

問題の概要

松尾研あるあるの、微分方程式の構造を保った離散化/あるいは離散的な漸化式の連続化についての話です。計算ゲー意外の何物でもありません。

(1)

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= 2(t+1)(f(x) - f(x^*)) + (t+1)^2 \nabla f(x) \cdot \frac{dx}{dt} + 4(v - x^*) \cdot \frac{dv}{dt} \\
 &= 2(t+1)(f(x) - f(x^*)) + (t+1)^2 \frac{2}{t+1} \nabla f(x) \cdot (v - x) + 4(v - x^*) \cdot \left(-\frac{t+1}{2} \nabla f \right) \\
 &= 2(t+1)(f(x) - f(x^*)) + 2(t+1)(x^* - x) \cdot \nabla f(x) \\
 &= -2(t+1)(f(x^*) - f(x) - (x^* - x) \cdot \nabla f(x))
 \end{aligned}$$

ここで f は滑らかな凸関数より、凸性の一次必要十分条件

$$f(y) \geq f(x) + (y - x) \cdot \nabla f(x) \quad \forall x, y$$

を満たすので、 $\frac{dE}{dt} \leq 0$ である。

定数 C を考える。

$$\begin{aligned}
 (t+1)^2(f(x) - f(x^*)) &= E(t) - 2\|v(t) - x^*\|_2^2 \\
 &\leq E(t) \\
 &\leq E(0) = C_1
 \end{aligned}$$

$$t^2(f(x) - f(x^*)) \leq \left(\frac{t}{t+1} \right)^2 C_1 < C_1$$

より、定数 C として $E(0)$ を取ればよい。

(2)

注意

問題文に書いてある関係式の添え字に注意すること。

方針としては、(1) で行った計算ステップを完全に辿ればよい。

書くのめんどいテスト