2018 年 第 4 問

ジャンル: 解析
難易度: Easy

問題の概要

院試では頻繁に出題される散逸系についての問題。散逸系とは、系にある種のエネルギー関数が定義でき、それが時間と共に減少する系のことである。これは確実な得点源にしたい。

(1)

$f = 0, g = 0$ と連立する。$\sin(-x) = -\sin(x)$ より、$f + g$ を考えるといい感じに消えてくれそうなので計算すると、$0 = f + g = -\sin(\theta_1) - \sin(\theta_2)$ となる。よって、$\theta_2 = \theta_1 \pm \pi, 2\pi - \theta_1$ のどちらかである。

1. $\theta_2 = \theta_1 \pm \pi$ の場合
   $f = 0$ に代入して、$\sin\theta_1 = 0$ より、$(\theta_1, \theta_2) = (0, \pi), (\pi, 0)$ が解である。
2. $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$ の場合
   $0 = f = 2K\sin\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_1 = 0$ なので、$\theta_1 = 0, 2\pi, \theta^* := \cos^{-1}\left(\frac{1}{2K}\right), 2\pi - \theta^*$
   $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0), (\pi, \pi), (\theta^*, 2\pi - \theta^*), (2\pi - \theta^*, \theta^*)$ が解である。

(2)

$$J(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} K\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos\theta_1 & -K\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -K\cos(\theta_2 - \theta_1) & K\cos(\theta_2 - \theta_1) - \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

について、K に依存する定常解 $(\theta_1, \theta_2) = (\theta^*, 2\pi - \theta^*), (2\pi - \theta^*, \theta^*)$ を代入すると、

$$J = \begin{pmatrix} K\cos(2\theta^*) - \cos\theta^* & -K\cos(2\theta^*) \\ -K\cos(2\theta^*) & K\cos(2\theta^*) - \cos\theta^* \end{pmatrix}$$

固有値は、$\lambda = -\cos\theta^*, 2K\cos(2\theta^*) - \cos\theta^*$ である。 $-\cos\theta^* = -\frac{1}{2K} < 0$ と $2K\cos(2\theta^*) - \cos\theta^* = 2K\left(2\cos^2\theta^* - 1\right) - \cos\theta^* = 2K\left(\frac{1}{2K^2} - 1\right) - \frac{1}{2K} = \frac{1}{2K} - 2K < 1 - 1 = 0$ より、安定である。

(3)

$\frac{\partial f}{\partial \theta_2} = \frac{\partial g}{\partial \theta_1} = -K\cos(\theta_1 - \theta_2)$ より、そのような関数 $V(\theta_1, \theta_2)$ は存在する。

一応、そのような V を求めてみる。 $V = \int(-f)\,\mathrm{d}\theta_1 = K\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos\theta_1 + r(\theta_2)$ だが、$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = -g$ より、$r = \sin\theta_2$。 $V = K\cos(\theta_1 - \theta_2) - \cos\theta_1 - \cos\theta_2 + C \quad$ (Cは任意定数)。

(4)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial \theta_1}\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial \theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} = -f^2 - g^2 \leq 0$$

で、等号は、$f = g = 0$ のときに成り立つ。周期解があるなら、$V(t) = V(t + T)$ だが、$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leq 0$ より、$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$ でなくてはならないが、このとき $f = g = 0$ より定常解である。よって、周期解は存在しない。