2023 年 第 2 問

ジャンル: 線形代数
難易度: Normal

> **問題の概要**
> 微分方程式と正定値対称に関する問題です. 何がテーマなのかよくわからない問題です. 多次元に拡張したロジスティック関数なんじゃないですかね(適当).
>
> 特に(3)などは試験中ではよくわからなくなる気がするので, 数学強者でない限りはあまり解かない気がします.

(1)

$$F_i(x) = x_i\left(v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = F_i(x(t))$$

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\left[x_i^* \log\left(\frac{x_i^*}{x_i}\right) - x_i^* + x_i\right]$$

$$C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, ..., c_n)$$

$\dot{L}(x') < 0$と$CA + A^TC$が不定値であることが同値であることを示せ.

$$\dot{L}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L(x(t)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} c_j\left(-\frac{x_i^*}{x_i} + 1\right)x_i\left(v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

ここでx_i^*は$F_i(x_i^*) = 0$となるので, $v_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^*$

$$\dot{L}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_j(x_i - x_i^*)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^*)\right) = \sum_{i,j} c_j a_{ij}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) = (x - x^*)\frac{CA + A^TC}{2}(x - x^*)$$

よって任意のxに対し$\dot{L} < 0$と$CA + A^TC$が不定値であることは同値.

(2)

ベクトルw

$$H_w(z) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i z_i^2$$

$z = x(t) - x^*$として,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(t) = G(z(t))\nabla H_w(z(t))$$

を満たす行列関数$G(z)$を求めよ.

$$\nabla H_w(z) = (w_1z_1, w_2z_2, ..., w_nz_n)^T$$

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^*)\right) = x \cdot A(x - x^*) = x^TAz = XAz$$

$$= XAW^{-1}Wz = (Z+X^*)AW^{-1}\nabla H_w(z)$$

(3)

$z(t)\in U\setminus\{0\}$ならば$\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t}<0$なる開近傍$U$が存在する$w$を一つ求めよ.

$$\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t} = \nabla H_w(z(t))\cdot\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = \nabla H_w(z(t))XAW^{-1}\nabla H_w(z(t))$$

まず, wは正ベクトルから選ぶので, $z(t)=0$でない限りは,$\nabla H_w(z(t))$は非零のベクトルとなる.

いま, XAW^{-1}の部分にもzに依存するXが入っていることが, 単純な解析ができない要因である.$x_i = x_i^* + z_i$と書けることに注意すると.

$$X = X^* + Z$$

と書ける. 開近傍を十分小さくとることでZが$O(\varepsilon)$となるようにする.

$$\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t} = \nabla H_w(z(t))X^*AW^{-1}\nabla H_w(z(t)) + \nabla H_w(z(t))ZAW^{-1}\nabla H_w(z(t))$$

ここで$\nabla H_w(z) = (w_1z_1, w_2z_2, ..., w_nz_n)$であったことを思い出せば, $\nabla H_w(z(t))$も$O(\varepsilon)$である. $\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t}$の第一項は$O(\varepsilon^2)$, 第二項は$O(\varepsilon^3)$より, 開近傍を十分小さくとれば, 第二項は第一項に比べて無視できる.

そこで以下第一項のみ考える.

$$\nabla H_w(z(t))X^*AW^{-1}\nabla H_w(z(t)) = \nabla H_w(z(t))W^{-1}WX^*AW^{-1}\nabla H_w(z(t))$$

$\nabla H_w(z(t))W^{-1}$も,$z(t)=0$でない限り正であることに注意する. これは, X^*AW^{-1}を条件式が使いやすいWX^*Aと書き換えるために行った.

$$= \nabla H_w(z(t))W^{-1}\left(\frac{WX^*A + A^TX^*W}{2}\right)W^{-1}\nabla H_w(z(t))$$

これは, 行列が対称になるように変形した. さて問題の条件から$CA + A^TC$は負定値である. ここで$WX^* = C$となるように選べば, $\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t}$の第一項は負の値になる. 第二項が0の$\varepsilon$近傍では第一項に比べて無視できることから, $WX^* = C$が一つの解となる.明示的に書けば,

$$w_i = \frac{c_i}{x_i}$$

となる. ここで,x_i^*は問題文の条件からx^*が正ベクトルであるので割ることに問題はない.