

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

הפקולטה למדעי ההנדסה

המחלקה להנדסת מכונות

פיתוח מודלים דינמיים ומערכות בקרה לכליי טייס מרחפים עם נדנדות

חיבור זה מהווה חלק מהדרישות לקבלת תואר
מגיסטר למדעים בהנדסת מכונות

מאת: דולב כורם יחזקאל

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

הפקולטה למדעי ההנדסה

המחלקה להנדסת מכונות

פיתוח מודלים דינמיים ומערכות בקרה לכלי טייס מרחפים עם נדנדות

חיבור זה מהווה חלק מהדרישות לקבלת תואר
מגיסטר למדעים בהנדסת מכונות

מאת: דולב כורם יחזקאל

מנחה: ד"ר שי ארוגטי

תאריך: _____

חתימת המחבר: _____

תאריך: _____

אישור המנחה: _____

תאריך: _____

אישור יו"ר ועדת מוסמכים: _____

ספטמבר 2015

תשרי תשע"ו

תקציר

כלי טייס בלתי מאוישים נוטלים כיום חלק מהותי בביצוע משימות המיועדות לכלי טייס. כלים אלו משמשים לביצוע משימות צבאיות, כגון ריגול, מעקב ותקיפה, וכן למשימות אזרחיות כגון צילום, מיפוי שטחים ומשלוחים. בשנים האחרונות הולך וגובר העניין בכלי טייס בלתי מאוישים והם מהווים נושא מחקר נרחב. המחקר נחלק לתחומים רבים הכוללים: תצורות חדשות, מערכות בקרה ושיערוך, חוזק חומרים, אלקטרוניקה, יעילות אנרגטית, ביצועי טיסה ועוד.

עבודה זו עוסקת בפיתוח ובקרה של כלי טייס מרחפים בעלי תצורה חדשנית, אשר פותרת באופן חלקי או מלא בעיות הנעה הקיימות ברחפנים סטנדרטיים. בעיות אלה קשורות באי היכולת של רחפנים בתצורה סטנדרטית לבקר את כל שש דרגות החופש של כלי הטיס, באופן בלתי תלוי. חלק נכבד מהעבודה מציג מבנה ייחודי של רחפן המאפשר בקרה של חמש דרגות החופש של גוף כלי הטיס. כלי טייס זה מורכב מגוף עליו יושבים ארבעה מנועים בתצורה סטנדרטית של רחפן (Quad-copter), ונדנדה, אליה מחוברים שני מנועים נוספים (מה שמשייך כלי זה למשפחת ה-Hexa-copter). הנדנדה מחוברת אל גוף כלי הטיס באמצעות ציר (חופשי – ללא מנוע בציר אך עם חיישן זוויתי), והיא יכולה לשנות את הזווית שלה ביחס לגוף כלי הטיס. חלק זה של העבודה מציג את פיתוח המודל של כלי הטיס המיוחד, תכנון חוגי בקרה מתאימים לצורך טיסה במסלול רצוי, פיתוח אב טיפוס וביצוע ניסויי טיסה הממחישים את יתרונות הכלי על פני רחפנים סטנדרטיים ומהווים הוכחת ייתכנות של המבנה הייחודי. כלי טיס זה, עם נדנדה יחידה, מהווה בסיס לפיתוח כלי טייס נוספים מרובי נדנדות, בהם ניתן לבקר את כל שש דרגות החופש המרחביות של גוף כלי הטיס באופן בלתי תלוי. בהקשר זה העבודה מציעה שני מבנים ייחודיים נוספים, כאשר גם עבורם מפותח המודל הדינאמי, מוצג ניתוח של יכולות הטיסה והיתרונות ביחס לרחפן סטנדרטי, מוצג פיתוח מערכת בקרה מתאימה ופעולתה נבחנת בתנאי סימולציה.

התרומה העיקרית של עבודה זו הינה פיתוח מבנה חדש (למעשה משפחה חדשה) של רחפנים אשר מאפשר שליטה טובה יותר במצב כלי הטיס, ותמרון הכולל דרישה לבקרה של יותר מארבע דרגות חופש. פיתוח זה נועד לתת מענה לבעיה המוכרת הקשורה בכך שהרחפן הינו מערכת תת-ממונעת (Under Actuated). פיתוח משוואות התנועה של כלי טיס ייחודיים אלה (המורכבים ממספר גופים ודרגות חופש פנימיות), תכנון חוגי בקרה מתאימים וניתוח יכולות התנועה וההפעלה הייחודיים, מהווים תרומה נוספת. הקונספט המוצג כאן ומתבסס על תוספת נדנדות, מאפשר גם שיפור יכולות התמרון של כלי טיס נוספים כגון כלים עם כנף קבועה.

כאמור, חלק נכבד של העבודה מציג פיתוח חוגי בקרה לכלי הטיס הייחודיים. המטרה בפיתוח זה הינה להתאים את שיטת הבקרה למודל (או למבנה) הייחודי של כלי הטיס הכולל גם את זוויות הנדנדה בנוסף למקום ולמצב הזוויתי של גוף כלי הטיס. מערכות הבקרה פותחו בשיטת ה-Integral-Backstepping. בעבודה מוצגות סימולציות המראות את היתרונות של כלי הטיס ואת יכולות התמרון המיוחדות. בנוסף, מוצגות תוצאות של שני ניסויי טיסה שבוצעו בסביבה לא סטטילית (עם כלי טיס עם נדנדה יחידה), וממחישים את האפשרות לבקר בכלי טייס זה חמש דרגות חופש באופן בלתי תלוי.

כפי שהוזכר, תרומת העבודה כוללת גם פיתוח שיטות הפעלה מתאימות לכלי הטיס הייחודיים. שיטות אלה מנצלות את היתרונות הקיימת במבנה של כלי הטיס המוצגים. בגלל יתירות זו ישנן מספר תצורות טיסה אפשריות שונות להטסת כלי הטיס וכן קיים חופש בבחירת פרמטרים מסוימים במערכת הבקרה.

העבודה מציגה את תצורות הטיסה השונות יחד עם היתרונות והחסרונות של כל תצורה, בליווי תוצאות סימולציה מתאימה. כמו כן מוצג כיצד החופש בבחירת פרמטרים במערכת הבקרה קשור בתנועת הנדנדה.

נושא נוסף שנבחן בעבודה זו הינו היעילות האנרגטית המתקבלת כתוצאה מהשימוש במבנה הייחודי. תוצאות הבדיקה שנערכה מלמדות כי עבור כלי טייס עם נדנדה יחידה, לא קיימת יעילות אנרגטית. מהצד השני, גם הנחיתות האנרגטית אינה משמעותית ובתצורות טיסה מסוימות אינה קיימת כלל. כפי שנטען קודם, במסגרת הקונספט הנדון (כלומר, רחפנים עם נדנדות) מוצגים גם שני מבנים יותר מורכבים עם יותר מנדנדה אחת. הכלי הראשון בהקשר זה הינו Octo-copter עם שמונה מנועים וארבע נדנדות (כאשר כל זוג מנועים נמצא על נדנדה). פיתוח המודל הדינמי ומשוואות התנועה של כלי טייס זה התבסס על הפיתוח של כלי הטייס עם נדנדה יחידה וכך גם מערכת הבקרה. למערכת הבקרה הוכנסו השינויים הדרושים עקב ריבוי הנדנדות והיא מאפשרת בקרה של כל שש דרגות החופש של גוף כלי הטייס (מיקום ומצב זוויתי) באופן בלתי תלוי. עבור כלי טייס זה בוצעו סימולציות המראות את יכולות הטיסה הייחודיות שלו, לדוגמא, טיסה במהופך (כשהגוף פונה כלפי מטה) או טיסה כשהגוף נוטה בתשעים מעלות (על צדו). הכלי האחרון המוצג הוא Hexa-copter עם שישה מנועים ושלוש נדנדות, כך שכל שני מנועים שייכים לנדנדה אחת. כלי טיס זה מוצג באופן יותר תמציתי.

מבנה העבודה נתון באופן הבא. פרק 1 מציג את המוטיבציה לפיתוח כלי הטייס הייחודיים ולרעיון של שימוש בנדנדות. בנוסף מוצגים עקרונות הבקרה של רחפן מסוג Quad-copter וכלי טייס נוספים שפותחו על בסיסו. פרק זה מציג גם סקירה של מחקרים רלוונטיים אחרים המציעים פתרונות שונים לתנועה המוגבלת של רחפן סטנדרטי עקב היותו מערכת תת ממונעת (Under-actuated). פרק 2 עוסק בהצגת כלי הטייס עם נדנדה יחידה, האופן בו הוא בנוי, האילוצים שמכתיבה מערכת ההנעה הייחודית שלו ומבנה האבטיפוס. פרק 3 עוסק בפיתוח משוואות התנועה של כלי הטייס עם נדנדה יחידה. בפרק מוצגות ההנחות ששימשו בפיתוח המודל, פיתוח המודל הקינמטי, פיתוח המודל הדינאמי בשיטת ניוטון-אווילר ובשיטת אוילר-לגראנז'. פרק 4 עוסק בפיתוח מערכות הבקרה של כלי הטייס עם נדנדה יחידה, והוא כולל את מערכת בקרת היציבות ומערכת בקרת המסלול. בפרק מוצגות סימולציות המראות את ביצועי כלי הטייס ומערכות הבקרה. פרק 5 מציג את בדיקת היתרונות או החסרונות האנרגטיים של כלי הטייס עם נדנדה יחידה. בפרק 6 מוצגים שני ניסויי טיסה בסביבה לא סטרילית (מחוץ למבנה) בהם ניתן לראות את האפשרות לבקר חמש דרגות חופש באופן בלתי תלוי בכלי הטייס עם נדנדה יחידה. פרק 7 עוסק בפיתוח של כלי טייס מרובי נדנדות. בפרק מוצגים פיתוח משוואות התנועה, מערכות הבקרה וכן סימולציות המדגימות תנועה של כלי הטייס כאשר כל שש דרגות החופש של גוף כלי הטייס מבוקרות באופן בלתי תלוי. פרק 8 מציג סיכום של העבודה והצעות למחקר עתידי.

