

Graph Coloring



1 Definición del problema

Dado un grafo G no dirigido de n nodos, y tres números enteros n_1 , n_2 y n_3 que cumplen $n_1 + n_2 + n_3 = n$, el problema consiste en asignar a cada vértice un número 1, 2 o 3 de forma tal que se cumpla que la cantidad de 1, 2 y 3 asignados sea igual a n_1 , n_2 y n_3 respectivamente. Una vez realizada la distribución, debe cumplirse para toda arista (u, v) de G , que si los valores asignados a los extremos son a y b , entonces $|a - b| = 1$. Veamos un ejemplo. Sea G el grafo de la figura No. 1, $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 1$.

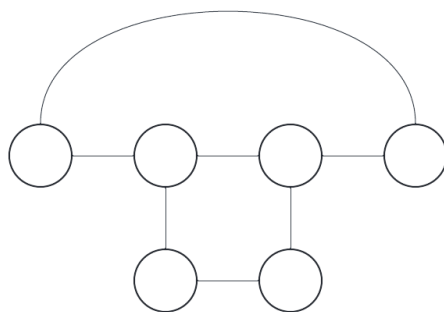


Figure 1: Grafo

En la figura No. 2(a) se muestra una distribución correcta. Cumple $\#1s = n_1$, $\#2s = n_2$ y $\#3s = n_3$. Se cumple también que para todo arista del grafo los valores que son asignados a sus extremos difieren exactamente en 1.

La figura No. 2(b) muestra una distribución incorrecta ya que $\#1s \neq n_1$ y $\#3s \neq n_3$.

En cuanto a la figura No. 3, para el grafo presentado no existe solución. Notemos que contiene un ciclo de tamaño 3 y uno de tamaño 5 imposibilitando la existencia de una asignación que cumpla con la restricción $|a - b| = 1$ donde a y b son los valores asignados a los extremos de una arista del grafo.

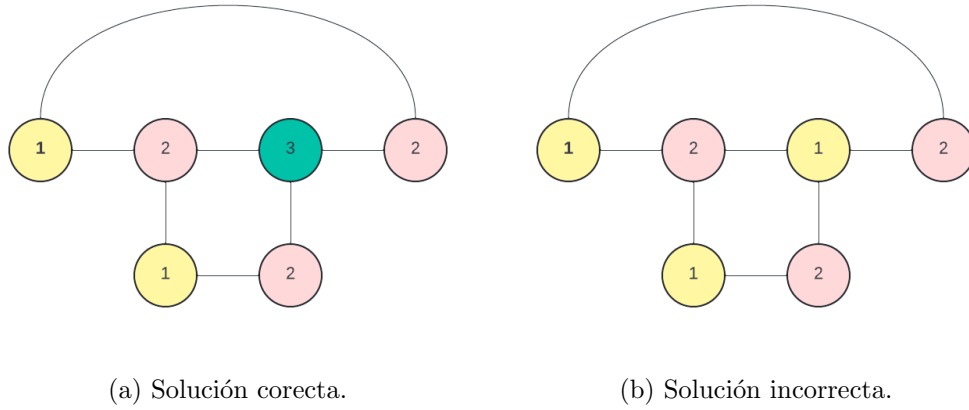


Figure 2: Posibles asignaciones de los valores 1, 2 y 3 a los nodos del grafo

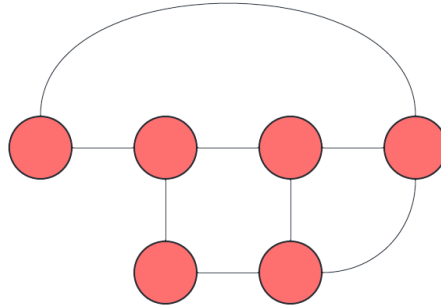


Figure 3: Para un grafo como este el problema no tendría solución.

2 Análisis

El problema en cuestión exige la asignación de valores a cada uno de los vértices del grafo donde los valores de nodos adyacentes cumplen $|a - b| = 1$. Definamos entonces las siguientes restricciones:

1. La cantidad de 1, 2 y 3 asignados tiene que ser igual a n_1, n_2, n_3 respectivamente.
2. Sea (u, v) arista de G , si los valores asignados a los vértices de dicha arista son a y b , entonces $|a - b| = 1$.

La restricción No.2 indica que entre los valores asignados a los vértice adyacentes solo debe existir una diferencia de 1 lo que implica que debene tener distinta paridad. Esto nos divide al grafo en dos subconjuntos X_1, X_2 disjuntos que cumplen que si v, w vértices del grafo pertenecen a X_i entonces no existe en G la arista (v, w) . Esto añade una restricción al problema:

3. El grafo G tiene que ser bipartito.

Tenemos entonces que siendo G grafo de n nodos, si G es bipartito entonces tenemos en G dos subconjuntos disjuntos X_1 y X_2 tales que $\forall v, w \in X_i$ se cumple que la arista $(v, w) \notin G$, luego asignando 2 a los nodos de uno de los conjuntos y 1 o 3 a los nodos del otro conjunto tenemos una distribución de valores que cumple con la condición (2). Para que el problema tenga solución solo debe entonces cumplirse la restricción (1) y para esto debe ser cierto que $|X_2| = n_2$ y $|X_1| = n_1 + n_3$.

