# 2020 年 第 2 問

**ジャンル: 確率**
**難易度: Lunatic**

> **📖問題の概要**
> いつもの指数分布。今回は観測が少し変な状況で、元の分布のパラメータを最尤推定できるかという問題。 最後の問題が難しすぎるのでお手上げ。

### (1)

$$\begin{aligned} g(\mu) &= \int_0^a af(x;\mu)dx + \int_a^\infty xf(x;\mu)dx \\ &= a + \mu e^{-\frac{a}{\mu}} \end{aligned}$$

### (2)

$g'(\mu) = \left(1 + \frac{a}{\mu}\right)\exp\left(-\frac{a}{\mu}\right) > 0$ と $g(0) = a$ より、$g(\hat{\mu}) = \bar{Y} > a$ なる $\hat{\mu}$ がただ一つ存在する。

### (3)

かなり難しい。

まず、指数分布の和の分布はアーラン分布(ガンマ分布)になることを簡単に示す。$X_1, X_2$ が平均 $\mu$ の指数分布に従うとすると、$X_1 + X_2$ の密度関数は畳み込み積分により、$z\mu^{-2}\exp\left(-\frac{z}{\mu}\right)$ となる。これを使って $X_1 + X_2 + X_3$ の密度関数は畳み込み積分により、$\frac{1}{2}x^2\mu^{-3}\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)$ となる。これを一般化して、$X_1 + \ldots + X_n$ の分布は $\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mu^{-n}\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)$ となる。詳しくは 2024 年問 4 (3) を見てほしい。この分布の確率密度関数を $f(x;n,\lambda)$ とする。

指数分布の無記憶性 $P(X > b \mid X > a) = P(X > b - a)$ は簡単に示せる。準備が終わったので、早速示していく。

$$\begin{aligned} P\left(M = m, \bar{Y} \leq b\right) &= \binom{n}{m}P(Y = a)^m P(Y > a)^{n-m} P\left(\sum_{i=1}^{n-m} Y_i \leq nb - ma \,\middle|\, Y_i > a\right) \\ &\text{ここで指数分布の無記憶性を用いて} \\ &= \cdots P\left(\sum_{i=1}^{n-m} Y_i \leq n(b - a)\right) \\ &= \cdots \int_0^{n(b-a)} f(x; n - m, \mu)dx \\ &\text{ここで } Y = \frac{x}{n} + a \text{ とおいて積分区間を調整すると} \\ &= \cdots \int_a^b nf(n(y - a), n - m, \mu)dy \end{aligned}$$

よって

$$h(m, y; \mu) = \binom{n}{m}\left(1 - e^{-\frac{a}{\mu}}\right)^m \left(e^{-\frac{a}{\mu}}\right)^{n-m} \frac{(y - a)^{n-m-1}}{(n - m - 1)!\left(\frac{\mu}{n}\right)^{n-m}} e^{-\frac{n(y-a)}{\mu}}$$

となる。なんだこの複雑な式は…。あってるのかも怪しい。

**(4)**

$\lambda$ 以外を固定したとき、$\mu$ での微分が停留する点が 1 つだけなら良さそう。対数を取ってから微分すると楽かもしれない。が、それでも式が複雑すぎて解けなかった。 なんなんですかこの問題は。