תודות

ברצוני להודות לד"ר שי ארוגטי על התמיכה, העזרה וההנחיה במהלך המחקר. אני מודה לאשתי על ההבנה, התמיכה, ההתעניינות והעידוד במשך כל לימודי. לבסוף אני רוצה להודות לחבריי למעבדה וללימודים על העזרה והאוזן הקשבת.

תוכן עניינים

1	מבוא	1
1	1.1 מוטיבציה ומטרות	1
2	1.2 רקע	2
2	1.2.1 כלי טייס לא מאוישים (UAVs)	2
2	1.2.2 כלי טיס מסוג Quad-copter	2
4	1.3 סקר ספרות	4
8	2. תיאור כלי הטייס - Single Seesaw Hexa-Copter	8
11	3. פיתוח משוואות התנועה של כללי טיס עם נדנדה אחת	11
11	3.1 פיתוח המודל הקינמטי	11
13	3.2 פיתוח המודל הדינאמי	13
15	3.3 פיתוח משוואות התנועה לפי אוילר לגראנז' (Euler Lagrange)	15
19	3.4 פיתוח משוואות התנועה לפי ניוטון אוילר (Newton Euler)	19
23	4. פיתוח מערכות בקרה	23
23	4.1 בקרת יציבות	23
24	4.1.1 תכנון בקר יציבות לזוויות הכלי, Attitude control	24
26	4.1.2 סימולציות עבור בקרי יציבות לזוויות הכלי	26
28	4.1.3 תכנון בקר יציבות לגובה הכלי, Altitude control	28
30	4.1.4 סימולציה עבור בקר יציבות הגובה	30
33	4.2 בקרת מסלול	33
33	4.2.1 בקרת מסלול עבור תנועה בכיוון ציר x	33
35	4.2.2 בקרת מסלול עבור תנועה בכיוון ציר y	35
36	4.2.2.1 בחירת הכוח F_s	36
37	4.2.3 סימולציות עבור בקרת מסלול	37
42	4.2.4 הרחבת בקרי המסלול עבור זווית סבסוב שונה מאפס	42
43	4.2.5 סימולציות עבור בקרי המסלול עם זווית סבסוב משתנה	43
45	4.3 צורות טיסה נוספות המנצלות את דרגת החופש הנוספת	45
50	5. בדיקת היתרונות האנרגטיים	50
55	6. ניסויי טיסה	55
55	6.1 מערכת הניסוי	55
57	6.2 תוצאות ניסויים	57

64הרחבת קונספט הנדנדות לכלי טייס מרובי נדנדות	7.
64Four – Seesaw Octo-copter	7.1
64מודל קינמטי	7.1.1
67מודל דינאמי	7.1.2
70פיתוח משוואות התנועה לפי אוילר לגרנז' (Euler Lagrange)	7.1.3
73שש דרגות חופש בלתי תלויות	7.1.4
75מערכת הבקרה	7.1.5
86Hexa-copter עם שלוש נדנדות	7.2
89מערכת הבקרה	7.2.1
92סיכום ומחקר עתידי	8.
92סיכום	8.1
92המלצות למחקר עתידי	8.2
94רשימת מקורות	
97נספחים	
97נספח 1 – פיתוח משוואות התנועה כאשר הזווית של הנדנדה מוגדרת ביחס לגוף	
99נספח 2 – פיתוח משוואות התנועה בעזרת ניוטון אוילר עבור זוויות קטנות	
100נספח 3 - בניית המטריצה D עבור רחפן עם 4 נדנדות	
104נספח 4 – הוכחת יציבות של בקר מסלול בכלי טיס עם נדנדה אחת	

רשימת איורים

3	איור 1.1 : סכמת הפעלה של Quadrotor
4	איור 1.2 : כלי הטייס הראשון מסוג quadrotor של Louis Breguet
5	איור 1.3 : X4 Flyer
6	איור 1.4 : סוגים שונים של כלי טייס
6	איור 1.5 : עיצוב חדש ל-Quadrotor
7	איור 1.6 : Long Y. and Cappelleri D. omnicopter
8	איור 1.7 : פלטפורמה חדשה לכלי טייס מרחף עם שלושה זוגות מנועים
9	איור 2.1 : seesaw hexacopter
10	איור 3.1 : כוחות ומומנטים במערכת הגוף
21	איור 3.2 : התנהגות כלי הטייס עבור מודל לפי אוילר לגרנז'
21	איור 3.3 : התנהגות כלי הטייס עבור מודל לפי ניוטון אוילר
23	איור 4.1 : שילוב אינטגרל בשיטת בקרת Backstepping
	איור 4.2 : תוצאת העקיבה של זווית הגלגול אחרי זווית רצויה המושגת באמצעות בקרת יציבות בשיטת Integral Backstepping
27	איור 4.3 : תוצאת העקיבה של זווית העלרוד אחרי זווית רצויה המושגת באמצעות בקרת יציבות בשיטת Integral Backstepping
27	איור 4.4 : תוצאת העקיבה של זווית הסבסוב אחרי זווית רצויה המושגת באמצעות בקרת יציבות בשיטת Integral Backstepping
28	איור 4.5 : תוצאות העקיבה של זווית הנדנדה אחרי זווית רצויה באמצעות בקרת יציבות בשיטת Integral Backstepping
28	איור 4.6 : תוצאת עקיבה של כלי הטייס אחרי גובה רצוי המושגת באמצעות בקרת בשיטת Integral Backstepping
30	איור 4.7 : מאמצי הבקרה בבקרת הגובה
31	איור 4.8 : התייצבות כלי הטייס על גובה רצוי באמצעות בקר מסוג Backstepping
32	איור 4.9 : התייצבות כלי הטייס על גובה רצוי באמצעות בקר מסוג Integral Backstepping
32	איור 4.10 : דיאגרמת בלוקים של בקרת כלי הטייס
33	איור 4.11 : עקיבה אחרי זווית גלגול רצויה
38	איור 4.12 : ניווט לנקודה רצויה על ציר x
38	איור 4.13 : ניווט לנקודה רצויה על ציר y

39	איור 4.14 : ניווט לנקודה רצויה על ציר z
40	איור 4.15 : מעקב אחרי מסלול על ציר x
40	איור 4.16 : מעקב אחרי מסלול על ציר y
41	איור 4.17 : מעקב אחרי מסלול על ציר z
42	איור 4.18 : השגיאה בין הנקודה עליה" מצביע "כלי הטייס לבין הנקודה הרצויה.....
43	איור 4.19 : זווית הסבסוב במהלך הסימולציה.....
44	איור 4.20 : ניווט לנקודה רצויה על ציר x כשזווית הסבסוב משתנה.....
44	איור 4.21 : מעקב אחרי מסלול על ציר y כשזווית הסבסוב משתנה.....
44	איור 4.22 : מעקב אחרי זווית גלגול רצויה כשזווית הסבסוב משתנה.....
45	איור 4.23 : דיאגרמת הכוחות המספקים התנועה הרצויה.....
47	איור 4.24 : טיסה לנקודה בציר ה- x ללא הטיית גוף כלי הטייס.....
47	איור 4.25 : טיסה לנקודה בציר ה- y ללא הטיית גוף כלי הטייס.....
47	איור 4.26 : מעקב אחרי מסלול בציר z ללא הטיית גוף כלי הטייס.....
48	איור 4.27 : זוויות כלי הטייס בעת עקיבה אחר מסלול רצוי.....
49	איור 4.28 : תאוצות הכלי במצבים השונים.....
49	איור 4.29 : מיקום כלי הטייס במצבים השונים.....
50	איור 5.1 : מערכת כוחות.....
52	איור 5.2 : מאמצי הבקרה כאשר התנועה מתקבלת על ידי הנדנדה בלבד.....
52	איור 5.3 : מאמצי הבקרה כאשר התנועה מתקבלת על ידי הנדנדה והגוף יחד.....
55	איור 6.1 : מערכת הניסוי לפני המראה.....
56	איור 6.2 : לוח הבקרה מסוג AUAV3.....
57	איור 6.3 : תמונה בזמן ניסוי הטיסה הראשון.....
58	איור 6.4 : תנועה מרחבית בעת ניסוי טיסה מאוזנת.....
59	איור 6.5 : מיקום כלי הטייס בעת ניסוי טיסה מאוזנת.....
59	איור 6.6 : זוויות כלי הטייס בעת ניסוי טיסה מאוזנת.....
61	איור 6.7 : כלי הטייס בעת ביצוע הניסויים.....
62	איור 6.8 : מיקום כלי הטייס בעת ניסוי שמירה על מיקום.....
62	איור 6.9 : זוויות כלי הטייס והנדנדה בעת ניסוי שמירה על מיקום.....
67	איור 7.1 : 4 seesaw octo-copter.....
77	איור 7.2 : בקרת יציבות של זוויות כלי טייס עם ארבע נדנדות.....
83	איור 7.3 : עקיבה אחר שש דרגות חופש.....
85	איור 7.4 : טיסה במצבים קיצוניים.....
87	איור 7.5 : 3 seesaws hexacopter.....

