



DIKTISAINTEK  
BERDAMPAK



UNIVERSITAS  
BRAWIJAYA



brone  
BRAWIJAYA ONLINE LEARNING



# Bentuk-Bentuk Persamaan dan Pertidaksamaan

Mata Kuliah:

COM60025 - Kalkulus

Disusun oleh:

Kelompok Pengelola Mata Kuliah Kalkulus



[filkom.ub.ac.id](http://filkom.ub.ac.id)

# Apa itu Persamaan?

## Definisi

Persamaan adalah pernyataan matematika yang menyatakan bahwa dua ekspresi matematika sama.

## Contoh

$$x + 2 = 5, 2x - 3 = 7, x^2 + 4x + 4 = 0$$

# Jenis-Jenis Persamaan

- 1 Linear**  
Persamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 1.
- 2 Kuadrat**  
Persamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2.
- 3 Polinom**  
Persamaan dengan lebih dari dua suku, masing-masing dengan variabel yang memiliki pangkat bulat.
- 4 Rasional**  
Persamaan dengan variabel dalam pecahan.
- 5 Eksponen**  
Persamaan dengan variabel sebagai eksponen.
- 6 Logaritma**  
Persamaan yang melibatkan logaritma variabel.



# Persamaan Linear

## Bentuk Umum

$ax + b = 0$ , di mana  $a$  dan  $b$  adalah konstanta.

### Contoh

- $2x + 3 = 7$ ,
- $x - 5 = 2$ ,
- $3x = 9$

# Persamaan Kuadrat

## Bentuk Umum

$ax^2 + bx + c = 0$ , di mana  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah konstanta.

### Contoh

- $x^2 + 4x + 4 = 0$ ,
- $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ,
- $x^2 - 9 = 0$

# Persamaan Polinom

## Bentuk Umum

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , di mana  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  adalah konstanta.

Contoh

- $x^3 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$ ,
- $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ ,
- $x^5 + 4x^3 - 2x = 0$

# Persamaan Rasional

## Bentuk Umum

$P(x)/Q(x) = 0$ , di mana  $P(x)$  dan  $Q(x)$  adalah polinom.

## Contoh

- $(x + 2)/(x - 1) = 0$ ,
- $(2x - 3)/(x^2 + 1) = 0$ ,
- $x/(x^2 - 4) = 0$

# Persamaan Eksponen

Bentuk Umum

$a^x = b$ , di mana  $a$  dan  $b$  adalah konstanta.

Contoh

- $2^x = 8$ ,
- $3^x = 27$ ,
- $e^x = 5$

# Persamaan Logaritma

Bentuk Umum

$\log_a(x) = b$ , di mana  $a$  dan  $b$  adalah konstanta.

Contoh

- $\log_2(x) = 3$ ,
- $\log_3(x) = 2$ ,
- $\ln(x) = 1$

# Apa itu Pertidaksamaan?

## Definisi

Pertidaksamaan adalah pernyataan matematika yang menyatakan hubungan ketidaksetaraan antara dua ekspresi matematika.

## Contoh

- $x + 2 < 5$ ,
- $2x - 3 > 7$ ,
- $x^2 + 4x + 4 \leq 0$



# Jenis-Jenis Pertidaksamaan

## 1 Linear

Pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 1.

## 3 Polinom

Pertidaksamaan dengan lebih dari dua suku, masing-masing dengan variabel yang memiliki pangkat bulat.

## 5 Eksponen

Pertidaksamaan dengan variabel sebagai eksponen.

## 2 Kuadrat

Pertidaksamaan dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2.

## 4 Rasional

Pertidaksamaan dengan variabel dalam pecahan.

## 6 Logaritma

Pertidaksamaan yang melibatkan logaritma variabel.



# Pertidaksamaan Linear

## Bentuk Umum

$ax + b < 0$ ,  
 $ax + b > 0$ ,  
 $ax + b \leq 0$ ,  
 $ax + b \geq 0$ ,  
di mana  $a$  dan  $b$  adalah konstanta.

## Contoh

$2x + 3 < 7$ ,  
 $x - 5 > 2$ ,  
 $3x \leq 9$ ,  
 $x - 2 \geq 0$

# Pertidaksamaan Kuadrat

## Bentuk Umum

- $ax^2 + bx + c < 0$ ,
- $ax^2 + bx + c > 0$ ,
- $ax^2 + bx + c \leq 0$ ,
- $ax^2 + bx + c \geq 0$ ,

di mana  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah konstanta.

