2017 年 第 4 問

ジャンル: 線形代数・微分方程式・漸化式
難易度: Hard

問題の概要
行列値をとる力学系の問題。(1),(2),(3)は固有値が保存する連続な系であり、(4),(5)は固有値が保存するという構造を保つような離散版になっている。ほとんど似たようなことをすれば良いが、各々簡単にはいかず難しい。

(1)

同じ大きさの行列 A, B に対して、

$$
\begin{aligned}
(A,B)^\top &= (AB+BA)^\top = B^\top A^\top + A^\top B^\top = (A^\top, B^\top) \\
[A,B]^\top &= (AB-BA)^\top = B^\top A^\top - A^\top B^\top = -[A^\top, B^\top] \\
(A,B) &= (B,A) \\
[A,B] &= -[B,A] \\
-(A,B) &= (-A,B) = (A,-B) \\
-[A,B] &= [-A,B] = [A,-B]
\end{aligned}
$$

である。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t)^\top &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t)\right)^\top \\
&= [(M, X(t)), X(t)]^\top \\
&= -\left[(M, X(t))^\top, X(t)^\top\right] \\
&= -\left[\left(M^\top, X(t)^\top\right), X(t)^\top\right] \\
&= \left[\left(M, X(t)^\top\right), X(t)^\top\right]
\end{aligned}
$$

ただし、5 行目の等号では M が歪対称であることを用いた。
また、$X(0)^\top = X_0^\top = X_0$ より、微分方程式の解の一意性から $X(t) = X(t)^\top$ で $X(t)$ は対称である。

(2)

実際に $QX_0Q^\top$ を $(*)$ 式に代入して、$X(t)$ と同じ微分方程式に従うことを確認する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Q(t)X_0Q(t)^\top\right) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)\right)X_0Q(t)^\top + Q(t)X_0\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)\right)^\top \\
&= (M, X(t))Q(t)X_0Q(t)^\top \\
&\quad + Q(t)X_0Q(t)^\top(M, X(t)) \\
&= (M, X(t))X(t) + X(t)(M, X(t)) \\
&= [(M, X(t)), X(t)] \\
&= \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

さらに、$Q(0)X_0Q(0)^T = X_0$ より初期条件も満たすので確かに $(*)$ の解であり、$X(t) = Q(t)X_0Q(t)^\top$ である。

(3)

$Q(t)$ が直交行列だと嬉しいので、実際に確かめる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Q(t)^\top Q(t)\right) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)\right)^\top Q(t) + Q(t)^\top\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)\right) \\
&= -Q(t)^\top(M, X(t))Q(t) + Q(t)^\top(M, X(t))Q(t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって $Q(t)^\top Q(t) = Q(0)^\top Q(0) = I$、すなわち任意の $t \geq 0$ に対して $Q(t)$ は直交行列である。

$Q(t)$ が直交行列であることから、

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - X(t)| &= \left|\lambda QQ^\top - Q(t)X_0Q(t)^\top\right| \\
&= |Q(t)|\ |\lambda I - X_0|\ \left|Q(t)^\top\right| \\
&= |\lambda I - X_0|
\end{aligned}
$$

よって、$X(t)$ の固有多項式は X_0 の固有多項式と等しいため、$X(t)$ は X_0 と同じ固有値を持つ。

(4)

> **🧠テクニック**
> 対称行列の固有値が実数なのと同じで、歪対称行列の固有値は純虚数。
> 証明は、歪対称行列 A の固有値 λ と対応する固有ベクトル x に対し、$x^*Ax = \lambda\|x\|^2$ の共役転置を取ると、$x^*A^\dagger x = -x^*Ax = \bar{\lambda}\|x\|^2$ より、$\lambda = -\bar{\lambda}$ なので純虚数。

> **🧠テクニック**
> 行列 A の固有値が λ_i なら、行列 $I + A$ の固有値は $1 + \lambda_i$。
> 証明は、$Ax = \lambda x \Rightarrow (I + A)x = x + \lambda x = (1 + \lambda)x$ より。

