



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA



Bentuk-Bentuk Persamaan dan Pertidaksamaan

Mata Kuliah:
COM60025 - Kalkulus
Disusun oleh:
Kelompok Pengelola Mata Kuliah Kalkulus



filkom.ub.ac.id

Apa itu Persamaan?

Definisi

Persamaan adalah pernyataan matematika yang menyatakan bahwa dua ekspresi matematika sama.

Contoh

$$x + 2 = 5, 2x - 3 = 7, x^2 + 4x + 4 = 0$$

Jenis-Jenis Persamaan

1 Linear

Persamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 1.

2 Kuadrat

Persamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2.

3 Polinom

Persamaan dengan lebih dari dua suku, masing-masing dengan variabel yang memiliki pangkat bulat.

4 Rasional

Persamaan dengan variabel dalam pecahan.

5 Eksponen

Persamaan dengan variabel sebagai eksponen.

6 Logaritma

Persamaan yang melibatkan logaritma variabel.

Persamaan Linear

Bentuk Umum

$ax + b = 0$, di mana a dan b adalah konstanta.

Contoh

- $2x + 3 = 7$,
- $x - 5 = 2$,
- $3x = 9$

Persamaan Kuadrat

Bentuk Umum

$ax^2 + bx + c = 0$, di mana a, b, dan c adalah konstanta.

Contoh

- $x^2 + 4x + 4 = 0$,
- $2x^2 - 3x + 1 = 0$,
- $x^2 - 9 = 0$

Persamaan Polinom

Bentuk Umum

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$, di mana $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ adalah konstanta.

Contoh

- $x^3 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$,
- $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$,
- $x^5 + 4x^3 - 2x = 0$

Persamaan Rasional

Bentuk Umum

$P(x)/Q(x) = 0$, di mana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinom.

Contoh

- $(x + 2)/(x - 1) = 0$,
- $(2x - 3)/(x^2 + 1) = 0$,
- $x/(x^2 - 4) = 0$

Persamaan Eksponen

Bentuk Umum

$a^x = b$, di mana a dan b adalah konstanta.

Contoh

- $2^x = 8$,
- $3^x = 27$,
- $e^x = 5$

Persamaan Logaritma

Bentuk Umum

$\log_a(x) = b$, di mana a dan b adalah konstanta.

Contoh

- $\log_2(x) = 3$,
- $\log_3(x) = 2$,
- $\ln(x) = 1$

Apa itu Pertidaksamaan?

Definisi

Pertidaksamaan adalah pernyataan matematika yang menyatakan hubungan ketidaksetaraan antara dua ekspresi matematika.

Contoh

- $x + 2 < 5$,
- $2x - 3 > 7$,
- $x^2 + 4x + 4 \leq 0$

Jenis-Jenis Pertidaksamaan

1 Linear

Pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 1.

2 Kuadrat

Pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2.

3 Polinom

Pertidaksamaan dengan lebih dari dua suku, masing-masing dengan variabel yang memiliki pangkat bulat.

4 Rasional

Pertidaksamaan dengan variabel dalam pecahan.

5 Eksponen

Pertidaksamaan dengan variabel sebagai eksponen.

6 Logaritma

Pertidaksamaan yang melibatkan logaritma variabel.

Pertidaksamaan Linear

Bentuk Umum

$ax + b < 0,$
 $ax + b > 0,$
 $ax + b \leq 0,$
 $ax + b \geq 0,$

di mana a dan b adalah konstanta.

Contoh

$2x + 3 < 7,$
 $x - 5 > 2,$
 $3x \leq 9,$
 $x - 2 \geq 0$

Pertidaksamaan Kuadrat

Bentuk Umum

- $ax^2 + bx + c < 0$,
- $ax^2 + bx + c > 0$,
- $ax^2 + bx + c \leq 0$,
- $ax^2 + bx + c \geq 0$,

di mana a, b, dan c adalah konstanta.

Contoh

- $x^2 + 4x + 4 < 0$,
- $2x^2 - 3x + 1 > 0$,
- $x^2 - 9 \leq 0$,
- $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

Pertidaksamaan Polinom

Bentuk Umum

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 < 0,$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 > 0,$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \leq 0,$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \geq 0,$$

di mana $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ adalah konstanta.

