplirse la restricción (1) y para esto debe ser cierto que $|X_2| = n_2$ y

$|X_1| = n_1 + n_3$. La línea de trabajo sería la siguiente:

1. Comprobar que el grafo es bipartito. Si el grafo no es bipartitio no existe solución al problema.
2. Comprobar cardinalidad de las particiones del grafo.

Analicemos ahora el segundo paso. Cuando el grafo es conexo es sificiente con extraer las particiones y comprobar sus cardinalidades, pero que pasa si el grafo no es conexo?

Como dos nodos adyacentes no están en la misma componente conexa(cc) se cumple que si una cc tiene una correcta asiganción de valores, una distribución de valores en otra cc distinta no afecta su corrctitud. Sin embargo si existe relación entre las asignaciones deun acomponente conexa y otra. Sean $X_{1i}$ y $X_{2i}$ las particiones extraídas dela cc i podemos asignar a $|X_{1i}|$ vértices el valor dos y a $|X_{2i}|$ vértices los valores 1 y 3 o viceversa.

Supongamos que estamos analizando la 1ra cc de grafo y que sus particiones son $X_{1_1}$ y $X_{2_1}$. Al terminar de analizar esta cc podríamos tener $|X_{11}|$ vértices con número par y $|X_{21}|$ con número impar o vicevrcsa. Como los conjuntos son disjunto podemos enfocar el análisis en los nodos a los que le vamos a poner valor par pues el resto rendrá valor impar, siendo asi las alternativas anteriormente mensionadas serían equivalentes a tener al final del análisis de esta cc $|X_{21}|$ vértices pares o $|X_{21}|$ vértices pares. Supongamos que escogimos tener $|X_{11}|$ vértices paras, luego al tenerminar de analizar la 2da cc podríamos tener $|X_{11}| + |X_{12}|$ o $|X_{11}| + |X_{22}|$ vértices pares en el subgrafo formado por las dos cc analizadas.

El hecho de que por cada cc se tengan varias opciones de las cuales solo se puede escoger una y la posibilidad de hacer este proceso de forma recurrente hacen que la programción dinámica sea una buena alternativa a la solución.

# 3 Programación dinámica en el problema

Definamos $dp[i][j] = True$ si y solo si se han analizado i componentes conexas dle grafo y es posible tener j nodos con número par en el subgrafo formado por esas i componentes conexas. De este modo siendo k el número de componentes conexas del grafo si $dp[i][n_2]$ = True entonces es posible encontrar en $G$ una cantidad de $n_2$ nodos a los que asignarle el número 2 y como $n_1 + n_2 + n_3 = n$ tenemos que existen $n_1 + n_3$ nodos a los que asignarles el número 1 o el número 3, proporcionando una correcta solución que se puede reconstruir basándose en la dp. En cualquier otro caso el problema no tiene solución.

# 4 Complejidad temporal y espacial

Para determinar si el grafo es bipartito, se empleó BFS, de complejidad temporal lineal $O(n + m)$. El objetivo de la programación dinámica subsiguiente es verificar si, al explorar todas las componentes conexas del grafo, es posible construir una partición en la que un conjunto específico contenga exactamente $n_2$ vértices. Dado que un grafo puede tener hasta n componentes conexas y el valor máximo de $n_2$ también puede ser n, la matriz de programación dinámica dp debe tener al menos dimensiones $nn$, resultando en una inicialización de complejidad cuadrática $O(n^2)$. La complejidad espacial por ende es también $O(n^2)$.

## 5 Correctitud

Luego de comprobar si el grafo es bipartito es necesario verificar que una de sus particiones tiene dimensión $n_2$.

Cuando el grafo está compuesto por una única componente conexa solo es necesario analizar las cardinalidades de sus particiones y comprobar si alguna coincide con $n_2$, único caso en que el problema tiene solución.

### 5.1 Subestructura óptima

Sea G un grafo y consideremos la propiedad:

- **P**: El subgrafo inducido por las primeras i componentes conexas de G es bipartito y admite una asignación del número 2 a x vértices.

Si $P(i)$ es verdadera y la (i+1)-ésima componente conexa es bipartita con particiones de tamaño l y r, entonces **P(i+1)** es verdadera, y además, existe una asignación de 2 a $x + l$ o $x + r$ vértices en el subgrafo inducido por las primeras i+1 componentes. Al verificar $P(k)$, donde k es el número total de componentes conexas, se determina si es posible asignar el número 2 a $n_2$ vértices en G.

**Implementación disponible en**: GitHub