2020 年 第 5 問

ジャンル: 算法
難易度: Lunatic

> **📖問題の概要**
> 非常に難しい。筆者は丸 3 日考えた末に (1-2) までは思いついた。競技プログラミングなどをやっていれば、試験中に思いつくことも可能なのだろうか...? (1-2) も (2) も難しく、悪問どころの話ではない。これを解いても勉強にはならないが、興味がある人は見てみればいいだろう。 なお、解けた人は GitHub でぜひとも教えてほしい。

以降、以下の記号を用いる。

$$d_n(A, B) = \sum_{i=1}^{n} (A[i] - B[i])^2$$

(1-1)

どうやら問題文の不備らしく、十分ではあるが必要ではないことに注意。

問題文で与えられている単調非減少配列を C とする。すなわち、$C[i] = B[i] \quad (1 \le i \le n), C[n+1] = A'[n+1]$ とする。このとき、$d_{n+1}(A', C) = d_n(A, B)$ である。一方で、A' に対する最適な単調非減少配列が D で、C は最適ではない $d_{n+1}(A', D) < d_{n+1}(A', C)$ とすると、

$$d_n(A, D \text{ から末尾を削ったもの}) \le d_{n+1}(A', D) < d_{n+1}(A', C) = d_n(A, B)$$

これは B の A に対する最適性に矛盾する。よって C は最適である。

(1-2)

記号を定義する。

$$b_r := \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} A'[i] \quad (\text{先頭 } r \text{ 個の平均})$$

いくつか補題を示す。

Lemma 1: A に対する近似配列 B が、ある r $(1 \le r \le n)$ で、$B[1] = \cdots = B[r]$ であり、$B[r+1]$ 以降の要素は既に決まっているものとする。
このとき、$B[r+1] \ge b_r$ ならば、$B[1] = \cdots = B[r] = b_r$ とするのが最適である。 $B[r+1] < b_r$ ならば、$B[1] = \cdots = B[r] = B[r+1]$ とするのが最適である。

Proof: $d_r(A, c) = \sum_{i=1}^{r} (A[i] - c)^2$ を c で微分することで、最小化する定数 c は b_r であることがわかる。$d_r(A, c)$ が c に対する二次関数なので、$B[r+1] < b_r$ の場合もできるだけ b_r に近い場所が最適である。これは $c = B[r+1]$ を意味する。 □

Lemma 2: 長さ n の配列 A に対して、最適な近似配列 B が $B[1] = \cdots = B[n]$ であるとする。
このとき、$b_r \ge b_n$ $(1 \le r \le n)$

Proof: Lemma 1 より、$B[1] = \cdots = B[n] = b_n$ である。もし、$B[1] = \cdots = B[r] = c \neq b_r$ と変更しても、B の最適性より悪化しかしない。Lemma 1 より、$b_r < b_n$ ならば $c = b_r$ とすると改善してしまうので、$b_r \geq b_n$ である。 □

準備は終わったので、示していく。

Theorem 1: $B[1] = \cdots = B[n]$ かつ $A'[n+1] < B[n]$ とする。このとき、$B'[1] = \cdots = B'[n+1]$ かつ $B'[n+1] < B[n]$

Proof: Lemma 1 より、$B[1] = \cdots = B[n] = b_n$ である。さらに問題文より、

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}A'[n+1] + \frac{n}{n+1}b_n < \frac{1}{n+1}B[n] + \frac{n}{n+1}b_n = b_n$$

であり、Lemma 2 と合わせて、$b_r \geq b_n > b_{n+1}$ $(1 \leq r \leq n)$。

さて、B' の最後の変化点について考える。$B'[1] = \cdots = B'[r] < B'[r+1]$ なる最後(最初?)の変化点 r $(1 \leq r \leq n-1)$ が存在するとする。Lemma 1 より、変化点が存在するならば、そこでは $B'[1] = \cdots = B'[r] = b_r < B'[r+1]$ でなくてはいけない。B' は単調非減少なので、$B'[r+1] \leq B'[n] \leq B'[n+1]$。 よって、

$$B'[n+1] \geq B'[n] \geq B'[r+1] > b_r \geq b_n$$

だが、これは B の最適性に反する。長さ n の近似配列は $B[i] = b_n$ が最適で、$B'[n+1] > b_n$ なので実行可能解に入っている。よって矛盾。$r = n$ か $r = n+1$ であるが、$r = n$ のときは明らかに $B'[n+1]$ をより小さくして $B'[i] = b_r$ にしたほうが改善するので、$r = n$ ではない。 よって、$r = n+1$ であり、$B'[1] = \cdots = B'[n+1]$。Lemma 1 より、$B'[1] = \cdots = B'[n+1] = b_{n+1} < b_n = B[n]$ より、示された。 □

(2)

最初は解けたと思ったのですが、解けていませんでした。わかりません。 (1-2) に