Contoh

- $x^3 + 2x^2 - 5x + 1 < 0$,
- $2x^4 - 3x^2 + 1 > 0$,
- $x^5 + 4x^3 - 2x \leq 0$,
- $x^2 + 2x - 3 \geq 0$



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA



brone
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



FILKOM

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

Pertidaksamaan Rasional

Bentuk Umum

- $P(x)/Q(x) < 0,$
- $P(x)/Q(x) > 0,$
- $P(x)/Q(x) \leq 0,$
- $P(x)/Q(x) \geq 0,$

di mana $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinom.

Contoh

- $(x + 2)/(x - 1) < 0,$
- $(2x - 3)/(x^2 + 1) > 0,$
- $x/(x^2 - 4) \leq 0,$
- $(x + 1)/(x - 2) \geq 0$

Pertidaksamaan Eksponen

Bentuk Umum

- $a^x < b,$
- $a^x > b,$
- $a^x \leq b,$
- $a^x \geq b,$

di mana a dan b adalah konstanta.

Contoh

- $2^x < 8,$
- $3^x > 27,$
- $e^x \leq 5,$
- $2^x \geq 16$

Pertidaksamaan Logaritma

Bentuk Umum

- $\log_a(x) < b,$
- $\log_a(x) > b,$
- $\log_a(x) \leq b,$
- $\log_a(x) \geq b,$

di mana a dan b adalah konstanta.

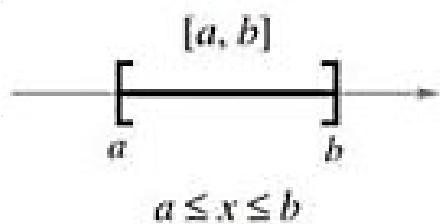
Contoh

- $\log_2(x) < 3,$
- $\log_3(x) > 2,$
- $\ln(x) \leq 1,$
- $\log_2(x) \geq 4$

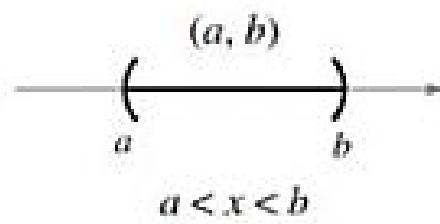
Interval atau Selang

Bagian yang lebih kecil (himpunan) dari garis bilangan adalah Interval atau selang

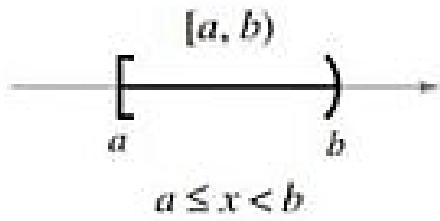
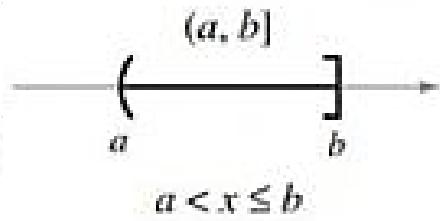
Interval tertutup



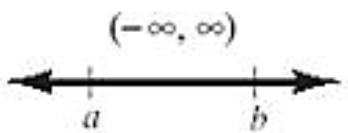
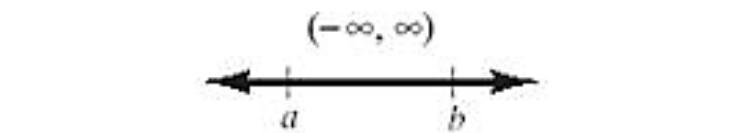
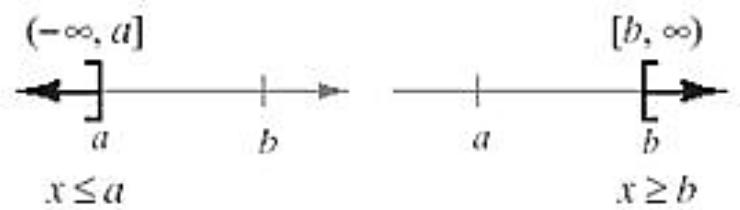
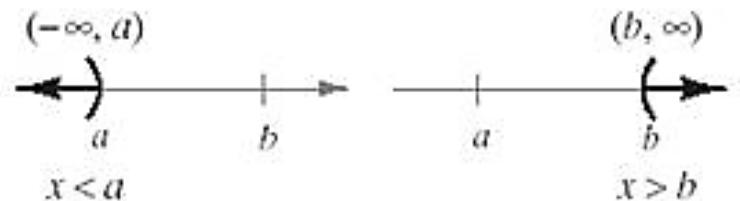
Interval terbuka



