2017 年 第 4 問

ジャンル: 線形代数・微分方程式・漸化式
難易度: Hard

> **問題の概要**
> 行列値をとる力学系の問題。(1),(2),(3)は固有値が保存する連続な系であり、(4),(5)は固有値が保存するという構造を保つような離散版になっている。ほとんど似たようなことをすれば良いが、各々簡単にはいかず難しい。

(1)

同じ大きさの行列A, Bに対して、

$$
\begin{aligned}
(A, B)^\top &= (AB + BA)^\top = B^\top A^\top + A^\top B^\top = (A^\top, B^\top) \\
[A, B]^\top &= (AB - BA)^\top = B^\top A^\top - A^\top B^\top = -[A^\top, B^\top]
\end{aligned}
$$

である。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t)^\top &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) \right)^\top \\
&= [(M, X(t)), X(t)]^\top \\
&= -\left[(M, X(t))^\top, X(t)^\top \right] \\
&= -\left[\left(M^\top, X(t)^\top \right), X(t)^\top \right] \\
&= \left[\left(M, X(t)^\top \right), X(t)^\top \right]
\end{aligned}
$$

ただし、5 行目の等号ではMが歪対称であることを用いた。
また、$X(0)^\top = X_0^\top = X_0$より、微分方程式の回の一意性から$X(t) = X(t)^\top$で$X(t)$は対称である。

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(Q(t)^\top Q(t) \right) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t) \right)^\top Q(t) + Q(t)^\top \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t) \right) \\
&= -Q(t)^\top (M, X(t)) Q(t) + Q(t)^\top (M, X(t)) Q(t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって$Q(t)^\top Q(t) = Q(0)^\top Q(0) = I$、すなわち任意の$t \geq 0$に対して$Q(t)$は直交行列である。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Q(t)^\top X(t)Q(t)\right) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)\right)^\top X(t)Q(t) \\
&\quad +Q(t)^\top\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t)\right)Q(t) \\
&\quad +Q(t)^\top X(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q(t)\right) \\
&= -Q(t)^\top (M, X(t))X(t)Q(t) \\
&\quad +Q(t)^\top[(M, X(t))X(t)]Q(t) \\
&\quad +Q(t)^\top X(t)(M, X(t))Q(t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

よって$Q(t)^\top X(t)Q(t) = Q(0)^\top X(0)Q(0) = X_0$なので、$X(t) = Q(t)X_0Q(t)^\top$である。

(3)

$Q(t)$が直交行列であることから、

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - X(t)| &= \left|\lambda I - Q(t)X_0Q(t)^\top\right| \\
&= |Q(t)|\ |\lambda I - X(t)|\ \left|Q(t)^\top\right| \\
&= |\lambda I - X(t)|
\end{aligned}
$$

よって、$X(t)$の固有多項式はX_0の固有多項式と等しいため、$X(t)$はX_0と同じ固有値を持つ。

(4)

帰納法で示す。

- $k = 0$のときX_0は対称で$Q_0 = I$なので ok。
- $k = l$（$l = 0, 1, 2, ...$）でX_l, Q_lが一意に定まり、X_lが対称行列であるとする。

$$
\frac{Q_{l+1} - Q_l}{\Delta t} = (M, X_l)\frac{Q_{l+1} + Q_l}{2} \Leftrightarrow \left(I - \Delta t\frac{(M, X_l)}{2}\right)Q_{l+1} = \left(I + \Delta t\frac{(M, X_l)}{2}\right)Q_l
$$

X_lは対称、Mは歪対称なので、$(M, X_l)^\top = -(M, X_l)$、すなわち$(M, X_l)$は歪対称行列である。
歪対称行列の固有値は純虚数なので$\left|I - \Delta t\frac{(M, X_l)}{2}\right| \neq 0$であり、$I - \Delta t\frac{(M, X_l)}{2}$は可逆である。したがって$Q_{l+1}$は一意に定まる。
$X_{l+1} = Q_{l+1}X_lQ_{l+1}^\top$なので$X_{l+1}$も一意に定まり、

$$
\begin{aligned}
X_{l+1}^\top &= \left(Q_{l+1}X_lQ_{l+1}^\top\right)^\top \\
&= Q_{l+1}X_l^\top Q_{l+1}^\top \\
&= Q_{l+1}X_lQ_{l+1}^\top \\
&= X_{l+1}
\end{aligned}
$$

でX_{l+1}は対称行列である。
したがって任意の$k = 1, 2, ...$に対して、X_k, Q_kが一意に定まり、X_kは対称行列である。

(5)

任意の$k = 1, 2, ...$に対して、

$$
\begin{aligned}
D_k &\coloneqq Q_k^\top Q_k - Q_{k-1}^\top Q_{k-1} \\
&= (Q_k - Q_{k-1})^\top Q_k + Q_{k-1}^\top (Q_k - Q_{k-1}) \\
&= \Delta t \left((M, X_{k-1}) \frac{Q_k + Q_{k-1}}{2} \right)^\top Q_k + \Delta t Q_{k-1}^\top (M, X_{k-1}) \frac{Q_k + Q_{k-1}}{2} \\
&= -\frac{\Delta t}{2} \bigl(Q_k^\top (M, X_{k-1}) Q_k - Q_{k-1}^\top (M, X_{k-1}) Q_{k-1} \bigr)
\end{aligned}
$$

D_kは対称かつ歪対称なので$D_k = 0$である。したがって$Q_k^\top Q_k = Q_0^\top Q_0 = I$であり$Q_k$は直交行列である。
したがって、

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - X_k| &= \left|\lambda I - Q_k X_{k-1} Q_k^\top\right| \\
&= |Q_k| \, |\lambda I - X_{k-1}| \, \left|Q_k^\top\right| \\
&= |\lambda I - X_{k-1}| \\
&= |\lambda I - X_0|
\end{aligned}
$$

よって、X_kの固有多項式はX_0の固有多項式と等しいため、X_kはX_0と同じ固有値を持つ。