PROGRAMMATION LINEAIRE

Dr Adama COULIBALY
UFR de Mathématiques et Informatique,
Université FHB, 22 BP 582 Abidjan 22, Côte d'Ivoire.

1er juin 2014

Table des matières

Chapitre 1

Notions de convexité

1.1 Ensembles convexes

Définition 1.1.1 *Soient* $x^i : i = 1, \cdots, k$ *des points de* $\mathbb{R}^n$. *On appelle combinaison linéaire convexe de ces points, tout élément* $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ *avec* $\lambda_i \geq 0$ *pour tout* i *et* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

En particulier, une combinaison linéaire convexe de deux points x et y, est tout point $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ avec $\lambda \in [0,1]$.

On définit aussi :

Définition 1.1.2 *Soit* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *; on appelle segment "fermé" d'extrémités* x *et* y, *l'ensemble noté* $[x,y]$ *et défini par :*

$$[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)\,x + \lambda y \ : \lambda \in [0,1]\}.$$

C'est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires convexes des points x *et* y.

De façon analogue, on définit :

Définition 1.1.3 *On appelle segment "ouvert" d'extrémités* x *et* y, *et on le note* $]x,y[$, *l'ensemble*

$$]x,y[= \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)\,x + \lambda y : \ \lambda \in]0,1[\}.$$

On définit aussi $]x,y]$ et $[x,y[$ qui sont appelés segments semi ouvert en x respectivement en y.

$$]x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)\,x + \lambda y, \ \ \lambda \in]0,1]\}.$$

$$[x,y[= \{z \in \mathbb{R}^n : z = (1-\lambda)\,x + \lambda y, \ \ \lambda \in [0,1[\}.$$

Définition 1.1.4 *Soit* C *une partie de* $\mathbb{R}^n$. C *est convexe si seulement si pour tout* $x, y \in C$, $(1-\lambda)\,x + \lambda y \in C$ *pour tout* $\lambda \in [0,1]$. *Autrement dit,* C *est convexe si seulement si* C *contient tout segment fermé d'extrémités deux quelconques de ses points.*

Exemple 1.1.1 - *Dans* $\mathbb{R}^n$, *les ensembles suivants sont convexes.* $\mathbb{R}^n$, *l'ensemble vide, les singletons, les boules, les segments.*
- *Dans* $\mathbb{R}$, *les parties convexes sont les intervalles.*

On a la proposition :

Proposition 1.1.1 *Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est convexe si seulement si elle contient toute combinaison linéaire convexe de toute famille finie d'éléments qui lui appartiennent.*

Preuve : Si C contient toute combinaison linéaire convexe de familles finies d'éléments qui lui appartiennent, en particulier, prenant une famille de deux éléments x et y de C, on a $[x, y] \subset C$ et donc C est convexe.

Réciproquement, soit C un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors C contient toute combinaison linéaire convexe de deux quelconques de ses éléments. Donc la propriété est vraie pour une famille comportant deux éléments. Supposons qu'elle est vraie pour une famille de $k-1$ éléments.

Soit

$$\mathcal{F} = \left\{x^1, x^2, \cdots, x^k\right\}$$

une famille de k élément de C.

Soit

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \text{ avec } \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

On a

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x^i + \lambda_k x^k.$$

Soit

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i.$$

On a $\lambda \in [0, 1]$.

Si $\lambda = 0$ alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, k-1$ et donc $\lambda_k = 1$. Il vient alors que $x = \lambda_k x^k = x^k \in C$.

Si $\lambda \neq 0$, on peut écrire

$$x = \lambda \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) x^i + \lambda_k x^k.$$

L'élément

$$y = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) x^i,$$

est une combinaison linéaire convexe de $k-1$ éléments de C. C'est donc un élément de C, par hypothèse de recurrence. Donc $x = \lambda y + \lambda_k x^k$. Or $\lambda_k = 1 - \lambda$ avec $\lambda \in [0, 1]$. Donc x est combinaison linéaire convexe de deux éléments de C. Comme par hypothèse, C est convexe, on a alors $x \in C$.
$\square$

On rapelle que :

Définition 1.1.5 *Une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est dite affine si l'une des conditions suivantes est vérifiée.*
i) Pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

ii) Il existe une application linéaire $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et a dans $\mathbb{R}^m$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \mathcal{L}(x) + a.$$

Les résultats suivants sont immédiats.

Proposition 1.1.2 1) *Si* C_1 *et* C_2 *sont convexes alors pour tous* α_1 *et* α_2 *dans* $\mathbb{R}$, $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2$ *est convexe.*
2) *Toute intersection de parties convexes est convexe.*
3) *Le produit cartésien de deux convexes est convexe.*
4) *L'image d'un convexe par une application affine est convexe.*
5) *L'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.*

1.2 Polyèdres convexes

Définition 1.2.1 *Un polyèdre convexe* $\mathcal{P}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *est l'intersection (éventuellement vide) d'un nombre fini de demi-espaces fermés et/ou d'hyperplans.*
C'est-à-dire :

$$\mathcal{P} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{l} a_i x \leq b_i,\ i = 1, \cdots, p_1, \\ a_i x \geq b_i,\ i = p_1 + 1, \cdots, p_2, \\ a_i x = b_i,\ i = p_2 + 1, \cdots, m \end{array} \right\}$$

où les a_i *sont dans* $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ *et les* b_i*, dans* $\mathbb{R}$*,* $i = 1, \cdots, m$*.*

Remarque 1.2.1 *Dans cette définition on peut toujours supposer qu'on a un seul type d'inégalité.*

Définition 1.2.2 *Soit* $\mathcal{P}$ *un polyèdre convexe de* $\mathbb{R}^n$*. Un point* $x \in \mathcal{P}$ *est un sommet de* $\mathcal{P}$ *s'il existe* $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ *tel que* $cx < cy$ *pour tout* $y \in \mathcal{P}$*,* $y \neq x$*.*

On montre que si le polyèdre est de la forme

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a_i x \geq b_i,\ i = 1, \cdots, m\}$$

un point x est un sommet si et seulement si il est intersection de n hyperplans frontières linéairement indépendants.

Chapitre 2

Formulation d'un programme linéaire

2.1 Programmes linéaires

Définition 2.1.1 *Un programme linéaire est un programme mathématique de la forme*

$$\begin{array}{l} \min\ (\max) \quad Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = m_1 + 1, \cdots, m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = m_2 + 1, \cdots, m \\ \quad x_j \in \mathbb{R}, & j = 1, \cdots, n \end{array} \right. \end{array}$$

On peut supposer que ce programme est sous la forme suivante dite forme générale :

$$\begin{array}{l} \min\ (\max) \quad Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = m_1 + 1, \cdots, m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = m_2 + 1, \cdots, m \\ \quad x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n_1 \\ \quad x_j \leq 0, & j = n_1 + 1, \cdots, n_2 \\ \quad x_j \in \mathbb{R}, & j = n_2 + 1, \cdots, n. \end{array} \right. \end{array}$$

On a les remarques suivantes :

Remarque 2.1.1 - *Etant donné un programme linéaire, on peut toujours se ramener à un programme linéaire où les variables sont astreintes à être non négatives. En effet si x_j est une variable négative on fait le changement de variable $x'_j = -x_j$. Si par contre x_j est quelconque dans $\mathbb{R}$ on pose $x_j = x_j^+ - x_j^-$ avec $x_j^+,\ x_j^- \geq 0$ car tout réel peut s'écrire comme la différence de deux réels positifs ou nuls.*

- Dans un programme linéaire on peut ramener toutes les contraintes d'inégalité à des inégalités de même type. il suffit de multiplier la contrainte par -1 le cas échéant.

Par convention les contraintes d'inégalité pour un problème de minimisation sont du type " $\geq$ " et les contraintes d'inégalité pour un problème de maximisation sont du type " $\leq$ "

On peut dire alors qu'un programme linéaire est un programme mathématique de la forme

$$\min\ (\max) \quad Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq (\leq)\, b_i, & i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = m_1 + 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

Dans un programme linéaire on distingue deux types de contrainte : les contraintes relatives au signe des variables, dites contraintes de restriction de signe ou de non-négativité et les autres dites "vraies contraintes" on dit aussi contraintes structurelles. la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est appelée matrice des vraies contraintes, $c = (c_j) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, vecteur coût et $b = (b_i) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, vecteur second membre.

2.2 Quelques exemples

Problème de production

Soient m machines M_i $(i = 1, \cdots, m)$ qui fabriquent en série n types de produits P_j $(j = 1, \cdots, n)$. La machine M_i a une capacité maximum de b_i unités de temps. La fabrication d'une unité du produit P_j nécessite l'utilisation de la machine M_i durant a_{ij} unités de temps. Si c_j représente le gain relatif à la production d'une unité du produit P_j, quelle doit être la politique de production pour maximiser le gain total ?

Problème de transport

Soient r centres de production d'un bien donné possédant des stocks disponibles en quantités respectives $q_1, \cdots, q_r$. Dans s centres de consommation, la demande de ce bien est respectivement de $d_1, \cdots, d_s$. Les frais de transport d'une unité de bien du centre de production i au centre de consommation j est c_{ij} unités monétaires. Il s'agit de déterminer comment approvisionner les centres de consommation à partir des centres de production de manière à minimiser le coût total de transport. Formuler ce problème sous forme d'un programme linéaire.

Problème de la ration alimentaire

On dispose de n aliments A_j $(j = 1, \cdots, n)$ aux prix respectifs par unité de c_j $(j = 1, \cdots, n)$.

Soient m éléments nutritifs e_i $(i = 1, \cdots, m)$. La quantité du $i^{\text{ème}}$ élément nutritif contenue dans une unité de l'aliment A_j est a_{ij}. Les besoins respectifs en les m éléments nutritifs sont b_i $(i = 1, \cdots, m)$.

On se propose de déterminer la ration alimentaire qui tout en étant de meilleur marché possible garantisse un apport suffisant en éléments nutritifs.

2.3 Forme standard, forme canonique

Dans cette partie on considère la relation suivante.

Pour u et v dans $\mathbb{R}^n$ on note

$$u \leq v \Leftrightarrow u_i \leq v_i \quad \forall\, i = 1, \cdots, n.$$

Définition 2.3.1 *Un programme linéaire est sous forme standard si les vraies contraintes sont des égalités et les variables sont astreintes à être non négatives. En d'autres termes, le problème* *est sous la forme*

$$\min\,(\max)\,Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, & i = 1,\cdots,m \\ x_j \geq 0, & j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

Si on pose $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c = (c_j) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b = (b_i) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, on a la notation matricielle

$$\min(\max)\ Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases}$$

On a la proposition suivante.

Proposition 2.3.1 *Tout programme linéaire peut se mettre sous forme standard*

Preuve : Il suffit de transformer les contraintes d'inégalité en contraintes d'égalité en considérant les équivalences suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i,\ s_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i = b_i,\ s_i \geq 0$$

□

Définition 2.3.2 *La variable s_i introduite pour passer d'une contrainte d'inégalité à une contrainte d'égalité est appelée variable d'écart.*

Remarque 2.3.1 *Le passage à la forme standard augmente le nombre de variables dans le programme linéaire.*

Définition 2.3.3 *Un programme linéaire est sous forme canonique si les vraies contraintes sont des inégalités et les variables sont astreintes à être non négatives. Pour les problèmes de minimisation on a*

$$\min\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, & i = 1,\cdots,m \\ x_j \geq 0, & j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

et pour les problèmes de maximisation on a

$$\max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, & i = 1,\cdots,m \\ x_j \geq 0, & j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

En considérant les mêmes notations que ci-dessus, on obtient respectivement pour la minimisation et la maximisation la notation matricielle suivante :

$$\min\ Z = cx \qquad\qquad \max\ Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 2.3.2 *Tout programme linéaire peut se mettre sous forme canonique*

Preuve : Il suffit de transformer les contraintes d'égalité en contraintes d'inégalité en considérant l'une des équivalences suivantes :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq -b_i \end{array} \right.$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, \\ -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq -b_i \end{array} \right.$$

$\square$

Remarque 2.3.2 *Le passage à la forme canonique augmente le nombre de contraintes dans le programme linéaire.*

Chapitre 3

Résolution des programmes linéaires

3.1 La méthode graphique

La méthode graphique est l'une des premières méthodes utilisées pour résoudre les programmes linéaires.

On sait que l'ensemble des solutions réalisables d'un programme linéaire est polyèdre convexe fermé. Il peut être :
- vide,
- non vide et borné,
- non vide et non borné.

La méthode graphique est basée sur la propriété suivante qui est fondamentale en programmation linéaire.

Théorème 3.1.1 *Si un programme linéaire possède une solution optimale, alors son polyèdre des solutions réalisables contient au moins un sommet et un d'entre eux est solution optimale.*

A titre d'exemples, résoudre graphiquement les programmes linéaires suivants :

$$\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 6x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\min\ Z = x_1 + x_2 \qquad \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\max\ Z = 3x_1 + 2x_2 \qquad \left\{\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2 \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\max\ Z = x_1 + x_2 \qquad \left\{\begin{array}{l} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

Cette méthode est limitée car elle ne s'applique qu'à des programmes linéaires où le nombre de variables est faible (au maximum 3 variables). Nous allons nous intéresser dans ce qui suit à une méthode algébrique, la méthode du simplexe.

3.2 La méthode du simplexe

On considère le programme linéaire sous la forme standard suivant.

$$\begin{array}{l} Z^* = \min\ Z = cx \\ \begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{PL}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ avec rang$A = m < n$.

Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des solutions réalisables de (PL). On sait que $\mathcal{D}$ est un polyèdre convexe fermé. Il peut être vide, non vide et borné i.e. un polytope, non vide et non borné.

3.2.1 Base d'un système d'équations linéaires

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ avec rang$A = m < n$. On considère le système d'équations linéaires

$$Ax = b, \tag{3.1}$$

On définit :

Définition 3.2.1 *On appelle base du système d'équations linéaires (3.1), toute sous matrice carrée régulière* $(m \times m)$ *extraite de* A*.*

Exemple 3.2.1

Considérons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 37 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 26 \end{cases}$$

La matrice de ce système est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 10 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

On a rang$A = 2$. La sous matrice carrée formée de la première et quatrième colonnes est

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

On a $\det B = 45 \neq 0$. C'est donc une base du système ci-dessus.