רשימת סימנים

סימון	תיאור	יחידות
ϕ	זווית הגלגול	[rad]
θ	זווית העלרוד	[rad]
ψ	זווית הסבסוב	[rad]
α	הזווית בין הנדנדה לגוף	[rad]
β	הזווית של הנדנדה ביחס לעולם	[rad]
\hat{b}	מערכת הצירים הצמודה לגוף	
\hat{e}	מערכת הצירים האינרציאלית	
\hat{e}', \hat{e}''	מערכות צירים בין מערכת העולם למערכת הגוף	
x, y, z	קואורדינטות מרחביות	[m]
$F_{i=1...6}$	כוחות ממנועי כלי הטייס	[N]
$\tau_{i=1...6}$	מומנטים מסיבובי המנוע	[Nm]
R	מטריצת הסיבוב	
$\Omega = [p \quad q \quad r]^T$	מהירות זוויתית במערכת הגוף	[rad/sec]
$\omega_e = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$	מהירות זוויתית במערכת העולם	[rad/sec]
J_ω	היעקוביאן הרוטציוני	
ω_i	מהירות סיבובי המנוע	[rad/sec]
γ_1	קבוע פרופורציה בין מהירות המנוע והכוח	$[\text{sec}^2 \cdot N]$
γ_2	קבוע פרופורציה בין מהירות המנוע והמומנט	$[\text{sec}^2 \cdot Nm]$
l	המרחק בין המנועים למרכז המסה	[m]
\bar{q}	קואורדינטות מוכללות	
ξ	וקטור הקואורדינטות המרחביות	
η	וקטור זוויות הכלי	
σ	וקטור זוויות הכלי וזווית הנדנדה	
T	האנרגיה הקינטית	[J]
U	האנרגיה הפוטנציאלית	[J]
I_f	טנזור האינרציה של הגוף במערכת העולם	$[kg \cdot m^2]$
I_s	טנזור האינרציה של הנדנדה במערכת העולם	$[kg \cdot m^2]$

סימון	תיאור	יחידות
I_b	טנזור האינרציה של הגוף במערכת הגוף	$[kg \cdot m^2]$
I_α	טנזור האינרציה של הנדנדה במערכת הצירים הצמודה לנדנדה	$[kg \cdot m^2]$
m	מסת הגוף	$[kg]$
g	תאוצת הכובד	$[m / s^2]$
L	הלאגראז'יאן	$[J]$
F_ξ	וקטור הכוחות במערכת האינרציאלית	$[N]$
t	זמן	$[sec]$
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	רכיבי טנזור האינרציה של הגוף במערכת הגוף	$[kg \cdot m^2]$
I_{xs}, I_{ys}, I_{zs}	רכיבי טנזור האינרציה של הנדנדה במערכת הצמודה לנדנדה	$[kg \cdot m^2]$
F_b	סכום הכוחות שמפעילים מנועי הגוף	$[N]$
F_s	סכום הכוחות שמפעילים מנועי הנדנדה	$[N]$
\bar{U}	כניסות בקרה	
e	שגיאה בין אות רצוי למצב האמיתי	
χ	אינטגרל על השגיאה e	
c_1, c_2, k	קבועי בקרה	
k_p, k_D, k_I	קומבינציה של קבועי הבקרה	
$I_{3 \times 3}$	מטריצת יחידה בגודל 3X3	

אינדקסים

e - מערכת העולם.

b - מערכת הגוף.

x, y, z - מתייחס לצירי המערכת.

ϕ, θ, ψ - מתייחס לזוויות הכלי או לצירים סביבם הזוויות סובבות.

α, β - מתייחס לזוויות הנדנדה או לציר סביבו היא מסתובבת.

\max - זווית מקסימלית.

η - מתייחס לווקטור זוויות הכלי.

σ - מתייחס לווקטור זוויות הכלי וזוויות הנדנדות.

ξ - מתייחס לווקטור הקואורדינטות המרחביות.

d - מצב רצוי.

w - אות רצוי.

0 - מצב התחלתי, תנאי התחלה.

1. מבוא

בשנים האחרונות ישנו גידול משמעותי בשימוש בכלי טייס בלתי מאוישים. כלים אלו משמשים במגוון רחב של משימות, החל מהתחום הצבאי, למטרות מעקב ואיסוף מודיעין ועד לשימוש מסחרי כגון משלוחים, צילום וצעצועים. הפיתוח והמחקר בכלי טייס בלתי מאוישים הינו נרחב, בשל מגוון המשימות שכלים אלו יכולים לבצע וכן בשל התפתחות הטכנולוגיה, מזעור רכיבים וצמצום עלויות הפיתוח. מחקרים רבים עוסקים בשיפור יכולות הטיסה של כלי טייס אלו, ובכך להגדיל את מגוון המשימות שיכולים לבצע. עבודה זו עוסקת בשיפור יכולות הטיסה של רחפן על ידי תוספת נדנדות (אלה מאפשרות הטיית כוח הדחף של המנוע ביחס לגוף). קונפיגורציה ייחודית זו מאפשרת לכלי הטייס דרגות חופש בלתי תלויות נוספות (ללא המחיר של תוספת מנועים שאינם תורמים באופן ישיר לכוח הדחף).

1.1. מוטיבציה ומטרות

לכלי טייס מסוג Quad-copters הנדחפים על ידי ארבעה מנועים וכן לכלי טייס דומים עם מנועים נוספים ישנן שש דרגות חופש (כמו לכל גוף קשיח במרחב), שלוש דרגות חופש לייצוג המקום של הכלי, ושלוש דרגות חופש לייצוג המצב הזוויתי. אך הפעלה של כל שש דרגות החופש באופן בלתי תלוי אינה אפשרית בכלים אלה, לכן הם נקראים מערכות תת ממונעות (Under-actuated). מערכת תת-ממונעת מוגדרת בעבודתם של Xavier p. and La Hera M. (2011) כך שבמשוואות התנועה דרגת מטריצת המקדמים של הכוחות החיצוניים קטנה ממספר דרגות החופש, כלומר לא ניתן לשלוט על ידי הכוחות והמומנטים של המנועים בכל דרגות החופש בנפרד. למעשה בתנועה במרחב יש לכלי טייס אלו רק ארבע דרגות חופש שניתן לשלוט בהן בנפרד. על מנת לפתור בעיה זו ולהוסיף דרגות חופש נוספות, פותח בעבודה זו קונספט ייחודי המאפשר שליטה בדרגות חופש נוספות. בתחילה נבחנה האפשרות להוסיף דרגת חופש אחת ופותח כלי טייס עם נדנדה אחת מסוג Hexa-copter (אב טיפוס זה התבסס על מסגרת כלי הטייס שתכננו ובנו נקש ואליה (2013) במסגרת פרויקט שנה ד'). כלי הטייס ממונע על ידי שישה מנועים, ארבעה מנועים מחוברים לגוף כלי הטייס, ושני מנועים נוספים מחוברים על ידי ציר במרכז הכובד של הכלי. חלק זה יכול לשנות את הזווית ביחס לגוף. תצורה זו של הכלי מאפשרת לו כאמור דרגת חופש מבוקרת נוספת. לדוגמא, מתאפשרת טיסה (כלומר שינוי במיקום) כאשר גוף הכלי נשאר אופקי (נניח לצורך צילום אווירי) או שינוי מצב זוויתי של גוף הכלי מבלי לשנות את מיקומו (ועוד תצורות טיסה נוספות). כלי הטייס עם נדנדה אחת מהווה בסיס לכלים מרובי נדנדות אשר מוצגים בהמשך העבודה, כלי טייס אלו מאפשרים שליטה בדרגות חופש נוספות. עבודה זו מהווה בסיס לפיתוח כלי טייס עם נדנדות, כאשר כלי הטייס עם נדנדה יחידה ממחיש את הקונספט, ואת התרומה של מנגנון הנדנדה להפרדת הצימוד בין דרגות החופש, ואילו, שני כלי הטייס מרובי הנדנדות (המוצגים בהמשך) מהווים חלון למגוון האפשרויות הטמונות בקונספט זה. במשפחת כלי הטייס המרחפים עם נדנדות מתאפשרת שליטה רחבה יותר בדרגות החופש של כלי הטיס, הבאה לידי ביטוי ביכולת תמרון עדיפה בהשוואה לרחפנים סטנדרטיים.

1.2. רקע

בפרק זה נבחן את התפתחות כלי הטייס הלא מאוישים (UAV), נכיר את ה-Quad-copter ואת אופן פעולתו ונראה כלי טייס נוספים שהתפתחו על בסיס ה-Quad-copter הסטנדרטי.

1.2.1. כלי טייס לא מאוישים (UAVs)

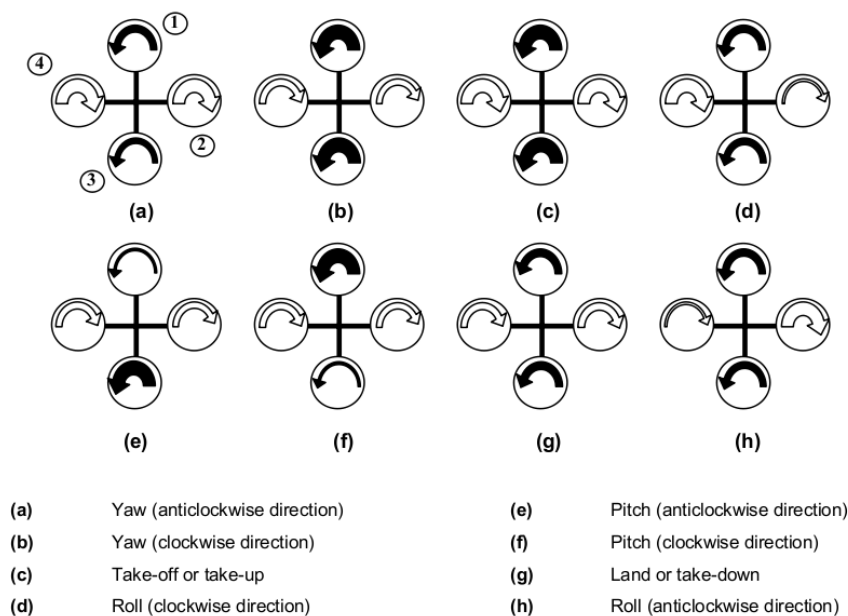
כלי טייס לא מאויש (UAV) מוגדר, לפי משרד ההגנה האמריקאי, ככלי אווירי ממונע הטס באמצעות כוחות אווירודינאמיים במשך רוב מסלולו ומונחה ללא צוות הנמצא עליו. הכלי יכול לשמש לשימושים חוזרים או שניתן להקריבו ויכול לטוס באופן עצמאי או על ידי שליטה מרחוק (u.s D.O.D 2002). כלי טייס לא מאוישים משמשים כיום הן למטרות צבאיות כגון איסוף מודיעין, מעקב, תקיפה ועוד, והן למטרות אזרחיות כגון צילום, מחקר, תקשורת ועוד. יתרונם הברור של כלי טייס אלו הוא היעדר הסכנה לחיי אדם בזמן טיסה. יתרונות נוספים הינם האפשרות להקטנה וחיסכון במשקל של הכלי, מה שמאפשר טיסות ארוכות ורחוקות יותר, תאוצות גבוהות ויכולת טיסה באופן עצמאי על ידי תכנות מראש. ה-UAV הראשון הומצא על ידי האמריקנים לורנס ואלמר ספרי בשנת 1916, פיתוח זה נחשב לטייס האוטומטי הראשון ולשימוש הראשון של Attitude control בכלי טייס (Kenso, 2007). בשנת 1941 הוזמן על ידי צבא ארצות הברית הכטב"ם (כלי טייס בלתי מאויש) הראשון שיוצר בייצור המוני ה-QQ-2A. עם התפתחות הטכנולוגיה בתחום גלי הרדיו התפתחו גם הכטב"מים הנשלטים מרחוק, ובשנות השישים והשבעים נכנסו למערכי הריגול של צבא ארצות הברית בשל גודלם הקטן והמבנה שלהם המאפשר חתימת רדאר נמוכה. כלים אלו פעלו בווייטנאם סין וצפון קוריאה. בשנות השמונים הכטב"מים נכנסו ככלים אופרטיביים בשדה הקרב כאשר ישראל היא החלוצה בתחום זה ובעקבותיה החלה עלייה משמעותית בהתעניינות בכטב"מים בשדה הקרב. כלי טייס לא מאוישים הנמצאים בשדה הקרב נחלקים לשתי קבוצות עיקריות. הראשונה כוללת את עוקבי הלחימה, אלה חגים מעל שדה הקרב ומספקים תמונה עדכנית של שדה הקרב. הקבוצה השנייה כוללת כלים המשמשים למודיעין טקטי, אשר טווח זמן הטיסה שלהם גדול משמעותית, כלים אלו אחראים על התמונה הרחבה יותר של שדה הקרב (Ming, 2003). כיום קיימת קבוצה משמעותית נוספת של כטב"מים אשר מיועדים לתקיפה. עם השנים הטכנולוגיה התקדמה וכך גם הפיתוחים בתחום כלי הטיס הלא מאוישים. כיום ניתן למצוא כלי טייס בלתי מאוישים בעלי יכולות רחבות ומגוונות וכן סוגים שונים של כלי טייס המשמשים הן לצורכי צבא והן לצרכים אזרחיים. הכניסה של כלי טיס אלה לשוק האזרחי קיבלה תאוצה בשנת 1999 כאשר רשות התעופה של ארצות הברית יצרה הבחנה בין מטוסים לכלים אוויריים (Newcome, 2004), ובכך חסכה את הצורך באישור עבור כל טיסה של כלי טיס לא מאויש.