## Contoh

- $x^2 + 4x + 4 < 0$ ,
- $2x^2 - 3x + 1 > 0$ ,
- $x^2 - 9 \leq 0$ ,
- $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

# Pertidaksamaan Polinom

## Bentuk Umum

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 < 0,$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 > 0,$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \leq 0,$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \geq 0,$$

di mana  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  adalah konstanta.

## Contoh

- $x^3 + 2x^2 - 5x + 1 < 0,$
- $2x^4 - 3x^2 + 1 > 0,$
- $x^5 + 4x^3 - 2x \leq 0,$
- $x^2 + 2x - 3 \geq 0$



# Pertidaksamaan Rasional

## Bentuk Umum

- $P(x)/Q(x) < 0$ ,
  - $P(x)/Q(x) > 0$ ,
  - $P(x)/Q(x) \leq 0$ ,
  - $P(x)/Q(x) \geq 0$ ,
- di mana  $P(x)$  dan  $Q(x)$  adalah polinom.

## Contoh

- $(x + 2)/(x - 1) < 0$ ,
- $(2x - 3)/(x^2 + 1) > 0$ ,
- $x/(x^2 - 4) \leq 0$ ,
- $(x + 1)/(x - 2) \geq 0$

# Pertidaksamaan Eksponen

## Bentuk Umum

- $a^x < b$ ,
  - $a^x > b$ ,
  - $a^x \leq b$ ,
  - $a^x \geq b$ ,
- di mana  $a$  dan  $b$  adalah konstanta.

## Contoh

- $2^x < 8$ ,
- $3^x > 27$ ,
- $e^x \leq 5$ ,
- $2^x \geq 16$

# Pertidaksamaan Logaritma

## Bentuk Umum

- $\log_a(x) < b$ ,
  - $\log_a(x) > b$ ,
  - $\log_a(x) \leq b$ ,
  - $\log_a(x) \geq b$ ,
- di mana a dan b adalah konstanta.

## Contoh

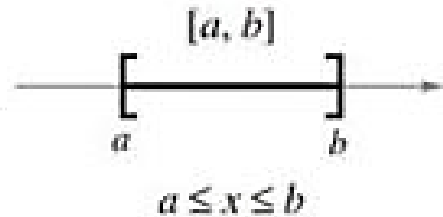
- $\log_2(x) < 3$ ,
- $\log_3(x) > 2$ ,
- $\ln(x) \leq 1$ ,
- $\log_2(x) \geq 4$



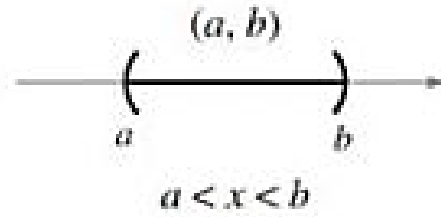
# Interval atau Selang

Bagian yang lebih kecil (himpunan) dari garis bilangan adalah Interval atau selang

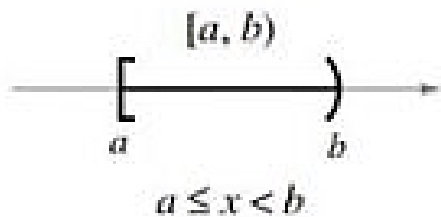
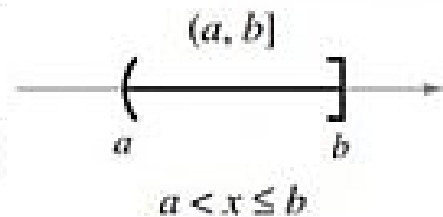
Interval tertutup



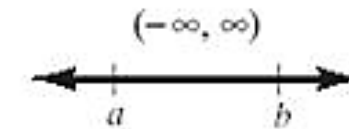
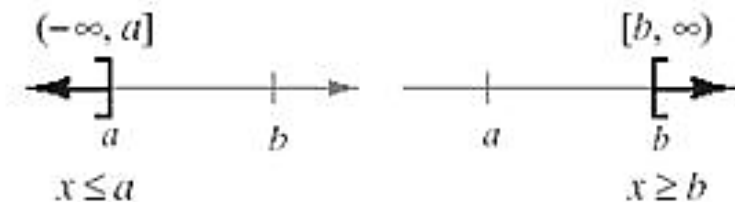
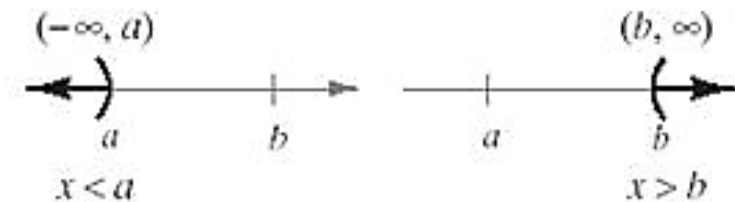
Interval terbuka



