2019 年 第 1 問

ジャンル: 解析
難易度: Normal

> **問題の概要**
> 良問。確率行列についての話。確率行列はマルコフ連鎖とか情報理論でも出てくるので、性質を知っておくと役に立つだろう。

(1)

A は(左)確率行列である。まず、上界について議論する。Gershgorin の定理より、A の固有値は

$$|\lambda - a_{ii}| \le \sum_{j \ne i} |a_{ji}|$$

なので、固有値の絶対値の上界は 1 である。ここで、A は固有値 1 を持つことを示す。 λ が A の固有値であることと $A - \lambda I$ は非正則であることは同値。$A - I$ を考えると、各行を足し合わせると 0 になるので、$A - I$ は非正則である。よって、A は固有値 1 を持つ。

これは確率行列の性質なので覚えておきましょう。

固有値 1 を持つことの別解として、$\mathbb{1}^T A = \mathbb{1}^T$ となるので、転置すると $A^T \mathbb{1} = \mathbb{1}$ となる。よって A^T は固有値 1 を持つ。転置行列と元の行列は同じ固有値を持つので、A は固有値 1 を持つ。

> **注意**
> 別解は、A の固有値 1 に対する固有ベクトルが $\mathbb{1}$ であることを意味しない。転置行列と元の行列は同じ固有値を持つが、固有ベクトルは一般に異なることに注意。

> **注意**
> Gershgorin の定理は行和に対する定理だが、行列を転置しても固有値が変わらないことから、列和に対する Gershgorin の定理も成り立つ。ここでは列和に対する Gershgorin の定理を使った。 もしかしたら、解答の際に一言補足を加えたほうがいいかもしれない。

(2)

誘導の通りに、ブラウワーの不動点定理を用いて示す。

$$\Delta := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \ge 0, \mathbb{1}^T x = 1\}$$

は非空な有界閉凸集合である。非空なのは $\frac{\mathbb{1}}{n}$ が入っているため。有界性は、集合が単位立方体に含まれるため。凸集合なのは簡単に示せる。閉集合であることは、閉半空間の積集合だから、とかでいいだろう。実際の試験ではこんな細かい議論をせず、凸性だけ示せば十分と思われますが、一応書いておきました。 次に、$x \in \Delta$ なら、$Bx \in \Delta$ を示す。 A は確率行列で、$\frac{1}{n}\mathbb{1}\mathbb{1}^T$ も確率行列。よって、その凸結合である $B = \alpha A + (1-\alpha)\frac{1}{n}\mathbb{1}\mathbb{1}^T$ も確率行列。確率行列の成分は非負なので、$Bx \ge 0$。 また、

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}^T Bx &= \alpha \mathbb{1}^T A x + \frac{1-\alpha}{n} \mathbb{1}^T \mathbb{1}\mathbb{1}^T x \\
&= \alpha \mathbb{1}^T x + (1-\alpha)\mathbb{1}^T x \\
&= \mathbb{1}^T x \\
&= 1
\end{aligned}$$

よって、$Bx \in \Delta$ である。 ブラウワーの不動点定理より B は Δ 内に不動点を持つ。

(3)

ベクトルで不等式をまとめて書くと、

$$|Bq| \le B|q| - \frac{1-\alpha}{n}\mathbb{1}\mathbb{1}^T|q|$$

を示したい。不等式はベクトルの各成分についてのものであることに注意。

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \alpha A|q| + \frac{1-\alpha}{n}\mathbb{1}\mathbb{1}^T|q| - \frac{1-\alpha}{n}\mathbb{1}\mathbb{1}^T|q| \\ &= \alpha A|q|\end{aligned}$$

$$(\text{左辺}) = |Bq| = \left|\alpha Aq + \frac{1-\alpha}{n}\mathbb{1}\mathbb{1}^T q\right| = |\alpha Aq| = \alpha|Aq|$$

なので、

$$(\text{右辺}) - (\text{左辺}) = \alpha(A|q| - |Aq|)$$

ここで、A は非負行列なので、$A|q| - |Aq| \ge 0$ である。よって示された。 勿論、ベクトルにして計算せず要素ごとに計算して示してもよい。

(4)

x は B の不動点であることを使って書き換えると、

$$\left\|B^N\left(\frac{\mathbb{1}}{n} - x\right)\right\|_1 \le \alpha^N\left\|\frac{\mathbb{1}}{n} - x\right\|_1$$

となる。これを見ると、B を 1 回作用させるごとの 1-ノルムの評価

$$\|Bq\|_1 \le \alpha\|q\|_1, \quad (\mathbb{1}^T q = 0)$$

を示したい。初期値 $\frac{\mathbb{1}}{n} - x$ は $\mathbb{1}^T\left(\frac{\mathbb{1}}{n} - x\right) = 0$ を満たすことに注意する。(3) より、$|Bq| \le \alpha A|q|$ なので、$\|Bq\|_1 = \mathbb{1}^T|Bq| \le \alpha\mathbb{1}^T A|q| = \alpha\mathbb{1}^T|q| = \alpha\|q\|_1$ より示された。 また、$\mathbb{1}^T(Bq) = 0$ も示さなければいけない。これは $\mathbb{1}^T Bq = \alpha\mathbb{1}^T Aq + \frac{1-\alpha}{n}\mathbb{1}^T\mathbb{1}q = \alpha\mathbb{1}^T q + 0 = 0$ より従う。

> **⚠注意**
> (3) の結果を使うためには、$\mathbb{1}^T q = 0$ であることが必要なので、B を何回かけてもその性質が保たれることを示す必要がある。それを忘れないように注意。

ところでこの問題の意味について考えると、A の定常確率ベクトル $x \quad (Ax = x, x \ge 0)$ を求めたいということだろう。α を大きくすると、B_α と A は一致する。 α が小さいときに B に $\frac{\mathbb{1}}{n}$ を沢山かけると、α^N の速度で B_α の定常確率ベクトル x_α へ収束する。α を少しづつ大きくして、$\frac{\mathbb{1}}{n}$ の収束先を観察する。収束速度は遅くなっていくが、x_α は求めたい A の定常確率ベクトル x_1 に近づいていく。よって、内点法のようなイメージで α を大きくしていったときの x_α の向かう先で近似するということだろうか。収束先の収束先という感じで大変興味深いです。