2017 年 第 2 問

ジャンル: 確率
難易度: Easy

> **問題の概要**
> 確率漸化式の問題でここ数年の中でもかなり優しい部類の問題だと思う。この問題を選べたらラッキー。骨が無さすぎて不安になるレベル。

(1)

n回目に投げるコインがAである確率をp_nとおくと、

$$p_{n+1} = \theta_A p_n + (1-\theta_B)(1-p_n)$$
$$p_1 = \frac{1}{2}$$

である。

$$p_{n+1} - \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} = (\theta_A+\theta_B-1)\left(p_n - \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B}\right)$$

より、

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} + (\theta_A+\theta_B-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B}\right) \\ &= \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} + (\theta_A+\theta_B-1)^{n-1}\frac{\theta_B-\theta_A}{2(2-\theta_A-\theta_B)} \end{aligned}$$

(2)

$n+1$回目にコインを投げたとき、n回目に投げたときから表の回数が増えるのは、

- $n+1$回目に投げるコインが A で、かつ表が出る
- $n+1$回目に投げるコインが B で、かつ表が出る

ときなので、

$$H(n+1) = H(n) + \theta_A p_{n+1} + \theta_B(1-p_{n+1})$$

よって、

$$\frac{H(n)}{n} = \frac{H(1)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(\theta_B + (\theta_A-\theta_B)p_{n+1})$$

チェザロ平均の性質: $\{a_n\}_{n\geq 1} \cup \{\alpha\} \subset \mathbb{R}$に対して、$n\to\infty$のとき、

$$a_n \to \alpha \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_n \to \alpha$$

より、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n} &= \lim_{n\to\infty}(\theta_B + (\theta_A - \theta_B)p_{n+1}) \\ &= \theta_B + (\theta_A - \theta_B)\frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} \\ &= \frac{\theta_A + \theta_B - 2\theta_A\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B}\end{aligned}$$

ただし$0 < \theta_A + \theta_B < 2$より$|\theta_A + \theta_B - 1| < 1$であることに注意。

(3)

$$\frac{\theta_A + \theta_B - 2\theta_A\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} - \frac{\theta_A + \theta_B}{2} = \frac{(\theta_A - \theta_B)^2}{2(2-\theta_A-\theta_B)}$$

$\theta_A \neq \theta_B$のとき、これは正なので、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n} > \frac{\theta_A + \theta_B}{2}$$