2017 年 第 3 問

ジャンル: 確率
難易度: Normal

> **問題の概要**
> 確率論の基礎的な部分を問うていて、確率測度や分布関数に親しみがあれば難しくないと思う。問題文中の $R[X]$ は、X が p -分位点より大きいときの X の条件付き期待値を表していて、期待ショートフォール、Tail VaR、Conditional VaR などと呼ばれる。

(1)

$0 < u < 1$ に対して、

$$u = \frac{1}{1+e^{-t}} \Leftrightarrow t = \log\frac{u}{1-u}$$

より、

$$\begin{aligned}
R[T] &= \frac{1}{1-p}\int_p^1 \log\frac{u}{1-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-p}\big[u\log u - u + (1-u)\log(1-u) - (1-u)\big]_p^1 \\
&= -\frac{1}{1-p}(p\log p + (1-p)\log(1-p))
\end{aligned}$$

(2)

F_X は単調増加な右連続関数で、逆関数をもつので、F_X は連続である。よって、$\Pr(X < x) = \Pr(X \leq x)$ が成立し、

$$\begin{aligned}
\Pr(B) &= \Pr\big(X \geq F_X^{-1}(p)\big) \\
&= 1 - \Pr\big(X < F_X^{-1}(p)\big) \\
&= 1 - F_X\big(F_X^{-1}(p)\big) \\
&= 1 - p
\end{aligned}$$

また、$U = F_X(X)$ は $(0,1)$ 上の一様分布に従うので、

$$\begin{aligned}
R[X] &= \frac{1}{1-p}\int_p^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-p}\mathrm{E}\Big[F_X^{-1}(U)I_{\{U\geq p\}}\Big] \\
&= \frac{1}{1-p}\mathrm{E}[XI_B]
\end{aligned}$$

である。また、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[XI_A] &= \mathrm{E}[XI_{A\cap B}] + \mathrm{E}[XI_{A\setminus B}] \\
&\leq \mathrm{E}[XI_{A\cap B}] + F_X^{-1}(p)\,\mathrm{Pr}(A\setminus B) \\
&= \mathrm{E}[XI_{A\cap B}] + F_X^{-1}(p)\,\mathrm{Pr}(B\setminus A) \\
&\leq \mathrm{E}[XI_{A\cap B}] + \mathrm{E}[XI_{B\setminus A}] \\
&= \mathrm{E}[XI_B]
\end{aligned}
$$

ただし、2 行目と 4 行目の不等号は

$$
\omega \notin B \Leftrightarrow X(\omega) < F_X^{-1}(p)
$$

から、3 行目の等号は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pr}(A\setminus B) &= \mathrm{Pr}(A) - \mathrm{Pr}(A\cap B) \\
&= 1 - p - \mathrm{Pr}(A\cap B) \\
&= \mathrm{Pr}(B) - \mathrm{Pr}(A\cap B) \\
&= \mathrm{Pr}(B\setminus A)
\end{aligned}
$$

から従う。

(3)

$R[Z]$ が定義されるような確率変数 Z に対して、$B^Z = \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \geq F_Z^{-1}(p)\}$ とおく。
(2)で示したことに注意して、

$$
\begin{aligned}
R[X+Y] &= \frac{E[(X+Y)I_{B^{X+Y}}]}{1-p} \\
&= \frac{E[XI_{B^{X+Y}}]}{1-p} + \frac{E[YI_{B^{X+Y}}]}{1-p} \\
&\leq \frac{E[XI_{B^X}]}{1-p} + \frac{E[YI_{B^Y}]}{1-p} \\
&= R[X] + R[Y]
\end{aligned}
$$