1.2.2. כלי מסוג Quadrotor

כאמור כלי הטייס הלא מאוישים משמשים למגוון רחב של משימות ולכן קיימים סוגים שונים של כלי טייס. ה-Quad-copter הינו כלי טייס בלתי מאויש מסוג VTOL (Vertical Take Off and Landing)

המסוגל לבצע המראה ונחיתה בצורה אנכית, בדומה למסוק. כלי זה הפך פופולרי במיוחד בשל המבנה הפשוט שלו, יכולת התמרון ועלות הייצור הנמוכה.

ה-Quad-copter בנוי מארבעה מנועים הנמצאים על קצוות המסגרת שלו במרחק שווה ממרכז המסה של הכלי. בדרך כלל המנועים נמצאים על מסגרת בצורת אקס או פלוס (+ או x). על מנת לבטל את המומנטים שמפעילים הרוטורים מעצם סיבובם, זוג מנועים נגדיים מסתובב בכיוון אחד וזוג המנועים השני מסתובב בכיוון ההפוך, כך שסכום המומנטים על הכלי מתאפס. בשהייה באוויר או בתנועה אנכית כל המנועים מסתובבים במהירות זהה, כך שלמעשה כל אחד מהם אחראי על רבע מכוח הדחף. על מנת לשהות באוויר סך כל הכוחות של המנועים יהיה שווה לכוח המשיכה ובכדי להרים את הכלי סך הכוחות צריך להיות גדול מכוח המשיכה, כפי שניתן לראות באיור 1.1 (c)(g). על מנת ליצור זווית גלגול וכתוצאה מכך גם תנועה אופקית, על זוג המנועים הימני והשמאלי לפעול במהירויות שונות, כך שייווצר מומנט על הכלי. הכלי ייטה על צדו וכך חלק מכוח הדחף ישמש לתנועה אופקית, איור 1.1 (d)(h). כמובן שיש לשמור על מספיק כוח דחף בכדי שהכלי לא יאבד גובה וכן על היחס בין המהירויות של זוגות המנועים הנגדיים בכדי שלא תתקבל זווית סבסוב. בכדי ליצור תנועה על הציר השני נבצע את אותה פעולה עם המנועים הקדמי והאחורי וניצור זווית עלרוד אשר תאפשר לנו תנועה קדימה ואחורה, איור 1.1 (e)(f). במידה וכן נרצה לסובב את הכלי בזווית הסבסוב, נשאיר את המהירויות של שני מנועים נגדיים שווה אחד לשני, אך שונה מזוג המנועים השני, איור 1.1 (a)(b). כמובן שבכל תצורת טיסה יש תמיד להתחשב בכוח העילוי שהמנועים מספקים בכדי שהכלי לא יאבד גובה כשאיינו רוצים בכך.

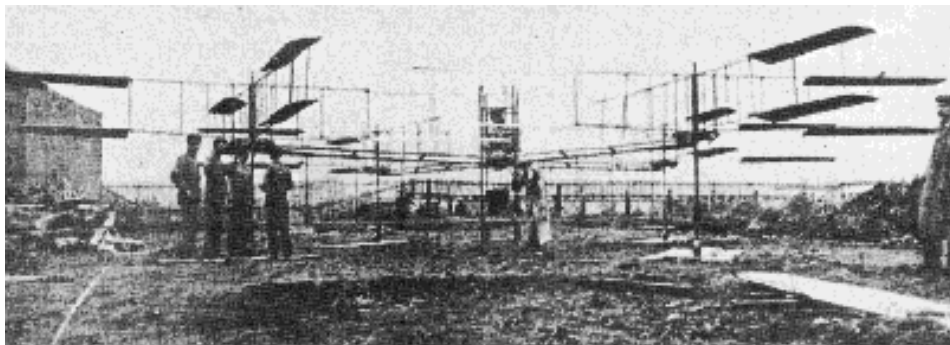


איור 1.1 : סכמת הפעלה של Quadrotor [11].

ניתן לראות, אם כן, כי הדינמיקה של ה-Quad-copter פשוטה ועל ידי שינוי במהירויות המנועים ניתן ליצור תנועה לכל כיוון רצוי, זאת בניגוד למסוק בו יש צורך לשנות את זווית התקיפה של הלהבים. בזכות שילוב של ארבעה מנועים קטנים עם מדחפים קטנים (יחסית ללהבים של המסוק), מתאפשרת, מצד אחד

יכולת הרמת משקל טובה ביחס לגודל הכלי ומצד שני יכולת תמרון טובה המאפשרת טיסה בקרבת עצמים שונים.

כלי הטייס הראשון מסוג Quad-copter נבנה לראשונה בשנת 1907. בערך באותו הזמן נבנה כלי מסוג Quad-copter על ידי בונה אופניים צרפתי בשם Paul Cornu וכן על ידי מדען צרפתי, Louis Breguet. כלי טייס אלו היו כלים מאוישים וכללו ארבעה מדחפים. כלי הטייס של Cornu הופעל על ידי מנוע בנזין ותמסורת רצועות אך המנוע בעל 24 כוחות הסוס היה חלש בכדי לספק את הכוח הדרוש לטיסה ותמרון. כלי הטייס של Breguet כלל מנוע של 40 כוחות סוס ובטיסת המבחן הראשונה דווח כי כלי הטייס נושא אדם לגובה מטר וחצי (Leishman 2000).

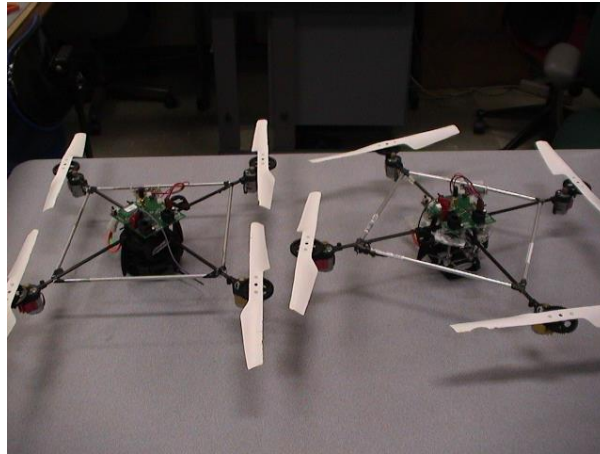


איור 1.2: כלי הטייס הראשון מסוג Quadrotor של Louis Breguet.

מלבד ניסיונות מעטים בתחילת המאה ה-20, אשר נזנחו עקב עלויות גבוהות וביצועים לא מספקים, לא נעשו עבודות נוספות על ה-Quad-copter עד לתחילת שנות השמונים אז החלה ההתעניינות בכלי טייס זה בתור כלי קטן ולא מאויש. במרוצת השנים נבנו כלי טייס רבים מסוג Quad-copter. ככל שהטכנולוגיה השתפרה כך גם היכולת לבנות כלים קלים יותר ובעלי עוצמה גדולה יותר וגם התקשורת עם כלי הטייס הלא מאויש נעשתה פשוטה יותר.

1.3. סקר ספרות

הדינמיקה הפשוטה של ה-Quad-copter והאפשרות לבנות אותו בפשטות ובזול הפכו אותו לכלי אטרקטיבי גם בעיני קהילת המחקר. המחקרים על כלי טייס מרחפים עוסקים בשני תחומים עיקריים. התחום הראשון הינו שיטות בקרה ושערוך מתקדמות, והתחום השני מתמקד בשיפור ושינוי פלטפורמת הרחפן. חוקרים רבים משתמשים בפלטפורמה של ה-Quad-copter על מנת לתכנן ולבחון שיטות בקרה שונות. באוניברסיטת סטנפורד פיתחו את ה-X4-Flyer והוא משמש ללימוד ובחינה של מערכות בקרה שונות כגון backstepping ו-Reinforcement Learning (Waslander & Hoffmann, 2005), וכן שיתוף פעולה בין כלים והיכולת להתחמק ממכשולים (Hofmann et al, 2004).