Bukan Interval Tertutup
ataupun Terbuka



Interval Tak Hingga



DIKTISAINTEK
BERDAMPAK



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA



brone
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



FILKOM



Menyelesaikan Pertidaksamaan

1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas
2. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif
3. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif dan membalikkan arah tanda ketidaksamaan

Contoh 1:

Selesaikan pertidaksamaan $2x - 7 < 4x - 2$

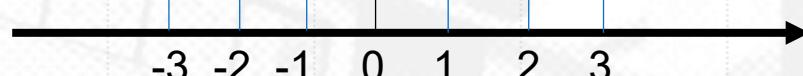
$$2x - 7 < 4x - 2$$

$$2x < 4x + 5 \quad (\text{Tambahkan } 7)$$

$$-2x < 5 \quad (\text{Tambahkan } -4x)$$

$$x > -\frac{5}{2} \quad (\text{Kalikan dengan } -\frac{1}{2})$$

Grafik penyelesaian:



$$\left(-\frac{5}{2}, \infty \right) = \left\{ x : x > -\frac{5}{2} \right\}$$



DIKTISAINTEK
BERDAMPAK



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA



brone
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



FILKOM



Menyelesaikan Pertidaksamaan

1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas
2. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif
3. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif dan membalikkan arah tanda ketidaksamaan

Contoh 2:

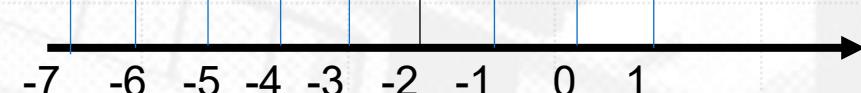
Selesaikan pertidaksamaan $-5 \leq 2x + 6 < 4$

$$-5 \leq 2x + 6 < 4$$

$$-11 \leq 2x < -2 \quad (\text{Tambahkan } -6)$$

$$-\frac{11}{2} \leq x < -1 \quad (\text{Kalikan dengan } \frac{1}{2})$$

Grafik penyelesaian:



$$\left[-\frac{11}{2}, -1 \right) = \left\{ x : -\frac{11}{2} \leq x < -1 \right\}$$

© Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Brawijaya





Menyelesaikan Pertidaksamaan

1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas
2. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif
3. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif dan membalikkan arah tanda ketidaksamaan

Contoh 3:

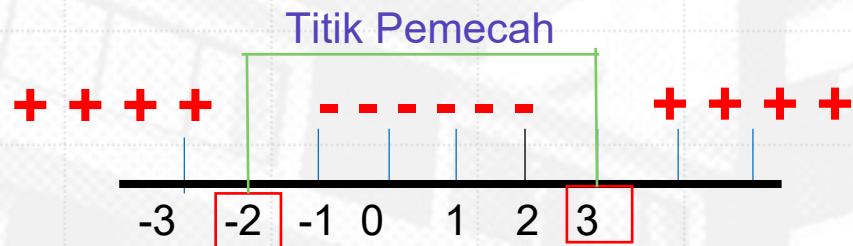
Selesaikan pertidaksamaan kuadrat $x^2 - x < 6$

$$x^2 - x < 6$$

$$x^2 - x - 6 < 0 \text{ (Tambahkan } -6\text{)}$$

$$(x - 3)(x + 2) < 0 \text{ (faktorkan)}$$

Grafik penyelesaian:



$(-2, 3)$



Menyelesaikan Pertidaksamaan

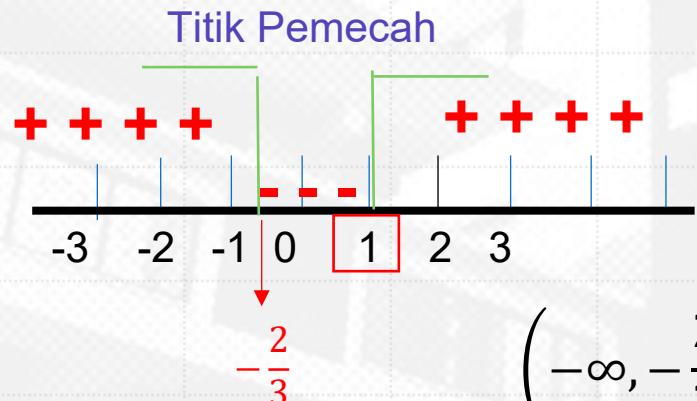
1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas
2. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif
3. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif dan membalikkan arah tanda ketidaksamaan

