2024 年 第 2 問

ジャンル: 解析
難易度: Easy

> **問題の概要**
> 松尾研あるあるの、微分方程式の構造を保った離散化/あるいは離散的な漸化式の連続化についての話です。計算ゲー意外の何物でもありません。

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= 2(t+1)(f(x)-f(x^*)) + (t+1)^2 \nabla f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + 4(v-x^*)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\
&= 2(t+1)(f(x)-f(x^*)) + (t+1)^2\frac{2}{t+1}\nabla f(x)\cdot(v-x) + 4(v-x^*)\cdot\left(-\frac{t+1}{2}\nabla f\right) \\
&= 2(t+1)(f(x)-f(x^*)) + 2(t+1)(x^*-x)\cdot\nabla f(x) \\
&= -2(t+1)(f(x^*)-f(x)-(x^*-x)\cdot\nabla f(x))
\end{aligned}$$

ここで f は滑らかな凸関数より、凸性の一次必要十分条件

$$f(y) \geq f(x) + (y-x)\cdot\nabla f(x) \quad \forall x, y$$

を満たすので、$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \leq 0$ である。

定数 C を考える。

$$\begin{aligned}
(t+1)^2(f(x)-f(x^*)) &= E(t) - 2\|v(t)-x^*\|_2^2 \\
&\leq E(t) \\
&\leq E(0) = C_1
\end{aligned}$$

$$t^2(f(x)-f(x^*)) \leq \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 C_1 < C_1$$

より、定数 C として $E(0)$ を取ればよい。

(2)

> **注意**
> 問題文に書いてある関係式の添え字に注意すること。

方針としては、(1) で行った計算ステップを完全に辿ればよい。

書くのめんどい