2017年第3問

問題の概要

確率論の基礎的な部分を問うていて、確率測度や分布関数に親しみがあれば難しくないと思う。問題文中の R[X] は、X が p -分位点より大きいときの X の条件付き期待値を表していて、期待ショートフォール、Tail VaR、Conditional VaR などと呼ばれる。

(1)

0 < u < 1 に対して、

$$u = \frac{1}{1 + e^{-t}} \Leftrightarrow t = \log \frac{u}{1 - u}$$

より、

$$\begin{split} R[T] &= \frac{1}{1-p} \int_{p}^{1} \log \frac{u}{1-u} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-p} [u \log u - u + (1-u) \log (1-u) - (1-u)]_{p}^{1} \\ &= -\frac{1}{1-p} (p \log p + (1-p) \log (1-p)) \end{split}$$

(2)

 F_X は連続なので、

$$\begin{split} \Pr(B) &= \Pr \big(X \geq F_X^{-1}(p) \big) \\ &= 1 - \Pr \big(X < F_X^{-1}(p) \big) \\ &= 1 - F_X \big(F_X^{-1}(p) \big) \\ &= 1 - p \end{split}$$

また、 $U = F_X(X)$ は (0,1) 上の一様分布に従うので、

$$\begin{split} R[X] &= \frac{1}{1-p} \int_{p}^{1} F_{X}^{-1}(u) \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-p} \mathrm{E} \big[F_{X}^{-1}(U) I_{\{U \geq p\}} \big] \\ &= \frac{1}{1-p} \mathrm{E}[X I_{B}] \end{split}$$

である。また、

$$\begin{split} \mathbf{E}[XI_A] &= \mathbf{E}[XI_{A\cap B}] + \mathbf{E}[XI_{A\setminus B}] \\ &\leq \mathbf{E}[XI_{A\cap B}] + F_X^{-1}(p)\Pr(A \setminus B) \\ &= \mathbf{E}[XI_{A\cap B}] + F_X^{-1}(p)\Pr(B \setminus A) \\ &\leq \mathbf{E}[XI_{A\cap B}] + \mathbf{E}[XI_{B\setminus A}] \\ &= \mathbf{E}[XI_B] \end{split}$$

ただし、2行目と4行目の不等号は

$$\omega \notin B \Leftrightarrow X(\omega) < F_X^{-1}(p)$$

から、3行目の等号は

$$\begin{split} \Pr(A \smallsetminus B) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\ &= 1 - p - \Pr(A \cap B) \\ &= \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \\ &= \Pr(B \smallsetminus A) \end{split}$$

から従う。

(3)

R[Z] が定義されるような確率変数 Z に対して、 $B^Z=\left\{\omega\in\Omega\mid Z(\omega)\geq F_Z^{-1}(p)\right\}$ とおく。 (2)で示したことに注意して、

$$\begin{split} R[X+Y] &= \frac{E[(X+Y)I_{B^{X+Y}}]}{1-p} \\ &= \frac{E[XI_{B^{X+Y}}]}{1-p} + \frac{E[YI_{B^{X+Y}}]}{1-p} \\ &\leq \frac{E[XI_{B^X}]}{1-p} + \frac{E[YI_{B^Y}]}{1-p} \\ &= R[X] + R[Y] \end{split}$$