איור 1.3 : X4 Flyer

בתחום המחקר הקשור בשינוי הפלטפורמה עצמה קיימים פיתוחים רבים. השינויים המוצעים נועדו בכדי לאפשר כליי טייס עם יכולות טיסה טובות יותר, כושר נשיאה גדול יותר, עמידות לתקלות (שרידות), חיסכון באנרגיה, חיסכון במשקל, חיסכון בעלויות ועוד מגוון תחומים. צורות פופולריות נוספות של רחפנים משתמשות במספר שונה של מנועים ובסידור שונה של המנועים, לדוגמא,

- Y4 – כלי בעל ארבעה מנועים המסודרים בצורת Y כאשר בחלק האחורי (זנב) ישנם שני מנועים המסתובבים בכיוונים הפוכים. המנוע הנוסף בזנב נועד למנוע את סיבוב הכלי בכיוון זווית הסבסוב.

(Shafayat H 2012)

- Penta-copter – כלי בעל חמישה מנועים. זו היא אינה צורה פופולרית לבניית UAV מכיוון שהיא אינה סימטרית ואינה עדיפה מבחינת יכולות הטיסה על פני כלים אחרים. יתרון לקונפיגורציה של חמישה מנועים היא הזווית הרחבה בקדמת הכלי המאפשרת למקם בקלות מצלמה ללא חשש שהמדחפים יסתירו אותה.

(Santhosh L.M. and Chandrashekar T.K 2015)

- Hexa-copter – זהו כלי בעל שישה מנועים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המסה. עיקרון הפעולה שלו דומה לעיקרון הפעולה של ה-Quad-copter, אך התוספת של המנועים מאפשרת לו יכולת נשיאה גדולה יותר וכן יתירות מסוימת במערכת ההינע כך שאם אחד המנועים מתקלקל עדיין מתאפשרת טיסה. (Leishman R. 2012)

- Y6 – כלי בעל 6 מנועים המסודרים בשתי קומות בצורת Y. המנועים בקומה העליונה מסתובבים בכיוון הפוך למנועים בקומה התחתונה וכך מבטלים את המומנטים על הכלי. כלי זה הינו בעל יכולת הרמה דומה ל-Hexa-copter אך מסודר במבנה יותר צפוף, עם זאת היעילות של המנועים נפגעת כאשר הם נמצאים אחד מעל השני. (Czyba R. 2015).

- Octo-copter – כלי בעל שמונה מנועים הדומה בפעולתו ל-Quad-copter ול-Hexa-copter אך עם יכולת הרמה גבוהה יותר, וכן יתירות גדולה יותר במערכת ההינע (לכן יש לו את היכולת להמשיך לפעול גם עם מספר מנועים מקולקלים). (Meng J.E. 2013).



איור 1.4 : סוגים שונים של כליי טייס, מימין למעלה נגד כיוון השעון : Y4, Penta copter, Hexa copter, Y6, octacopter.

על אף המבנה הפשוט של ה- Quad-copter הוא אינו יעיל יותר ממסוק מבחינה אנרגטית וזאת משום שהמדחפים הקטנים של הרחפן פחות יעילים מהרוטור הגדול של המסוק. מבנה הרוטור הראשי של המסוק מסובך ודורש רכיבים רבים, אך הוא יעיל אנרגטית ומאפשר תמרון רחב. לעומתו ה- Quad-copter פשוט לבניה ואינו כולל רכיבים נוספים פרט לרכיבי הגוף, המנועים ורכיבי הבקרה. במסגרת המחקרים הרבים שנעשים בתחום הרחפנים גם נושא היעילות האנרגטית (כתלות בגודל המדחף) קיבל יחס מחקרי ופותח Quad-copter בעל רוטור ראשי גדול ושלושה מדחפים נוספים קטנים יותר, ראה איור 1.5. (Driessens and Pounds, 2013). כלי טייס זה משתמש ביעילות האנרגטית שמספק רוטור גדול וכן בפשטות של הטיית כלי הטייס על ידי שינוי מהירות הסיבוב של המדחפים הקטנים. שלושת המדחפים הקטנים מוטים מעט בכדי לספק מומנט מתנגד למומנט שיוצר הרוטור הגדול.



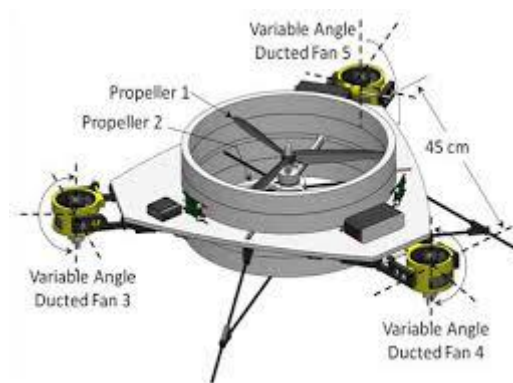
איור 1.5 : עיצוב חדש ל- Quad-copter עם רוטור מרכזי גדול ושלושה מדחפים קטנים. (Driessens and Pounds, 2013).

בשנים האחרונות בוצעו מספר מחקרים המציעים מגוון פתרונות לבעיית הצימוד בדרגות החופש של הרחפן, כאשר לרוב הפיתוח מתבסס על הטיית המדחפים. בעניין זה, עיקר המאמצים הופנו לכלי טייס עם מדחפים אשר ניתן להטות אותם סביב ציר מסוים (ניצב לציר הסיבוב) על ידי מנוע סרוו נוסף. כליי טייס אלו בנויים משני סטים של מנועים, הסט הראשון אחראי לסיבוב המדחפים וליצירת כוח הדחף והסט

השני אחראי להטיית המדחפים סביב ציר המחבר אותם לגוף. בעזרת שני הסטים האלו ניתן להרחיב את מספר דרגות החופש שניתן לבקר באופן בלתי תלוי. הרעיון להשתמש במדחפים שיכולים לנטות סביב הציר שמחבר אותם לגוף יושם בכלי טייס עם שני מנועים (F. Kendoul et al 2006). לאחר מכן פותח ה-T-Phoenix UAV שגם הוא כלי טייס בעל שני מדחפים בלבד, כאשר המדחפים יכולים לשנות את הזווית שלהם ביחס לגוף על ידי שני מנועי סרוו. כלי טייס זה הראה יכולות טיסה בפועל, כאשר תמרון במרחב מתאפשר בעזרת שני מדחפים בלבד. (Sanchez et al 2008). השימוש במדחפים עם אפשרות הטיה נעשה גם בכלי בעל שלושה מדחפים כאשר בכלי זה השימוש העיקרי בהטיית המדחפים הינו כדי להשיג את זווית הסבסוב הרצויה. העובדה שהמדחפים יכולים לנטות סביב ציר ניצב לציר הסיבוב שלהם מאפשרת חופש פעולה גדול יותר בקביעת המהירויות של כל אחד מהמדחפים. (J. Escareno et al 2008).

Quad-copter tilting rotor – זהו כלי טייס בעל ארבעה מנועים כאשר כל מנוע יכול לנטות סביב ציר באופן מבוקר. לכלי טייס זה ישנן שש דרגות חופש מבוקרות באופן בלתי תלוי, ושמונה כניסות בקרה, הכוללות את ארבעת המנועים של המדחפים ואת ארבעת המנועים שמאפשרים את הטיית המדחפים. כלי הטייס נחקר בעבודתם של (Ryll et al 2012), שם תוכנן לו בקר לא לינארי בכדי לעקוב אחר מסלול רצוי, ולאחר מכן גם נעשה ניסוי טיסה בשטח. בעבודתם של (A. Nemati and M. Kumar, 2014) תוכנן כלי טייס דומה העוקב (על ידי בקר PD) אחר מסלול ייחוס לכל שש דרגות החופש. כלי טייס נוסף המתבסס על ארבעה מדחפים הינו כלי טייס המאפשר להטות את המדחפים סביב שני צירים ניצבים אחד לשני (וניצבים לציר הסיבוב). ה-tilt roll rotors quad-copter הינה מערכת over actuated בעלת 12 כניסות בקרה והיא מאפשרת בקרה של כל שש דרגות החופש באופן בלתי תלוי. (Fatih S. and Erdinç A. 2013). החיסרון של כלי טייס אלו נובע מכך שכלי הטייס כוללים מנועים נוספים (מנועי סרוו להטיית המדחפים) שאינם תורמים לכוח הדחף אך מוסיפים משקל.

ה-Omni-copter (Long Y. and Cappelleri D.J. 2013) הינו כלי טייס בעל חמישה מדחפים. שני מדחפים בעלי קוטר גדול נמצאים במרכז הכלי ולהם ציר סיבוב משותף כאשר כל אחד מסתובב בכיוון הפוך ביחס לשני. שלושת המדחפים הנוספים נמצאים במרחק שווה ממרכז המסה ובין הזרועות המחברות אותן ישנה זווית של 120 מעלות. מנועים אלו ניתנים להטיה סביב ציר מאונך לזרוע בעזרת מנועי סרוו. פלטפורמה זו מאפשרת בקרה של כל שש דרגות החופש באופן בלתי תלוי וכן יעילות אנרגטית ביחס לרחפנים פשוטים.



איור 1.6 : Long Y. And Cappelleri D.J's omnicopter

פלטפורמה נוספת המשתמשת ברעיון של הטיית מדחפים היא ה-Tilting Wings Quad-copter. הרעיון של כלי טייס זה הינו חיבור המדחפים לכנפיים עם אפשרות הטיה (ע"י מנועי סרוו נוספים). השימוש בכנפיים תורם לאווירודינמיות של כלי הטייס ומאפשר טיסה כמו מטוס (כאשר הכנפיים במצב אופקי), מצב בו כוח העילוי מתבסס על עקרון של כנף קבועה. (Oner K. T. 2008).

השימוש במנועי סרוו מאפשר גם שינוי זווית התקיפה של הלהב, הדבר נעשה בכלים מסוג Variable-Pitch Quad-copters. בכלי טייס אלו מותקנים ארבעה מדחפים עם אפשרות לשינוי זווית התקיפה של הלהב. יתרון של כלי טייס זה אינו מתבטא במספר דרגות חופש המבוקרות אלא בהגדלת טווח כוח הדחף שכל מנוע יכול לספק (לדוגמא ניתן להפוך את כיוון כוח הדחף מבלי לשנות את כיוון הסיבוב של המנוע). גם בכלים אלה ישנו צורך במנועי סרוו נוספים כדי לאפשר את שינוי זווית התקיפה של המדחפים. (Catler 2012).

