2023 年 第 3 問

ジャンル: 解析
難易度: Easy

> **問題の概要**
> 標準的な複素関数に関する問題です. 第一問と合わせてこの 2 題をしっかり解いていきたいです.

(1)

$$I(f) = \int_{\Gamma(1)} \frac{-i}{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

を示せという問題です.

$$I(f) = \int_0^{2\pi} f\left(e^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta$$

を式変形すれば示せます.

$e^{i\theta} = z$と変数変換すると, $\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$により

$$I(f) = \int_{\Gamma(1)} f(z)\frac{1}{ie^{i\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\Gamma(1)} \frac{-i}{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

とわかります.

(2)

$D_r = \{z \in C | \|z\| < r\}, r > 1$上での以下の関数の極を求める問題.

$$g_N[f](z) = \frac{-iz^{N-1}}{z^N - 1} f(z)$$

まず, fは正則関数なので, 極は$z^N - 1$の根のみで, $z = e^{i\frac{2\pi k}{N}}$. これは 1 位の極である. ロピタル定理も用いて

$$\lim_{z \to e^{i\frac{2\pi k}{N}}} \left(z - e^{i\frac{2\pi k}{N}}\right)\frac{-iz^{N-1}}{z^N - 1} f(z) = \lim_{z \to e^{i\frac{2\pi k}{N}}} \frac{-iz^{N-1}}{Nz^{N-1}} f(z) = -\frac{i}{N} f\left(e^{i\frac{2\pi k}{N}}\right)$$

(3)

D_r上の正則関数$f : D_r \to C$が$\|f\| < \infty$を満たすとする.この時

$$|I(f) - I_N(f)| \leq \frac{2\pi\|f\|}{r^N - 1}$$

を示す問題です. 誘導に従って, $I(f), I_N(f)$の両方を積分表示し, 評価していくことを考えます.

$$I_N(f) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(e^{i\frac{2\pi k}{N}}\right) = \int_{\Gamma(r)} g_N[f](z)$$

$$|I(f) - I_N(f)| = \left\| \int_{\Gamma(r)} \frac{-i}{z} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\Gamma(r)} \frac{-iz^{N-1}}{z^N - 1} f(z) \right\| = \left\| \int_{\Gamma(r)} \frac{i}{z(z^N - 1)} f(z)\,\mathrm{d}z \right\|$$

$$\leq \int_{\Gamma(r)} \left\| \frac{i}{z(z^N - 1)} f(z) \right\| \|\mathrm{d}z\| \leq \frac{\|f\|}{r(r^N - 1)} \int_{\Gamma(r)} \|\mathrm{d}z\| = \frac{\|f\|}{r(r^N - 1)} 2\pi r = \frac{2\pi\|f\|}{r^N - 1}$$

(4)
(3)の問題の評価が最適であること

$$\limsup_{N\to\infty} \left(r^N \sup_f \frac{|I(f) - I_N(f)|}{\|f\|} \right) = 2\pi$$

を示せという問題です. すでに上からは評価できているので, それを実現するようなfを構成できれば, OK です.

アイデアとしては, (3)で等式で評価できていた

$$|I(f) - I_N(f)| = \left\| \int_{\Gamma(r)} \frac{i}{z(z^N - 1)} f(z) \,\mathrm{d}z \right\|$$

この評価式をうまく使うことを考えます.ここまでの式変形はfの正則性のみ仮定しているので問題ありません.

上手く積分できる形にするため$f(z) = z^N - 1$とします.すると積分は

$$\int_{\Gamma(r)} \frac{i}{z} \,\mathrm{d}z$$

となり, 積分値の絶対値は2πです.

ここで, $\|f\| = \|z^N - 1\| \leq \|z^N\| + \|1\| = r^N + 1$これらのことから

$$\limsup_{N\to\infty} \left(r^N \sup_f \frac{|I(f) - I_N(f)|}{\|f\|} \right) \geq \limsup_{N\to\infty} \left(r^N \frac{2\pi}{\|z^N - 1\|} \right) \geq \limsup_{N\to\infty} \left(r^N \frac{2\pi}{r^N + 1} \right) = 2\pi$$