2020 年 第 1 問

ジャンル: 線形代数
難易度: **Normal**

> 📖 **問題の概要**
> 対称行列は直交行列で対角化できることを使う。また、正定値対称行列の固有値は正であることを使う。

(1)

$B = PDP^T$ と直交行列 P と $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ で対角化できるとすると、

$$\begin{aligned} BC + CB = A &\Leftrightarrow PDP^TC + CPDP^T = A \\ &\Leftrightarrow P^TPDP^TCP + P^TCPDP^TP = P^TAP \\ &\Leftrightarrow D(P^TCP) + (P^TCP)D = P^TAP \\ &\Leftrightarrow DC' + C'D = A' \end{aligned}$$

左からかけるのは行基本変形、右からは列基本変形に対応することを思い出す。 最後の行を成分ごとに書くと、

$$C'_{ij}(\lambda_i + \lambda_j) = A'_{ij}$$

となる。 ここで、 B は正定値対称行列なので、$\lambda_i + \lambda_j > 0$ である。よって、C' は A' から定まり、C は C' から定まるので、解は存在する。

次に、一意性を示す。二つの行列 C_1, C_2 が共に満たすとすると、$B(C_1 - C_2) + (C_1 - C_2)B = O$ である。これに上と同じ議論を適用すると、$DC' + C'D = O$ となるので、$C' = O \Leftrightarrow C_1 = C_2$ が言える。

(2)

$$\begin{aligned} BC_{A,B} = C_{A,B}B &\Leftrightarrow D\left(P^TC_{A,B}P\right) = \left(P^TC_{A,B}P\right)D \\ &\Leftrightarrow DC' = C'D \\ &\Leftrightarrow \lambda_iC'_{ij} = \lambda_jC'_{ij} \quad \forall i, j \\ &\Leftrightarrow \lambda_iA'_{ij} = \lambda_jA'_{ij} \quad \forall i, j \\ &\Leftrightarrow DA' = A'D \end{aligned}$$

一方で、

$$\begin{aligned} AB = BA &\Leftrightarrow PA'DP^T = PDA'P^T \\ &\Leftrightarrow A'D = DA' \end{aligned}$$

よって 2 つは同値。