Remarque 3.2.1 *Il existe au moins une base pour le système (3.1) (puisque* $rg(A) = m$*) et il y en a au plus* C_n^m*.*

Définition 3.2.2 *Soit* B *une base de (3.1), les variables associées aux colonnes de* B *sont appelées variables de base, les autres, variables hors base.*

Remarque 3.2.2 *très souvent, et cela, pour éviter certaines indéterminations, on représente une base par son ensemble de variables de base ou par son ensemble des indices des variables de base.*

Définition 3.2.3 *On dit que deux bases B et B' sont adjacentes, si les colonnes qui les constituent ne diffèrent que d'un seul élément.*

Soit B une base de (3.1) ; moyennant une permutation on peut supposer que les colonnes de B sont les m premières colonnes de A. Donc on peut supposer que A est sous la forme (matrices blocs) $A = (B,\, N)$ où N est la sous-matrice formée par les colonnes de A qui ne sont pas dans B. De même on peut partitionner $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ où x_B est constitué des variables de base et x_N des variables hors base. Le système (3.1) est alors équivalent à

$$Bx_B + Nx_N = b. \tag{3.2}$$

Par suite les solutions de (3.1) sont

$$x = \begin{pmatrix} B^{-1}(b - Nx_N) \\ x_N \end{pmatrix},\ x_N \in \mathbb{R}^{n-m}. \tag{3.3}$$

Définition 3.2.4 *On appelle solution de base de (3.1) associée (ou relative) à la base B, la solution particulière $x(B)$ obtenue dans (3.3) en prenant $x_N = 0$ i. e. $x(B) = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$*

On montre que

Proposition 3.2.1 *$x \in \mathbb{R}^n$ est une solution de base de (3.1) si et seulement si on a $Ax = b$ et il existe des indices $B(1), \cdots, B(m)$ tels que :*
a) les colonnes $A_{B(1)}, \cdots, A_{B(m)}$ sont linéairement indépendantes ;
b) si $i \neq B(1), \cdots, B(m)$, alors $x_i = 0$.

3.2.2 Base réalisable d'un programme linéaire

Définition 3.2.5 *On appelle base de (PL) toute base du système $Ax = b$.*

Définition 3.2.6 *Soit B une base de (PL). On dit que B est une base réalisable pour (PL) si on a $B^{-1}b \geq 0$. Dans ce cas la solution de base associée à B est une solution réalisable pour (PL).*

Exemple 3.2.2

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \min\ Z = 2x_1 - 9x_2 + 4x_3 + 10x_4 - 3x_5 \\ \left\{ \begin{array}{l} 7x_1 + 3x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 37 \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 3x_5 = 26 \\ x \in \mathbb{R}^5,\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

$I = \{x_1, x_3\}$ est une base réalisable. En effet, si on note B la matrice associée à I, on a :

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{et } B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Définition 3.2.7 *Une base réalisable B de (PL) est dite dégénérée si le vecteur $x_B = B^{-1}b$ contient au moins une composante nulle.*

Exemple 3.2.3

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min \ Z = -3x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_5 = 8 \\ x \in \mathbb{R}^5, \ x \geq 0 \end{cases}$$

Soit $I = \{1, 3, 5\}$. La matrice associée à I est

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $\det B = -4 \neq 0$; donc I est une base.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

La base est alors réalisable ; mais le vecteur $B^{-1}b$ a une composante nulle. Donc la base I est dégénérée.

Définition 3.2.8 *Le programme (PL) est dit dégénéré s'il possède une base réalisable dégénérée.*

Il y a un lien entre les sommets du polyèdre des solutions réalisables de (PL) et les solutions de base réalisables. On montre que :

Théorème 3.2.1 *On a les équivalences suivantes :*
a) x est un sommet de $\mathcal{D}$,
b) x est une solution de base réalisable de (PL).

On montre que

Proposition 3.2.2 *Etant donné un programme linéaire sous forme standard, si l'ensemble des solutions réalisables est non vide, il contient au moins un sommet.*

On sait d'après le théorème (3.1.1) que si un programme linéaire possède une solution optimale, il admet un sommet et donc une solution de base réalisable comme solution optimale. Ce qui nous amène à chercher les conditions pour qu'une solution de base réalisable soit optimale.

3.2.3 Forme canonique par rapport à une base réalisable

On vient de voir que si (PL) possède un optimum fini, il existe au moins une base réalisable optimale. C'est pour cela qu'on s'intéresse dans ce qui suit aux conditions d'optimalité des solutions de base réalisables.

Soit B une base réalisable de (PL). On note I l'ensemble des indices des variables de base et J l'ensemble des indices des variables hors base.

On sait qu'on peut supposer sans perdre de généralités que B est formée des m premières colonnes de A et donc A est de la forme (matrices blocs) $A = (B, N)$ où N est la sous-matrice formée par les colonnes de A qui ne sont pas dans B. De même on peut partitionner $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$ où x_B est constitué des variables de base et x_N des variables hors base.

Le système $Ax = b$ est alors équivalent à

$$Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b. \tag{3.4}$$

On peut aussi partitionner c de la façon suivante : $c = (c_B, c_N)$ où c_B est formé des coefficients des variables de base et c_N des coefficients des variables hors base. On a alors

$$Z(x) = cx = c_Bx_B + c_Nx_N.$$

En remplaçant x_B par sa valeur ($x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$), on a

$$Z(x) = c_BB^{-1}b + (c_N - c_BB^{-1}N)x_N. \tag{3.5}$$

Posons

$$\hat{A} = B^{-1}A, \quad \hat{c} = c - c_BB^{-1}A, \quad \hat{Z} = c_BB^{-1}b \tag{3.6}$$

Donc $\hat{c}_B = 0$ et $\hat{c}_N = c_N - c_BB^{-1}N$.
On remarque qu'on a $Z(x(B)) = c_BB^{-1}b = \hat{Z}$.

Définition 3.2.9 *Deux programmes linéaires sont dits équivalents s'ils ont les solutions réalisables et les mêmes solutions optimales.*

Définition 3.2.10 *Le programme linéaire (PL) est équivalent au programme linéaire :*

$$Z^* = \min \; Z = \hat{c}x + \hat{Z}$$
$$\begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \in \mathbb{R}^n, \; x \geq 0 \end{cases}$$

C'est la forme canonique (ou forme équivalente) de (PL) par rapport à la base réalisable B.

Remarque 3.2.3 *Ecrire un programme linéaire sous forme canonique par rapport à une base réalisable, c'est écrire sa fonction-objectif ainsi que ses variables de base en fonction des seules variables hors base.*

En d'autres termes il s'agit d'écrire la fonction-objectif à l'aide des seules variables hors base et transformer le système des vraies contraintes en un système équivalent dans lequel chaque variable de base n'intervient que dans une seule équation, et dans cette équation son coefficient est égal à 1. *On dira alors que cette dernière est la variable de base associée à cette équation.*

Exemple 3.2.4

La forme canonique du programme linéaire de l'exemple (3.2.2) par rapport à la base réalisable $I = \{x_1, x_3\}$ est :

$$\min \; Z = 14 + 5x_2 + 60x_4 - 27x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + 19x_2 + 65x_4 - 26x_5 = 1 \\ x_3 - 13x_2 - 45x_4 + 19x_5 = 3 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3.2.4 Caractérisation des solutions de base réalisables optimales

On peut à présent donner les conditions d'optimalité pour une solution de base réalisable.

Théorème 3.2.2 *Une condition suffisante pour que B soit une base réalisable optimale est $\hat{c} \geq 0$.*

Preuve : Dans (PL) on a la contrainte $x_N \geq 0$. Donc pour toute solution réalisable x de (PL), on aura

$$Z(x) = c_B B^{-1} b + (c_N - c_B B^{-1} N) x_N \leq c_B B^{-1} b = Z(x(B)).$$

Par suite $x(B)$ est une solution optimale de (PL). □

Remarque 3.2.4 *Pour un problème de maximisation la condition suffisante d'optimalité est $\hat{c} \leq 0$.*

Dans le cas de non dégénérescence la condition suffisante ci-dessus est aussi nécessaire.

Théorème 3.2.3 *Si le problème (PL) est non dégénéré i.e. ne possède pas de base réalisable dégénérée, une condition nécessaire et suffisante pour que B soit optimale est $\hat{c} \geq 0$.*

Théorème 3.2.4 *Soit k dans J tel que $\hat{c}_k < 0$. Si $\hat{A}_k$, la colonne associée à la variable x_k dans la matrice $\hat{A}$ est telle que $\hat{A}_k \leq 0$, alors on peut diminuer indéfiniment la fonction objectif, ce qui signifie que $(z^* = -\infty)$. On dit alors que l'optimum de (PL) est non borné ou que (PL) n'admet pas de solution optimale à distance finie.*

Preuve : Considérons dans le système $Ax = b$ la solution $x(\alpha)$ obtenue en imposant aux variables hors base les valeurs suivantes :

$$x_j = 0 \quad \forall\, j \in J - k \text{ et } x_k = \alpha.$$

On obtient alors

$$x_i = \hat{b}_i - \alpha \hat{a}_{ik} \quad \forall i \in I.$$

La solution $x(\alpha)$ est réalisable pour tout $\alpha \geq 0$.

On a :

$$Z(x(\alpha)) = \hat{Z} + \sum_{j \in J} \hat{c}_j x_j = \hat{Z} + \alpha \hat{c}_k$$

Comme $\hat{c}_k < 0$, on a $Z(x(\alpha))$ qui tend vers $-\infty$ pour λ tendant vers $+\infty$. Donc $Z^* = -\infty$. □

Exemple 3.2.5

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min \; Z = -x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = 4 \\ x \in \mathbb{R}^5, \; x \geq 0 \end{cases}$$

Soit $I = \{1, 2, 5\}$. La matrice associée à I est

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{43}{3} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Donc c'est une base réalisable. La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min \; Z = -\frac{17}{3} - \frac{4}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4$$
$$\begin{cases} x_1 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = \frac{8}{3} \\ x_5 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4 = \frac{43}{3} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La colonne de la variable hors base x_3 est négative dans cette forme. On remarque que

$$x(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\alpha \\ \frac{8}{3} + \frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \\ 0 \\ \frac{43}{3} + \frac{2}{3}\alpha \end{pmatrix}$$

est réalisable quel que soit $\alpha \geq 0$ et $Z(x(\alpha)) = -\frac{17}{3} - \frac{4}{3}\alpha$ qui tend vers $-\infty$ quand α tend vers $+\infty$. Le problème est alors non borné.

Remarque 3.2.5 *On a les mêmes résultats dans le cas des problèmes de maximisation si on remplace la condition $\hat{c}_k < 0$ par $\hat{c}_k > 0$ dans le théorème (3.2.4).*

Dans le théorème qui suit on montre que si pour tout $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$, on a $\hat{A}_k \not\leq 0$ alors il existe une base réalisable qui améliore la fonction-objectif Z.

Théorème 3.2.5 *Soit B une base réalisable, on note I et J respectivement les ensembles des indices des variables de base et hors base, $\hat{b} = B^{-1}b$, $\hat{A} = B^{-1}A$ et $\hat{c} = c - c_B B^{-1}A$. Soit $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$ et $\hat{A}_k \not\leq 0$. Soit l tel que*

$$\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min \left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} : \; i \in I, \; \hat{a}_{ik} > 0 \right].$$

Alors la matrice B' associée aux variables dont les indices sont dans $I' = I - l + k$ est une base réalisable adjacente à B. Et on a

$$Z(x(B')) = Z(x(B)) + \hat{c}_k \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}}.$$

Preuve : La matrice associée à $I' = I - l + k$ est $B' = BM$. où

$$M = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{l-1} & \hat{A}_k & e_{l+1} & \cdots & e_m \end{pmatrix}$$

les e_i étant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

On a

$$\det(B') = \det B \det M = \hat{a}_{lk} \det B \neq 0.$$

Donc I' est une base.

En considérant la forme canonique du programme (PL) par rapport à la base B, on constate que le système $Ax = b$ est équivalent à :

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j \in J-k} \hat{a}_{ij} x_j + \hat{a}_{ik} x_k = \hat{b}_i & \forall i \in I - l \\ x_l + \sum_{j \in J-k} \hat{a}_{lj} x_j + \hat{a}_{lk} x_k = \hat{b}_l \end{cases}$$

La solution de base associée à $I' = I - l + k$ est :

$$\begin{cases} x_j = 0 & \forall j \in J - k + l \\ x_k = \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \\ x_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{ik} \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} & \forall i \in I - l \end{cases}$$

Pour que cette solution de base soit réalisable il suffit qu'elle vérifie les contraintes de non-négativité, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_k = \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \geq 0 \\ x_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{ik} \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \geq 0 & \forall i \in I - l \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$0 \leq \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min \left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \; : \; i \in I, \; \hat{a}_{ik} > 0 \right],$$

qui est vrai par le choix de l. Par suite $I' = I - l + k$ est une base réalisable. En outre on a :

$$Z(x(B')) = \hat{Z} + \hat{c}_k x_k = \hat{Z} + \hat{c}_k \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = Z(x(B)) + \hat{c}_k \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}}.$$

Comme

$$\hat{c}_k < 0 \text{ et } \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} \geq 0,$$

on a bien $Z(x(B')) \leq Z(x(B))$. □

Remarque 3.2.6 *Si la base B est non dégénérée, on a : $Z(x(B')) < Z(x(B))$. c'est-à-dire que la décroissance est stricte.*

On peut à présent donner l'algorithme du simplexe.

3.2.5 Algorithme primal du simplexe

L'algorithme du simplexe contient deux phases : la phase 1 et la phase 2.

Phase 1
Dans cette phase on détermine une première solution de base réalisable du problème. Si cette procédure échoue, cela signifie que le polyèdre des solutions réalisables $\mathcal{D}$ du problème est vide.

Phase 2
Dans cette partie, on calcule à partir de la solution réalisable obtnue dans la phase 1 une autre solution de base réalisable donnant une meilleure valeur de la fonction-objectif. Géométriquement, une itération consiste à passer d'un sommet de $\mathcal{D}$ à un sommet de $\mathcal{D}$; ce nouveau sommet est adjacent au premier en ce sens qu'ils sont les extrémités d'une arête de $\mathcal{D}$.

