2017 年 第 5 問

ジャンル: 線形代数
難易度: Normal

問題の概要
隣接行列やグラフラプラシアンに関する問題。

(1)

A^kの第(i,j)成分は頂点iから頂点jへの長さkのパスの本数を表す。

(2)

Aの相異なる固有値を$\alpha_1, ..., \alpha_k$とすると、

$$(A - \alpha_1 I)...(A - \alpha_k I) = O$$

よって$a_1, ...a_k \in \mathbb{C}$を用いて、

$$A^k + a_1 A^{k-1} + ... + a_k I = O$$

ある 2 頂点(i,j)間の距離がk以上で、$k+l$（$l \geq 0$）であるとすると、

$$A^{k+l} + a_1 A^{k+l-1} + ... + a_k A^l = O$$

だが、距離の定義から$A^l, ..., A^{l+k-1}$の(i,j)成分は0でありA^{k+l}の(i,j)成分は0でないので、左辺の(i,j)成分は 0 でなく、矛盾。
よって、任意の 2 頂点間の距離は A の相異なる固有値の個数より小さい。

(3)

Lの非零固有値αと対応する固有ベクトル$u = (u_1 \ \dots \ u_n)^\top$を任意にとる。

$$\begin{aligned}\alpha(1 \ \dots \ 1)u &= (1 \ \dots \ 1)\alpha u \\ &= (1 \ \dots \ 1)Lu \\ &= \left(L\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\right)^\top u \\ &= 0\end{aligned}$$

$\alpha \neq 0$なので$\sum_{i=1}^n u_i = (1 \ \dots \ 1)u = 0$である。

(4)

Lは対称行列なので固有値は実数である。
任意の$x \in \mathbb{R}^n$に対して、

$$\begin{aligned}x^\top Lx &= \sum_{i=1}^n d_i x_i^2 - 2\sum_{(i,j)\in E, i<j} x_i x_j \\ &= \sum_{(i,j)\in E, i<j} (x_i - x_j)^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

したがってLは半正定値なので固有値は非負実数である。

(5)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}V(x) &= \sum_{(i,j)\in E}\left(x_i - x_j\right)\\ &= d_i x_i - \sum_{(i,j)\in E} x_j\end{aligned}$$

より、$x(t) = \left(x_1(t), ..., x_{n(t)}\right)$は、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x(t)L$$

に従うので、解は$x(t) = x(0)e^{-tL}$である。
Gは連結なので$xL = 0$の解は$x = t(1, ..., 1)$ ($t \in \mathbb{R}$) のみであることから、Lの0固有ベクトルは$t(1, ..., 1)$ ($t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) 。Lの固有値は非負なので、$x(t)$の0固有ベクトルの成分以外の成分は$t \to \infty$で0に収束する、すなわち、

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i(1, ..., 1)$$

収束の速さは、Lの非零固有値で$x(0)$の固有ベクトル成分が0でないもののうち最も小さいものαについて$e^{-\alpha t}$程度である。