פתרון נוסף שנועד להגדיל את מספר דרגות החופש שניתן לבקר באופן בלתי תלוי מתבסס על שלושה זוגות מדחפים מקבילים. הפלטפורמה של כלי טייס זה כוללת שלושה זוגות מדחפים כאשר כל זוג נמצא על מישור אחר ולכן מייצר כוח דחף בכיוון שונה (בהשוואה לשני הזוגות האחרים). הדבר מאפשר להפעיל כוח דחף בכיוון מסוים ללא מגבלות הנובעות מהמצב הזוויתי של כלי הטייס, (D. Langkamp et al 2011). לכלי הטייס עם שלושת זוגות המדחפים יש שש דרגות חופש מבוקרות באופן בלתי תלוי, אך הוא אינו יעיל אנרגטית מכיוון שבכל רגע נתון פועלים בו כוחות המתנגדים אחד לשני. המכנה המשותף של עיקר העבודות שהוצגו בסקירה הינו שימוש תוספת מנועים שתפקידם היחידי הוא להביא להטיה של כוח הדחף ביחס לגוף כלי הטיס. מנועים אלה אינם מספקים כוח עילוי, מוסיפים משקל ומגדילים את המורכבות המכנית ואת עלות הייצור של כלי הטייס.



איור 1.7 : פלטפורמה חדשה לכלי טייס מרחף הכוללת שלושה זוגות מנועים הנמצאים במישורים שונים. (D. Langkamp et al 2011).

2. תיאור כלי הטייס – Single Seesaw Hexa-copter

כלי הטייס העיקרי הנחקר בעבודה זו הינו בעל שישה מנועים ושישה מדחפים. ארבעה מדחפים מחוברים אל גוף כלי הטייס ועוד שני מדחפים מחוברים לנדנדה (seesaw) עם ציר סיבוב שעובר במרכז הכובד של כלי הטיס (ראה איורים 2.1 ו-3.1). כלי טייס זה ישמש בסיס למחקר בנושא רחפנים עם נדנדות, כאשר בהמשך ניישם את הידע שנצבר ביחס לכלי זה עבור כלים נוספים עם מספר נדנדות. הכלי הנדון כאן הוא

בעל שבע דרגות חופש. שש דרגות חופש של גוף קשיח מתארות את מצב גוף כלי הטיס, אלה הן שלוש דרגות חופש של מקום במרחב (x,y,z) ושלוש דרגות חופש של מצב זוויות (זווית גלגול - roll, זווית עלרוד - pitch, זווית סבסוב - yaw). דרגת החופש השביעית נובעת מהאפשרות של שינוי הזווית של הנדנדה ביחס לגוף. ניתן להתייחס לדרגת חופש זו גם כזווית הנדנדה ביחס לעולם. כמובן שקיים צימוד בין חלק מדרגות החופש ולמעשה המערכת הינה Under-Actuated ולא ניתן לבקר את כל דרגות חופש באופן בלתי תלוי. אולם, בניגוד ל-Quad-copter או Hexa-copter סטנדרטי בהם ניתן לבקר רק ארבע דרגות חופש באופן בלתי תלוי (מכיוון שיש צימוד בין זווית הגלגול ובין התזוזה ימינה ושמאלה וצימוד בין זווית העלרוד והתנועה קדימה ואחורה), בכלי הנדון ניתן לבקר חמש דרגות חופש באופן בלתי תלוי. את הכלי הנדון ניתן להפעיל עם זווית גלגול אשר לא משפיעה על התנועה צדית (הזווית של הנדנדה תקבע בהתאם), או ליצור תזוזה ימינה ושמאלה ללא שינוי בזווית הגלגול (על ידי שינוי בזווית הנדנדה). כמובן שאם מסובבים את מערכת הצירים של הגוף ב-90 מעלות, ניתן לטעון טענה זהה לגבי התנועה קדימה ואחורה וזווית העלרוד. במודים מסוימים של כלי הטיס קיימת יתירות, כלומר חלק מדרגות החופש של הכלי ניתנות לבקרה במספר אופנים, על ידי שתי כניסות בקרה שונות. דרגות חופש אלו הופכות להיות Over Actuated והאתגר בתכנון מערכות הבקרה הינו למצוא את אופן הבקרה היעיל ביותר. בדומה להגדרה של מערכת Under Actuated, מערכת Over Actuated היא מערכת שבמשוואות התנועה מטריצת המקדמים של הכוחות החיצוניים היא בדרגה גדולה ממספר דרגות החופש. ואילו דרגת חופש שהיא Over Actuated היא דרגת חופש אשר במשוואות התנועה שלה קיים יותר מכוח חיצוני אחד. לצורך מחקר זה נבנה אבטיפוס של כלי טייס עם נדנדה יחידה כפי שתואר. מסגרת כלי הטיס יוצרה מאלומיניום 6061. על מסגרת זו מורכבים שישה מנועי Brushless מסוג Motor Robbe Roxxy 2827-35 ולכל מנוע מחובר דרייבר מתאים. לוח הבקרה המותקן על כלי הטיס הינו AUAV3, על לוח בקרה זה מותקנים שלושה מדדי תאוצה, שלושה גירוסקופים (למידת מהירות זוויתית) ושלושה מגנטו-מטרים המאפשרים מדידה של השדה המגנטי וכיוון כלי הטיס ביחס לצפון. על ציר הנדנדה מותקן אנקודר מסוג HEDM-5500 B13 המשמש למדידת הזווית של הנדנדה ביחס לגוף. הלוח כולל מעבד (micro-controller) מסוג dspic33ep512au810. בכדי להשלים את סט המדידות הותקנו על כלי הטיס חיישן אולטרה-סוני למדידת גובה ביחס לקרקע (יעיל עד כ-6 מטרים) ו-GPS מסוג EM-406A. כל מדידות החיישנים עוברות דרך מסננים שונים ומהן משערכים את זוויות כלי הטיס ואת מיקומו.



איור 2.1 : Singe seesaw hexa-copter (with frame, motors and propellers)

האתגרים בעבודת מחקר זו (בהקשר לכלי הטיס באיור 2.1) כוללים בחינה של שיטות בקרה לכלים מסוג Hexa-copter ויישום שלהם בכלי הטיס המיוחד ופיתוח גישות בקרה חדשות המתאימות ליכולות הייחודיות של כלי הטיס. מעבר לכך, יש לבדוק האם וכיצד ניתן לנצל את הקונפיגורציה הייחודית של כלי הטיס על מנת להשיג ביצועי טיסה טובים ויעילים יותר.

התכנון והבנייה הפיזית של מסגרת כלי הטיס בוצעו במסגרת פרויקט שנה ד' של נקש ואליה (2013). במסגרת עבודת מחקר זו נוספו שיפורים שונים לכלי הטיס, החומרה והחיישנים המשמשים ליישום מערכת הבקרה הוחלפו וגם פותחו (מבחינה רעיונית), תוכנו ונבנו כלי טיס מורכבים יותר עם שלוש או ארבע נדנדות. עבודה זו תעסוק בבניית המודלים המתמטיים, בתכנון חוגי הבקרה ובבחינת היכולות הייחודיות של כלי טיס אלה.

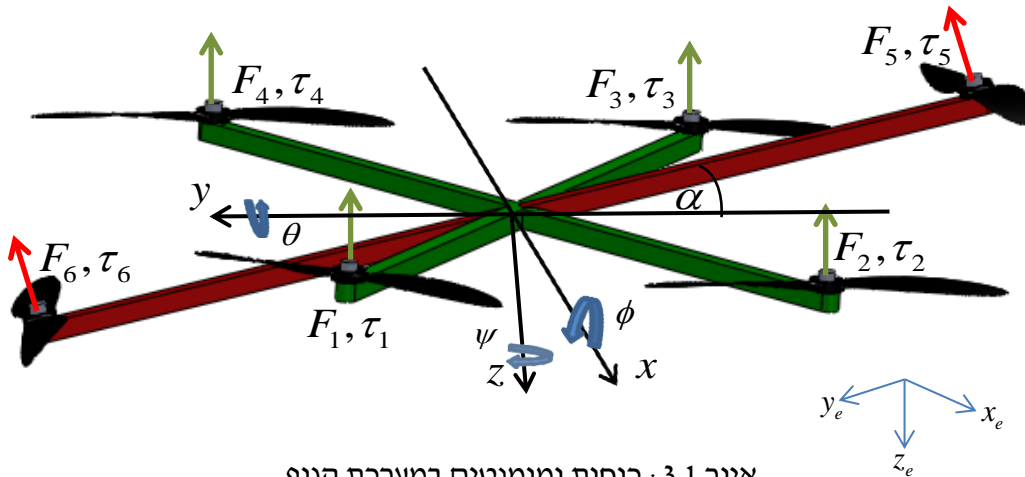
3. פיתוח משוואות התנועה של כלי טיס עם נדנדה אחת.

בעת פיתוח המודל הקינמטי והמודל הדינאמי, אשר יוצגו בהמשך, הונחו ההנחות הבאות:

- הכלי הינו גוף קשיח עליו מורכבת נדנדה הסובבת ביחס לכלי סביב ציר העובר במרכז הכובד של הכלי. הנדנדה מסתובבת עד לזווית מסוימת, α_{\max} , והיא גם כן גוף קשיח.
- גוף הכלי הינו סימטרי סביב כל אחד מהצירים הראשיים במערכת הגוף כלומר מטריצת האינרציה במערכת הגוף אלכסונית. כמו כן גם הנדנדה סימטרית סביב כל הצירים הראשיים שלה ומטריצת האינרציה במערכת הצירים הצמודה לנדנדה גם כן אלכסונית.
- נזניח את המומנטים הגיירוסקופים (כתוצאה מסיבוב המדחפים הנמצאים במערכת סובבת), את החיכוך בציר הנדנדה ואת כוחות הגרר הפועלים עליה.
- כוח הדחף שמייצר כל מדחף והמומנט הנוצר על הגוף כתוצאה מסיבוב המדחף הנם פרופורציונאליים לריבוע מהירות הסיבוב.

3.1. פיתוח המודל הקינמטי.

בפיתוח המודל נשתמש בשתי מערכות צירים עיקריות, הראשונה היא מערכת הגוף - מערכת צירים הצמודה לגוף הכלי וראשיתה במרכז המסה. מערכת הגוף תסומן לפי $\hat{b} = [\hat{x}_b, \hat{y}_b, \hat{z}_b]^T$. המערכת השנייה היא מערכת צירים אינרציאלית שתסומן לפי $\hat{e} = [\hat{x}_e, \hat{y}_e, \hat{z}_e]^T$.