Nous donnons ici une itération de la phase 2 de l'algorithme du simplexe.

Phase 2 de l'algorithme du simplexe
Dans une itération de la phase 2 de l'algorithme du simplexe appliqué au problème (PL) on procède comme suit.

Début
On suppose qu'on dispose d'une base réalisable de depart B. Soit I et J respectivement les ensembles des indices des variables de base et hors base.

1) Calculer $\hat{b} = B^{-1}b$, $\hat{A} = B^{-1}A$ et $\hat{c} = c - c_B B^{-1}A$.

2) Tester $\hat{c}$.
a) Si $\hat{c} \geq 0$, stop : "La base B est optimale."
b) S'il existe $k \in J$ tel que $\hat{c}_k < 0$ avec $\hat{A}_k \leq 0$, stop : "Le problème est non bornée i.e. la valeur optimale est infinie."
c) Autrement effectuer un changement de base.

3) Changement de base
a) **Test d'entrée :** Soit $k \in J$ tel que

$$\hat{c}_k = \min \left[\hat{c}_j \ : \ j \in J, \ \hat{c}_j < 0 \right].$$

La variable correspondante x_k rentre dans la base on l'appelle variable rentrante.
b) **Test de sortie :** Soit l tel que

$$\frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min \left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} : \ i \in I, \ \hat{a}_{ik} > 0 \right].$$

La variable x_l sort de la base on l'appelle variable sortante.
c) On considère la nouvelle base réalisable encore notée B dont les ensembles des indices de variables de base et hors base sont respectivement

$$I := I - l + k \text{ et } J := J - k + l$$

Aller à 1).
Fin

Remarque 3.2.7 *Dans le cas d'un problème de maximisation, il n'est pas nécessaire de transformer le problème en un problème de minimisation afin d'appliquer l'algorithme du simplexe. Il suffit de considérer les modifications suivantes :*

$2-a)$ Si $\hat{c} \leq 0$ stop : "la base B est optimale."

$2-b)$ S'il existe $k \in J$ tel que $\hat{c}_k > 0$ avec $\hat{A}_k \leq 0$ stop : "le problème est non bornée i.e. la valeur optimale est infinie."

*$3-a)$ **Test d'entrée :** Soit $k \in J$ tel que*

$$\hat{c}_k = \max\left[\hat{c}_j \;:\; j \in J,\ \hat{c}_j > 0\right].$$

La variable correspondante x_k rentre dans la base.

Les autres instructions restent valables.

3.2.6 Convergence de l'algorithme du simplexe

On a le résultat suivant

Théorème 3.2.6 *Si à chaque base réalisable rencontrée dans résolution du problème (PL) la solution de base associée est non dégénérée, l'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations par l'une des deux situations suivantes :*
i) obtention d'une solution de base réalisable optimale de (PL)
ii) absence de solution optimale à distance finie.

Ce théorème montre la convergence de l'algorithme du simplexe en l'absence de dégénérescence. On montre que

Proposition 3.2.3 *Si à une itération de l'algorithme du simplexe l'ensemble*

$$\mathcal{L} = \left\{ l : \frac{\hat{b}_l}{\hat{a}_{lk}} = \min\left[\frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{ik}} \;:\; i \in I,\ \hat{a}_{ik} > 0\right]\right\}$$

contient plus d'un élément, alors le problème (PL) est dégénéré i.e. il existe une base dégénérée.

Lorsque le problème est dégénéré, l'algorithme du simplexe peut cycler c'est-à-dire qu'on peut retrouver une base déjà rencontrée. Pour remédier à cela on peut utiliser l'une des règles suivantes.
- la règle de Bland ou la règle du plus petit indice
- la règle lexicographique
- la règle de perturbation

La règle de Bland

Test d'entrée : La variable qui rentre dans la base est x_k avec k le plus petit indice pour lequel $\hat{c}_k < 0$

Test de sortie : La variable qui sort de la base est x_l avec l le plus petit élément de $\mathcal{L}$.

3.2.7 Méthode des tableaux

C'est une mise en œuvre manuelle de l'algorithme du simplexe.

Soit à résoudre le programme linéaire (PL)

$$Z^* = \min\ Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases}$$

toujours avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et rang$A = m < n$.

On suppose qu'on dispose d'une base réalisable de départ B Les ensembles des indices des variables de base et hors-base sont I et J.

La forme canonique de (PL) par rapport à B est

$$Z^* = \min\ Z = \hat{c}x + \widehat{Z}$$
$$\begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases}$$

On sait que $\hat{A} = (I_m, B^{-1}N)$, $\quad \hat{c} = (0, c_N - c_B B^{-1}N), \hat{b} = B^{-1}b$.

On définit :

Définition 3.2.11 *On appelle tableau simplexe complet de (PL) par rapport à la base réalisable B, le tableau à $m+1$ lignes et $n+1$ colonnes ci-dessous*

	$x_i\ i \in I\ x_j\ j \in J$	
x_i $i \in I$	$\hat{A}$	$\hat{b}$
	$\hat{c}$	$-\hat{Z}$

Définition 3.2.12 *On appelle tableau simplexe de (PL) par rapport à la base réalisable B, le tableau à $m+1$ lignes et $n-m+1$ colonnes ci-dessous*

	$x_j\ j \in J$	
x_i $i \in I$	$\hat{A}_N = B^{-1}N$	$\hat{b}$
	$\hat{c}_N$	$-\hat{Z}$

A partir du tableau simplexe on peut écrire la forme canonique de (PL) par rapport à la base B et inversement.

On définit :

Définition 3.2.13 *Dans le tableau simplexe, on appelle pivot l'élément qui est à l'intersection de la colonne de la variable rentrante et de la ligne de la variable sortante.*

Dans ce cas la ligne correspondante est dite ligne du pivot et la colonne, colonne du pivot.

La méthode des tableaux consiste à écrire les tableaux simplexes relatifs aux différentes bases rencontrées dans la résolution du programme (PL) à l'aide de l'algorithme du simplexe. Il faut donc déterminer pour deux bases successives dans l'algorithme du simplexe B et B' comment passer du tableau simplexe relatif à B à celui relatif à B'.

Pour obtenir le tableau simplexe de (PL) relatif à B' à partir de celui relatif à B on utilise le cadre du tableau simplexe relatif à B et on considère les règles suivantes.

1) Permuter les variables sortante et rentrante.
2) Remplacer le pivot par son inverse
3) Diviser les autres éléments de la ligne du pivot par le pivot
4) Diviser les autres éléments de la colonne du pivot par le pivot et changer de signe.
5) Pour les autres éléments du tableau, appliquer la règle du rectangle suivante :

Règle du rectangle

Soit $l \in I$ la ligne du pivot et $k \in J$ la colonne du pivot.

Pour $i \in I - l$ et $j \in J - k$, l'élément $\hat{a}_{ij}$ est remplacé par $\hat{a}_{ij} - \frac{\hat{a}_{ik}\hat{a}_{lj}}{\hat{a}_{lk}}$.
On note alors

$$\hat{a}_{ij} := \hat{a}_{ij} - \frac{\hat{a}_{ik}\hat{a}_{lj}}{\hat{a}_{lk}}$$

Cette règle s'applique à tous les éléments du tableau.

Remarque 3.2.8 *Si une ligne intersecte la colonne du pivot par un zéro, la ligne reste inchangée. Si une colonne intersecte la ligne du pivot par un zéro, la colonne reste inchangée.*

Dans la méthode des tableaux une base sera désignée indifféremment par la matrice elle-même ou par l'ensembles des indices des variables de base associées.

Exemple 3.2.6

$$\min\ Z = -3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le programme sous forme standard. On obtient :

$$\min\ Z = -3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux simplexes sont les suivants.

TS1

	x_1 ↑	x_2	
x_3	2	1	5
x_4 ←	1	-1	1
x_5	1	2	3
	-3	2	0

TS2

	x_4	x_2 ↑	
x_3	-2	3	3
x_1	1	-1	1
x_5 ←	-1	3	2
	3	-1	3

TS3

	x_4	x_5	
x_3	-1	-1	1
x_1	2/3	1/3	5/3
x_2	-1/3	1/3	2/3
	8/3	1/3	11/3

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée, on est donc à l'optimum.
Une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = -\frac{11}{3}$.

Exemple 3.2.7

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le programme sous forme standard. On obtient :

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux simplexes sont les suivants.

TS1

	x_1	x_2		
x_3	1	1	8	
x_4	-2	3	6	
x_5	1	-1	2	$\leftarrow$
	6	5	0	
	$\uparrow$			

TS2

	x_5	x_2		
x_3	-1	2	6	$\leftarrow$
x_4	2	1	10	
x_1	1	-1	2	
	-6	11	-12	
		$\uparrow$		

TS3

	x_5	x_3	
x_2	-1/2	1/2	3
x_4	5/2	-1/2	7
x_1	1/2	1/2	5
	-1/2	-11/2	-45

Tous les coefficients de la fonction-objectif sont négatifs ou nuls on est donc à l'optimum. Une solution optimale du problème initial est $x^* = (5, 3)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 45$.

Exemple 3.2.8

$$\min\ Z = -3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le programme sous forme standard. On obtient :

$$\min\ Z = -3x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 4 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. Les tableaux simplexes sont les suivants.

TS1

	x_1	x_2		
x_3	-2	3	6	
x_4	1	-4	4	$\leftarrow$
	-3	5	0	
	$\uparrow$			

TS2

	x_4	x_2	
x_3	2	-5	14
x_1	1	-4	4
	3	-7	12
		$\uparrow$	

On remarque que la colonne de la variable x_2 est toute négative, il n y a donc pas de pivot. Le programme linéaire est alors non borné ; c'est-à-dire que la valeur optimale est $-\infty$.

Exemple 3.2.9 (Problème dégénéré)

$$\max\ Z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 4x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On remarque que $I = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$ est une base réalisable évidente. En outre le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base.

TS1

	x_1	x_2		
x_3	4	3	12	
x_4	4	1	8	←
x_5	4	-1	8	
	3	2	0	
	↑			

TS2

	x_4	x_2		
x_3	-1	2	4	←
x_1	1/4	1/4	2	
x_5	-1	0	0	
	-3/4	5/4	-6	
		↑		

TS3

	x_4	x_3	
x_2	-1/2	1/2	2
x_1	3/8	-1/8	3/2
x_5	-2	1	4
	-1/8	-5/8	-17/2

On est à l'optimum. Une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{3}{2}, 2)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = \frac{17}{2}$.

Dans les exemples que nous venons de traiter, on avait toujours une base réalisable évidente. Mais très souvent il arive qu'on ne dispose pas de base réalisable dès le depart. Alors on utilise la phase d'initialisation pour déterminer une première base réalisable.

3.2.8 Initialisation de l'algorithme du simplexe

Dans cette phase d'initialisation, qu'on appelle aussi la phase 1 du simplexe, on y détermine une première base réalisable du programme (PL).

$$Z^* = \min\ Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \tag{PL}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

On suppose ici que $b \geq 0$. Mais on ne fait pas l'hypothèse que $\text{rang}A = m < n$.

On considère le problème auxiliaire défini de la façon suivante :

- Les vraies contraintes :

On considère chaque vraie contrainte de (PL) et on ajoute au premier membre une variable artificielle non-négative.

- La fonction-objectif :

La fonction-objectif ξ est la somme de toutes les variables artificielles introduites.

Dans ce programme toutes les variables sont non-négatives.

On a alors le programme suivant :

$$\begin{array}{l} \xi^* = \min \ \xi = \sum_{i=1}^m x_i^a \\ \left\{ \begin{array}{l} Ax + I_m x^a = b \\ x \geq 0, \ x^a \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \qquad (P_a)$$

Les variables x_i^a, $i \in \{1, \cdots, m\}$ sont appelées variables artificielles. Elles sont introduites juste pour créer une base réalisable évidente pour (P_a).

Par définition de (P_a), on a $\xi^* \geq 0$. Donc (P_a) ne peut pas être non borné. En outre il n'est pas non plus impossible car avec l'hypothèse que $b \geq 0$, la solution $(0, b)^T$ est réalisable.

La matrice des vraies contraintes de (P_a) est $\tilde{A} = (A, I_m)$. Donc rang$\tilde{A} = m < n + m$ et la matrice formée des colonnes des variables artificielles est une base réalisable évidente de (P_a). on peut donc résoudre ce dernier à l'aide de la phase 2 du simplexe en partant de cette base.

On résout (P_a) et on tire les conclusions suivantes.

1^er^ cas $\xi^* > 0$:

Si la valeur optimale de (P_a) n'est pas nulle alors le problème (PL) est impossible. Car en effet si (PL) possédait une solution réalisable on montre facilement que $\xi^* \leq 0$.

2^ème^ cas $\xi^* = 0$:

Notons (x^*, x^{a*}) la solution optimale de (P_a) obtenue où x^* est relative aux variables structurelles ou initiales du problème (PL) et x^{a*} les variables artificielles. On a nécessairement $x^{a*} = 0$.

1) Si dans cette solution toutes les variables artificielles sont hors-base c'est-à-dire que la base optimale de (P_a) est constituée uniquement de colonnes de la matrice A, alors cette dernière est une base réalisable de (PL).

2) Si par contre il existe des variables artificielles dans la base, c'est-à-dire que la base optimale de (P_a) est constituée de colonnes de A pour les variables structurelles et de colonnes de la matrice I_m pour les variables artificielles. Cette base n'est pas nécessairement une base de (PL).

Supposons que les variables artificielles dans la base optimale de (P_a) sont x_i^a, $i \in P$. On a deux cas possibles.

On suppose que le problème (P_a) est sous forme canonique par rapport à la base optimale.

a) Si $\forall\, i \in P$, la ligne correspondant à la variable de base artificielle x_i^a contient un coefficient non nul relatif à une variable non artificielle x_j, alors on peut faire un changement de base. Dans la nouvelle base la variable artificielle x_i^a est remplacée par la variable x_j. On obtient ainsi à la fin une base réalisable optimale de (P_a) constituée uniquement de colonnes de A. C'est donc une base réalisable de (PL). Mais cette base est dégénérée.

b) Dans le cas contraire, si une variable artificielle dans la base optimale ne peut pas être remplacée par une variable non artificielle, cela signifie que l'équation à laquelle est associée cette variable artificielle est redondante. C'est-à-dire qu'elle est combinaison linéaire d'autres équations. Elle peut donc être supprimée.