Bukan Interval Tertutup  
ataupun Terbuka



Interval Tak Hingga





# Menyelesaikan Pertidaksamaan

1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas
2. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif
3. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif dan membalikkan arah tanda ketidaksamaan

## Contoh 1:

Selesaikan pertidaksamaan  $2x - 7 < 4x - 2$

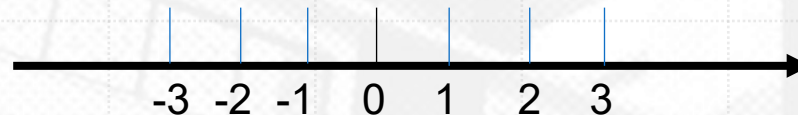
$$2x - 7 < 4x - 2$$

$$2x < 4x + 5 \quad (\text{Tambahkan } 7)$$

$$-2x < 5 \quad (\text{Tambahkan } -4x)$$

$$x > -\frac{5}{2} \quad (\text{Kalikan dengan } -\frac{1}{2})$$

Grafik penyelesaian:



$$\left(-\frac{5}{2}, \infty\right) = \left\{x: x > -\frac{5}{2}\right\}$$



# Menyelesaikan Pertidaksamaan

1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas
2. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif
3. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif dan membalikkan arah tanda ketidaksamaan

## Contoh 2:

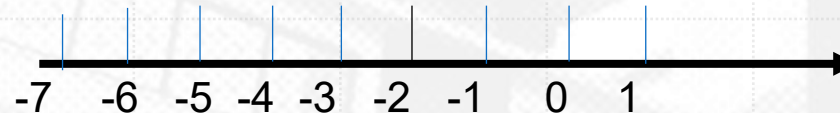
Selesaikan pertidaksamaan  $-5 \leq 2x + 6 < 4$

$$-5 \leq 2x + 6 < 4$$

$$-11 \leq 2x < -2 \quad (\text{Tambahkan } -6)$$

$$-\frac{11}{2} \leq x < -1 \quad (\text{Kalikan dengan } \frac{1}{2})$$

Grafik penyelesaian:



$$\left[-\frac{11}{2}, -1\right) = \left\{x: -\frac{11}{2} \leq x < -1\right\}$$





# Menyelesaikan Pertidaksamaan

1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas
2. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif
3. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif dan membalikkan arah tanda ketidaksamaan

## Contoh 3:

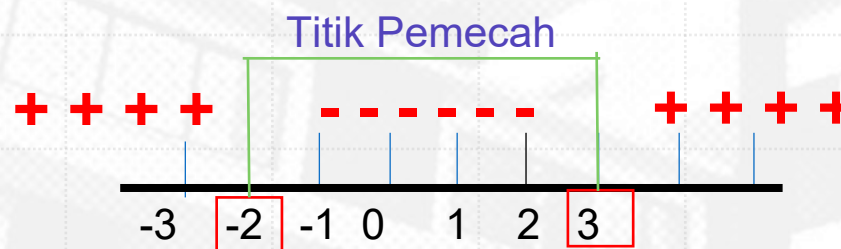
Selesaikan pertidaksamaan kuadrat  $x^2 - x < 6$

$$x^2 - x < 6$$

$$x^2 - x - 6 < 0 \quad (\text{Tambahkan } -6)$$

$$(x - 3)(x + 2) < 0 \quad (\text{faktorkan})$$

Grafik penyelesaian:



$(-2, 3)$



# Menyelesaikan Pertidaksamaan

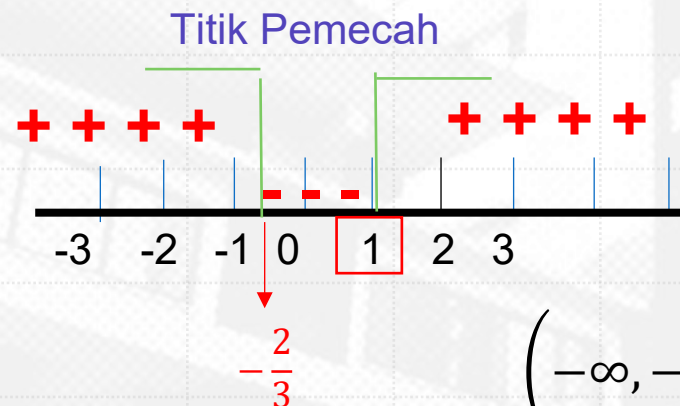
1. Menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas
2. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan positif
3. Mengalikan kedua ruas dengan bilangan negatif dan membalikkan arah tanda ketidaksamaan

