2024 年 第 2 問

ジャンル: 解析
難易度: **Normal**

> **📖 問題の概要**
> 松尾研あるあるの、微分方程式の構造を保った離散化/あるいは離散的な漸化式の連続化についての話です。計算ゲー意外の何物でもありません。悪問。

(1)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= 2(t+1)(f(x)-f(x^*)) + (t+1)^2 \boldsymbol{\nabla} f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} + 4(v-x^*)\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= 2(t+1)(f(x)-f(x^*)) + (t+1)^2\frac{2}{t+1}\boldsymbol{\nabla} f(x)\cdot(v-x) + 4(v-x^*)\cdot\left(-\frac{t+1}{2}\boldsymbol{\nabla} f\right) \\ &= 2(t+1)(f(x)-f(x^*)) + 2(t+1)(x^*-x)\cdot\boldsymbol{\nabla} f(x) \\ &= -2(t+1)(f(x^*)-f(x)-(x^*-x)\cdot\boldsymbol{\nabla} f(x))\end{aligned}$$

ここで f は微分可能な凸関数より、勾配不等式

$$f(y) \geq f(x) + (y-x)\cdot\boldsymbol{\nabla} f(x) \quad \forall x,y \tag{1}$$

を満たすので、$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \leq 0$ である。

定数 C を考える。

$$\begin{aligned}(t+1)^2(f(x)-f(x^*)) &= E(t) - 2\|v(t)-x^*\|_2^2 \\ &\leq E(t) \\ &\leq E(0) = C_1\end{aligned}$$

$$t^2(f(x)-f(x^*)) \leq \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 C_1 < C_1$$

より、定数 C として $E(0)$ を取ればよい。

(2)

> **⚠ 注意**
> 問題文に書いてある関係式の添え字に注意すること。

$$\begin{aligned}\delta^+\left\|v^{(k)}-x^*\right\|_2^2 &= \delta^+\left(v^{(k)}-x^*\right)\cdot\left(v^{(k+1)}-x^*\right) + \left(v^{(k)}-x^*\right)\cdot\delta^+\left(v^{(k)}-x^*\right) \\ &= 2\delta^+\left(v^{(k)}\right)\cdot\left(v^{(k+1)}-x^*\right) - \delta^+\left(v^{(k)}\right)\cdot\left(v^{(k+1)}-x^*\right) + \left(v^{(k)}-x^*\right)\cdot\delta^+\left(v^{(k)}\right) \\ &= 2\delta^+\left(v^{(k)}\right)\cdot\left(v^{(k+1)}-x^*\right) - \left(v^{(k+1)}-v^{(k)}\right)\cdot\delta^+\left(v^{(k)}\right) \\ &= 2\left(v^{(k+1)}-x^*\right)^T\left(\delta^+v^{(k)}\right) - h\left\|\delta^+v^{(k)}\right\|_2^2\end{aligned}$$

$\delta^+E^{(k)} \leq 0$ を示す方針としては、(1) で行った計算ステップを完全に辿ればよい。

$$
\begin{aligned}
\delta^+ E^{(k)} &= \delta^+\Big((hk+1)^2\Big)\big(f\big(x^{k+1} - f(x^*)\big)\big) + (hk+1)^2 \delta^+\big(f\big(x^k\big) - f(x^*)\big) \\
&\quad +4\big(v^{k+1} - x^*\big)\cdot \delta^+ v^{(k)} - 2h\big\|\delta^+ v^{(k)}\big\|_2^2 \\
&= s\big(f\big(x^{k+1}\big) - f(x^*)\big) + (hk+1)^2 \frac{f\big(x^{k+1}\big) - f\big(x^k\big)}{h} \\
&\quad +4\big(v^{k+1} - x^*\big)\cdot\left(-\frac{s}{4}\nabla f\big(x^{k+1}\big)\right) - 2h\big\|\delta^+ v^{(k)}\big\|_2^2
\end{aligned}
$$

途中で $s := (2hk+h+2) = \delta^+\Big((hk+1)^2\Big)$ と置いた。 さて、勾配不等式 より

$$
f\big(x^{(k+1)}\big) - f\big(x^{(k)}\big) \le \big(x^{(k+1)} - x^{(k)}\big)\cdot \nabla f\big(x^{(k+1)}\big) = h\delta^+\big(x^{(k)}\big)\cdot\nabla f\big(x^{(k+1)}\big)
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
\delta^+ E^{(k)} &\le s\big(f\big(x^{k+1}\big) - f(x^*)\big) + (hk+1)^2 \delta^+\big(x^{(k)}\big)\cdot\nabla f\big(x^{(k+1)}\big) \\
&\quad -s\big(v^{k+1} - x^*\big)\cdot\nabla f\big(x^{k+1}\big) - 2h\big\|\delta^+ v^{(k)}\big\|_2^2
\end{aligned}
$$

$\delta^+\big(x^{(k)}\big)$ の関係式 $(**)$ を代入して、

$$
\begin{aligned}
&= s\big(f\big(x^{k+1}\big) - f(x^*)\big) + s\big(v^{(k+1)} - x^{(k+1)}\big)\cdot\nabla f\big(x^{(k+1)}\big) \\
&\quad -s\big(v^{k+1} - x^*\big)\cdot\nabla f\big(x^{k+1}\big) - 2h\big\|\delta^+ v^{(k)}\big\|_2^2 \\
&= s\big(f\big(x^{k+1}\big) - f(x^*) + \big(x^* - x^{(k+1)}\big)\cdot\nabla f\big(x^{(k_1)}\big)\big) - 2h\big\|\delta^+ v^{(k)}\big\|_2^2 \\
&\le 0
\end{aligned}
$$

最後にも 勾配不等式 を使った。解く時は (1) のステップを再現するようにして解けばよい。

(3)

(1) と同じ方針でよい。

$$
(hk+1)^2\big(f\big(x^{(k)}\big) - f(x^*)\big) = E^{(k)} - 2\big\|v^{(k)} - x^*\big\|_2^2 \le E^{(0)}
$$

より、

$$
k^2\big(f\big(x^{(k)}\big) - f(x^*)\big) \le \frac{h^2k^2}{(hk+1)^2}\frac{E^{(0)}}{h^2} \le \frac{E^{(0)}}{h^2}
$$

よって $C' = E^{(0)}/h^2$ とすればよい。