Donc si on a un nombre q variables de ce genre, on a rang$A = m - q$. Dans ce cas les q lignes correspondantes peuvent être éliminées. Les $m - q$ variables restantes dans la base optimale de (P_a) forment une base réalisable de (PL).

Remarque 3.2.9 *1) Dans la méthode des tableaux lorsqu'on ne dispose pas de base réalisable évidente et qu'on veuille appliquer soit la méthode des deux phases, on peut tenir compte de la situation suivante.*

Etant donné que dans le programme auxiliaire l'introduction des variables artificielles sert à créer uniquement une base réalisable évidente, il n'est pas nécessaire d'en ajouter systématiquement à chaque équation.

Si une variable n'intervient que dans une seule équation et si le signe de son coefficient est égal à celui du second membre de cette équation il n'est pas nécessaire d'ajouter une variable artificielle à cette équation. Cette variable peut être considérée comme variable de base associée associée à cette équation.

2) Dans la méthode des tableaux lorsqu'une variable artificielle sort de la base il est certain qu'elle ne peut plus y revenir la colonne correspondante devient superflue et peut être supprimée.

Exemple 3.2.10

1) $\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est

$$\min\ Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. Utilisons la phase 1.
Considérons le programme auxiliaire :

$$\min \xi = x_5 + x_6$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

$I = \{x_5, x_6\}$ est une base réalisable évidente de ce problème.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ \xi = 14 - 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS1

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_5	1	1	1	0	5	
x_6	2	1	3*	-1	9	←
	-3	-2	-4	1	-14	
			↑			

TS2

	x_1	x_2	x_6	x_4		
x_5	1/3	2/3	⋮	1/3	2	←
x_3	2/3	1/3	⋮	-1/3	3	
	-1/3	-2/3	⋮	-1/3	-2	
		↑				

TS3

	x_1	x_5	x_4	
x_2	1/2	$\vdots$	1/2	3
x_3	1/2	$\vdots$	-1/2	2
	0	$\vdots$	0	0

$I = \{x_2, x_3\}$ est une base réalisable du problème initial.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min \; Z = -x_4 + 11$$
$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_4 = 3 \\ x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS4

	x_1	x_4		
x_2	1/2	1/2	3	$\leftarrow$
x_3	1/2	-1/2	2	
	0	-1	-11	
		$\uparrow$		

TS5

	x_1	x_2	
x_4	1	2	6
x_3	1	1	5
	1	2	-5

La condition d'optimalité est vérifiée, une solution optimale est :
$x^* = (0, \; 0, \; 5)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 5$.

2) $$\max \; Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est :

$$\max \; Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. Utilisons la phase 1.
Considérons le programme auxiliaire :

$$\min \; \xi = x_6 + x_7$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

$I = \{x_6, x_7, x_5\}$ est une base réalisable de ce problème.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min \; \xi = 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS1

	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_6	1	1	1	0	3	
x_7	1	-2	1	-1	1	←
x_5	0	2	1	0	2	
	-2	1	-2	1	-4	
	↑					

TS2

	x_7	x_2	x_3	x_4		
x_6	⋮	3	0	1	2	←
x_1	⋮	-2	1	-1	1	
x_5	⋮	2	1	0	2	
	⋮	-3	0	-1	-2	
		↑				

TS3

	x_6	x_3	x_4	
x_2	⋮	0	1/3	2/3
x_1	⋮	1	-1/3	7/3
x_5	⋮	1	-2/3	2/3
	⋮	0	0	0

$I = \{x_2, x_1, x_5\}$ est une base réalisable du problème initial.

La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\max \; Z = 4 + x_3 + x_4$$
$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{2}{3} \\ x_1 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{7}{3} \\ x_5 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = \frac{2}{3} \\ x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS4

	x_3	x_4		
x_2	0	1/3	2/3	←
x_1	1	-1/3	7/3	
x_5	1	-2/3	2/3	
	1	1	-4	
		↑		

TS5

	x_3	x_2		
x_4	0	3	2	
x_1	1	1	3	
x_5	1	2	2	←
	1	-3	-6	
	↑			

TS6

	x_5	x_2	
x_4	0	3	2
x_1	-1	-1	1
x_3	1	2	2
	-1	-5	-8

La condition d'optimalité est vérifiée, une solution optimale est :

$x^* = (1, \; 0, \; 2)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 8$.

3) $\min \; Z = x_1 + x_2 + x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, \; i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente, on va donc utiliser la phase 1.

Le programme auxiliaire est le suivant :

$$\min\ \xi = x_5 + x_6 + x_7$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

$I = \{x_5, x_6, x_7, x_4\}$ est une base réalisable évidente. La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ \xi = 10 - 8x_2 - 18x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

	x_1	x_2	x_3		
x_5	1	2	3	3	
x_6	-1	2	6	2	←
x_7	0	4	9	5	
x_4	0	0	3	1	
	0	-8	-18	-10	
			↑		

	x_1	x_2	x_6		
x_5	3/2	1	⋮	2	
x_3	-1/6	1/3	⋮	1/3	
x_7	3/2	1	⋮	2	
x_4	1/2	-1	⋮	0	←
	-3	-2	⋮	-4	
	↑				

	x_4	x_2		
x_5	-3	4	2	←
x_3	1/3	0	1/3	
x_7	-3	4	2	
x_1	2	-2	0	
	6	-8	-4	
		↑		

	x_4	x_5	
x_2	-3/4	⋮	1/2
x_3	1/3	⋮	1/3
x_7	0	⋮	0
x_1	1/2	⋮	1
	0	⋮	0

On est à l'optimum du programme auxiliaire. dans le tableau optimal la ligne de la variable de base $x - 7$ qui est une variable artificielle est toute nulle. La troisième équation du programme initial à laquelle est associée la variable x_7 est donc une équation redondante on peut donc la supprimer. Ainsi $I = \{x_2, x_3, x_1\}$ est une base réalisable du programme initial. La forme canonique par rapport à la base I est

$$\min\ Z = \frac{11}{6} - \frac{1}{12}x_4$$
$$\begin{cases} x_2 - \frac{3}{4}x_4 = \frac{1}{2} \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ x_1 + \frac{1}{2}x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

	x_4	
x_2	-3/4	1/2
x_3	1/3	1/3
x_1	1/2	1
	-1/12	-11/6

$\leftarrow$

	x_3	
x_2	9/4	5/4
x_4	3	1
x_1	-3/2	1/2
	1/4	-7/4

La condition d'arrêt du simplexe est vérifiée. On est à l'optiumum et une solution optimale du programme est $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 0, 1)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = \frac{7}{4}$.

3.2.9 Méthode du grand M

Pour résoudre le programme linéaire (PL) par la méthode du grand M, on considère l'hypothèse que $b \geq 0$ et on procède comme suit.

On considère le problème auxiliaire suivant.

$$\begin{array}{l} Z_M^* = \min \ Z_M = cx + M \sum_{i=1}^m x_i^a \\ \begin{cases} Ax + I_m x^a = b \\ x \geq 0, \ x^a \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{P_M}$$

Comme dans la phase 1, les variables x_i^a, $i \in \{1, \cdots, m\}$ sont des variables artificielles.

La constante M est une constante symbolique et elle est aussi grande que l'on veut (c'est-à-dire supérieure à tout nombre auquel elle pourra être comparée lors de la résolution du problème).

On remarque comme précédemment dans la phase 1 que la matrice des vraies contraintes de (P_M) est $\bar{A} = (A, I_m)$. Donc, rang$\bar{A} = m < n+m$. Par suite avec l'hypothèse que $b \geq 0$, la matrice formée des colonnes des variables artificielles est une base réalisable évidente pour (P_M). On peut donc le résoudre à l'aide de la phase 2 du simplexe en partant de cette base.

On montre que

1) Si $Z_M^* = -\infty$, il en est de même pour Z^*.

2) Si (P_M) possède une solution optimale, on a les cas suivants :

a) Si dans cette solution il reste encore des variables artificielles non nulles dans la base (elles sont donc de base) alors le problème initial (PL) est impossible c'est-à-dire qu'il ne possède pas de solutions réalisables.

b) Si dans cette solution toutes les variables artificielles sont nulles, la partie formée des variables structurelles est une solution de base réalisable optimale de (PL).

Remarque 3.2.10 *Pour un problème de maximisation, la fonction-objectif de (P_M) est $Z_M = cx - M \sum_{i=1}^m x_i^a$.*

Comme dans la phase 1, on a les remarques suivantes :

Remarque 3.2.11 *1) Etant donné que dans le programme auxiliaire l'introduction des variables artificielles sert à créer uniquement une base réalisable évidente, il n'est pas nécessaire d'en ajouter systématiquement à chaque équation. En effet, si une variable n'intervient que dans une seule équation et si le signe de son coefficient est égal à celui du second membre de cette équation il n'est pas nécessaire d'ajouter une variable artificielle à cette équation. Cette variable peut être considérée comme variable de base associée associée à cette équation.*

2) Dans la méthode des tableaux lorsqu'une variable artificielle sort de la base il est certain qu'elle ne peut plus y revenir la colonne correspondante devient superflue et peut être supprimée.

Exemple 3.2.11

1) $$\min\ Z = 8x_1 + 7x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 3 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est

$$\min\ Z = 8x_1 + 7x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. Utilisons la méthode du grand M.
Considérons le programme auxiliaire :

$$\min\ Z_M = 8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + Mx_6$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

$I = \{x_6, x_3\}$ est une base réalisable évidente de ce problème.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ Z_M = (5 - 2M)x_1 + (1 - M)x_2 + Mx_4 + 3x_5 + M + 3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS1

	x_1	x_2	x_4	x_5		
x_6	2^*	1	-1	0	1	←
x_3	1	2	0	-1	1	
	5-2M	1-M	M	3	-3-M	
	↑					

TS2

	x_6	x_2	x_4	x_5		
x_1	$\vdots$	1/2	-1/2	0	1/2	
x_3	$\vdots$	3/2	1/2	-1	1/2	←
	$\vdots$	-3/2	5/2	3	-11/2	
		↑				

TS3

	x_3	x_4	x_5	
x_1	-1/3	-2/3	1/3	1/3
x_2	2/3	1/3	-2/3	1/3
	1	3	2	-5

On est à l'optimum pour P_M et une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 5$.

2) $\min\ Z = x_1 + x_2 + x_3$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 4 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. On va utiliser la méthode du grand M.

Considérons le programme auxiliaire

$$\min\ Z_M = x_1 + x_2 + x_3 + M(x_5 + x_6 + x_7)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

$I = \{x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_4\}$ est une base réalisable évidente pour ce problème. Déterminons la forme canonique par rapport à cette base. Les variables de base sont déjà exprimées en fonction des variables hors base. Il reste à exprimer la fonction-objectif en fonction des variables hors base.

On a : $Z_M = -10M + x_1 + (1 - 8M)x_2 + (1 - 18M)x_3$

Donc la forme canonique du programme par rapport à la base I est :

$$\min\ Z_M = -10M + x_1 + (1 - 8M)x_2 + (1 - 18M)x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_6 = 2 \\ 4x_2 + 9x_3 + x_7 = 5 \\ 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 7 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants.

TS1

	x_1	x_2	x_3		
x_5	1	2	3	3	
x_6	-1	2	6	2	
x_7	0	4	9	5	
x_4	0	0	3^*	1	$\leftarrow$
	1	1-8M	1-18M	-10M	
			$\uparrow$		

TS2

	x_1	x_2	x_4		
x_5	1	2	-1	2	
x_6	-1	2^*	-2	0	$\leftarrow$
x_7	0	1	-3	2	
x_3	0	0	1/3	1/3	
	1	1-8M	-1/3+6M	-1/3-4M	
		$\uparrow$			

TS3

	x_1	x_6	x_4		
x_5	2	⋮	1	2	←
x_2	-1/2	⋮	-1	0	
x_7	2	⋮	1	2	
x_3	0	⋮	1/3	1/3	
	3/2-4M	⋮	2/3-2M	-1/3-4M	
	↑				

TS4

	x_5	x_4		
x_1	⋮	1/2	1	
x_2	⋮	-3/4	1/2	
x_7	⋮	0	0	
x_3	⋮	1/3	1/3	←
	⋮	-1/12	-11/6	
		↑		

TS5

	x_3	
x_1	-3/2	1/2
x_2	9/4	5/4
x_7	0	0
x_4	3	1
	1/4	-7/4

On est à l'optimum pour P_M et une solution optimale du problème initial est $x^* = (\frac{1}{2},\ \frac{5}{4},\ 0,\ 1)^T$ et la valeur optimale est $Z^* = \frac{7}{4}$.

3) $\min\ Z = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 2 \end{cases}$$

La forme standard de ce problème est

$$\min\ Z = x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On n'a pas de base réalisable évidente. Utilisons la méthode du grand M.
Considérons le programme auxiliaire :

$$\min\ Z_M = x_1 - x_2 + Mx_6$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

$I = \{x_3, x_6, x_5\}$ est une base réalisable évidente de ce problème.
La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\min\ Z_M = (1 + M)x_1 + (-1 - 2M)x_2 + Mx_4 + 8M$$
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 6 \end{cases}$$

On a les tableaux simplexes suivants :

TS1

	x_1	x_2	x_4		
x_3	-2	1	0	2	←
x_6	-1	2	-1	8	
x_5	1	1	0	5	
	1+M	-1-2M	M	-8M	
		↑			

TS2

	x_1	x_3	x_4		
x_2	-2	1	0	2	
x_6	3	-2	-1	4	
x_5	3	-1	0	3	←
	-1-3M	1+2M	M	2-4M	
	↑				

TS3

	x_5	x_3	x_4	
x_2	2/3	5/3	0	4
x_6	-1	-3	-1	1
x_1	1/3	-1/3	0	1
	1/3+M	2/3+M	M	3-M

On est à l'optimum pour P_M ; mais il existe une variable artificielle non nulle à l'optimum. Alors le problème initial est impossible.

