2023 年 第 2 問

ジャンル: 線形代数
難易度: Normal

> **問題の概要**
> 微分方程式と正定値対称に関する問題です. 何がテーマなのかよくわからない問題です. 多次元に拡張したロジスティック関数なんじゃないですかね(適当).
>
> 特に(3)などは試験中ではよくわからなくなる気がするので, 数学強者でない限りはあまり解かない気がします.

(1)

$\dot{L}(x') < 0\ (\forall x' \in \mathrm{X}_n \setminus \{x^*\})$ と $CA + A^T C$ が不定値であることが同値であることを示す.

$$\dot{L}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L(x(t))\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(-\frac{x_i^*}{x_i} + 1\right) x_i \left(v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right)$$

ここで $x_i(0) = x_i$ と置いた. x_i^* は $F_i(x_i^*) = 0$ となるので, $v_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*$

$$\begin{aligned}
\dot{L}(x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_i^*) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^*)\right) \\
&= \sum_{i,j} (x_i - x_i^*) c_i a_{ij} (x_j - x_j^*) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j} (x_i - x_i^*) c_i a_{ij} (x_j - x_j^*) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} (x_j - x_j^*) c_j a_{ji} (x_i - x_i^*) \\
&= (x - x^*)^T \frac{CA + A^T C}{2} (x - x^*)
\end{aligned}$$

$CA + A^T C$ が負定値ならば, $\dot{L}(x) < 0$ は自明. 逆は, 任意の $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し, ある $\lambda > 0$ と, ある $x \in \mathrm{X}_n \setminus \{x^*\}$ が存在して $y = \lambda(x - x^*)$ と表すことができることを示せばよい. すると, 任意の $x \in \mathrm{X}_n \setminus \{x^*\}$ で $\dot{L} < 0$ ならば, 任意の $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $y^T(CA + A^T C)y < 0$ なので, $CA + A^T C$ は負定値である.

> **注意**
> x の範囲が $\mathrm{X}_n \setminus \{x^*\}$ と $\mathbb{R}^n$ ではないので, $x - x^*$ がすべての方向を向くことができることを示す必要がある. 少なくとも, 軽く言及する必要はあるだろう.

ちなみに、$x^T A x = x^T \frac{A + A^T}{2} x\ (\forall x)$ なので, 行列の定値性は対称行列でなくとも, 行列の対称要素を使えば定義することができる.

(2)

$$\nabla H_w(z) = (w_1 z_1, w_2 z_2, ..., w_n z_n)^T = Wz$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^*)\right) \\
&= x \cdot A(x - x^*) = x^T A z = XAz \\
&= XAW^{-1}Wz = (Z + X^*)AW^{-1}\nabla H_w(z)
\end{aligned}$$

よって, $G(z) = (Z + X^*)AW^{-1}$.

(3)

(2) より,

$$\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t} = \nabla H_w(z(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \nabla H_w(z)^T (X^* + Z) AW^{-1} \nabla H_w(z)$$

まず, w は正ベクトルから選ぶので, $z(t) = 0$ でない限りは, $\nabla H_w(z)$ は非零のベクトルとなる.

いま, $(X^* + Z)AW^{-1}$ の部分にも z に依存する項が入っていることが, 単純な解析ができない要因である. ここでのポイントは, 開近傍は任意であるから, 適当に Z を小さくすれば, Z の方はオーダーの意味で無視できるということである.

開近傍を十分小さくとることで Z が $O(\varepsilon)$ となるようにする.

$$\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t} = \nabla H_w(z)^T X^* AW^{-1} \nabla H_w(z) + \nabla H_w(z)^T ZAW^{-1} \nabla H_w(z)$$

ここで $\nabla H_w(z) = (w_1 z_1, w_2 z_2, ..., w_n z_n)$ であったことを思い出せば, $\nabla H_w(z(t))$ も $O(\varepsilon)$ である. $\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t}$ の第一項は $O(\varepsilon^2)$, 第二項は $O(\varepsilon^3)$ より, 開近傍を十分小さくとれば, 第二項は第一項に比べて無視できる.

そこで以下第一項のみ考える.

$$\nabla H_w(z)^T X^* AW^{-1} \nabla H_w(z) = \nabla H_w(z)^T W^{-1} W X^* AW^{-1} \nabla H_w(z)$$

$\nabla H_w(z(t))W^{-1}$も,$z(t) = 0$ でない限り正であることに注意する. これは, $X^* AW^{-1}$を条件式が使いやすいWX^*Aと書き換えるために行った.

$$= \nabla H_w(z)^T W^{-1} \left(\frac{WX^*A + A^T X^* W}{2} \right) W^{-1} \nabla H_w(z)$$

これは, 行列が対称になるように変形した. さて問題の条件から $CA + A^T C$ は負定値である. ここで$WX^* = C$となるように選べば, $\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t}$ の第一項は負の値になる. 第二項が 0 の ε 近傍では第一項に比べて無視できることから, $WX^* = C$ が一つの解となる.明示的に書けば,

$$w_i = \frac{c_i}{x_i}$$

となる. ここで, x_i^* は問題文の条件から x^* が正ベクトルであるので割ることに問題はない.