Contoh 4:

Selesaikan pertidaksamaan kuadrat $3x^2 - x - 2 > 0$

$$\begin{aligned}3x^2 - x - 2 &= (x - 1)(3x + 2) \\&= 3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

Grafik penyelesaian:



$$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$$





Menyelesaikan Pertidaksamaan

Contoh 5:

Selesaikan pertidaksamaan $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$

Grafik penyelesaian:



$$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$



Menyelesaikan Pertidaksamaan

Contoh 6:

Selesaikan pertidaksamaan

$$\frac{2x - 5}{x - 2} \leq 1$$

Tuliskan ketidaksamaan kembali secara beruntun:

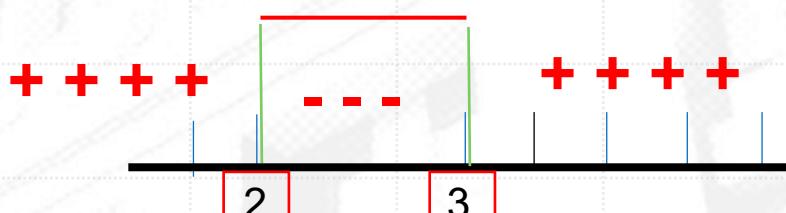
$$\frac{2x - 5}{x - 2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2x - 5 - (x - 2)}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{x - 3}{x - 2} \leq 0$$

Grafik penyelesaian:

Titik Pemecah



Himpunan penyelesaian: $(2, 3]$



Menyelesaikan Pertidaksamaan

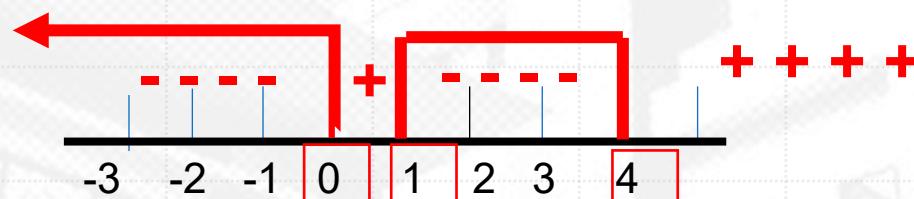
Contoh 7:

Selesaikan pertidaksamaan $x^3 - 5x^2 + 4x \leq 0$

Dapat difaktorkan menjadi: $x(x - 1)(x - 4)$

Grafik penyelesaian:

Titik Pemecah: 0, 1 dan 4



Himpunan penyelesaian: $(-\infty, 0] \cup [1, 4]$



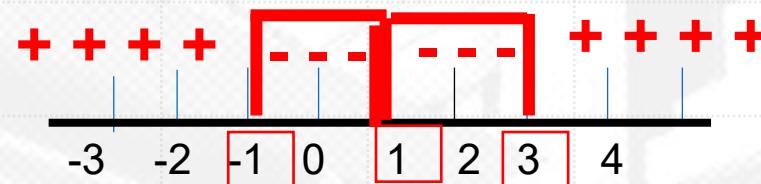
Menyelesaikan Pertidaksamaan

Contoh 8:

Selesaikan pertidaksamaan $(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) \leq 0$

Grafik penyelesaian:

Titik Pemecah: -1, 1 dan 3



Himpunan penyelesaian: $[-1, 1] \cup [1, 3]$

atau $[-1, 3]$



Nilai Mutlak

Nilai mutlak suatu bilangan real x , dinyatakan oleh $|x|$, didefinisikan sebagai:

$$|x| = x \text{ jika } x \geq 0$$

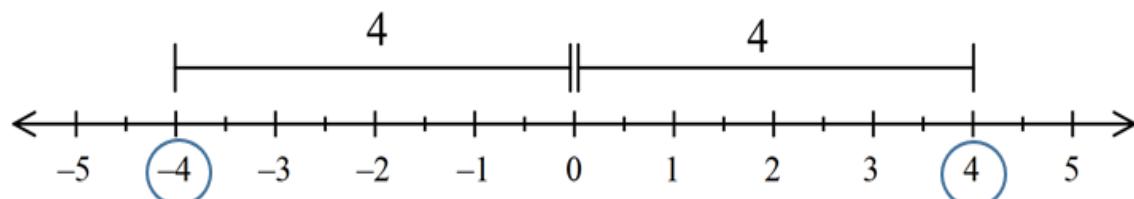
$$|x| = -x \text{ jika } x < 0$$

Contoh : $|6| = 6$ $|0| = 0$ $|-7| = 7$ $|x - a| = |a - x|$

Nilai mutlak dapat dibayangkan sebagai jarak (tak berarah)

$$|-4| = 4$$

$$|4| = 4$$





Sifat-sifat Nilai Mutlak

$$1. |ab| = |a||b|$$

$$2. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Pertidaksamaan Segitiga)

$$4. |a - b| \geq ||a| - |b||$$



Pertidaksamaan Yang Melibatkan Nilai Mutlak

- Jika $|x| < 5$, maka jarak antara x dengan titik asal harus lebih kecil dari 5.
- Dengan perkataan lain, x secara simultan < 5 dan lebih besar dari -5 , yaitu $-5 < x < 5$

Pernyataan :

$$|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a$$



DIKTI
SAINTEK
BERDAMPAK



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA



brone
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



FILKOM



Pertidaksamaan Yang Melibatkan Nilai Mutlak

Contoh 1: Selesaikan $|x - 4| < 2$ dan perlihatkan himpunan penyelesaiannya pada garis real.

Penyelesaian

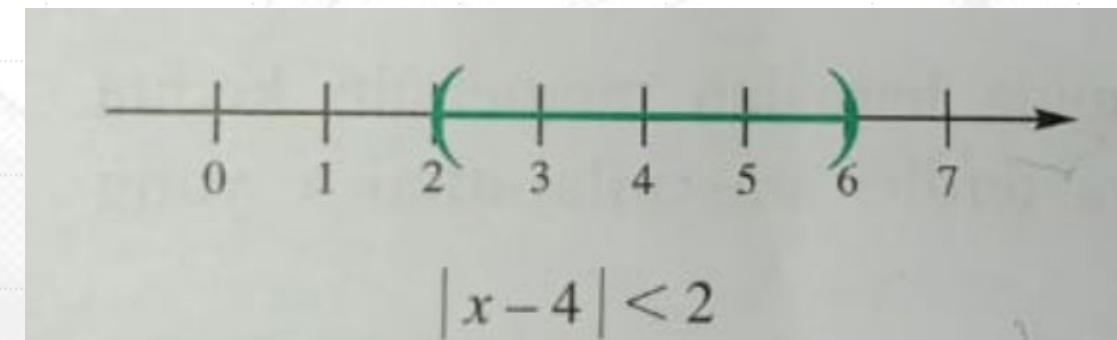
$$\begin{aligned}|x - 4| < 2 &\leftrightarrow -2 < x - 4 < 2 \\&\leftrightarrow 2 < x < 6\end{aligned}$$

Hp (2,6)

Contoh lain

$$\begin{aligned}|x + 4| < 2 &\leftrightarrow -2 < x + 4 < 2 \\&\leftrightarrow -6 < x < -2\end{aligned}$$

Hp (-6,-2)



DIKTISAINTEK
BERDAMPAK



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA



brone
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



FILKOM



Pertidaksamaan Yang Melibatkan Nilai Mutlak

Contoh 2: Selesaikan pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1$

Penyelesaian

$$|3x - 5| \geq 1, \text{ maka}$$

$$3x - 5 \leq -1 \quad \text{atau} \quad 3x - 5 \geq 1$$

$$3x \leq 4 \quad \text{atau} \quad 3x \geq 6$$

$$x \leq 4/3 \quad \text{atau} \quad x \geq 2$$

Jadi himpunan penyelesaian $(-\infty, 4/3] \cup [2, \infty)$



DIKTISAINTEK
BERDAMPAK



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA



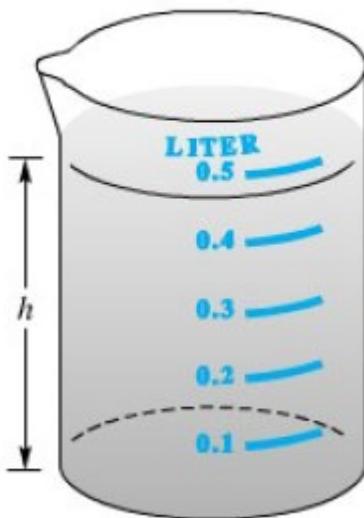
brone
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