Chapitre 4

Dualité en programmation linéaire

Etant donné un programme linéaire on peut toujours lui associer un autre programme linéaire appelé programme dual du programme initial : dans ce cas le programme initial est appelé programme primal. Ces deux programmes sont dits alors programmes duaux, ou duals, ou en dualité.

4.1 Définitions

On sait que par convention les contraintes d'inégalité pour un problème de minimisation sont du type " $\geq$ " et les contraintes d'inégalité pour un problème de maximisation sont du type " $\leq$ ".

Nous allons adopter les conventions suivantes :

Dans un programme de minimisation une contrainte d'inégalité du type " $\geq$ " sera dite "vraie inégalité" et une contrainte du type " $\leq$ " sera dite "fausse inégalité".

Dans un programme de maxmisation une contrainte d'inégalité du type " $\leq$ " sera dite "vraie inégalité" et une contrainte du type " $\geq$ " sera dite "fausse inégalité".

Définition 4.1.1 *Etant donné le programme linéaire sous la forme générale* (P) *ci-dessous*

$$\begin{array}{l} \min \quad Z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, \cdots, m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, & i = m_1 + 1, \cdots, m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = m_2 + 1, \cdots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \cdots, n_1 \\ x_j \leq 0, & j = n_1 + 1, \cdots, n_2 \\ x_j \in \mathbb{R}, & j = n_2 + 1, \cdots, n. \end{array} \right. \end{array}$$

On appelle programme dual de (P) le programme linéaire (D) ci-dessous

$$\max\ W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$
$$\left\{\begin{array}{l} y_i \geq 0 \quad i = 1, ..., m_1 \\ y_i \leq 0 \quad i = m_1 + 1, ..., m_2 \\ y_i \quad \textit{libre} \quad j = m_2 + 1, ..., m \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j \quad j = 1, ..., n_1 \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \quad j = n_1 + 1, ..., n_2 \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j \quad i = n_2 + 1, ..., n. \end{array}\right. \qquad (D)$$

Cette définition est caractérisée par les règles suivantes :
1) A un problème primal de minimisation (de maximisation) correspond un problème dual de maximisation (minimisation).

2) A toute vraie contrainte primale correspond une variable duale : si la vraie contrainte est une "vraie inégalité", la variable duale est soumise à une condition de non-négativité (" ≥ 0") ;
si la vraie contrainte est une "fausse inégalité", la variable duale est soumise à une condition de non-positive (" ≤ 0") ;
si la contrainte est une égalité, la variable duale est libre.

3) A toute variable primale correspond une contrainte duale :
- si la variable primale est soumise à une condition de non-négativité, la contrainte duale est une "vraie inégalité".
- si la variable primale est soumise à une condition de non-positivité, la contrainte duale est une "fausse inégalité".
- si la variable primale est libre, la contrainte duale est une égalité.

4) Les coefficients de la fonction-objectif du primal deviennent les seconds membres des contrainte duale. Les seconds membres des vraies contraintes primales deviennent les coefficients de la fonction-objectif du dual.
5) La matrice des vraies contraintes du dual est la transposée de la matrice des vraies contraintes du primal.

Exemple 4.1.1

1) Soit à déterminer le dual du programme linéaire ci-dessous.

$$\min\ Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$
$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

On considère les variables duales : y_1 associée à la première contrainte, y_2 à la deuxième et y_3 à la troisième. Le dual est alors :

$$\max\ W = 5y_1 + y_2 + y_3$$
$$\left\{\begin{array}{l} 2y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 3 \\ 5y_1 - 3y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ y_1 - y_2 + 6y_3 = 1 \\ y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0. \end{array}\right.$$

2) Soit à déterminer le dual du programme linéaire ci-dessous.

$$\max\ Z = 8x_1 - 4x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq -7 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On considère les variables duales : y_1 associée à la première contrainte, y_2 à la deuxième et y_3 à la troisième. Le dual est alors :

$$\min\ W = 4y_1 - 7y_2 + 3y_3$$
$$\begin{cases} 5y_1 + y_2 + 4y_3 \leq 8 \\ 5y_1 - 2y_2 + 3y_3 \geq -4 \\ 2y_1 + 6y_2 + y_3 = 2 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemple 4.1.2

Considérons le programme linéaire

$$\min Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Son dual est :

$$\max W = yb$$
$$\begin{cases} yA \leq c \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Afin de conserver les mêmes données dans les deux programmes,nous considérons dans la notation matricielle du dual la variable duale y sous forme de matrice ligne contrairement à la variable primale qui elle est une matrice colonne. Signalons qu'un programme linéaire et son dual sont deux aspects d'un même problème.

Remarque 4.1.1 *On remarque une symétrie dans les deux programmes. Ils sont tous sous forme canonique : (contraintes d'inégalités et variables non-négatives).*

On a la propriété suivante :

Proposition 4.1.1 *L'opération de la dualité est involutive (i.e le dual du dual est le primal).*

4.2 Propriétés de la dualité

Considérons le programme linéaire :

$$Z^* = \min Z = cx$$
$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

(où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$) et son dual :

$$W^* = \max W = yb \qquad \begin{cases} yA \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{D}$$

Proposition 4.2.1 (Propriété de la dualité faible)
Si x et y sont respectivement des solutions réalisables de (P) et (D) alors on a : $cx \geq yb$

Corollaire 4.2.1 *On a : $Z^* \geq yb$ pour tout y : solution réalisable de (D).
$W^* \leq cx$ pour tout $\forall x$ solution réalisable de (P).*

Corollaire 4.2.2 *Si $Z^* = -\infty$, le problème (D) n'admet pas de solution réalisable (i.e le dual (D) est impossible si (P) est non borné).
De même si $W^* = +\infty$, le problème primal n'admet pas de solution réalisable, en d'autres termes, si le dual (D) est non borné, le primal (P) est impossible.*

Corollaire 4.2.3 *Si x^* et y^* sont respectivement solution réalisable (P) et (D) vérifiant $cx^* = y^*b$, alors, x^* et y^* sont des solutions optimales de (P) et (D) respectivement.*

Preuve : Si x^* n'est pas solution optimale de (P) *i.e* $\exists \overline{x}$ solution réalisable de (P) avec $c\overline{x} < cx^*$ (car problème de minimisation)
$c\overline{x} < cx^* = y^*b$, absurde !
On montre de même pour l'autre cas. □

Proposition 4.2.2 (Propriété de la dualité forte)
*Si (P) (respectivement (D)) possède une solution optimale finie alors il en de même pour (D) (respectivement (P)) et de plus $Z^* = W^*$
En d'autres termes étant donné deux problèmes en dualité si l'un possède une solution optimale finie, alors il en est de même pour l'autre et de plus les valeurs optimales sont égales.*

Preuve : Considérons le programme (P) sous forme standard

$$Z^* = \min Z = cx \qquad \begin{cases} Ax - I_m s = b \\ x,\ s \geq 0 \end{cases} \tag{P'}$$

Le problème (P) admet une solution optimale finie si et seulement si $(\widetilde{P})$ admet une solution optimale finie.

Notons $\widetilde{c} = (c, 0)$, $\widetilde{A} = (A - I_m)$ et $u = \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$. Le problème $(\widetilde{P})$ s'écrit alors

$$Z^* = \min Z = \widetilde{c}u \qquad \begin{cases} \widetilde{A}u = b \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Supposons alors que $(\widetilde{P})$ possède une solution optimale finie, il existe donc une solution réalisable de base optimale. Soit B une base réalisable optimale et u^* la solution de base réalisable optimale associée. On sait par ailleurs que le dual de $(\widetilde{P})$ est :

$$W^* = \max W = yb$$
$$\begin{cases} yA \leq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Comme B est optimale, alors $\widetilde{c} - \widetilde{c}_B B^{-1}\widetilde{A} \geq 0$ (car problème de minimisation). Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} c - \widetilde{c}_B B^{-1}A \geq 0 \\ \widetilde{c}_B B^{-1} \geq 0 \end{cases}$$

Posons $y^* = \widetilde{c}_B B^{-1}$. On remarque que y^* est solution réalisable du dual. En outre on a : $Z(u^*) = \widetilde{c}_B B^{-1}b = y^*b = W(y^*)$. Ce qui implique d'après le corollaire(4.2.3) que y^* est solution optimale de (D). $\square$

On a les corollaires suivants.

Corollaire 4.2.4 *Soit x^* et y^* respectivement des solutions réalisables de (P) et (D).*

$$cx^* = y^*b \Longleftrightarrow \begin{cases} x^* \textit{est solution optimale de}(P) \\ y^* \textit{est solution optimale de}(D). \end{cases}$$

Corollaire 4.2.5 *Etant donné une paire de problèmes en dualité, il n'existe que 4 situations possibles parmi les 9 potentielles.*
1) Les deux problèmes possèdent des solutions optimales finies
2) a) Le problème primal non borné, et le problème dual est impossible
b) le problème dual est non borné et le problème primal est impossible
3) Les deux problèmes sont impossibles.

On peut schématiser cela dans le tableau suivant

Primal/ dual	Solution optimale finie	Problème non borné	Problème impossible
Solution optimale finie	1)	non	non
Problème non borné	non	non	2) a)
Problème impossible	non	2) b)	3)

4.3 Théorèmes des écarts complémentaires

On considère toujours les programmes linéaires en dualité :

$$Z^* = \min\ Z = cx \quad \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (P) \qquad W^* = \max\ W = yb \quad \begin{cases} yA \leq c \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (D)$$

On a le théorème suivant :

Théorème 4.3.1 *(Théorème faible des écarts complémentaires)*
Soit x^* et y^* deux solutions respectivement réalisables de (P) et (D).
Une condition nécessaire et suffisante pour que x^* et y^* soient solutions optimales est qu'elles vérifient :

$$\begin{cases} y^*(Ax^* - b) = 0 & (1) \\ (c - y^*A)x^* = 0 & (2) \end{cases}$$

Preuve : Posons $\alpha = y^*(Ax^* - b)$ et $\beta = (c - y^*A)x^*$; comme x^* et y^* sont des solutions réalisables de (P) et (D), on a $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et

$$\alpha + \beta = y^*Ax^* - y^*b + cx^* - y^*Ax^* = cx^* - y^*b.$$

Or une condition nécessaire et suffisante d'optimalité de deux solutions réalisables x^* et y^* respectivement de (P) et (D) est $cx^* - y^*b = 0$. Ce qui est équivalent à $\alpha + \beta = 0$. Comme α et β sont non négatifs, cette condition est encore équivalente à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^*(Ax^* - b) = 0 \\ (c - y^*A)x^* = 0 \end{cases}$$

D'où le théorème. □

Si a_i et A_j désignent respectivement les matrices lignes et colonnes correspondant à la ligne i et la colonne j de A, on a

$$y(Ax - b) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} y_i(a_ix - b_i) = 0 \Leftrightarrow y_i(a_ix - b_i) = 0 \quad \forall i = 1, ..., m,$$

et

$$(c - yA)x = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (c_j - yA_j)x_j = 0 \Leftrightarrow x_j(c_j - yA_j) = 0 \quad \forall j = 1, ..., n.$$

On peut dire alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux solutions réalisables x et y respectivement de (P) et (D) soient solutions optimales est qu'elles vérifient :

$$\begin{cases} y_i(a_ix - b_i) = 0 & \forall i = 1, ..., m \\ (c_j - yA_j)x_j = 0 & \forall j = 1, ..., n \end{cases}$$

Il existe une autre version dite version forte du théorème des écarts complémentaires.

Théorème 4.3.2 (théorème fort des écarts complémentaires)
Une solution réalisable x de (P) est une solution optimale de (P) si et seulement si il existe y une solution réalisable du dual telle que

$$\begin{cases} yA_j = c_j & si \quad x_j > 0 \quad \forall j \\ y_i = 0 & si \quad a_ix > b_i \quad \forall i \end{cases}$$

Exemple 4.3.1

a) Considérons le programme linéaire ci-dessous.

$$\min \ Z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ x_1, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Montrons que le point $x = (1,1)^T$ est une solution optimale.

On vérifie facilement que ce point est une solution réalisable.

donc d'après le théorème des écarts complémentaires x est solution optimale si et seulement si il existe une solution réalisable y du dual telle que

$$\begin{cases} (3x_1 + x_2 - 4)y_1 = 0 \\ (x_1 + 4x_2 - 5)y_2 = 0 \\ (3y_1 + y_2 - 1)x_1 = 0 \\ (y_1 + 4y_2 - 1)x_2 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant x par sa valeur dans ce système, on obtient :

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + 4y_2 = 1 \end{cases}$$

Soit alors le point $y = (\frac{3}{11}, \frac{2}{11})^T$. Cette solution est bien réalisable du dual par suite x est solution optimale.

b) Considérons le programme linéaire ci-dessous.

$$\min \ Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

i) Le point $x = (3,1)^T$ est-il une solution optimale ?
ii) Le point $x = (\frac{26}{9}, \frac{7}{9})^T$ est-il une solution optimale ?

i) On vérifie facilement la réalisabilité de x. C'est une solution optimale si et seulement si il existe une solution réalisable y du dual telle que

$$\begin{cases} (2x_1 + x_2 - 3)y_1 = 0 \\ (2x_1 - x_2 - 5)y_2 = 0 \\ (x_1 + 4x_2 - 6)y_3 = 0 \\ (2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2)x_1 = 0 \\ (y_1 - y_2 + 4y_3 - 3)x_2 = 0 \end{cases}$$

On remplace x par sa valeur dans ce système, on obtient :

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

Ce qui n'est pas. En conclusion le point x n'est pas solution optimale.

i) On vérifie facilement la réalisabilité de x. C'est une solution optimale si et seulement si il existe une solution réalisable y du dual telle que

$$\begin{cases} (2x_1 + x_2 - 3)y_1 = 0 \\ (2x_1 - x_2 - 5)y_2 = 0 \\ (x_1 + 4x_2 - 6)y_3 = 0 \\ (2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2)x_1 = 0 \\ (y_1 - y_2 + 4y_3 - 3)x_2 = 0 \end{cases}$$

On remplace x par sa valeur dans ce système, on obtient :

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ 2y_2 + y_3 = 2 \\ -y_2 + 4y_3 = 3 \end{cases}$$

Ce qui donne la solution $y = (0, \frac{5}{9}, \frac{8}{9})^T$ qui est bien une solution réalisable du dual. Par suite x est une solution optimale.