## Contoh 4:

Selesaikan pertidaksamaan kuadrat  $3x^2 - x - 2 > 0$

$$\begin{aligned} & 3x^2 - x - 2 \\ &= (x - 1)(3x + 2) \\ &= 3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Grafik penyelesaian:



$$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$$

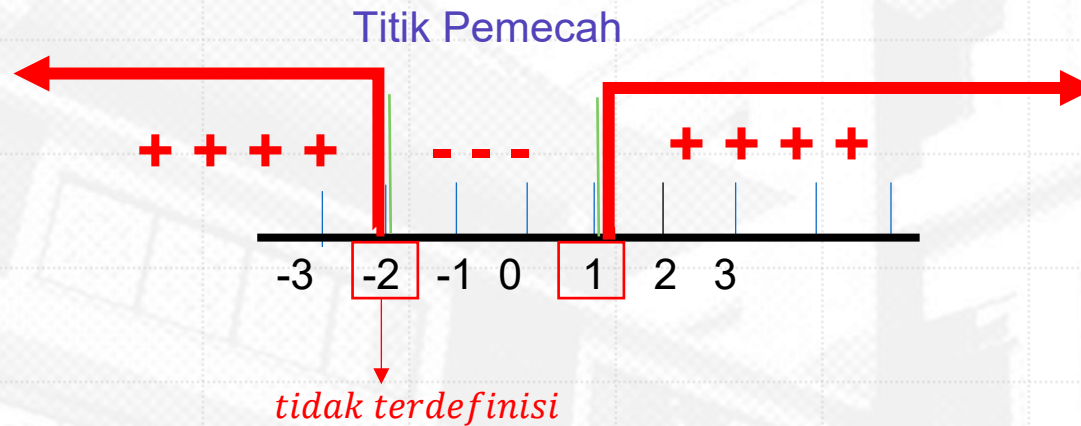


# Menyelesaikan Pertidaksamaan

## Contoh 5:

Selesaikan pertidaksamaan  $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$

Grafik penyelesaian:



$$(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$$





# Menyelesaikan Pertidaksamaan

## Contoh 6:

Selesaikan pertidaksamaan  $\frac{2x - 5}{x - 2} \leq 1$

Tuliskan ketidaksamaan kembali secara beruntun:

$$\frac{2x - 5}{x - 2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2x - 5 - (x - 2)}{x - 2} \leq 0$$

$$\frac{x - 3}{x - 2} \leq 0$$

Grafik penyelesaian:



Himpunan penyelesaian:  $(2, 3]$



# Menyelesaikan Pertidaksamaan

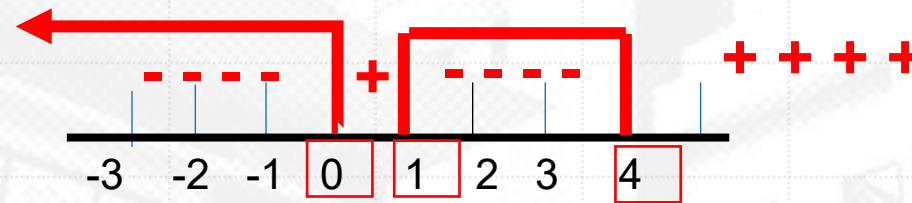
## Contoh 7:

Selesaikan pertidaksamaan  $x^3 - 5x^2 + 4x \leq 0$

Dapat difaktorkan menjadi:  $x(x - 1)(x - 4)$

Grafik penyelesaian:

Titik Pemecah: 0, 1 dan 4



Himpunan penyelesaian:  $(-\infty, 0] \cup [1, 4]$



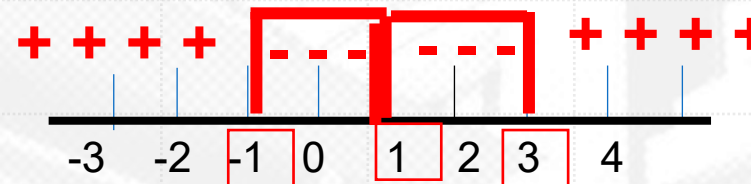
# Menyelesaikan Pertidaksamaan

## Contoh 8:

Selesaikan pertidaksamaan  $(x + 1)(x - 1)^2(x - 3) \leq 0$

Grafik penyelesaian:

