

2024 年 第 5 問

ジャンル: 算法
難易度: Normal

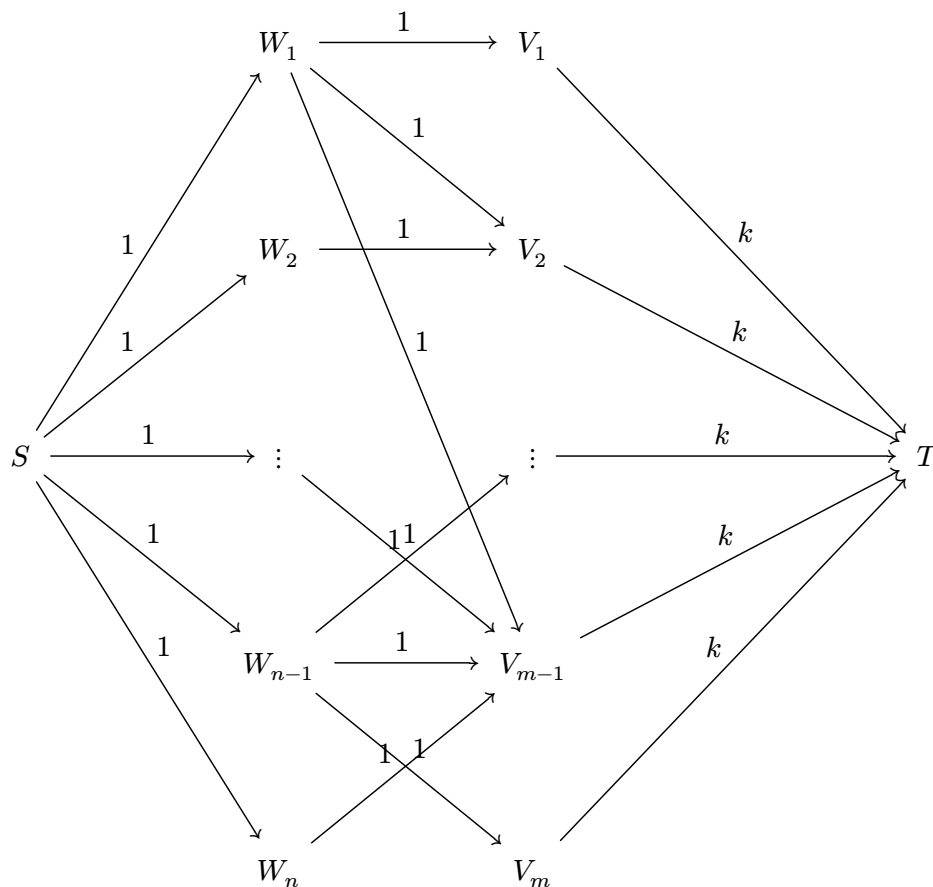
問題の概要

問題数が少ないのありがたい。近似の評価の問題は、算法の問題の中ではかなり解きやすい種類の問題。アルゴリズムを考えたり、正当性を厳密に示す問題はそれらに比べて難しい。個人的には (2) より (1) のほうが難しいと感じた。

(1)

全ての仕事の所要時間が一様に等しいので、所用時間最小=1 機械への割り当て数の最大値の最小化である。

1つの機械に最大で k 個の仕事割り当てるとき、 W から $V \rightarrow \{(w, v) \in W \times V \mid v \in V_w\}$ として辺を張ると、以下のように最大流問題が作れる。この最大流が n なら実行可能割り当てがわかる。最大流が n 未満であれば実行可能割り当てが存在しない。



あとは、 k を二分探索して実行可能割り当てが存在する最小の k を求めればよい。

(2)

すべて実行可能な場合の最小割り当て問題は、縦に機械が m 行、横に時間のある左揃えの長方形の図を書けばわかりやすい。面積が合計時間に相当する。

図を書けばわかりやすいのだが、

$$T^* \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n l_{w_i}$$

である。よって、 $T(\pi_{\text{ALG}}) \leq \frac{2}{m} \sum_i l_{w_i} \leq 2T^*$ と示す方針でいく。

さて、 $T(\pi_{\text{ALG}})$ を与える、最も時間のかかっている機械があるので、これを機械 i とする。アルゴリズムで機械 i に最後に割り振った仕事を w_j とする。このとき、アルゴリズムが機械 i に仕事を割り振ったということは、そのタイミングで全ての機械が $T(\pi_{\text{ALG}}) - l_{w_j}$ 時間は少なくとも仕事が割り振られている。すると、機械全体の仕事の合計時間は $m * (T(\pi_{\text{ALG}}) - l_{w_j}) + l_{w_j}$ で下から抑えられる。

$$m * (T(\pi_{\text{ALG}}) - l_{w_j}) + l_{w_j} \leq \text{機械全体の仕事の合計時間} = \sum_{i=1}^n l_{w_i}$$

これを变形すると、 $T(\pi_{\text{ALG}}) \leq \frac{2}{m} \sum_i l_{w_i}$