帰納法で示す。

- $k = 0$ のとき X_0 は対称で $Q_0 = I$ なので ok。
- $k = l$（$l = 0, 1, 2, \ldots$）で X_l, Q_l が一意に定まり、X_l が対称行列であるとする。

$$
\frac{Q_{l+1} - Q_l}{\Delta t} = (M, X_l)\frac{Q_{l+1} + Q_l}{2} \Leftrightarrow \left(I - \Delta t\frac{(M, X_l)}{2}\right)Q_{l+1} = \left(I + \Delta t\frac{(M, X_l)}{2}\right)Q_l
$$

X_l は対称、M は歪対称なので、$(M, X_l)^\top = -(M, X_l)$、すなわち (M, X_l) は歪対称行列である。歪対称行列の固有値は純虚数なので $\left|I - \Delta t\frac{(M, X_l)}{2}\right| \neq 0$ であり、$I - \Delta t\frac{(M, X_l)}{2}$ は可逆である。
したがって Q_{l+1} は一意に定まる。
$X_{l+1} = Q_{l+1}X_lQ_{l+1}^\top$ なので X_{l+1} も一意に定まり、

$$\begin{aligned} X_{l+1}^\top &= \left(Q_{l+1} X_l Q_{l+1}^\top\right)^\top \\ &= Q_{l+1} X_l^\top Q_{l+1}^\top \\ &= Q_{l+1} X_l Q_{l+1}^\top \\ &= X_{l+1} \end{aligned}$$

で X_{l+1} は対称行列である。
したがって任意の $k = 1, 2, ...$ に対して、X_k, Q_k が一意に定まり、X_k は対称行列である。

(5)

(3) と同様で、Q_k が直交行列であることを示せればよい。

任意の $k = 1, 2, ...$ に対して、

$$\begin{aligned} D_k &\coloneqq Q_k^\top Q_k - Q_{k-1}^\top Q_{k-1} \\ &= (Q_k - Q_{k-1})^\top Q_k + Q_{k-1}^\top (Q_k - Q_{k-1}) \\ &= \Delta t \left((M, X_{k-1}) \frac{Q_k + Q_{k-1}}{2} \right)^\top Q_k + \Delta t Q_{k-1}^\top (M, X_{k-1}) \frac{Q_k + Q_{k-1}}{2} \\ &= -\frac{\Delta t}{2} \left(Q_k^\top (M, X_{k-1}) Q_k - Q_{k-1}^\top (M, X_{k-1}) Q_{k-1} \right) \end{aligned}$$

D_k は対称かつ歪対称なので $D_k = D_k^\top = -D_k$ より $D_k = 0$ である。したがって $Q_k^\top Q_k = Q_0^\top Q_0 = I$ であり Q_k は直交行列である。
したがって、

$$\begin{aligned} |\lambda I - X_k| &= \left|\lambda I - Q_k X_{k-1} Q_k^\top\right| \\ &= |Q_k| \, |\lambda I - X_{k-1}| \, \left|Q_k^\top\right| \\ &= |\lambda I - X_{k-1}| \\ &= |\lambda I - X_0| \end{aligned}$$

よって、X_k の固有多項式は X_0 の固有多項式と等しいため、X_k は X_0 と同じ固有値を持つ。

(5) 別解

Q_k が直交行列であることを帰納法で示す。Q_0 で満たす。Q_{k-1} が直交行列とする。歪対象行列 $\Delta t \frac{(M, X_{k-1})}{2}$ を $C \coloneqq \Delta t \frac{(M, X_{k-1})}{2}$ とおくと、(4) より、

$$(I - C) Q_k = (I + C) Q_{k-1}$$

が成り立つのと、$(I - C)^\top = I + C$ に注意して、

$$(I - C) Q_k ((I - C) Q_k)^\top = (I - C) Q_k Q_k^\top (I + C)$$

一方で、

$$\begin{aligned} (I - C) Q_k ((I - C) Q_k)^\top &= (I + C) Q_{k-1} ((I + C) Q_{k-1})^\top \\ &= (I + C) Q_{k-1} Q_{k-1}^\top (I - C) \\ &= (I + C)(I - C) \\ &= (I - C)(I + C) \end{aligned}$$

$I - C, I + C$ は可逆なので、$Q_k Q_k^\top = I$ であり、Q_k は直交行列である。