4.4 Algorithme dual Simplexe

On considère le programme linéaire :

$$Z^* = \min \ Z = cx \qquad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{PL}$$

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; $c \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ et $b \in M_{m,1}(\mathbb{R})$
On suppose que $rg(A) = m < n$.

On a la définition suivante :

Définition 4.4.1 *Soit B une base de (PL). Cette base est dite duale réalisable si $\widehat{c} = c - c_B B^{-1} A \geq 0$.*
Par opposition, B est primale réalisable si $\widehat{b} = B^{-1}b \geq 0$.

Remarque 4.4.1 *1) Pour un problème de maximisation une base B est dite duale réalisable si $\widehat{c} = c - c_B B^{-1} A \leq 0$. Elle est primale réalisable si $\widehat{b} = B^{-1}b \geq 0$.*
2) Une base B qui est à la fois primale et duale réalisable est optimale.

L'algorithme dual simplexe contient deux phases :

Phase 1 : Procédure d'initialisation
On détermine une première base duale réalisable. Si cette procédure échoue, cela signifie qu'une telle base n'existe pas. C'est-à-dire que le polyèdre de la solution réalisable du dual est, vide, et donc $(P.L)$ est impossible soit non borné $Z^* = -\infty$.

Phase 2 : Procédure itérative
1) On considère B une base, on note I $(resp. J)$ l'ensemble des indices des variables de base (resp. hors-base). On écrit le programme linéaire sous forme canonique par rapport à B. On dispose donc $\widehat{A} = B^{-1}A$, $\widehat{c} = c - c_B B^{-1} A$ et $\widehat{b} = B^{-1}b$.
Si B est duale réalisable alors :

2) Tester $\widehat{b} = B^{-1}b$.
a) Si $\widehat{b} \geq 0$, stop : (la solution courante est optimale).
b) Si $\exists i \in I$ tel que $\widehat{b}_i < 0$ et $\widehat{a}_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J$, stop : (le problème (PL) est impossible).
c) Autrement, on effectue un changement de base.
3) Changement de base
a) **Test de sortie :** Soit $l \in I$ telle que

$$\widehat{b}_l = \min_i [\widehat{b}_i : i \in I,\ b_i < 0].$$

La variable correspondante x_l sort de la base.
b) **Test d'entrée :** Soit $k \in J$ telle que

$$\left|\frac{\hat{c}_k}{\hat{a}_{lk}}\right| = \min\left[\left|\frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{lj}}\right| :\ j \in J,\ \hat{a}_{lj} < 0\right].$$

La variable x_k rentre dans la base.
c) On pose $I := I - l + k$ et $J := J - k + l$; aller à 1).

Remarque 4.4.2 *Dans le cas d'un problème de maximisation cet algorithme reste valable*

Exemple 4.4.1

$$\min\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard de (P_1) est :

$$\min\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = 5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

L'ensemble $I = \{4, 5\}$ est une base évidente. La forme canonique par rapport à I est :

$$\min\ Z = 8x_1 + 6x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = -5 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

On a $\hat{c} \geq 0$ donc I est une base duale réalisable.
On a les tableaux simplexes successifs suivants.

$$\text{TS1}\quad \begin{array}{c|ccc|c|l} & x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \hline x_4 & -1 & 2 & -1 & -6 & \leftarrow \\ x_5 & -1 & -3 & 1 & -5 & \\ \hline & 8 & 6 & 2 & 0 & \\ \hline & & & \uparrow & & \end{array} \qquad \text{TS2}\quad \begin{array}{c|ccc|c|l} & x_1 & x_2 & x_4 & & \\ \hline x_3 & 1 & -2 & -1 & 6 & \\ x_5 & -2 & -1 & 1 & -11 & \leftarrow \\ \hline & 6 & 10 & 2 & -12 & \\ \hline & \uparrow & & & & \end{array}$$

TS3

	x_5	x_2	x_4	
x_3	1/2	-5/2	-1/2	1/2
x_1	-1/2	1/2	-1/2	11/2
	3	7	5	-45

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée une solution optimale du problème est $x^* = (\frac{11}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 45$.

Exemple 4.4.2

$$\max\ Z = -5x_1 - 21x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard est :

$$\max\ Z = -5x_1 - 21x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

L'ensemble $I = \{4, 5\}$ est une base évidente. La forme canonique par rapport à I est :

$$\max\ Z = -5x_1 - 21x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = -2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

On a $\hat{c} \leq 0$ donc I est une base duale réalisable.

On a les tableaux simplexes successifs suivants.

TS1

	x_1	x_2	x_3		
x_4	-1	1	-6	-2	$\leftarrow$
x_5	-1	-1	-2	-1	
	-5	0	-21	0	
			$\uparrow$		

TS2

	x_1	x_2	x_4		
x_3	1/6	-1/6	-1/6	1/3	
x_5	-2/3	-4/3	-1/3	-1/3	$\leftarrow$
	-3/2	-21/6	-21/6	7	
	$\uparrow$				

TS3

	x_5	x_2	x_4	
x_3	1/2	-1/2	-1/4	1/4
x_1	-3/2	2	1/2	1/2
	-9/4	-1/2	-11/4	31/4

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée une solution optimale du problème est $x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = -\frac{31}{4}$.

Phase 1 : Initialisation de l'algorithme dual simplexe : Méthode de la contrainte artificielle

Cette méthode est nécessaire dans le cas où il existe B une base initiale mais qui n'est pas duale réalisable. On considère pour cela un problème artificiel (P_a), créé de la façon suivante.

Soit le problème (PL) mis sous forme canonique par rapport à la base B. A ce problème on ajoute une contrainte supplémentaire appelée contrainte artificielle :

$$v + \sum_{j \in K} x_j = M$$

où

• v est une variable artificielle non négative ($v \geq 0$)

• $K = \{j \in J : \widehat{c}_j < 0\}$

• M est une constante symbolique positive aussi grande que l'on veut (c'est-à-dire supérieur à tout nombre auquel il pourra être comparé).

En résumé on a :

$$\min \; Z = \widehat{Z} + \widehat{c}x$$
$$\begin{cases} x_B + B^{-1}Nx_N = \widehat{b} \\ v + \sum\limits_{j \in K} x_j = M \\ x \geq 0, \quad v \geq 0. \end{cases} \qquad (P_a)$$

Il est immédiat que $I_a = I \cup \{v\}$ est une base évidente de (P_a).

On considère le changement de base imposé suivant :

• v sort de la base I_a

• la variable x_k telle que $\widehat{c}_k = \min\{\widehat{c}_j : j \in K\}$ rentre dans la base.

On obtient immédiatement une base duale réalisable pour (P_a). On résout ce dernier à l'aide de l'algorithme dual phase 2 en partant de cette base.

1) Si (P_a) n'admet pas de solution réalisable, le problème initial (PL) n'admet pas de solution réalisable non plus.

2) Si (P_a) admet une solution optimale dans laquelle la variable artificielle v est nulle, et si Z dépend de M, le problème (PL) est non borné. Si par contre Z ne dépend pas de M, on obtient une solution optimale de base réalisable de (PL) en donnant à M la plus petite valeur vérifiant $x_i \geq 0$ pour tout x_i variable de base à l'optimum.

3) Si (P_a) admet une solution optimale dans laquelle v est positive, alors mise à part la variable v, la solution obtenue constitue une solution optimale de (PL).

Remarque 4.4.3 *1) Dans le cas d'un problème de maximisation, l'algorithme reste valable moyennant les modifications suivantes :*

• $K = \{j \in J : \widehat{c}_j > 0\}$

• *Dans le changement de base initial imposé, la variable rentrante est x_k avec k tel que $\widehat{c}_k = \max\{\widehat{c}_j : j \in K\}$*

2) Dans la méthode des tableaux, après le changement de base initial imposé, si en cours d'algorithme, la variable artificielle v, revient dans la base, il est certain qu'elle n'en sortira plus. Ainsi, la ligne correspondante dans le tableau simplexe devient superflue et peut-être supprimée.

Exemple 4.4.3

$$\min \; Z = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - 2x_3 \geq 9 \\ x_1,\; x_2,\; x_3 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard est :

$$\min \; Z = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_3 - x_5 = 9 \\ x_i \geq 0,\; i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

L'ensemble $I = \{4,5\}$ est une base évidente. La forme canonique par rapport à I est :

$$\min\ Z = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ -2x_1 + 2x_3 + x_5 = -9 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5 \end{cases}$$

On n' a pas $\hat{c} \geq 0$ donc I n'est pas une base duale réalisable.

On va utiliser la méthode de la contrainte artificielle.

Ici on a $K = \{x_3\}$. Donc le programme auxiliaire est :

$$\min\ Z = 6x_1 + 3x_2 - 2x_3$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ -2x_1 + 2x_3 + x_5 = -9 \\ x_3 + v = M \\ v,\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

$I_a = \{x_4, x_5, v\}$ est une base évidente du programme auxiliaire ci-dessus et le programme est sous forme canonique par rapport à I_a.

On a le premier tableau simplexe à partir duquel on fait le changement de base initial imposé.

TS1

	x_1	x_2	x_3		
x_4	-1	-1	-1	-6	
x_5	-2	0	2	-9	
v	0	0	1	M	$\leftarrow$
	6	3	-2	0	
			$\uparrow$		

TS2

	x_1	x_2	v		
x_4	-1	-1	1	-6+M	
x_5	-2	0	-2	-9-2M	$\leftarrow$
x_3	0	0	1	M	
	6	3	2	2M	
			$\uparrow$		

La variable artificielle v est rentrée dans la base il est certain qu'elle n'en sortira plus donc la ligne correspondante peut être supprimée.

TS3

	x_1	x_2	x_5		
x_4	-2	-1	1/2	-21/2	$\leftarrow$
v	...	...	...	...	
x_3	-1	0	1/2	-9/2	
	4	3	1	-9	
	$\uparrow$				

TS4

	x_4	x_2	x_5	
x_1	-1/2	1/2	-1/4	21/4
x_3	-1/2	1/2	1/4	3/4
	2	1	2	-30

La condition d'arrêt de l'algorithme est vérifiée. Une solution optimale du problème est $x^* = (\frac{21}{4}, 0, \frac{3}{4})^T$ et la valeur optimale est $Z^* = 30$.

4.5 Convergence de l'algorithme dual Simplexe

L'algorithme dual Simplexe converge si à chaque itération les coefficients $\widehat{c_j}$, sont strictement positifs pour tout $j \in J$.

Par contre s'il existe $j \in J$ tel que $\widehat{c_j} = 0$, il y a dégénérescence du problème dual. La fonction-objectif peut ne pas varier lors d'une itération, et un cyclage peut se produire. Pour éliminer un éventuel cyclage, et assurer la convergence finie de l'algorithme dual simplexe, on peut utiliser les règles de Bland ci-dessous.

Règles de Bland

Test de sortie : La variable sortante est x_l qui vérifie :

$$l = \min \left[i \in I : \widehat{b_i} < 0 \right].$$

Test de rentrée : La variable rentrante est x_k qui vérifie :

$$k = \min \left[s \in J : \left| \frac{\widehat{c}_s}{\widehat{c}_{ls}} \right| = \min \left[\left| \frac{\widehat{c}_j}{\widehat{a}_{lj}} \right| : \widehat{a}_{lj} < 0 \right] \right]$$

.

Chapitre 5

Programmation paramétrique et analyse de sensibilité

Il peut arriver, dans de nombreux problèmes, que certaines données soient liées à des fluctuations, ou ne soient pas connues avec précision au moment où le programme mathématique est construit. Une telle situation se présente notamment, lorsque le même problème de décision se pose de façon répétée (tous les jours, toutes les semaines, ou tous les mois), mais fait intervenir la valeur de certaines grandeurs (stocks disponibles, cours des matières premières, niveau de la demande, etc) variables dans le temps. On peut songer dans ce cas, à faire dépendre ces données d'un ou plusieurs paramètre(s).

La programmation linéaire paramétrique est la résolution d'un programme linéaire dont certains coefficients dépendent linéairement d'un paramètre λ ou de plusieurs. Il s'agit de déterminer la solution optimale $x^*(\lambda)$ en fonction de λ. On considère généralement les cas suivants :

- le paramètre intervient exclusivement dans la fonction-objectif ;

- le paramètre intervient exclusivement dans le second membre des vraies contraintes.

Les autres cas ne sont étudiés ici car moins fréquents dans la pratique et plus difficiles à résoudre.

Deux autres problématiques étroitement liés à la programmation linéaire paramétrique.

- l' analyse de sensibilité : il s'agit de déterminer le domaine des variatiions d'un certain coefficient pour lesquelles la solution optimale n'est pas modifiée.

- l'analyse post-optimisation : le problème initial est modifié et il s'agit de réoptimiser le nouveau problème.

5.1 Programmation linéaire paramétrique

5.1.1 Paramétrisation de la fonction-objectif

Soit le problème

$$\min\ Z(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}(c_j^1 + \lambda c_j^2)x_j \\ \begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (PL(\lambda))$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ avec rang$A = m < n$.

Définition 5.1.1 *On appelle intervalle de stabilité relatif à la solution de base réalisable associée à B, l'intervalle (éventuellement vide) des valeurs du paramètre λ pour lesquelles la solution de* *base réalisable associée à B est solution optimale de $(PL(\lambda))$.*

On suppose que le polyèdre des solutions réalisables est non vide et qu'on dispose d'une base primale réalisable B. Soit I (respectivement J) l'ensemble des indices des variables (respectivement hors base) associées à B.