FILKOM



Pertidaksamaan Yang Melibatkan Nilai Mutlak



Contoh 3: Sebuah beker gelas $\frac{1}{2}$ liter (500 sentimeter kubik) mempunyai jari-jari-dalam 4 sentimeter. Seberapa dekat kita harus mengukur tinggi air h dalam gelas untuk meyakinkan kita mempunyai $\frac{1}{2}$ liter air dengan galat lebih kecil dari 1%, yakni galat lebih kecil dari 5 sentimeter kubik? Perhatikan gambar di samping.

Penyelesaian

Volume air V dalam gelas diberikan oleh rumus $V = \pi r^2 h = 16\pi h$. Kita ingin $|V - 500| < 5$, atau setara $|16\pi h - 500| < 5$.

$$\begin{aligned}|16\pi h - 500| &< 5 \Leftrightarrow |16\pi\left(\frac{h-500}{16\pi}\right)| < 5 \\&\Leftrightarrow 16\pi\left|\frac{h-500}{16\pi}\right| < 5 \Leftrightarrow \left|\frac{h-500}{16\pi}\right| < \frac{5}{16\pi} \\&\Leftrightarrow |h - 500| < 0,09947 \approx 0,1\end{aligned}$$

Jadi, kita harus mengukur tinggi sampai ketelitian 0,1 sentimeter atau 1 milimeter.



DIKTISAINTEK
BERDAMPAK



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA



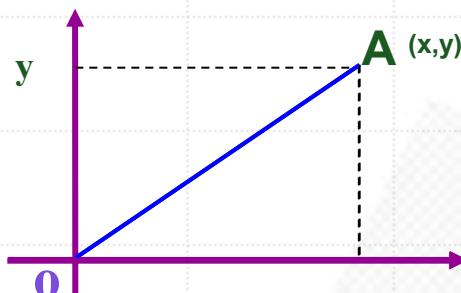
brone
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



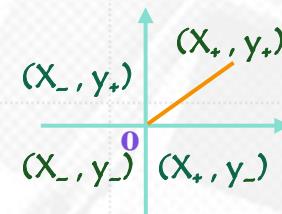
© Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Brawijaya

Sistem Koordinat Cartesius Versus Kutub

» KOORDINAT KARTESIUS



Ingat !!



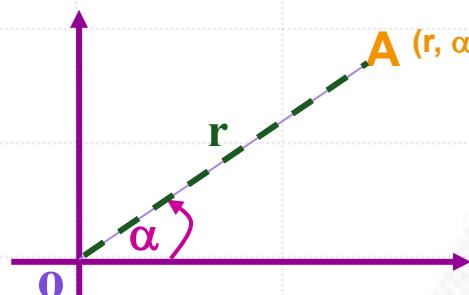
Suatu titik A dapat dinyatakan sebagai pasangan berurut $A(x,y)$

X : jarak titik A terhadap sumbu -Y

y : jarak titik A terhadap sumbu -X

Sistem Koordinat Cartesius Versus Kutub

☒ KOORDINAT KUTUB



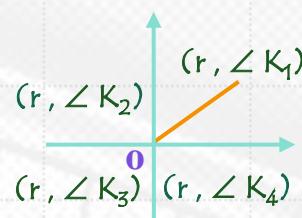
Ingat !!

