2017 年 第 2 問

ジャンル: 確率
難易度: Easy

> **問題の概要**
> 確率漸化式の問題でここ数年の中でもかなり優しい部類の問題だと思う。この問題を選べたらラッキー。骨が無さすぎて不安になるレベル。

(1)

n 回目に投げるコインが A である確率を p_n とおくと、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \theta_A p_n + (1-\theta_B)(1-p_n) \\ p_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$p_{n+1} - \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} = (\theta_A+\theta_B-1)\left(p_n - \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B}\right)$$

より、

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} + (\theta_A+\theta_B-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B}\right) \\ &= \frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} + (\theta_A+\theta_B-1)^{n-1}\frac{\theta_B-\theta_A}{2(2-\theta_A-\theta_B)} \end{aligned}$$

(2)

$k = 1, 2, \ldots$に対して、k回目にコインを投げたとき$k-1$回目に投げたときから表の回数が増えるのは、

- k 回目に投げるコインが A で、かつ表が出る
- k 回目に投げるコインが B で、かつ表が出る

ときなので、

$$H(k) = H(k-1) + \theta_A p_k + \theta_B(1-p_k)$$

$H(0) = 0$ に注意して、$k = 1, \ldots, n$ で辺々加えると、

$$H(n) = \sum_{k=1}^{n}(\theta_B + (\theta_A - \theta_B)p_k)$$

チェザロ平均の性質：$\{a_n\}_{n\geq 1} \cup \{\alpha\} \subset \mathbb{R}$ に対して、$n \to \infty$ のとき、

$$a_n \to \alpha \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_n \to \alpha$$

より、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n} &= \lim_{n\to\infty}(\theta_B+(\theta_A-\theta_B)p_n) \\
&= \theta_B+(\theta_A-\theta_B)\frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} \\
&= \frac{\theta_A+\theta_B-2\theta_A\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B}
\end{aligned}$$

ただし $0<\theta_A+\theta_B<2$ より $|\theta_A+\theta_B-1|<1$ であることに注意。

(2)別解

$\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n}$ を求めるときに、チェザロ平均の性質を使ったが、$H(n)$ の表式を具体的に求めるのも実直で良い方法だと思う。

$$\begin{aligned}
H(n) &= \sum_{k=1}^{n}(\theta_B+(\theta_A-\theta_B)p_k) \\
&= n\theta_B+n(\theta_A-\theta_B)\frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} \\
&\quad -\frac{(\theta_A-\theta_B)^2}{2(2-\theta_A-\theta_B)}\frac{1-(\theta_A+\theta_B-1)^n}{1-(\theta_A+\theta_B-1)}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\frac{H(n)}{n} &\to \theta_B+(\theta_A-\theta_B)\frac{1-\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} \\
&= \frac{\theta_A+\theta_B-2\theta_A\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B} \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

(3)

$$\frac{\theta_A+\theta_B-2\theta_A\theta_B}{2-\theta_A-\theta_B}-\frac{\theta_A+\theta_B}{2}=\frac{(\theta_A-\theta_B)^2}{2(2-\theta_A-\theta_B)}$$

$\theta_A\neq\theta_B$ のとき、これは正なので、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n}>\frac{\theta_A+\theta_B}{2}$$