

問題の概要

行列値をとる力学系の問題。(1),(2),(3)は固有値が保存する連続な系であり、(4),(5)は固有値が保存するという構造を保つような離散版になっている。ほとんど似たようなことをすれば良いが、各々簡単にはいかず難しい。

(1)

同じ大きさの行列 A, B に対して、

$$\begin{aligned}(A, B)^{\top} &= (AB + BA)^{\top} = B^{\top} A^{\top} + A^{\top} B^{\top} = (A^{\top}, B^{\top}) \\ [A, B]^{\top} &= (AB - BA)^{\top} = B^{\top} A^{\top} - A^{\top} B^{\top} = -[A^{\top}, B^{\top}]\end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} X(t)^{\top} &= \left(\frac{d}{dt} X(t) \right)^{\top} \\ &= [(M, X(t)), X(t)]^{\top} \\ &= -[(M, X(t))^{\top}, X(t)^{\top}] \\ &= -[(M^{\top}, X(t)^{\top}), X(t)^{\top}] \\ &= [(M, X(t)^{\top}), X(t)^{\top}]\end{aligned}$$

ただし、5 行目の等号では M が歪対称であることを用いた。

また、 $X(0)^{\top} = X_0^{\top} = X_0$ より、微分方程式の解の一意性から $X(t) = X(t)^{\top}$ で $X(t)$ は対称である。

(2)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (Q(t)^{\top} Q(t)) &= \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right)^{\top} Q(t) + Q(t)^{\top} \left(\frac{d}{dt} Q(t) \right) \\ &= -Q(t)^{\top} (M, X(t)) Q(t) + Q(t)^{\top} (M, X(t)) Q(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

よって $Q(t)^{\top} Q(t) = Q(0)^{\top} Q(0) = I$ 、すなわち任意の $t \geq 0$ に対して $Q(t)$ は直交行列である。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(Q(t)^\top X(t)Q(t)) &= \left(\frac{d}{dt}Q(t)\right)^\top X(t)Q(t) \\
&\quad + Q(t)^\top \left(\frac{d}{dt}X(t)\right)Q(t) \\
&\quad + Q(t)^\top X(t) \left(\frac{d}{dt}Q(t)\right) \\
&= -Q(t)^\top (M, X(t))X(t)Q(t) \\
&\quad + Q(t)^\top [(M, X(t)), X(t)]Q(t) \\
&\quad + Q(t)^\top X(t)(M, X(t))Q(t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって $Q(t)^\top X(t)Q(t) = Q(0)^\top X(0)Q(0) = X_0$ なので、 $X(t) = Q(t)X_0Q(t)^\top$ である。

(3)

$Q(t)$ が直交行列であることから、

$$\begin{aligned}
|\lambda I - X(t)| &= |\lambda I - Q(t)X_0Q(t)^\top| \\
&= |Q(t)| |\lambda I - X_0| |Q(t)^\top| \\
&= |\lambda I - X_0|
\end{aligned}$$

よって、 $X(t)$ の固有多項式は X_0 の固有多項式と等しいため、 $X(t)$ は X_0 と同じ固有値を持つ。

(4)

帰納法で示す。

- $k = 0$ のとき X_0 は対称で $Q_0 = I$ なので ok。
- $k = l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) で X_l, Q_l が一意に定まり、 X_l が対称行列であるとする。

$$\frac{Q_{l+1} - Q_l}{\Delta t} = (M, X_l) \frac{Q_{l+1} + Q_l}{2} \Leftrightarrow \left(I - \Delta t \frac{(M, X_l)}{2}\right) Q_{l+1} = \left(I + \Delta t \frac{(M, X_l)}{2}\right) Q_l$$

X_l は対称、 M は歪対称なので、 $(M, X_l)^\top = -(M, X_l)$ 、すなわち (M, X_l) は歪対称行列である。歪対称行列の固有値は純虚数なので $|I - \Delta t \frac{(M, X_l)}{2}| \neq 0$ であり、 $I - \Delta t \frac{(M, X_l)}{2}$ は可逆である。したがって Q_{l+1} は一意に定まる。

$X_{l+1} = Q_{l+1}X_lQ_{l+1}^\top$ なので X_{l+1} も一意に定まり、

$$\begin{aligned}
X_{l+1}^\top &= (Q_{l+1}X_lQ_{l+1}^\top)^\top \\
&= Q_{l+1}X_l^\top Q_{l+1}^\top \\
&= Q_{l+1}X_lQ_{l+1}^\top \\
&= X_{l+1}
\end{aligned}$$

で X_{l+1} は対称行列である。

したがって任意の $k = 1, 2, \dots$ に対して、 X_k, Q_k が一意に定まり、 X_k は対称行列である。

(5)

任意の $k = 1, 2, \dots$ に対して、

$$\begin{aligned}
D_k &:= Q_k^\top Q_k - Q_{k-1}^\top Q_{k-1} \\
&= (Q_k - Q_{k-1})^\top Q_k + Q_{k-1}^\top (Q_k - Q_{k-1}) \\
&= \Delta t \left((M, X_{k-1}) \frac{Q_k + Q_{k-1}}{2} \right)^\top Q_k + \Delta t Q_{k-1}^\top (M, X_{k-1}) \frac{Q_k + Q_{k-1}}{2} \\
&= -\frac{\Delta t}{2} (Q_k^\top (M, X_{k-1}) Q_k - Q_{k-1}^\top (M, X_{k-1}) Q_{k-1})
\end{aligned}$$

D_k は対称かつ歪対称なので $D_k = D_k^\top = -D_k$ より $D_k = 0$ である。したがって $Q_k^\top Q_k = Q_0^\top Q_0 = I$ であり Q_k は直交行列である。
したがって、

$$\begin{aligned}
|\lambda I - X_k| &= |\lambda I - Q_k X_{k-1} Q_k^\top| \\
&= |Q_k| |\lambda I - X_{k-1}| |Q_k^\top| \\
&= |\lambda I - X_{k-1}| \\
&= |\lambda I - X_0|
\end{aligned}$$

よって、 X_k の固有多項式は X_0 の固有多項式と等しいため、 X_k は X_0 と同じ固有値を持つ。