Besar sudut di berbagai kuadran

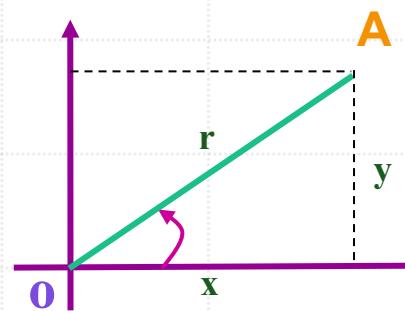
Suatu titik A dapat dinyatakan sebagai pasangan berurut $A(r, \alpha)$

r : jarak titik A terhadap titik asal O (0,0)

α : besar sudut antara sb-X (x positif) terhadap garis OA



Sistem Koordinat Cartesius Versus Kutub



$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

Ingat Letak kuadran...

1. Jika diketahui Koordinat Kutub (r , α) :

Maka : $x = r \cdot \cos \alpha$

$y = r \cdot \sin \alpha$

2. Jika diketahui Koordinat Kartesius (x , y) :

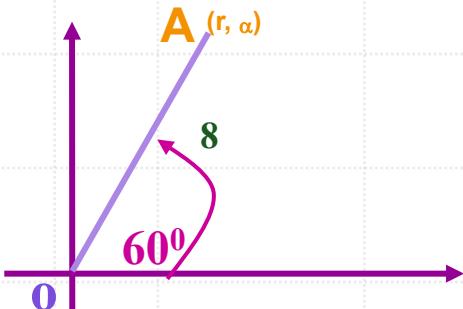
Maka : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan \alpha = \frac{y}{x}$



Contoh Soal :

Diketahui Koordinat Kutub :



Ubahlah ke Koordinat Kartesius :

Titik A $(8, 60^\circ)$

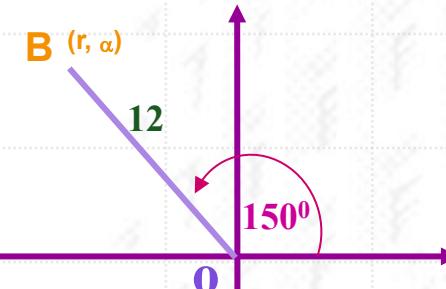
Maka :

$$x = r \cdot \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \sin \alpha$$

Contoh Soal :

Diketahui Koordinat Kutub :



Titik A $(12, 150^\circ)$

Maka :

$$x = r \cdot \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \sin \alpha$$

Jawab :

Jawab :

Titik A $(8, 60^\circ) \Rightarrow x = r \cdot \cos \alpha$

$$= 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = 4$$

$y = r \cdot \sin \alpha$

$$= 8 \cdot \sin 60^\circ$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$y = 4\sqrt{3}$$

Jadi $A(8, 60^\circ) \Leftrightarrow A(4, 4\sqrt{3})$

Titik A $(12, 150^\circ)$

$\Rightarrow x = r \cdot \cos \alpha$

$$= 12 \cdot \cos 150^\circ$$

$$= 12 \cdot -\cos 30^\circ$$

$$= 12 \cdot -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$x = -6\sqrt{3}$$

$y = r \cdot \sin \alpha$

$$= 12 \cdot \sin 150^\circ$$

$$= 12 \cdot \sin 30^\circ$$

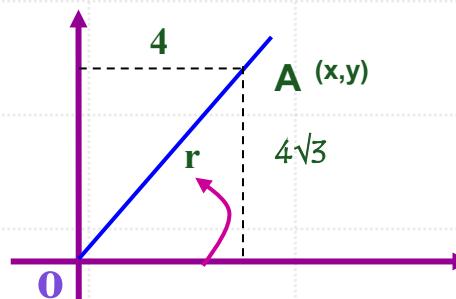
$$= 12 \cdot \frac{1}{2}$$

$$y = 6$$

Jadi $B(12, 150^\circ) \Leftrightarrow B(-6\sqrt{3}, 6)$

» Contoh Soal :

Diketahui Koordinat Kartesius :



Ubahlah ke Koordinat Kutub :

Titik A (4, 4\sqrt{3})

$$\text{Maka : } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

» Jawab :

$$\text{Titik A } (4, 4\sqrt{3}) \Rightarrow r = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$$

$$r = \sqrt{16 + 48}$$

$$r = \sqrt{64}$$

$$r = 8$$

$$\text{Jadi } A(4, 4\sqrt{3}) \Leftrightarrow A(8, 60^\circ)$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