איור 3.1: כוחות ומומנטים במערכת הגוף.

המדחפים 1,3,5 מסתובבים בכיוון אחד והמדחפים 2,4,6 בכיוון השני. כך שהמומנטים τ_1, τ_3, τ_5 הנובעים מסיבובי המדחפים המתאימים הם בכיוון אחד, והמומנטים τ_2, τ_4, τ_6 הם בכיוון הפוך. כאשר סך כל המומנטים של קבוצה אחת שווים לסך המומנטים של הקבוצה השנייה הכלי אינו מסתובב סביב צירו. בכדי לקשר בין שתי מערכות צירים \hat{e}, \hat{b} יש להשתמש במטריצת הסיבוב $R(\phi, \theta, \psi)$. מטריצה זו מורכבת ממכפלה של שלוש מטריצות הסובבות סביב כל אחד מהצירים הראשיים.

בכדי לעבור ממערכת הגוף למערכת האינרציאלית נסובב את המערכת בזווית ϕ סביב ציר x , זו היא זווית הגלגול (roll). לאחר מכן נסובב את המערכת בזווית θ סביב ציר y , זו היא זווית העלרוד (pitch), לבסוף נסובב את המערכת בזווית ψ סביב ציר z , זו היא זווית הסבסוב (yaw). מטריצות הסיבוב סביב הצירים הראשיים הן:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad R_z = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מטריצת הסיבוב מתקבלת לפי:

$$R = R_z R_y R_x \quad (1)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\psi)\sin(\phi)\sin(\theta) - \cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\theta)\sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi) + \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \cos(\psi)\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

המעבר בין מערכת הצירים של הגוף למערכת האינרציאלית של העולם מתבצע באופן הבא:

$$\hat{e} = R\hat{b} \quad (2)$$

מכיוון שמטריצות הסיבוב מקיימות את הקשר $R^{-1} = R^T$ מתקבל:

$$\hat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{e} \quad (3)$$

נגדיר 2 מערכות צירים חדשות, $\hat{e}' = R_z^T \hat{e}$ ו- $\hat{e}'' = R_y^T R_z^T \hat{e}$. כעת נייצג את המהירות הזוויתית של הכלי במערכת הגוף בעזרת הנגזרות של זוויות אוילר.

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \dot{\phi} \hat{x}_b + \dot{\theta} \hat{y}_{e''} + \dot{\psi} \hat{z}_{e'} \quad (4)$$

אם נייצג את המערכות \hat{e}' , \hat{e}'' במערכת הגוף נקבל את הקשר הבא:

$$\begin{aligned} \hat{z}_{e'} &= -\sin(\theta) \hat{x}_b + \cos(\theta) \sin(\phi) \hat{y}_b + \cos(\theta) \cos(\phi) \hat{z}_b \\ \hat{y}_{e''} &= \cos(\phi) \hat{y}_b - \sin(\phi) \hat{z}_b \end{aligned} \quad (5)$$

בהצבת משוואה (5) במשוואה (4) מתקבל ייצוג של וקטור המהירות הזוויתית של הכלי במערכת הגוף, בעזרת וקטור הנגזרות של זוויות אוילר.

$$\Omega = (\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)) \hat{x}_b + (\dot{\psi} \cos(\theta) \sin(\phi) + \dot{\theta} \cos(\phi)) \hat{y}_b + (\dot{\psi} \cos(\theta) \cos(\phi) - \dot{\theta} \sin(\phi)) \hat{z}_b \quad (6)$$

ניתן להראות את וקטור המהירות גם בעזרת המטריצה הבאה:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = J_{\Omega b} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$J_{\Omega b}$ היא המטריצה הקושרת בין מהירות הסיבוב במערכת הגוף ובין וקטור הנגזרות של זוויות אוילר.

על מנת לקבל את הקשר בין המהירות הזוויתית במערכת העולם $\omega_e = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ ובין וקטור הנגזרות של זוויות אוילר נכפיל את משוואה (6) במטריצת הסיבוב (1) ונקבל את הקשר הבא:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \cos(\theta)\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J_{\omega} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

כאשר J_{ω} נקרא היעקוביאן הרוטציוני, ובעזרתו מקשרים בין המהירות הזוויתית במערכת העולם לווקטור הנגזרות של זוויות אוילר.

המעבר בין וקטור המהירות הקווית במערכת הגוף לווקטור המהירות הקווית במערכת העולם נעשה בעזרת מטריצת הסיבוב (1) באופן הבא:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_e = R \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_b \quad (8)$$

3.2. פיתוח המודל הדינאמי.

כל מדחף מפעיל על הכלי כוח דחף בכיוון הציר סביבו הוא מסתובב כפי שמוצג באיור 3.1. הכוח פרופורציונאלי למהירות הסיבוב של המדחף, $F_i = \gamma_1 \omega_i^2$, כאשר γ_1 הוא קבוע פרופורציה בין מהירות המדחף והכוח, F_i הינו הכוח שכל מדחף מייצר ו- ω_i מהירות סיבוב המדחף. כמו כן, כל מדחף יוצר מומנט הפועל על הגוף, מומנט זה פרופורציונאלי לריבוע מהירות הסיבוב, $\tau_i = \gamma_2 \omega_i^2$, כאשר γ_2 הוא קבוע פרופורציה בין מהירות המדחף והמומנט. לצורך הפשטות נניח כי הקבועים אינם תלויים בזמן ושונים עבור כל המדחפים, קבועים אלו נמדדו בצורה אמפירית בעבודתם של אלפרט ושני (2012) עבור מנועי ה-brash-less (המותקנים במערכת הניסוי) עם מדחפים מסוג EPP1045\5mm, תוצאות הניסוי הניבו את הקבועים הבאים,

$$\gamma_2 = 2.931 \cdot 10^{-9} \left[\frac{Nm}{RPM^2} \right], \gamma_1 = 1.596 \cdot 10^{-7} \left[\frac{N}{RPM^2} \right]$$

סכום הכוחות שמפעילים המדחפים בכיוון ציר \hat{z}_b במערכת הגוף על כלי הטייס הוא,

$$F_{tz} = -(F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 \cos(\alpha) + F_6 \cos(\alpha)) \quad (9)$$

כאשר α היא הזווית שבין הנדנדה לכלי ו- $F_{i=1...6}$ הינו כוח שכל מדחף מפעיל.

סכום הכוחות בכיוון ציר \hat{y}_b במערכת הגוף מורכב מהכוחות שמייצרים שני המדחפים שעל הנדנדה.

$$F_{ty} = F_5 \sin(\alpha) + F_6 \sin(\alpha) \quad (10)$$

את המומנטים הפועלים על שלושת הצירים הראשיים וכן המומנט הפועל על הנדנדה ניתן לבטא בעזרת הכוחות והמומנטים הטהורים שמפעילים המנועים באופן הבא,

$$\begin{aligned} \tau_x &= l \sin(30)(F_2 + F_3 - F_1 - F_4) + f(\alpha) \\ f(\alpha) &= \begin{cases} 0, \alpha < \alpha_{\max} \\ l(F_5 - F_6), \alpha = \alpha_{\max} \end{cases} \\ \tau_y &= l \sin(60)(F_1 + F_2 - F_3 - F_4) + (\tau_5 - \tau_6) \sin \alpha \\ \tau_z &= \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4 + (\tau_5 - \tau_6) \cos \alpha \\ \tau_\alpha &= l(F_5 - F_6), \alpha < \alpha_{\max} \end{aligned} \quad (11)$$

כאשר l הינו המרחק של כל אחד מהמדחפים ביחס למרכז המסה, α_{\max} הינה הזווית המקסימלית אליה יכולה הנדנדה להגיע ו- τ_i הינו המומנט הנוצר מסיבוב המדחף.

את מערכות הבקרה נתכנן בעזרת כניסות בקרה ווירטואליות המיוצגות על ידי המומנטים המופעלים סביב כל ציר במערכת הגוף, המומנט המופעל על הנדנדה, הכוח השקול שמפעילים מדחפי הנדנדה והכוח השקול שמפעילים המדחפים שנמצאים על הגוף. בסופו של דבר כניסות הבקרה האמתיות של כלי הטייס הן מהירויות הסיבוב של המנועים לכן נדרש לחשב את מהירויות הסיבוב לפי כניסות הבקרה הווירטואליות שתוכננו על מנת לבקר את כלי הטייס. הקשר בין כניסות הבקרה הווירטואליות וכניסות הבקרה האמתיות הינו,

$$\begin{bmatrix} F_b \\ F_s \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \\ \tau_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_1 \\ -l \sin(30)\gamma_1 & l \sin(30)\gamma_1 & l \sin(30)\gamma_1 & -l \sin(30)\gamma_1 & 0 & 0 \\ l \sin(60)\gamma_1 & l \sin(60)\gamma_1 & -l \sin(60)\gamma_1 & -l \sin(60)\gamma_1 & \sin(\alpha)\gamma_2 & -\sin(\alpha)\gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_2 & \gamma_2 & -\gamma_2 & \cos(\alpha)\gamma_2 & -\cos(\alpha)\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l\gamma_1 & -l\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \\ \omega_5^2 \\ \omega_6^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

הקשר המופיע במשוואה (12) הינו עבור $\alpha < \alpha_{\max}$.

3.3. פיתוח משוואות התנועה לפי אוילר לגראנז' (Euler Lagrange).

הקואורדינטות המוכללות במערכת שלנו הן שבעת דרגות החופש,

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (13)$$

כאשר ξ ו- η מייצגים את וקטור המיקום ווקטור זוויות אוילר בהתאמה. נציג כעת את הביטוי לאנרגיה הקינטית של המערכת,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \omega_e^T I_f(\eta) \omega_e + \frac{1}{2} \omega_{e\alpha}^T I_s(\eta, \alpha) \omega_{e\alpha} \quad (14)$$

כאשר ξ הינו וקטור המהירות הקווית של הכלי, ω_e הינו וקטור המהירות הזוויתית של הכלי במערכת האינרציאלית ו- $\omega_{e\alpha}$ הינו וקטור המהירות הזוויתית של הנדנדה במערכת האינרציאלית. I_f הינו טנזור האינרציה של הכלי ללא הנדנדה במערכת האינרציאלית ו- I_s הינו טנזור האינרציה של הנדנדה במערכת האינרציאלית. m הינה מסת הגוף. ניתן להציג את טנזור האינרציה במערכת האינרציאלית בעזרת טנזור האינרציה (האלכסוני) במערכת הגוף.

$$\begin{aligned} I_f &= R I_b R^T \\ I_s &= R R_\alpha I_\alpha R_\alpha^T R^T \\ R_\alpha &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

I_b הינו טנזור האינרציה של הכלי ללא הנדנדה במערכת הגוף, ובהתאם להנחה שגוף הכלי סימטרי סביב כל הצירים הראשיים שלו, מטריצה זו היא אלכסונית.

