

### 問題の概要

競プロ感強い問題です. 筆者は競プロ強くないので, 難しかったですが, 競プロで一回見たことある, なんて人には比較的取り組みやすい問題かもしれません. にしても(5)は難しい

#### (1)

疎な 3 値表現  $(d_0, d_1, \dots, d_n)$  で表現可能な自然数の最大  $L_n$  を求める. まず,  $d_n$  を 1 にするのが最適である. なぜなら,  $d_n$  を 0 としてその他の桁を条件を満たすようにすべて 1 にしたとしても値は高々  $2^n - 1$  であり,  $d_n$  を 1 とする方が大きい値を取れる. この考察を帰納的に行うと  $d_n$  から 1 桁ずつ 1, 0 を繰り返し替える表示が最適である.

$n$  が偶数であれば,

$$2^n + 2^{n-2} + \dots + 2^0 = \frac{4^{\frac{n}{2}+1} - 1}{4 - 1}$$

$n$  が奇数であれば,

$$2^n + 2^{n-2} + \dots + 2^1 = 2 \frac{4^{\frac{n+1}{2}} - 1}{4 - 1}$$

#### (2)

存在することは(3)から示せる. 存在するなら一意であることを示す. 2通りの表現ができるとする. 下の桁から照合して  $2^i$  の桁で初めて一致しないとする.

$d_i, d'_i = \{1, -1\}$  で一致しない場合を考える. この時二つの疎な 3 値表現に対する生まれる差は  $2^{i+1}$  である. 一方この時, 両方とも 0 でないの, 疎である条件から次の桁がともに 0 となっている. よって,  $d_{i+1}$  以降を変更したとしてもその変更は必ず  $2^{i+2}$  以上となるので, 両者が一致することは無い.

そのほかで一致しない場合は差が  $2^i$  であり, 次の桁以降をどのように変更しても一致させることができないことがわかる.

#### (3)

2 進表現を疎な三値表現に変換する  $O(\log d)$  時間アルゴリズムを設計せよ.

観察すると 11 を 10 - 1 に変更するとよさそうなのがわかる.

下の桁から見ていって, 11 が現れたら次の桁に 1 を足して 11 を 0 - 1 と書き換える. このアルゴリズムは 11 続いた時点でそれを書き換え, 書き換えた後, 後ろの桁の -1 のひとつ前の桁は必ず 0 であるので, 疎な 3 値表現の条件を満たしている.

これが  $O(\log d)$  であるためにはもう少し工夫が必要. 桁上がりのタイミングで最悪の場合  $O(\log d)$  の書き換え時間が必要. 最悪の場合  $O(\log d * \log d)$  にかかる可能性がある.

解決策 1: 均し時間で解析する. 最悪の計算時間(つまり現在の桁より上がすべて 1 のとき)はそこまで頻繁に起こらないとされる.(詳しくはアルゴリズムイントロダクション第二巻を参照されたい.)

解決策 2: アルゴリズムを改善する.

下の桁から見ていって、011...11を発見したら100...0-1と書き換えるというアルゴリズムでも同じ動作をする。

これならば繰り上がりが生じる心配なく $O(\log d)$ で計算が実行できる。

#### (4)

三値表現が非零成分の個数を最小にする表現方法であること。

任意の三値表現を取ってきて、それを非零成分を増やすことなく、疎な三値表現に変更できれば、問題を示したことになる。

(3)と同じく、下の桁から書き換えていくことを考える。

まず、1, -1, -1..., -1がでたら0, 0, ..., 1と書き換える。 -1, 1, 1, ..., 1が現れたら0, 0, ..., -1と書き換える。

0, -1, -1, ..., -1がでたら-1, 0, 0, ..., 0, 1と書き換える。 0, 1, 1, ..., 1, 1が出たら1, 0, 0, ..., 0, -1と書き換える。いずれも非零成分は増加していない。

よって、任意の三値表現を取ってきたときに、同じ数字を表す、非零成分が増えない疎な三値表現を構成できるので、疎な三値表現は非零成分の個数を最小化する最適な表現である。

#### (5)

自然数 $n$ に対して、 $L_n$ 以下の自然数からランダムサンプリングし非零成分の期待値を $n$ で割った値が $n \rightarrow \infty$ で $\frac{1}{3}$ に収束することを示す。