Titik Pemecah: -1, 1 dan 3



Himpunan penyelesaian:  $[-1, 1] \cup [1, 3]$   
atau  $[-1, 3]$



# Nilai Mutlak

Nilai mutlak suatu bilangan real  $x$ , dinyatakan oleh  $|x|$ , didefinisikan sebagai:

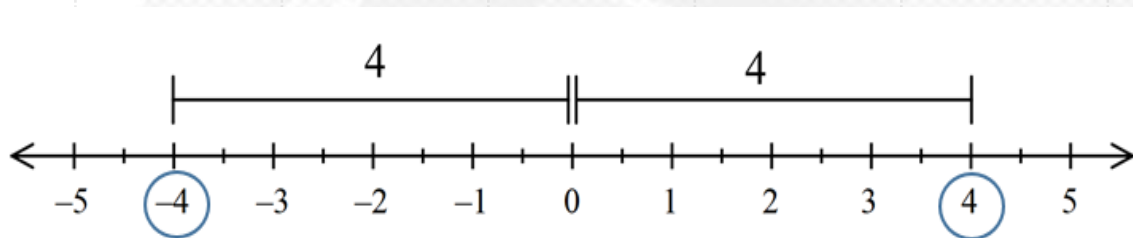
$$|x| = x \text{ jika } x \geq 0$$

$$|x| = -x \text{ jika } x < 0$$

Contoh :  $|6| = 6$      $|0| = 0$      $|-7| = 7$      $|x - a| = |a - x|$

Nilai mutlak dapat dibayangkan sebagai jarak (tak berarah)

$$|-4| = 4 \quad |4| = 4$$







# Sifat-sifat Nilai Mutlak

1.  $|ab| = |a||b|$

2.  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

3.  $|a + b| \leq |a| + |b|$  (Pertidaksamaan Segitiga)

4.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$



# Pertidaksamaan Yang Melibatkan Nilai Mutlak

- Jika  $|x| < 5$ , maka jarak antara  $x$  dengan titik asal harus lebih kecil dari 5.
- Dengan perkataan lain,  $x$  secara simultan  $< 5$  dan lebih besar dari  $-5$ , yaitu  $-5 < x < 5$

Pernyataan :

$$|x| < a \leftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| > a \leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a$$



# Pertidaksamaan Yang Melibatkan Nilai Mutlak

Contoh 1: Selesaikan  $|x - 4| < 2$  dan perhatikan himpunan penyelesaiannya pada garis real.

Penyelesaian

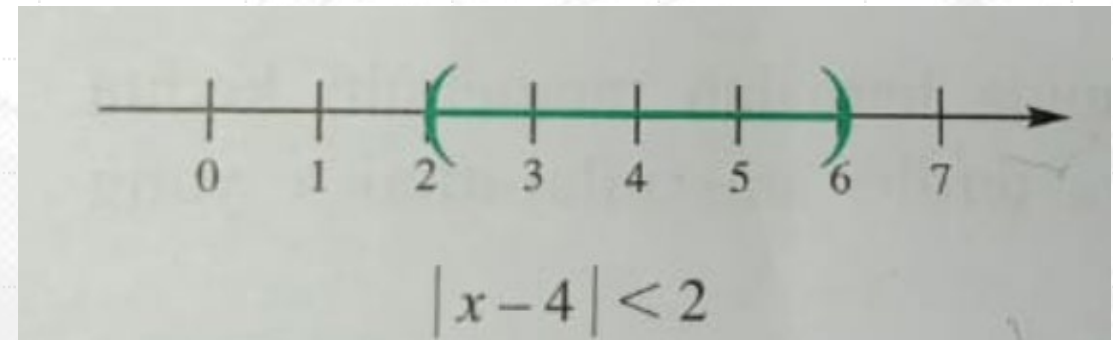
$$\begin{aligned}|x - 4| < 2 &\leftrightarrow -2 < x - 4 < 2 \\ &\leftrightarrow 2 < x < 6\end{aligned}$$

Hp (2,6)

Contoh lain

$$\begin{aligned}|x + 4| < 2 &\leftrightarrow -2 < x + 4 < 2 \\ &\leftrightarrow -6 < x < -2\end{aligned}$$

Hp (6,2)