La línea de trabajo sería la siguiente:

1. Comprobar que el grafo es bipartito. Si el grafo no es bipartito no existe solución al problema.
2. Comprobar cardinalidad de las particiones del grafo.

Analicemos ahora el segundo paso. Cuando el grafo es conexo es suficiente con extraer las particiones y comprobar sus cardinalidades. ¿Qué pasa si el grafo no es conexo?

Como dos nodos adyacentes no están en la misma componente conexa (cc) se cumple que si una cc tiene una correcta asignación de valores entonces una distribución de valores en otra cc distinta no afecta su corrección. Sin embargo si existe relación entre las asignaciones de una cc y otra. Sean X_{1_i} y X_{2_i} las particiones extraídas de la cc número i podemos asignar a $|X_{1_i}|$ vértices el valor dos y a $|X_{2_i}|$ vértices los valores 1 y 3 o viceversa.

Supongamos que estamos analizando la 1ra cc de grafo y que sus particiones son X_{1_1} y X_{2_1} . Al terminar de analizar esta cc podríamos tener $|X_{1_1}|$ vértices con número par y $|X_{2_1}|$ con número impar o viceversa. Como los conjuntos son disjuntos podemos enfocar el análisis en los nodos a los que le vamos a poner valor par pues el resto tendrá valor impar, siendo así, las alternativas que se propusieron anteriormente serían equivalentes a tener al final del análisis de esta cc $|X_{2_1}|$ vértices pares o $|X_{2_1}|$ vértices impares. Supongamos que escogimos tener $|X_{1_1}|$ vértices pares, luego al tenerminar de analizar la 2da cc podríamos tener $|X_{1_1}| + |X_{1_2}|$ o $|X_{1_1}| + |X_{2_2}|$ vértices pares en el subgrafo formado por las dos cc analizadas.

El hecho de que por cada cc se tengan varias opciones de las cuales solo se puede escoger una y la posibilidad de hacer este proceso de forma recurrente hacen que la programación dinámica sea una buena alternativa de la solución.

3 Programación dinámica en el problema

Definamos $dp[i][j] = True$ si y solo si se han analizado i componentes conexas del grafo y es posible tener j nodos con número par en el subgrafo formado por esas i componentes conexas. De este modo siendo k el número de componentes conexas del grafo si $dp[k][n_2] = True$ indica que es posible encontrar en G una cantidad de n_2 nodos a los que asignarle el número 2 y como $n_1 + n_2 + n_3 = n$ tenemos que existen $n_1 + n_3$ nodos a los que asignarles el número 1 o el número 3, proporcionando una correcta solución que se puede reconstruir basándose en la dp. Si $dp[k][n_2] = False$ el problema no tiene solución.

4 Correctitud

Luego de comprobar si el grafo es bipartito es necesario verificar que una de sus particiones tiene dimensión n_2 .

Cuando el grafo está compuesto por una única componente conexa solo es necesario analizar las cardinalidades de sus particiones y comprobar si alguna coincide con n_2 , único caso en que el problema tiene solución.

4.1 Subestructura óptima

Sea G un grafo y consideremos la propiedad:

- **P**: El subgrafo inducido por las primeras i componentes conexas de G es bipartito y admite una asignación del número 2 a x vértices.

Si $P(i)$ es verdadera y la $(i+1)$ -ésima componente conexa es bipartita con particiones de tamaño l y r , entonces **P(i+1)** es verdadera, y además, existe una asignación de 2 a $x + l$ o $x + r$ vértices en el subgrafo inducido por las primeras $i+1$ componentes. Al verificar $P(k)$, donde k es el número total de componentes conexas, se determina si es posible asignar el número 2 a n_2 vértices en G .

5 Complejidad temporal y espacial

Para determinar si el grafo es bipartito, se empleó BFS ($O(n + m)$). El objetivo de la programación dinámica es verificar si, al explorar todas las componentes conexas del grafo, es posible construir una partición en la que un conjunto específico contenga exactamente n_2 vértices. Dado que un grafo puede tener hasta n componentes conexas y el valor máximo de n_2 también puede ser n , la matriz de programación dinámica dp debe tener al menos dimensión $n \times n$, resultando en una inicialización de complejidad cuadrática $O(n^2)$. La complejidad espacial por ende es también $O(n^2)$.

Implementación disponible en:  [GitHub](#)