On considère la forme canonique de $(PL(\lambda))$ par rapport à B :

$$\min\ Z(\lambda) = \hat{Z} + \textstyle\sum_{j\in J}^{n}(\hat{c}_j^1 + \lambda\hat{c}_j^2)x_j$$
$$\begin{cases} x_i + \sum_{j\in J}\hat{a}_{ij}x_j = \hat{b}_i & i \in I \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On montre que

Proposition 5.1.1 *L'intervalle de stabilité associé à B est $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ avec*

$$\underline{\lambda} = \max\left\{-\frac{\hat{c}_j^1}{\hat{c}_j^2} : j \in J\ \hat{c}_j^2 > 0\right\}\ \text{et}\ \overline{\lambda} = \min\left\{-\frac{\hat{c}_j^1}{\hat{c}_j^2} : j \in J\ \hat{c}_j^2 < 0\right\}.$$

Remarque 5.1.1
1) On a $\underline{\lambda} = -\infty$ si $\hat{c}_j^2 \leq 0,\ \forall j \in J$ et $\overline{\lambda} = +\infty$ si $\hat{c}_j^2 \geq 0,\ \forall j \in J$.
2) L'intervalle de stabilité est vide si $\underline{\lambda} > \overline{\lambda}$

On définit

Définition 5.1.2 *Deux intervalles de $\mathbb{R}$ sont dits adjacents si la borne supérieure du premier coincide avec la borne inférieure du second. Par exemple $[a, b]$ et $[b, c]$.*

On suppose qu'on dispose d'un intervalle de stabilité associé à B. Pour déterminer un éventuel nouvel intervalle de stabilité adjacent, on fait le changement de base suivant dans l'algorithme primal du simplexe :

• la variable x_k $(k \in J)$ rentrant dans la base est celle dont le coefficient $\hat{c}_j^1 + \lambda\hat{c}_j^2$ s'annule pour $\lambda = \underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$).

• la variable sortant de la base est déterminée par la règle classique de l'algorithme primal du simplexe.

Un tel changement de base permet de déterminer l'intervalle de stabilité adjacent à $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ du côté de $\underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$).

Remarque 5.1.2 *Si pour un tel changement de base il n'existe pas de pivot (positif) cela signifie qu'au-délà de cette valeur $\underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$) le problème est non borné.*

Le problème $(PL(\lambda))$ est complètement résolu lorsque l'intervalle de définition du paramètre λ est décomposé en intervalles de stabilité et en intervalles où le problème est non borné.

Exemple 5.1.1

Résoudre le programme linéaire paramétrique suivant.

$$\min \ Z = (8+2\lambda)x_1 + (7+7\lambda)x_2 + (3+2\lambda)x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

La forme standard de ce programme est :

$$\min \ Z = (8+2\lambda)x_1 + (7+7\lambda)x_2 + (3+2\lambda)x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Il n y a pas de base réalisable évidente on doit donc utiliser soit la phase 1 ou la méthode du grand M.

Utilisons la méthode du grand M.

La variable x_3 n'intervient que dans la deuxième contrainte et le signe de son coefficient est égal à celui du second membre. Elle peut être considérée comme de base associée à cette équation. Il n'est donc plus nécessaire d'ajouter une variable artificielle à cette équation.

Le programme auxiliaire est :

$$\min \ Z = (8+2\lambda)x_1 + (7+7\lambda)x_2 + (3+2\lambda)x_3 + Mx_6$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, 6. \end{cases}$$

$I = \{x_6, x_3\}$ est une base réalisable évidente. Le programme sous forme canonique par rapport à cette base est :

$$\begin{aligned} \min \ Z = M + 3 + 2\lambda + (5-2M)x_1 + (1-M+3\lambda)x_2 \\ +Mx_4 + (3+2\lambda)x_5 \end{aligned}$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \ i = 1, \cdots, 6. \end{cases}$$

		x_1	x_2	x_4	x_5		
	x_6	2	1	-1	0	1	$\leftarrow$
TS1	x_3	1	2	0	-1	1	
		$5-2M$	$1-M+3\lambda$	M	$3+2\lambda$	$-3-M-2\lambda$	
		$\uparrow$					

Cette base n'est optimale pour aucune valeur de λ. On choisit une variable hors base ayant de préférence le coefficient le plus négatif comme variable rentrante.

		x_6	x_2	x_4	x_5		
	x_1	$\vdots$	1/2	-1/2	0	1/2	
TS2	x_3	$\vdots$	3/2	1/2	-1	1/2	$\leftarrow$
		$\vdots$	$-3/2+3\lambda$	5/2	$3+2\lambda$	$-11/2-2\lambda$	
			$\uparrow$				

La base $I = \{x_1, x_3\}$ est optimale pour λ tel que $\hat{c} \geq 0$. Ce qui donne $\lambda \in [\frac{1}{2}, +\infty[$.

Dans ce cas une solution optimale est $x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda) = \frac{11}{2} + 2\lambda$.

Pour l'étape suivante on considère la variable hors base dont le coefficient s'annule pour $\lambda = \frac{1}{2}$.

		x_3	x_4	x_5		
	x_1	-1/3	-2/3	1/3	1/3	$\leftarrow$
TS3	x_2	2/3	1/3	-2/3	1/3	
		$1-2\lambda$	$3-\lambda$	$2+4\lambda$	$-5-3\lambda$	
				$\uparrow$		

Pour la base $I = \{x_1, x_2\}$ l'intervalle de stabilité est $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
La solution optimale est $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda) = 5 + 3\lambda$.

		x_3	x_4	x_1	
	x_5	-1	-2	3	1
TS4	x_2	0	-1	2	1
		$3-2\lambda$	$7+7\lambda$	$-6-12\lambda$	$-7-7\lambda$
			$\uparrow$		

Pour la base $I = \{x_5, x_2\}$ l'intervalle de stabilité est $[-1, -\frac{1}{2}]$.
La solution optimale est $x^* = (0, 1, 0)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda) = 7 + 7\lambda$.
Le coefficient qui s'annule pour $\lambda = -1$ ne permet pas d'obtenir un pivot. Donc pour $\lambda \in]-\infty, -1[$ le problème est non borné ; ce qui achève la résolution du problème.

5.1.2 Paramétrisation du second membre

Soit le problème

$$\begin{array}{l} \min\ Z = cx \\ \begin{cases} Ax = b = b^1 + \lambda b^2 \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \geq 0 \end{cases} \end{array} \qquad (PL(\lambda))$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ avec $\text{rang}A = m < n$.

L'ensemble des valeurs du paramètre λ pour lesquelles le problème possède une solution optimale peut être décomposé en intervalles de stabilité chacun d'eux correspondant à une base optimale.

Soit B une base duale réalisable (éventuellement obtenue par application de la méthode de la contrainte artificielle). Soit I (respectivement J) l'ensemble des indices des variables de base (respectivement hors base) associé à B.

On suppose le problème écrit sous forme canonique par rapport à la base B. On montre que :

Proposition 5.1.2 *L'intervalle de stabilité associé à B est $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ avec*

$$\underline{\lambda} = \max\left\{-\frac{\hat{b}_i^1}{\hat{b}_i^2} : i \in I,\ \hat{b}_i^2 > 0\right\} \text{ et } \overline{\lambda} = \min\left\{-\frac{\hat{b}_i^1}{\hat{b}_i^2} : i \in I,\ \hat{b}_i^2 < 0\right\}.$$

Remarque 5.1.3
1) On a $\underline{\lambda} = -\infty$ si $\hat{b}_b^2 \geq 0,\ \forall i \in I$ et $\overline{\lambda} = +\infty$ si $\hat{b}_i^2 \leq 0,\ \forall i \in I$.
2) L'intervalle de stabilité est vide si $\underline{\lambda} > \overline{\lambda}$

Pour déterminer un éventuel nouvel intervalle de stabilité adjacent, on fait le changement de base suivant dans l'algorithme dual du simplexe :

• la variable x_l ($l \in I$) sortant de la base est celle dont le coefficient $\hat{b}_i^1 + \lambda \hat{b}_i^2$ s'annule pour $\lambda = \underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$).

• la variable rentrant dans la base est déterminée par la règle classique de l'algorithme dual du simplexe.

Un tel changement de base permet de déterminer l'intervalle de stabilité adjacent à $[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ du côté de $\underline{\lambda}$ (respectivement $\overline{\lambda}$).

Remarque 5.1.4 *Si pour un tel changement de base, il n'existe pas de pivot (négatif) cela signifie qu'au-delà de cette valeur* $\underline{\lambda}$ *(respectivement* $\overline{\lambda}$*) le problème est impossible.*

Le problème $(PL(\lambda))$ est complètement résolu lorsque l'intervalle de définition du paramètre λ est décomposé en intervalles de stabilité et/ou en intervalles pour lesquels le problème est impossible.

Exemple 5.1.2

Résoudre le programme linéaire paramétrique suivant.

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 - 2\lambda \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 - \lambda \\ x_1 - x_2 \leq 2 + \lambda \\ x_1,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

La forme standard de ce programme est :

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 - 2\lambda \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 - \lambda \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 + \lambda \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

$I = \{x_3, x_4, x_5\}$ est une base évidente et le programme est déjà sous forme canonique par rapport à cette base. On remarque qu'elle n'est pas duale réalisable. On va appliquer la méthode de la contrainte artificielle.

Le programme auxiliaire est :

$$\max\ Z = 6x_1 + 5x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 - 2\lambda \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 - \lambda \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 + \lambda \\ x_1 + x_2 + v = M \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \cdots, 5. \end{cases}$$

$I = \{x_3, x_4, x_5, v\}$ est une base évidente. Le premier tableau simplexe est :

		x_1	x_2		
	x_3	1	1	$8-2\lambda$	
	x_4	-2	3	$6-\lambda$	
TS1	x_5	1	-1	$2+\lambda$	
	v	1	1	M	$\leftarrow$
		6	5	0	
		$\uparrow$			

Après le changement de base initial imposé, on obtient :

		v	x_2		
	x_3	-1	0	$8-2\lambda-M$	$\leftarrow$
	x_4	2	5	$6-\lambda+2M$	
TS2	x_5	-1	-2	$2+\lambda-M$	
	x_1	1	1	M	
		-6	-1	-6M	
		$\uparrow$			

La base duale réalisable $I=\{x_3,x_4,x_5,x_1\}$ n'est optimale pour aucune valeur de λ. On utilise les règles classiques pour le changement de base.

		x_3	x_2		
	v	...	...	...	
	x_4	2	5	$22-5\lambda$	
TS3	x_5	-1	-2	$-6+3\lambda$	$\leftarrow$
	x_1	1	1	$8-2\lambda$	
		-6	-1	$-48-12\lambda$	
			$\uparrow$		

La base duale réalisable $I=\{v,x_4,x_5,x_1\}$ est optimale si

$$\begin{cases} 22-5\lambda \geq 0 \\ -6+3\lambda \geq 0 \\ 8-2\lambda \geq 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire pour $\lambda \in [2,4]$. Dans ce cas la solution optimale est $x^*(\lambda)=(8-2\lambda,0)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda)=48+12\lambda$.

Remarque 5.1.5 *Il n y a pas d'intervalle de stabilité adjacent du côté de 4 car le coefficient du second membre qui s'annule pour $\lambda=4$ ne permet pas d'avoir un pivot (négatif). Donc pour $\lambda \in]4,+\infty[$ le problème est impossible.*

		x_3	x_5		
	x_4	-1/2	5/2	$7+5\lambda/2$	$\leftarrow$
TS4	x_2	1/2	-1/2	$3-3\lambda/2$	
	x_1	1/2	1/2	$5-\lambda/2$	
		-11/2	1/2	$-45+21\lambda/2$	
		$\uparrow$			

La base duale réalisable $I=\{v,x_4,x_2,x_1\}$ est optimale pour $\lambda \in [-\frac{14}{5},2]$. La solution optimale est $x^*(\lambda)=(5-\frac{1}{2}\lambda, 3-\frac{3}{2}\lambda)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda)=45-\frac{21}{2}\lambda$.

		x_4	x_5	
	x_3	-2	-5	$-14-5\lambda$
TS5	x_2	1	2	$10+\lambda$
	x_1	1	3	$12+2\lambda$
		-11	-28	$-122-17\lambda$

La base duale réalisable $I=\{v,x_3,x_2,x_1\}$ est optimale pour $\lambda \in [-6,-\frac{14}{5}]$. La solution optimale est $x^*(\lambda)=(12+2\lambda,10+\lambda)^T$ et la valeur optimale est $Z^*(\lambda)=122+17\lambda$.

Pour $\lambda \in]-\infty,6[$ le problème est impossible. Ce qui termine la résolution du problème.

5.2 Analyse de sensibilité

Etant donné un programme linéaire et x^* une solution optimale, une analyse de sensibilité consiste à déterminer, séparement pour chaque coefficient de la fonction objectif et du second membre du problème, quel est l'intervalle des variations de ces coefficients pour lesquelles x^* reste solution optimale.

On considère le programme linéaire (PL) ci-dessous.

$$Z^* = \min \ Z = cx \qquad \begin{cases} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0 \end{cases} \tag{PL}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

On suppose que B est une base réalisable optimale et que I (resp. J) sont les indices des variables de base (resp. hors base) associées à la base B.

On note

$$Z^* = \min \ Z = \hat{c}x + \hat{Z} \qquad \begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0 \end{cases}$$

la forme canonique de (PL) par rapport à la base B.

5.2.1 Sensibilité d'un coefficient de la fonction-objectif

La soluition de base réalisable associée à la base B restera optimale quelle que soit la variation d'un coeffient de c, tant que :

$$\hat{c}_j = c_j - \sum_{i \in I} c_i \hat{a}_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in J.$$

Il en résulte que :

a) s'il s'agit de la variation d'un coefficient c_k, $k \in J$, la solution restera optimale pour les valeurs $c_k + \Delta$ avec $\Delta \in [\underline{\Delta}, \overline{\Delta}]$ où $\underline{\Delta} = -\hat{c}_k$ et $\overline{\Delta} = +\infty$.

