2017 年 第 3 問

ジャンル: 確率
難易度: Normal

> **問題の概要**
> 確率論の基礎的な部分を問うていて、確率測度や分布関数に親しみがあれば難しくないと思う。問題文中の$R[X]$は、Xがp-分位点より大きいときのXの条件付き期待値を表していて、期待ショートフォール、Tail VaR、Conditional VaR などと呼ばれる。

(1)

$0 < u < 1$に対して、

$$u = \frac{1}{1+e^{-t}} \Leftrightarrow t = \log \frac{u}{1-u}$$

より、

$$\begin{aligned} R[T] &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 \log \frac{u}{1-u} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-p} [u \log u - u + (1-u) \log(1-u) - (1-u)]_p^1 \\ &= -\frac{1}{1-p} (p \log p + (1-p) \log(1-p)) \end{aligned}$$

(2)

F_Xは連続なので、

$$\begin{aligned} \Pr(B) &= \Pr(X \geq F_X^{-1}(p)) \\ &= 1 - \Pr(X < F_X^{-1}(p)) \\ &= 1 - F_X(F_X^{-1}(p)) \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

また、$U = F_{X(X)}$は$(0,1)$上の一様分布に従うので、

$$\begin{aligned} R[X] &= \frac{1}{1-p} \int_p^1 F_X^{-1}(u) \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{1-p} \mathrm{E}\left[F_{X(U)} I_{\{U \geq p\}}\right] \\ &= \frac{1}{1-p} \mathrm{E}[X I_B] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X I_A] &= \mathrm{E}[X I_{A \cap B}] + \mathrm{E}\{X I_{A \setminus B}\} \\ &\leq \mathrm{E}[X I_{A \cap B}] + F_X^{-1}(p) \Pr(A \setminus B) \\ &= \mathrm{E}[X I_{A \cap B}] + F_X^{-1}(p) \Pr(B \setminus A) \\ &= \mathrm{E}[X I_{A \cap B}] + \mathrm{E}\{X I_{B \setminus A}\} \\ &\leq \mathrm{E}[X I_B] \end{aligned}$$

ただし、2 行目と 4 行目の不等号は

$$\because \omega \notin B \Leftrightarrow X(\omega) < F_X^{-1}(p)$$

から、3 行目の等号は

$$\begin{aligned}
\Pr(A \setminus B) &= \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \\
&= 1 - p - \Pr(A \cap B) \\
&= \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \\
&= \Pr(B \setminus A)
\end{aligned}$$

から従う。

(3)

$R[Z]$が定義されるような確率変数Zに対して、$B^Z = \{Z \geq F_Z^{-1}(p)\}$とおく。
(2)で示したことに注意して、

$$\begin{aligned}
R[X+Y] &= \frac{E[(X+Y)I_{B^{X+Y}}]}{1-p} \\
&= \frac{E[XI_{B^{X+Y}}]}{1-p} + \frac{E[YI_{B^{X+Y}}]}{1-p} \\
&\leq \frac{E[XI_{B^X}]}{1-p} + \frac{E[YI_{B^Y}]}{1-p} \\
&= R[X] + R[Y]
\end{aligned}$$