

問題の概要

確率論の基礎的な部分を問うていて、確率測度や分布関数に親しみがあれば難しくないと思う。問題文中の $R[X]$ は、 X が p -分位点より大きいときの X の条件付き期待値を表していて、期待ショートフォール、Tail VaR、Conditional VaR などと呼ばれる。

(1)

$0 < u < 1$ に対して、

$$u = \frac{1}{1 + e^{-t}} \Leftrightarrow t = \log \frac{u}{1 - u}$$

より、

$$\begin{aligned} R[T] &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 \log \frac{u}{1-u} du \\ &= \frac{1}{1-p} [u \log u - u + (1-u) \log(1-u) - (1-u)]_p^1 \\ &= -\frac{1}{1-p} (p \log p + (1-p) \log(1-p)) \end{aligned}$$

(2)

F_X は連続なので、

$$\begin{aligned} \Pr(B) &= \Pr(X \geq F_X^{-1}(p)) \\ &= 1 - \Pr(X < F_X^{-1}(p)) \\ &= 1 - F_X(F_X^{-1}(p)) \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

また、 $U = F_X(X)$ は $(0, 1)$ 上の一様分布に従うので、

$$\begin{aligned} R[X] &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 F_X^{-1}(u) du \\ &= \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[F_X^{-1}(U) I_{\{U \geq p\}}] \\ &= \frac{1}{1-p} \mathbb{E}[X I_B] \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X I_A] &= \mathbb{E}[X I_{A \cap B}] + \mathbb{E}[X I_{A \setminus B}] \\ &\leq \mathbb{E}[X I_{A \cap B}] + F_X^{-1}(p) \Pr(A \setminus B) \\ &= \mathbb{E}[X I_{A \cap B}] + F_X^{-1}(p) \Pr(B \setminus A) \\ &\leq \mathbb{E}[X I_{A \cap B}] + \mathbb{E}[X I_{B \setminus A}] \\ &= \mathbb{E}[X I_B] \end{aligned}$$

ただし、2 行目と 4 行目の不等号は

$$\omega \notin B \Leftrightarrow X(\omega) < F_X^{-1}(p)$$

から、3 行目の等号は

$$\begin{aligned}\Pr(A \setminus B) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\ &= 1 - p - \Pr(A \cap B) \\ &= \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \\ &= \Pr(B \setminus A)\end{aligned}$$

から従う。

(3)

$R[Z]$ が定義されるような確率変数 Z に対して、 $B^Z = \{\omega \in \Omega \mid Z(\omega) \geq F_Z^{-1}(p)\}$ とおく。
(2)で示したことに注意して、

$$\begin{aligned}R[X + Y] &= \frac{E[(X + Y)I_{B^{X+Y}}]}{1 - p} \\ &= \frac{E[XI_{B^{X+Y}}]}{1 - p} + \frac{E[YI_{B^{X+Y}}]}{1 - p} \\ &\leq \frac{E[XI_{B^X}]}{1 - p} + \frac{E[YI_{B^Y}]}{1 - p} \\ &= R[X] + R[Y]\end{aligned}$$