# Pertidaksamaan Yang Melibatkan Nilai Mutlak

Contoh 2: Selesaikan pertidaksamaan  $|3x - 5| \geq 1$

Penyelesaian

$$|3x - 5| \geq 1, \text{ maka}$$

$$3x - 5 \leq -1 \quad \text{atau} \quad 3x - 5 \geq 1$$

$$3x \leq 4 \quad \text{atau} \quad 3x \geq 6$$

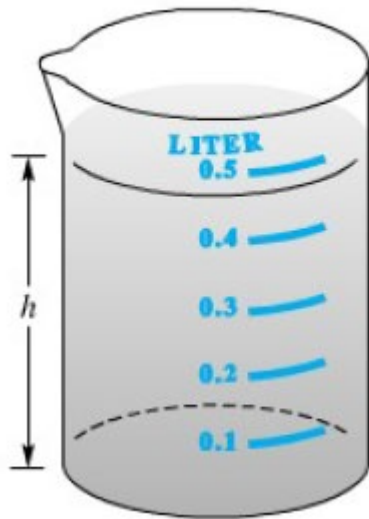
$$x \leq 4/3 \quad \text{atau} \quad x \geq 2$$

Jadi himpunan penyelesaian  $(-\infty, 4/3] \cup [2, \infty)$





# Pertidaksamaan Yang Melibatkan Nilai Mutlak



Contoh 3: Sebuah beker gelas  $\frac{1}{2}$  liter (500 sentimeter kubik) mempunyai jari-jari-dalam 4 sentimeter. Seberapa dekat kita harus mengukur tinggi air  $h$  dalam gelas untuk meyakinkan kita mempunyai  $\frac{1}{2}$  liter air dengan galat lebih kecil dari 1%, yakni galat lebih kecil dari 5 sentimeter kubik? Perhatikan gambar di samping.

## Penyelesaian

Volume air  $V$  dalam gelas diberikan oleh rumus  $V = \pi r^2 h = 16\pi h$ . Kita ingin  $|V - 500| < 5$ , atau setara  $|16\pi h - 500| < 5$ .

$$|16\pi h - 500| < 5 \Leftrightarrow |16\pi\left(\frac{h-500}{16\pi}\right)| < 5$$

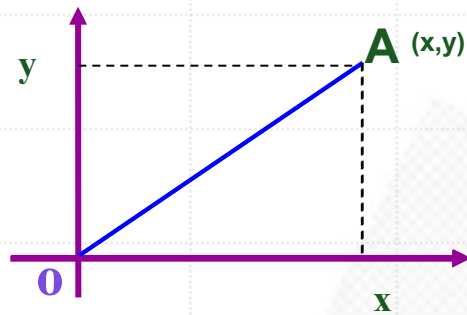
$$\Leftrightarrow 16\pi\left|\frac{h-500}{16\pi}\right| < 5 \Leftrightarrow \left|\frac{h-500}{16\pi}\right| < \frac{5}{16\pi}$$

$$\Leftrightarrow |h - 9,947| < 0,09947 \approx 0,1$$

Jadi, kita harus mengukur tinggi sampai ketelitian 0,1 sentimeter atau 1 milimeter.

# Sistem Koordinat Cartesius Versus Kutub

## ✎ KOORDINAT KARTESIUS

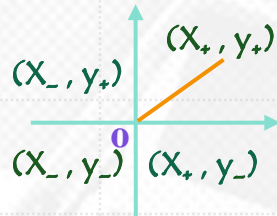


Suatu titik A dapat dinyatakan sebagai pasangan berurut  $A(x,y)$

$x$  : jarak titik A terhadap sumbu  $-Y$

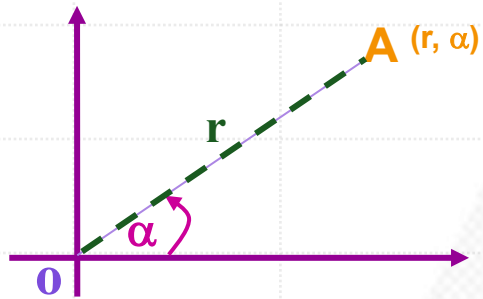
$y$  : jarak titik A terhadap sumbu  $-X$

Ingat !!