まず、疎な三値表現は一意性が保証されているので、 $n+1$ 桁目から樹形図チックに疎である条件と最高位が1であることを満たしながら、すべてを列挙していくことを考える。

最高位は必ず1であるのは自然数からサンプリングしていることの帰結である。

まず、 $X_n$ にどれくらい自然数があるかを考える。これは $1 \leq z \leq L_n$ である。

0, 1, -1を樹形図のように疎である条件を満たしながら、書き並べていくことを考える。



$$T_i = S_i + \sum_{j=1}^{i-2} 2T_j$$

和の漸化式の鉄則に従って差分をとる.

$$T_i - T_{i-1} = 2T_{i-2} + S_i - S_{i-1}$$

$$T_i - T_{i-1} - 2T_{i-2} = S_i - S_{i-1} = \frac{2^{i-1} - 2(-1)^i}{3}$$

この漸化式の特性方程式の根は2, -1より, 一般解

$$T_i = \alpha 2^i + \beta (-1)^i$$

微分方程式の類推で, 非斉次問題に対する解を

$$(\alpha i + \beta) 2^i + (\gamma i + \delta) (-1)^i$$

と仮定する. 元の式に代入して係数間の関係を調べると

$$3\alpha 2^{i-1} + 3\gamma (-1)^i = \frac{2^{i-1} - 2(-1)^i}{3}$$

$$\alpha = \frac{1}{9}, \gamma = -\frac{2}{9}$$

初期条件  $i = 1$  で1,  $i = 2$  で1である. 初期条件を代入すると

$$\beta = \frac{5}{27}, \delta = -\frac{5}{27}$$

$$T_i = \frac{(3i + 5) 2^i + (-6i - 5) (-1)^i}{27}$$

実際検算してみる.

$i = 3$  のとき,  $\{101, 10 - 1, 100\}$  であり, 非零要素数は5

$i = 4$  のとき,  $\{1010, 10 - 10, 1001, 100 - 1, 1000\}$  であり, 非零要素は9

$i = 5$  のとき, 樹形図を書けば,  $\{10101, 10100, 1010 - 1, 10010, 10001, 10000, 1000 - 1, 100 - 10, 10 - 101, 10 - 100, 10 - 1001\}$  であり非零要素は25個

これらはいずれも  $T_i$  に代入した値に等しい.

ここまでのまとめ

樹形図を書き, 各枝と  $1 \leq z \leq L_n$  の自然数の疎な三値表現が等価であることからすべての枝について辿ったとき, 非零をどれくらい通るかカウントしたい.

最高位が  $i$  桁であるときに, それ以下のすべての枝を見て非零成分の個数は  $T_i$

次に求めたいのは

$$\sum_{i=1}^{n+1} T_i$$

これが求まれば, あとは  $L_n$  で割って  $n \rightarrow \infty$  とすればよい. 求めるために公式を準備する

$$\sum_{i=1}^{n+1} x^i = \frac{x(1-x^{n+1})}{1-x}$$

微分して

$$\sum_{i=1}^{n+1} i x^{i-1} = \frac{(1-x)(1-(n+2)x^{n+1}) + x(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

これに $x$ をかけると

$$\sum_{i=1}^{n+1} i x^i = \frac{1-(n+2)x^{n+1} + (n+1)x^{n+2}}{(1-x)^2} x$$

よって

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} T_i &= \frac{1}{9} \left( \frac{1-(n+2)2^{n+1} + (n+1)2^{n+2}}{1} 2 \right) + \frac{10}{27} \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \\ &\quad - \frac{2}{9} \left( \frac{1-(n+2)(-1)^{n+1} + (n+1)(-1)^{n+2}}{4} \right) + \frac{5}{27} \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

$L_n = O(4 \cdot \frac{2^n}{3})$ なので、あとで $\frac{1}{n}$ して極限を取ることを考えると結局考えておけばいいのは第一項の $n$ に依存する項だけ.

$$\frac{\frac{1}{9}n \cdot 2^{n+2}}{4 \frac{2^n}{3}} \rightarrow \frac{1}{3}$$

よって所望の結果を得る.