2023 年 第 4 問

ジャンル: 統計・解析
難易度: Hard

> **問題の概要**
> (3)が非常に難しいです.別の方の回答を参考にしました. (1),(2),(4)は簡単なので, 当日解くかは悩む問題です.

(1)

確率変数Xが$N(0,1)$に従うとし, 確率変数

$$Y = \frac{1}{X^2}$$

が従う分布の確率密度関数を$f(y)$と定めるとき, $f(y)$を求めます.

$Y = \frac{1}{X^2}$の変数変換を行うと, これは全単射ではないので, $f(x)\,\mathrm{d}x = f(y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y$は成立しません.

そこで定義に従って計算します.$y > 0$に注意します.

$$P(Y \le y) = P\left(\frac{1}{X^2} \le y\right) = P\left(X \le -\frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{y}} \le X\right) = 2\int_{\frac{1}{\sqrt{y}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right)$$

$$f(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(Y \le y) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2y}}\right)\left(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2y}}$$

(2)

ラプラス変換の微分を求めます.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^{\infty} e^{-uy}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2y}}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-ye^{-uy-\frac{1}{2y}}y^{-\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}y$$

このままでは, 計算できないので, 上手く変数変換します.指数の中身を変えないような変換を考えると, $\frac{1}{y} \to 2uz$の変換を思いつくことは難しくないでしょう. $-\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = 2u\,\mathrm{d}z, u > 0, y > 0$も考慮して,

$$= \int_{\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\sqrt{2uz}e^{-\frac{1}{2z}-uz}\left(-2u\frac{1}{(2uz)^2}\,\mathrm{d}z\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{2u}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^{-\frac{3}{2}}e^{-uz-\frac{1}{2z}} = -\frac{1}{\sqrt{2u}}L(u)$$

(3)

$u > 0$でのラプラス変換は微分方程式を解くとすぐにわかります. 問題は, どのように複素数でに定義するかです.

まずは, $u > 0$で

$$\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}L = -\frac{1}{\sqrt{2u}}$$

$$\log L = -\sqrt{2}u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$L = A\exp\left(-\sqrt{2u}\right)$$

初期条件$u=0$で 1 より

$$L=\exp\left(-\sqrt{2u}\right)$$

次に複素数に拡張します.

そもそも求めたいものは

$$\int_0^\infty e^{iuy}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2y}}\,\mathrm{d}y$$

です. uを複素数に拡張して, 複素平面でこの関数を計算し, 実軸に対応する部分が求める答えになります.この関数は虚軸正部分$u=iu', u'>0$で$L=\exp\left(-\sqrt{2u'}\right)$に一致します. この関数は, 分枝を除いて正則なので, 複素関数の一致の定理を用いて拡張することができます.

$L'(z)=\exp\left(-\sqrt{2e^{-\frac{\pi}{2}}z}\right)$として分枝は虚軸負の方向に取っておき, $L'(iu)=\exp\left(-\sqrt{2u}\right)$となるようにします.

このとき,$z=Re^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2}\leq\varphi<\frac{3}{2}\pi$とします. この時実際に$\varphi=\frac{\pi}{2}$であると, $L=\exp\left(-\sqrt{2R}\right)$となります.

uが実数であることからもう少し表式を綺麗にしていきます.$u=0$の時はもちろん1です.$u>0$のとき,極座標表示すると$u=ue^{i0}$となります. これを代入して計算すると,

$$L(u)=\exp\left(-\sqrt{2u}\sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}}\right)=\exp\left(-\sqrt{2u}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)=\exp\left(-\left(\sqrt{2u}\right)\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\exp\left((-1+i)\sqrt{u}\right)$$

$u<0$の時は$z=(-u)e^{i\pi}$よりこれを代入し, 同様の計算をすると

$$L(u)=\exp\left(-(1+i)\sqrt{-u}\right)$$

となる.

(4)

確率変数$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Y_i$が分布収束することを示し, 極限分布の確率密度関数を答えよ.

特性関数を考え, 特性関数の$n\to\infty$での収束先を考えます.特性関数の$u>0$で考えますが, 他でも同様です.

$$E\left[e^{iu\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Y_i}\right]=\prod_{i=1}^n E\left[e^{iu\frac{Y_i}{n^2}}\right]=\prod_{i=1}^n\exp(-1+i)\frac{\sqrt{u}}{n}=\exp(-1+i)\sqrt{u}$$

よって元の関数と特性関数が一致するので, 密度関数は,$f(y)$になります.