# Sistem Koordinat Cartesius Versus Kutub

## ~~KOORDINAT~~ KOORDINAT KUTUB



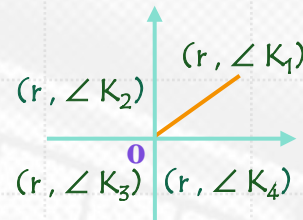
Suatu titik A dapat dinyatakan sebagai pasangan berurut  $A(r, \alpha)$

$r$  : jarak titik A terhadap titik asal  $O(0,0)$

$\alpha$  : besar sudut antara sb-X (x positif) terhadap garis OA

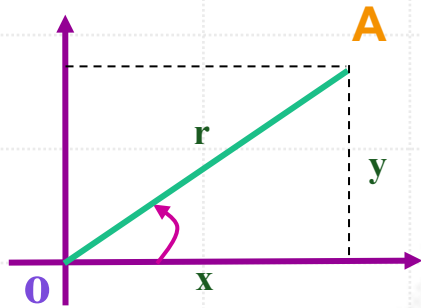
Ingat !!

Besar sudut di berbagai kuadran





# Sistem Koordinat Cartesius Versus Kutub



$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

Ingat Letak kuadran...

1. Jika diketahui Koordinat Kutub (  $r$  ,  $\alpha$  ) :

Maka :

$$x = r \cdot \cos \alpha$$
$$y = r \cdot \sin \alpha$$

2. Jika diketahui Koordinat Kartesius (  $x$  ,  $y$  ) :

Maka :

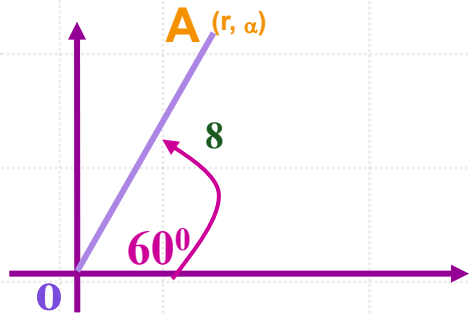
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$



### Contoh Soal :

Diketahui Koordinat Kutub :



Ubahlah ke Koordinat Kartesius :

Titik A ( 8, 60° )

|        |                           |
|--------|---------------------------|
| Maka : | $x = r \cdot \cos \alpha$ |
|        | $y = r \cdot \sin \alpha$ |

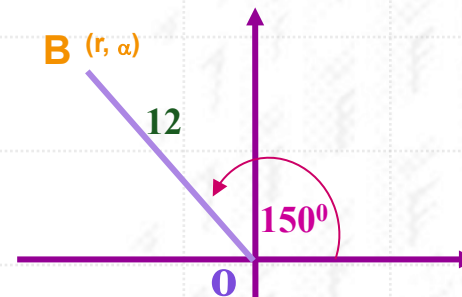
Jawab :

$$\begin{aligned}
 \text{Titik A ( 8, 60° )} &\Rightarrow x = r \cdot \cos \alpha & y = r \cdot \sin \alpha \\
 &= 8 \cdot \cos 60^\circ & = 8 \cdot \sin 60^\circ \\
 &= 8 \cdot \frac{1}{2} & = 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} \\
 x = 4 & & y = 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi A ( 8, 60° )} \Leftrightarrow \text{A ( 4, 4}\sqrt{3} \text{)}$$

### Contoh Soal :

Diketahui Koordinat Kutub :



Titik A ( 12 , 150° )

|        |                           |
|--------|---------------------------|
| Maka : | $x = r \cdot \cos \alpha$ |
|        | $y = r \cdot \sin \alpha$ |

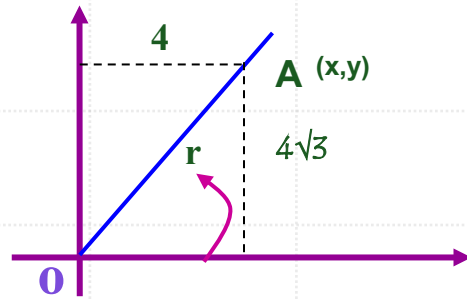
Jawab :

$$\begin{aligned}
 \text{Titik A ( 12, 150° )} &\Rightarrow x = r \cdot \cos \alpha & y = r \cdot \sin \alpha \\
 &= 12 \cdot \cos 150^\circ & = 12 \cdot \sin 150^\circ \\
 &= 12 \cdot -\cos 30^\circ & = 12 \cdot \sin 30^\circ \\
 &= 12 \cdot -\frac{1}{2} \sqrt{3} & = 12 \cdot \frac{1}{2} \\
 x = -6\sqrt{3} & & y = 6
 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi B ( 12, 150° )} \Leftrightarrow \text{B ( -6}\sqrt{3}, 6 \text{)}$$

### Contoh Soal :

Diketahui Koordinat Kartesius :



Ubahlah ke Koordinat Kutub :

