2019 年 第 1 問

ジャンル: 確率
難易度: Hard

問題の概要
とにかく計算が重く、複雑な問題。解かせる気がないわけではないので、順当に難しい問題。

(1)

まず、$i \neq j$ の場合を考える。 $E_X[\varphi(u^T X_i)\varphi(u^T X_j)]$ は i.i.d. 性より、$E_X[\varphi(u^T X_i)]E_X[\varphi(u^T X_j)]$ となる。

確率分布はたまたま、分散共分散行列の形より回転対象である。よって、$u = \begin{pmatrix} \|u\|_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ であると考えてよい。すると、

$$
\begin{aligned}
E_X[\varphi(u^T X_i)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} p(x_1, x_2)\|u\|_2 x_1 \; dx_1 dx_2 \\
&= \|u\|_2 \int_0^{\infty} \frac{x_2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right) dx_2 \\
&= \frac{\|u\|_2}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}
$$

となる。$i = j$ のときは、

$$
\begin{aligned}
E_X\left[\varphi(u^T X_i)^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} p(x_1, x_2)\|u\|_2^2 x_1^2 \; dx_1 dx_2 \\
&= \|u\|_2^2 \int_0^{\infty} \frac{x_2^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2}\right) dx_2 \\
&= \frac{\|u\|_2^2}{2}
\end{aligned}
$$

(1) 別解

確率変数 x が、n 次元正規分布に従う $x \sim N_n(\mu, \Sigma)$ とき、$Ax + b$ が従う分布は、$N_m(A\mu + b, A\Sigma A^T)$ であることを使うと、$y = u^T x$ の従う分布は $N\left(0, \|u\|_2^2\right)$ である。よって、$E[\varphi(y)] = \int_0^{\infty} yp(y)dy$ と計算できる。あとは上と同様。回転対象などの議論が好みではない人はこちらで解くとよい。

(2)

$$
I_1 := \int_0^{\infty} r^3 \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr = 2
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &\coloneqq \int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\psi)\cos(\theta-\psi)d\psi \\
&= \frac{1}{2}\int_{\theta-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta + \cos(2\psi-\theta)d\psi \\
&= \frac{1}{2}((\pi-\theta)\cos\theta + \sin\theta)
\end{aligned}
$$

よって、積分値は

$$
I = \frac{1}{2\pi}I_1 I_2 = \frac{1}{2\pi}((\pi-\theta)\cos\theta + \sin\theta)
$$

(3)

問題をよく読むと $k=1$ と書いてある。 期待値の線形性と (1) の結果を使うと、

$$
\begin{aligned}
L(u) &= E_X\left[\varphi(u^T X)^2 + \varphi\left(u^{*T} X\right)^2 - 2\varphi(u^T X)\varphi\left(u^{*T} X\right)\right] \\
&= \frac{\|u\|^2}{2} + \frac{\|u^*\|^2}{2} - 2E_X\left[\varphi(u^T X)\varphi\left(u^{*T} X\right)\right]
\end{aligned}
$$

さて、$E_X\left[\varphi(u^T X)\varphi\left(u^{*T} X\right)\right]$ を考える。u 方向に x 軸があり、そこから θ 傾けた先に u^* があるような図を書いてみると、(2) を使って

$$
E_X\left[\varphi(u^T X)\varphi\left(u^{*T} X\right)\right] = \|u\|_2 \|u^*\|_2 I
$$

と書ける。よって、

$$
L(u) = \frac{\|u\|^2 + \|u^*\|^2}{2} - \frac{1}{\pi}\|u\|\|u^*\|((\pi-\theta)\cos\theta + \sin\theta)
$$

(4)

u を極座標表示する。u^* の角度が ψ として、$u(r,\theta) = r\begin{pmatrix}\cos(\theta+\psi) \\ \sin(\theta+\psi)\end{pmatrix}$ とおくと、

$$
L(u) = \frac{\|u^*\|^2}{2} + \frac{r^2}{2} - \frac{1}{\pi}\|u^*\| r((\pi-\theta)\cos\theta + \sin\theta)
$$

これを最小化する r,θ の組は、$\boldsymbol{\nabla} L = 0$とおいて解くと、$(r,\theta) = (\|u^*\|, 0), (0, \ldots)$ の 2 つが候補である。

> ⚠ **注意**
> 2 次元極座標での勾配は $\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta$ である。

前者は $u = u^*$ のときで、このとき $L(u) = 0$ だが、$L(u)$ は定義より非負。よって大域的最適解である。 後者は $u = (0,0)$ から任意の θ に対して動かすと、$\frac{\partial L}{\partial r}$ が $\theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ で符号が異なるので、局所最適解ではない。よって局所最適解は存在しない。

局所最適解をすべて列挙せよと書かれているので、他にありそうなものですが…。もしかしたら間違ってるかも。