2020 年 第 3 問

ジャンル: 代数
難易度: Easy

> **問題の概要**
> たまにでる代数。今回はイデアルの話。群の準同型定理における正規部分群が環における イデアルに対応すると覚えておけばよい。 イデアルの定義は覚えておこう。

(1)

J が L のイデアルとする。このとき、$\varphi^{-1}(J)$ が R のイデアルであることを示す。

1. 加法で閉じていること。$\forall x, y \in \varphi^{-1}(J), x + y \in \varphi^{-1}(J)$ を示す。
   $\varphi(x), \varphi(y) \in J$ なので、$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \in J$。よって、$\varphi(x + y) \in J$ であり、$x + y \in \varphi^{-1}(J)$。 ここで、$\varphi$ の準同型性を使った。
2. $\forall x \in R, \forall y \in \varphi^{-1}(J), xy \in \varphi^{-1}(J)$ を示す。
   $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ であり、$\varphi(x) \in L, \varphi(y) \in J$ と J がイデアルであることから、$\varphi(x)\varphi(y) \in J$。よって、$xy \in \varphi^{-1}(J)$

(2)

最初の考察として、任意の元 $p \in R$ に対して示すのではなく、任意の単項式 $p \in R$ について示せば十分である。任意の多項式は単項式の和なので、単項式を g_i と R' で表せれば多項式の分解は自然と定まる。

以下のアルゴリズムで単項式を分解する。

R の単項式 p が $x_i y_i$ を含んでいるなら、$h_i = \frac{p}{x_i y_i}$ として、$p = h_i(x_i y_i - 1) + h_i = h_i g_i + h_i$ と分解する。ここで、$h_i \in R'$ ならば終了。そうでなければ、h_i は $x_j y_j$ を含んでいるので、さらに分解する。分解される多項式の次数は単調減少するので、このアルゴリズムは多くとも n 回で必ず停止する。

よって示された。

(3)

環の準同型定理を使う。$\ker\varphi = I, \operatorname{Im}\varphi = L$ をいえばよい。

1. $\ker\varphi \supset I$ を示す。
   任意の $g \in I$ は各項に g_i の積を含む。$\varphi(g)$ は $\varphi(g_i) = 0$ より、$\varphi(g) = 0$。よって、$g \in \ker\varphi$
2. $\ker\varphi \subset I$ を示す。
   任意の $g \in \ker\varphi$ は (2) より $g = h_1 g_1 + \cdots + h_n g_n + r, r \in R'$ と分解できる。$\varphi(g) = \varphi(r) = 0$ だが、$r \in R'$ なので $r = 0$ である。よって g は $g_1, \ldots, g_n$ で生成されるので、$g \in I$。
3. $\operatorname{Im}\varphi = L$ を示す。
   任意の $l \in L$ について、x_i^{-k} を y_i^k に置き換えたものを φ で写すと l になる。よって、$l \in \operatorname{Im}\varphi$。

あとは環の準同型定理より、$R/I \simeq L$