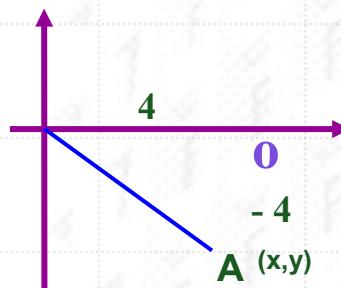
$$\tan \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{4}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

» Contoh Soal :

Diketahui Koordinat Kartesius :



Titik A (4, -4)

$$\text{Maka : } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

» Jawab :

$$\text{Titik A } (4, -4) \Rightarrow r = \sqrt{4^2 + 4^2}$$

$$r = \sqrt{32}$$

$$r = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Jadi } A(4, -4) \Leftrightarrow A(4\sqrt{2}, 315^\circ)$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\tan \alpha = \frac{-4}{4}$$

$$\tan \alpha = -1$$

$$\alpha = 315^\circ$$



DIKTI SAINTEK
BERDAMPAK



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA

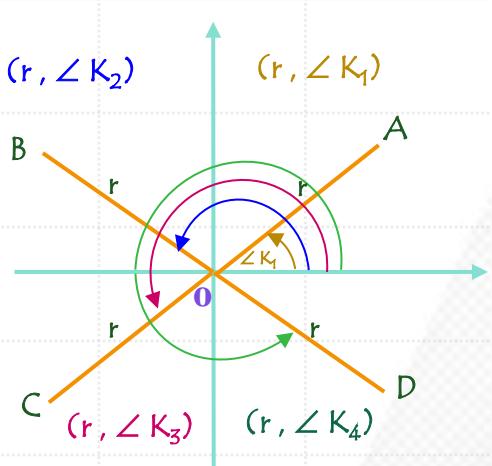


brone
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



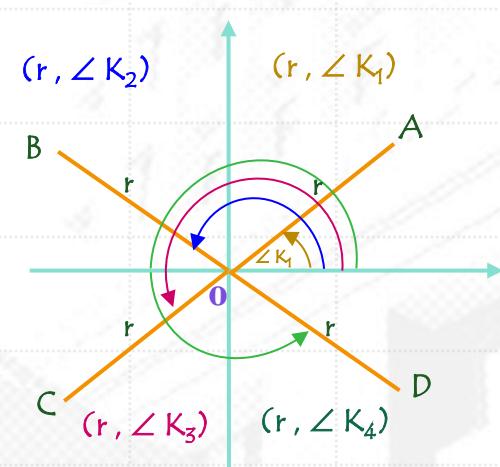
FILKOM

※ Yang Perlu diingat :



Koordinat Kartesius		Koordinat Kutub
I. $A(x_+, y_+)$	\Rightarrow	$(r, \angle K_1)$
II. $B(x_-, y_+)$	\Rightarrow	$(r, \angle K_2)$
III. $C(x_-, y_-)$	\Rightarrow	$(r, \angle K_3)$
IV. $D(x_+, y_-)$	\Rightarrow	$(r, \angle K_4)$

※ Perhatikan contoh berikut :



Koordinat Kartesius		Koordinat Kutub
I. $A(4, 4)$	\Rightarrow	$(4\sqrt{2}, 45^\circ)$
II. $B(-4, 4)$	\Rightarrow	$(4\sqrt{2}, 135^\circ)$
III. $C(-4, -4)$	\Rightarrow	$(4\sqrt{2}, 225^\circ)$
IV. $D(4, -4)$	\Rightarrow	$(4\sqrt{2}, 315^\circ)$

Coba, Amati perbedaan sudutnya.....

Latihan Soal

1. Nyatakan koordinat kartesius dalam koordinat kutub :

- a. $(3\sqrt{3}, 3)$ b. $(-5, -5)$ c. $(-2, 2\sqrt{3})$ d. $(1, -\sqrt{3})$

2. Nyatakan koordinat kutub dalam koordinat kartesius :

- a. $(8, 30^\circ)$ b. $(2, 120^\circ)$ c. $(4, 240^\circ)$ d. $(20, 330^\circ)$



“Tidak perlu memaksakan diri untuk menjadi seseorang yang serba bisa. Cukup tekuni satu bidang yang paling membuatmu bahagia, lalu jadilah orang hebat dalam bidang tersebut.”



UNIVERSITAS
BRAWIJAYA



brone
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



FILKOM

FAKULTAS ILMU KOMPUTER

© Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Brawijaya