On remarquera que $\underline{\Delta} \leq 0$.

b) S'il s'agit de la variation d'un coefficient c_l, $l \in I$, la solution restera optimale pour les valeurs de $c_l + \Delta$ avec $\Delta \in [\underline{\Delta}, \overline{\Delta}]$ où :

$$\begin{cases} \underline{\Delta} = \max[\frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{lj}} : j \in J, \quad \hat{a}_{lj} < 0] \\ \overline{\Delta} = \min[\frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{lj}} : j \in J, \quad \hat{a}_{lj} > 0] \end{cases}$$

Dans le cas d'un problème de maximisation, il faut bien sûr imposer :

$$\hat{c}_j = c_j - \sum_{i \in I} c_i \hat{a}_{ij} \leq 0 \quad \forall j \in J$$

pour obtenir l'intervalle $\Delta \in [\underline{\Delta}, \overline{\Delta}]$. L'adaptation des formules donne :

a) $\underline{\Delta} = -\hat{c}_k$ et $\overline{\Delta} = +\infty$.

b)

$$\begin{cases} \underline{\Delta} = \max[\frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{lj}} : j \in J, \quad \hat{a}_{lj} > 0] \leq 0 \\ \overline{\Delta} = \min[\frac{\hat{c}_j}{\hat{a}_{lj}} : j \in J, \quad \hat{a}_{lj} < 0] \geq 0. \end{cases}$$

5.2.2 Sensibilité d'un coefficient du second membre b

La solution restera réalisable et optimale quelle que soit la variation d'un coeffcient de b tant que : $\hat{b}_i \geq 0$ pour tout $i \in I$.

Notons

$$B^{-1} = (\beta_{ij})$$

alors

$$\hat{b} = B^{-1}b \Leftrightarrow \hat{b}_i = \sum_{j \in I} \beta_{ij} b_j \quad \forall\, i \in I$$

Lors de la variation d'un coefficient b_k, la base restera optimale pour les valeurs $b_k + \Delta$ avec $\Delta \in [\underline{\Delta}, \overline{\Delta}]$ où :

$$\begin{cases} \underline{\Delta} = \max[-\frac{\hat{b}_i}{\beta_{ik}} : i \in I, \quad beta_{ik} > 0] \leq 0 \\ \overline{\Delta} = \min[-\frac{\hat{b}_i}{\beta_{ik}} : i \in I, \quad \beta_{ik} < 0] \geq 0. \end{cases}$$

5.2.3 Changement continu de c

On suppose que le vecteur des coefficients de la fonction-objectif c est transformé en $c^* = c + \theta d$ où d est un vecteur de changement et θ un facteur d'échelle, $\theta \geq 0$.

Pour que la base B reste optimale il suffit que :

$$\widehat{c^*} = c^* - c^*_B B^{-1} A \geq 0.$$

Si on on partitionne d comme suit $d = (d_B \ d_N)$, la condition ci-dessus devient :

$$(c_B + \theta d_B \quad c_N + \theta d_N) - (c_B + \theta d_B) B^{-1} A = (0 \quad \hat{c}_N + \theta(d_N - d_B \hat{A}_N)) \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$\hat{c}_j + \theta(d_j - \langle d_B \hat{A}_j \rangle) \geq 0 \quad \forall\, j \in J.$$

Si $d_j - \langle d_B \hat{A}_j \rangle \geq 0$ alors comme $\theta \geq 0$, on aura

$$\hat{c}_j + \theta(d_j - \langle d_B \hat{A}_j \rangle) \geq \hat{c}_j \geq 0$$

car la base B est otimale.

Pour que la base B reste optimale il suffit que :

$$\hat{c}_j + \theta(d_j - \langle d_B \hat{A}_j \rangle) \geq 0 \quad \forall\, j \in J \text{ tel que } d_j - \langle d_B \hat{A}_j \rangle < 0.$$

C'est-à-dire :

$$\theta \leq -\frac{d_j}{d_j - \langle d_B \hat{A}_j \rangle} \quad \forall\, j \in J \text{ tel que } d_j - \langle d_B \hat{A}_j \rangle < 0.$$

Donc la base B restera optimale si $\theta \in [0, \overline{\theta}]$ avec

$$\overline{\theta} = \min[\frac{d_j}{\langle d_B \hat{A}_j \rangle - d_j} : j \in J, d_j - \langle d_B \hat{A}_j \rangle < 0].$$

5.2.4 Changement continu de b

Il s'agit ici d'évaluer le domaine de variation des coefficients de b de sorte que la base B reste optimale.

On utilisera alors l'algorithme dual simplexe.

Supposons que le second membre b est transformé en $b^* = b + \theta d$ où d est un vecteur de changement et θ un facteur d'échelle, $\theta \geq 0$.

La base B reste optimale si $B^{-1}b^* = B^{-1}b + \theta B^{-1}d \geq 0$.

Notons $\hat{d} = B^{-1}d$. Alors la base B restera optimale si $\theta \in [0, \overline{\theta}]$ avec

$$\overline{\theta} = \min[-\frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} : i \in I, \hat{d}_i < 0].$$

5.3 Post-optimisation

L'étude de post-optimisation consiste à réoptimiser "si nécessaire" la solution optimale du problème suite à une modification intervenue dans la formulation du problème. On a les quatre types suivants de modifications.

- Modification d'un coefficient de la fonction-objectif
- Modification d'un coefficient du second membre
- Ajout d'une variable
- Ajout d'une contrainte
- Suppression d'une variable.

On considère le programme linéaire (PL) ci-dessous.

$$\begin{array}{l} Z^* = \min \ Z = cx \\ \left\{ \begin{array}{l} Ax = b \\ x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \tag{PL}$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, et $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

On suppose que B est une base réalisable optimale et que I (resp. J) sont les indices des variables de base (resp. hors base) associées à la base B.

On note

$$\begin{array}{l} Z^* = \min \ Z = \hat{c}x + \hat{Z} \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \in \mathbb{R}^n, \ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

la forme canonique de (PL) par rapport à la base B.

5.3.1 Modification d'un coefficient de c

Supposons qu'un coefficient c_j de c devient $c_j + \Delta$.

On sait que la base reste optimale si $\Delta \in [\underline{\Delta}, \overline{\Delta}]$ d'après le paragraphe (5.2.1). Autrement, la solution est encore primale réalisable et peut être réoptimisée par l'algorithme primal simplexe.

5.3.2 Modification d'un coefficient de b

Supposons qu'un coefficient b_i de c devient $c_i + \Delta$.

On sait que la base reste optimale si $\Delta \in [\underline{\Delta}, \overline{\Delta}]$ d'après le paragraphe (5.2.2). Autrement, la solution est encore duale réalisable et peut être réoptimisée par l'algorithme dual simplexe.

5.3.3 Ajout d'une variable

Supposons qu'une variable x_{n+1} (caractérisée par A_{n+1} (sa colonne dans la matrice des contraintes et c_{n+1} (son coefficient dans la fonction-ojectif)) est ajoutée au problème.

On calcule $\hat{c}_{n+1} = c_{n+1} - c_B B^{-1} A_{n+1}$.

Si $\hat{c}_{n+1} \geq 0$, la solution précédente reste optimale. Dans le cas contraire, la variable x_{n+1} rentre dans la base par application de l'algorithme primal simplexe.

5.3.4 Ajout d'une contrainte

Supposons qu'une contrainte $m + 1$ est ajoutée au problème.

La solution est complétée par la variable d'écart x^e_{m+1} de cette contrainte (ou par une variable artificielle x^a_{m+1} si la contarinte supplementaire est une égalité).

Si $x^e_{m+1} \geq 0$ (ou $x^a_{m+1} = 0$), la solution reste réalisable et optimale.

Dans le cas contraire, x^e_{m+1} (ou x^a_{m+1}) sort de la base par application de l'algorithme dual simplexe.

5.3.5 Suppression d'une variable

Supposons qu'on supprime la variable x_j.

Si x_j est une variable hors base, elle prend dès lors une valeur nulle. Par conséquent, aucune opération n'est à effectuer puisque la région des solution réalisables optimales reste la même.

Si par contre x_j est une variable de base, il est nécessaire de forcer pour la rendre nulle (à moins qu'elle ne le soit déjà). Pour ce faire, il faut la sortir de la base en utilisant le critère de la méthode duale du simplexe.

La variable est ignorée dans la suite de la résolution toujours suivant la méthode duale du simplexe.

Chapitre 6

Programmes linéaires à variables bornées

Dans de nombreuses situations, il arrive régulièrement que la variations des variables soit limitée par des bornes inf et/ou sup du type :

$$l_j \leq x_j \leq k_j, \quad j = 1, \cdots, n$$

où l_j (resp. k_j) est la borne inf (resp. sup) imposée à la valeur prise par x_j.

C'est-à-dire un programme linéaire du type :

$$\begin{array}{l} Z^* = \min \ Z = cx \\ \begin{cases} Ax = b \\ l_j \leq x_j \leq k_j \quad j = 1, \cdots, n \end{cases} \end{array}$$

L'existence d'une borne inf l_j ne pose quère de difficultés puiqu'aussi bien un simple changement de variable $x'_j = x_j - l_j$ suffit à se ramener à la situation $x'_j \geq 0$.

Bien évidemment, un tel changement est alors appliqué tant à la fonction-objectif qu'aux contraintes du problème, qui deviennent (en supposant que ce changement de variable soit appliqué à chaque variable) respectivement :

$$\begin{array}{l} Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow Z' = \sum_{j=1}^{n} c_j l_j + \sum_{j=1}^{n} c_j x'_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j = b_i \quad i = 1, \cdots, m \end{array}$$

C'est donc uniquement le cas des bornes supérieures qui est examiné dasn ce qui suit.

En effet si les contraintes

$$x_j \leq k_j, \quad j = 1, \cdots, n$$

étaient traitées comme des contraintes ordinaires d'inégalité, outre ces n contraintes supplementaires, il conviendreait de doubler le nombre de variables par l'introduction de variables d'écart :

$$x_j + x_j^e = k_j, \quad x_j^e \geq 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

Il existe toutefois des techniques particulières qui évitent cet inconvénient en tenant compte de manière spécifique des contriantes de bornes supérieures.

Deux approches sont possibles.

L'une utilise l'algorithme primal du simplexe, et l'autre l'algorithme dual.

6.1 Méthode utilisant l'algorithme dual

Nous présentons ici l'approche utilisant l'algorithme dual simplexe.

On considère le programme linéaire à variables bornées supérieurement

$$\begin{array}{l} Z^* = \min\ Z = cx \\ \begin{cases} Ax = b \\ 0 \le x \le k \end{cases} \end{array} \qquad (PLB)$$

où $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $c \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $k \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ le vecteur des bornes supérieures.

On suppose disposer d'une base initiale B. Comme dans l'algorithme dual, si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il faut se résoudre à appliquer d'abord la méthode des variables artificielles.

On note comme d'habitude I (resp. J) les indices des variables de base (resp. hors base) associées à la base B. La forme canonique par rapport à cette base est :

$$\begin{array}{l} Z^* = \min\ Z = \hat{c}x + \hat{Z} \\ \begin{cases} \hat{A}x = \hat{b} \\ x \in \mathbb{R}^n,\ x \ge 0 \end{cases} \end{array}$$

Initialisation

Il est aisé d'initialiser l'application de l'algorithme dual en rendant cette base duale réalisable. Il suffit en fait, pour chaque coeffcient $\hat{c}_j < 0$ d'introduire le changement de variable $x_j = k_j - x_j^e$ de sorte que outre une modification du terme indépendant de Z qui varie de $k_j\hat{c}_j$ le coefficient de x_j^e dans Z devient $-\hat{c}_j > 0$.

Par ailleurs, ce changement de variable induit les changements suivants dans le tableau simplexe.

$$\begin{array}{l} \hat{b}_i \to \hat{b}_i - \hat{a}_{ij}k_j \quad \forall\, i \in I \\ \hat{a}_{ij} \to -\hat{a}_{ij} \quad \forall\, i \in I. \end{array}$$

Principe de l'adaptation de l'algorithme dual

L'algorithme dual est appliqué. Toutefois, chaque fois qu'une variable de base x_i (x_i^e) devient supérieure à sa borne k_i, elle est remplacée par $k_i - x_i^e$ (ou $k_i - x_i$).

La contrainte i de la forme canonique

$$x_i + \sum_{j \in J} \hat{a}_{ij}x_j = \hat{b}_i$$

devient

$$x_i^e - \sum_{j \in J} \hat{a}_{ij}x_j = k_i - \hat{b}_i.$$

Ainsi les seules conséquences dans le tableau simplexe d'un tel changement sont, dans la ligne i :

- la modification de $\hat{b}_i$ en $k_i - \hat{b}_i$

- le changement de signe des coefficients $\hat{a}_{ij}\ \forall\, j \in J$.

L'algorithme dual est appliqué jusqu'au moment où chaque variable de base x_i (ou x_i^e) est comprise dans l'intervalle $[0, k_i]$.

Il faut signaler que lorsque dans la solution optimale, la variable d'écart x_i^e est une varible hors base, alors $x_j = k_j$.

Bibliographie

[1] Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M., 1979. Nonlinear Programming Theory and Algorithms, *John Wiley and Sons.*

[2] Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M., 1976. Foundations of Optimization, *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems, No 122, Springer-Verlag New-York.*

[3] Bergounioux Maïtine, 2001. Optimisation et Contrôle des systèmes linéaires, *Donod.*

[4] Bertsimas, Dimitris and Tsitsiklis John N. 1997. Introduction to Linear Optmization, *Athena Scientific.*

[5] Culioli, Jean-Christophe, 1994. Introduction à l'optimisation, *Ellipses.*

[6] Christelle Guéret, Christian Prins, Marc Sevaux, 2000. Programmation linéaire, *Eyrolles.*

[7] F. Droesbeke, M. Hallin, CL. Lefevre, 1986. Programmation linéaire par l'exemple, *Ellipses.*

[8] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste, 1998. Optimisation et Analyse Convexe, *Presse Universitaire de France.*

[9] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste and Lemaréchal, Claude, 1993. Convex Analysis and Minimization algorithms, *Vol I et II Grundlehren der mathematichen Wissenschaften 305 and 306, Springer-Verlag.*

[10] Hiriart-Urruty, Jean-Baptiste, 1996. L'Optimisation, in collection "Que sais-je ?", *Presse Universitaire de France.*

[11] Michel Minoux, 1983. Programmation mathématique : Théorie et Algorithmes, Vol I, *Dunod.*

[12] Rockafellar, R. Tyrrel, 1970. Convex Analysis, *Princeton University Press, Princeton N. J..*

[13] Roseaux, 1985. T.3. Programmation linéaire et extensions ; problèmes classiques, *Masson*

[14] Michel Sakarovitch, 1984. Optimisation Combinatoire Graphes et Programmation linéaire, *Hermann*

[15] Jacques Teghem, 1996. Programmation linéaire, *Editions Ellipses*