Titik A ( 4, 4√3 )

$$\text{Maka : } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Jawab :

$$\text{Titik A (4, 4√3)} \Rightarrow r = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}$$

$$r = \sqrt{16 + 48}$$

$$r = \sqrt{64}$$

$$r = 8$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

$$\tan \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{4}$$

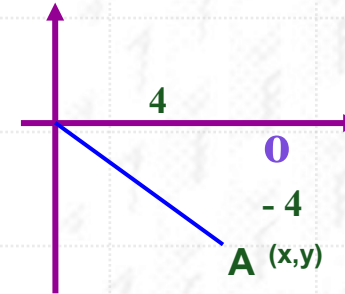
$$\tan \alpha = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\text{Jadi A (4, 4√3)} \Leftrightarrow A (8, 60^\circ)$$

### Contoh Soal :

Diketahui Koordinat Kartesius :



Titik A ( 4, -4 )

$$\text{Maka : } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Jawab :

$$\text{Titik A (4, -4)} \Rightarrow r = \sqrt{4^2 + 4^2}$$

$$r = \sqrt{32}$$

$$r = 4\sqrt{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

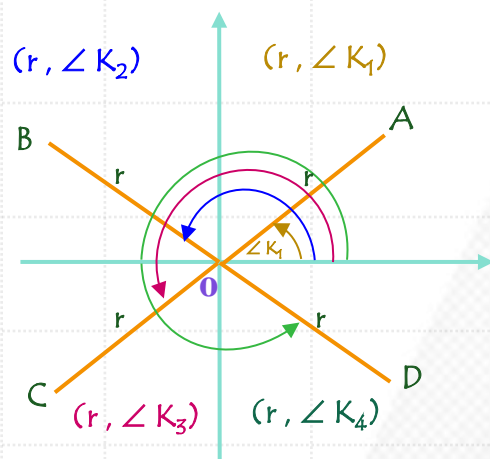
$$\tan \alpha = \frac{-4}{4}$$

$$\tan \alpha = -1$$

$$\alpha = 315^\circ$$

$$\text{Jadi A (4, -4)} \Leftrightarrow A (4\sqrt{2}, 315^\circ)$$

## ※ Yang Perlu diingat :

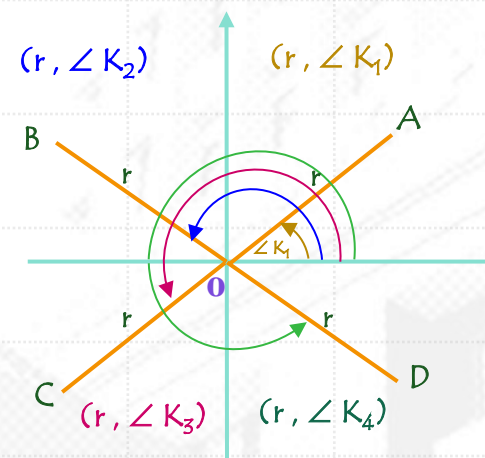


Koordinat  
Kartesius

Koordinat  
Kutub

- I.  $A (X_+, y_+) \Rightarrow (r, \angle K_1)$
- II.  $B (X_-, y_+) \Rightarrow (r, \angle K_2)$
- III.  $C (X_-, y_-) \Rightarrow (r, \angle K_3)$
- IV.  $D (X_+, y_-) \Rightarrow (r, \angle K_4)$

## ※ Perhatikan contoh berikut :



Koordinat  
Kartesius

Koordinat  
Kutub

- I.  $A (4, 4) \Rightarrow (4\sqrt{2}, 45^\circ)$
- II.  $B (-4, 4) \Rightarrow (4\sqrt{2}, 135^\circ)$
- III.  $C (-4, -4) \Rightarrow (4\sqrt{2}, 225^\circ)$
- IV.  $D (4, -4) \Rightarrow (4\sqrt{2}, 315^\circ)$

Coba, Amati perbedaan sudutnya.....



# Latihan Soal

1. Nyatakan koordinat kartesius dalam koordinat kutub :

a.  $(3\sqrt{3}, 3)$  b.  $(-5, -5)$  c.  $(-2, 2\sqrt{3})$  d.  $(1, -\sqrt{3})$

2. Nyatakan koordinat kutub dalam koordinat kartesius :

a.  $(8, 30^\circ)$  b.  $(2, 120^\circ)$  c.  $(4, 240^\circ)$  d.  $(20, 330^\circ)$



*“Tidak perlu memaksakan diri untuk menjadi seseorang yang serba bisa. Cukup tekuni satu bidang yang paling membuatmu bahagia, lalu jadilah orang hebat dalam bidang tersebut.”*

