2017 年 第 1 問

ジャンル: 解析
難易度: Normal

> **問題の概要**
> 非線形方程式を数値的に解くときなどに大事な概念となる不動点に関する問題。(1)で安定な不動点がなぜ大事かを実感することができる。(2)は高校数学っぽい。幾何的には底が動くときの指数関数と直線の交点を考えることになるが、意外とイメージしにくくて難しい感がある。

(1)

$|F^n(x) - \bar{x}\ |$を評価することを考える。

$\bar{x}$は安定な不動点なので、

$$F(\bar{x}) = \bar{x}$$
$$|f(\bar{x})| < 1$$

関数$x \mapsto |f(x)| = a^x\ |\log a|$は連続なので、ある開区間$J = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$（$\delta > 0$）があって、

$$x \in J \Rightarrow |f(x)| < M := \frac{1 + |f(\bar{x})|}{2} < 1$$

Fは微分可能なので平均値の定理より、$x \in J$ならば、

$$\begin{aligned} |F(x) - \bar{x}| &= |F(x) - F(\bar{x})| \\ &= |f(\bar{x} + \theta(x - \bar{x}))|\ |x - \bar{x}| \\ &< M\ |x - \bar{x}| \\ &< \delta \end{aligned}$$

ただし、$\theta \in (0,1)$であり、したがって$\bar{x} + \theta(x - \bar{x}) \in J$なので 3 行目の不等式が言える。

$x \in J \Rightarrow F(x) \in J$であることにも注意して、

$$\begin{aligned} |F^{n(x)} - \bar{x}| &= |F\left(F^{n-1}(x)\right) - \bar{x}| \\ &< M\ |F^{n-1}(x) - \bar{x}| \\ &< M^{n-1}\ |x - \bar{x}| \end{aligned}$$

故に、$x \in J \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F^n(x) = \bar{x}$である。

(2)

$g(x) = F(x) - x$とおく。

- $a = 1$**の場合**[1]

$x = 1$が$g(x) = 0$の唯一の解で、$f(x) = 0$である。

- $a > 1$**の場合**

このとき、

$$g'(x) = a^x(\log a) - 1$$

[1]指数関数の振る舞いを考えれば、このように場合わけすると良いことがわかる。

でありg$'$は単調増加する。

$$g'(x) = a^x(\log a) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\log(\log a)}{\log a}$$

より、関数gは$\tilde{x} = -\frac{\log(\log a)}{\log a}$で最小値$g(\tilde{x}) = \frac{1+\log(\log a)}{\log a}$をとる。
$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \infty$に注意すると、$g(x) = 0$が実数解を持つための必要十分条件は、

$$g(\tilde{x}) = \frac{1+\log(\log a)}{\log a} \le 0 \Leftrightarrow a \le e^{\frac{1}{e}}$$

$a = e^{\frac{1}{e}}$のとき、$x = \tilde{x}$が$g(x) = 0$の唯一の解だが$f(\tilde{x}) = 1$より不適。
$a < e^{\frac{1}{e}}$のとき、最小値$g(\tilde{x})$は0より小さいので$g(x) = 0$は 2 つの実数解を持ち、小さい順にx_1, x_2とおくと、$0 < x_1 < \tilde{x} < x_2$である。よって、$0 < f(x_1) < f(\tilde{x}) = 1 < f(x_2)$なので、$a > 1$の場合に安定な不動点が存在する必要十分条件として$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$が得られる。
このときの安定な不動点$\bar{x} = x_1$の範囲を考える。

$$a^{\bar{x}} = \bar{x}$$

で対数を取ってからaで微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a}\log a + \frac{\bar{x}}{a} = \frac{1}{x(a)}\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a}$$
$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a} = \frac{\bar{x}^2}{a(1-\bar{x}\log a)} = \frac{\bar{x}^2}{a(1-\log\bar{x})} > 0$$
$$(\because \log\bar{x} < \log\tilde{x} = 1)$$

よって$\bar{x}$はaに関して単調増加するので、

$$1^x = x \Leftrightarrow x = 1$$
$$e^{\frac{x}{e}} = x \Leftrightarrow x = e$$

から、対応する$\bar{x}$の範囲は$1 < \bar{x} < e$である。

- **$a < 1$の場合**

$g'(x) = a^x(\log a) - 1 < 0$より$g$は単調増加で$g(0) = 1 > 0, \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$なので、$g(x) = 0$は唯一の実数解$x = \bar{x} > 0$を持つ。
$\bar{x}$が安定な不動点である必要十分条件を考える。

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}a} = \frac{\bar{x}^2}{a(1-\bar{x}\log a)} > 0$$

より$\bar{x}$はaに関して単調増加する。

$$f(\bar{x}) = a^{\bar{x}}\log a$$
$$< 0 = \bar{x}\log a$$
$$= \log\bar{x}$$

に注意して、

$$
\begin{aligned}
|f(\bar{x})| < 1 &\Leftrightarrow \log \bar{x} > -1 \\
&\Leftrightarrow \bar{x} > e^{-1} \\
&\Leftrightarrow a > e^{-\frac{1}{e}}
\end{aligned}
$$

最後の同値関係は、

$$
a^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = e^{-\frac{1}{e}}
$$

とaの$\bar{x}$に関する単調増加性から従う。
まとめると、安定な不動点が存在するためのaに関する必要十分条件は$e^{-\frac{1}{e}} < a < e^{\frac{1}{e}}$であり、このときの$\bar{x}$の範囲は$e^{-1} < \bar{x} < e$である。