I_α הינו טנזור האינרציה של הנדנדה במערכת הצמודה לנדנדה וגם מטריצה זו היא אלכסונית.

את הקשר בין המהירות הזוויתית במערכת האינרציאלית לבין וקטור הנגזרות של זוויות אוילר הראינו במשוואה (7). באותו אופן ניתן להציג את הקשר בין המהירות הזוויתית של הכלי הכוללת גם את המהירות הזוויתית של הנדנדה.

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = (\dot{\phi} + \dot{\alpha}) \hat{x}_b + \dot{\theta} \hat{y}_{e''} + \dot{\psi} \hat{z}_e \quad (16)$$

נציג גם קשר זה בעזרת מטריצה :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi + \alpha) & \cos(\theta)\sin(\phi + \alpha) \\ 0 & -\sin(\phi + \alpha) & \cos(\theta)\cos(\phi + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} + \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_{\Omega_s} \begin{bmatrix} \dot{\phi} + \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

השימוש בזוויות אוילר גורר נקודות סינגולריות וכתוצאה מכך גם ביעקוביאן קיימות נקודות סינגולריות ויש להתייחס אליהן במימוש הבקר. בכדי להציג את הקשר בין מהירות הסיבוב במערכת האינרציאלית ובין וקטור הנגזרות של זוויות אוילר נכפיל את J_{Ω_s} ב- R_α ובמטריצת הסיבוב המוצגת במשוואה (1) ונקבל את היעקוביאן הרוטציוני שהתקבל במשוואה (7).

$$\begin{aligned} \omega_{e\alpha} &= R R_\alpha J_{\Omega_s} \begin{bmatrix} \dot{\phi} + \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_\omega \begin{bmatrix} \dot{\phi} + \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_\omega (\dot{\eta} + \dot{\alpha}) \\ \omega_{e\alpha} &= J_\omega \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + J_\omega \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

מהצבת משוואות (7), (15) ו-(17) במשוואה של האנרגיה הקינטית, משוואה (14), מתקבל ביטוי של האנרגיה הקינטית כתלות בנגזרות המיקום, בזוויות אוילר, בנגזרות של זוויות אוילר, בזווית הנדנדה α ובנגזרת שלה. כלומר, מתקבל ביטוי של האנרגיה כתלות בקואורדינטות המוכללות והנגזרות שלהן.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J_w^T R I_b R^T J_w \dot{\eta} + \frac{1}{2} (\dot{\eta} + \dot{\alpha})^T J_w^T R R_\alpha I_\alpha R_\alpha^T R^T J_w (\dot{\eta} + \dot{\alpha}) \quad (18)$$

מכיוון שמשוואה (18) מייצגת את האנרגיה הקינטית של המערכת, היא אינה תלויה במערכת צירים. לכן ניתן לכתוב את האנרגיה הקינטית של גוף הכלי במערכת הצירים הצמודה לגוף, ואת האנרגיה הקינטית של הנדנדה במערכת הצירים הצמודה לנדנדה. הביטוי לאנרגיה הקינטית המתקבל הוא,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J_{\Omega_b}^T I_b J_{\Omega_b} \dot{\eta} + \frac{1}{2} (\dot{\eta} + \dot{\alpha})^T J_{\Omega_s}^T I_\alpha J_{\Omega_s} (\dot{\eta} + \dot{\alpha}) \quad (19)$$

בכדי לפשט את הביטוי נגדיר את המטריצות הבאות,

$$\begin{aligned} D_b(\eta) &= J_{\Omega_b}^T I_b J_{\Omega_b} \\ D_s(\eta, \alpha) &= J_{\Omega_s}^T I_\alpha J_{\Omega_s} \end{aligned}$$

האנרגיה הפוטנציאלית במערכת היא,

$$U = -mgz \quad (20)$$

כאשר g הינה תאוצת הכובד, וערכה הוא: $g = 9.81 [m/s^2]$. כעת ניתן לכתוב את הלגראנז'יאן, ההפרש בין האנרגיה הקינטית לאנרגיה הפוטנציאלית,

$$L = T - U \quad (21)$$

מהצבת משוואות (19) ו-(20) והמטריצות D_b, D_s במשוואה (21) מתקבל הלגראזיאן,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T D_b \dot{\eta} + \frac{1}{2} (\dot{\eta} + \dot{\alpha})^T D_s (\dot{\eta} + \dot{\alpha}) + mgz \quad (22)$$

בכדי לקבל משוואות בצורה פשוטה ואלגנטית ניתן להציג את הביטוי המתקבל במשוואה (22) בצורה קצת שונה. תחילה נגדיר את זווית הגלגול של הנדנדה ביחס לעולם ולא ביחס לגוף הכלי,

$$\beta = \phi + \alpha \Rightarrow \dot{\beta} = \dot{\phi} + \dot{\alpha}$$

לאחר מכן נגדיר וקטור זוויות הכולל את שלושת זוויות אוילר ואת זווית הגלגול של הנדנדה,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \eta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \beta \end{bmatrix} \quad (23)$$

כעת נרחיב את המטריצות D_b, D_s כך שיכפילו את הווקטור σ מבלי לשנות את המשוואה. המטריצות המתקבלות הן,

$$D'_b = \begin{bmatrix} D_b(1,1) & D_b(1,2) & D_b(1,3) & 0 \\ D_b(2,1) & D_b(2,2) & D_b(2,3) & 0 \\ D_b(3,1) & D_b(3,2) & D_b(3,3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D'_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_s(2,2) & D_s(2,3) & D_s(2,1) \\ 0 & D_s(3,2) & D_s(3,3) & D_s(3,1) \\ 0 & D_s(1,2) & D_s(1,3) & D_s(1,1) \end{bmatrix}$$

כעת ניתן לכתוב את הלגראזיאן המופיע במשוואה (22) בעזרת הווקטור σ והמטריצות D'_b, D'_s .

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T D'_b \dot{\sigma} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T D'_s \dot{\sigma} + mgz$$

נגדיר מטריצה חדשה,

$$D = D'_b + D'_s$$

ונקבל את הלגראזיאן בצורה הבאה,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T D \dot{\sigma} + mgz \quad (24)$$

את משוואות התנועה נגזור מתוך משוואת לגראנז' השנייה,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^T} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^T} = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau_\sigma \end{bmatrix} \quad (25)$$

כאשר הווקטור \bar{q} מוגדר ב(13).

כאשר $\tau_\sigma = \begin{bmatrix} \tau_\eta \\ \tau_\beta \end{bmatrix}$, ו- τ_η הם המומנטים סביב הצירים הראשיים במערכת הגוף, בכיוון הקואורדינטות

המוכללות η . כמו כן, τ_β הינו המומנט הפועל על הנדנדה בכיוון הקואורדינטה β .

וקטור הכוחות הלא משמרים במערכת הגוף מתקבל מתוך משוואות (9) ו-(10). וקטור הכוחות הלא משמרים במערכת האינרציאלית, המערכת שהקואורדינטות המוכללות נבחרו בא, מסומן ב- F_ξ ומתקבל על ידי הכפלה מטריצת הסיבוב בווקטור הכוחות הלא משמרים במערכת הגוף.

$$F_\xi = R \begin{bmatrix} 0 \\ F_5 \sin(\alpha) + F_6 \sin(\alpha) \\ -(F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 \cos(\alpha) + F_6 \cos(\alpha)) \end{bmatrix} \quad (26)$$

את משוואת התנועה, משוואה (25), ניתן לחלק לסט של 2 משוואות וקטוריות ביחס לקואורדינטות המוכללות ξ, σ .

המשוואה המתקבלת עבור הקואורדינטות המוכללות ξ היא,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\xi}} \right) - \frac{dL}{d\xi} = [F_\xi] \quad (27)$$

כאשר נגזור את L כפי שמופיע במשוואה (24) לפי $\xi, \dot{\xi}$ נקבל,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\xi}} = m\dot{\xi} &\rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\xi}} \right) = m\ddot{\xi} \\ \frac{dL}{d\xi} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\ddot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} F_\xi = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} R \begin{bmatrix} 0 \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix}$$

המשוואה עבור הקואורדינטות המוכללות σ היא,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\sigma}} \right) - \frac{dL}{d\sigma} = [\tau_\sigma] \quad (29)$$

נגזור את L כפי שמופיע במשוואה (24) לפי $\sigma, \dot{\sigma}$ ונקבל,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\sigma}} &= D(\sigma)\dot{\sigma} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\sigma}} \right) &= D(\sigma)\ddot{\sigma} + \dot{D}(\sigma)\dot{\sigma} \\ \frac{dL}{d\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} [\dot{\sigma}^T D(\sigma) \dot{\sigma}] \\ D(\sigma)\ddot{\sigma} &= \left\{ \tau_\sigma + \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} [\dot{\sigma}^T D(\sigma) \dot{\sigma}] - \dot{D}(\sigma)\dot{\sigma} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

נגדיר את המטריצה $C(\sigma, \dot{\sigma}) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} [\dot{\sigma}^T D(\sigma)] - \dot{D}(\sigma)$ ונקבל את משוואת התנועה עבור זוויות הכלי,

$$\ddot{\sigma} = D^{-1}(\sigma) [\tau_\sigma + C(\sigma, \dot{\sigma}) \dot{\sigma}] \quad (31)$$

3.4. פיתוח משוואות התנועה לפי ניוטון אוילר (Newton Euler).

כעת נציג פיתוח נוסף של משוואות התנועה לפי משוואות ניוטון אוילר. משוואות התנועה של גוף קשיח הן,

$$\begin{aligned} \sum F &= m\dot{v} + \Omega \times mv \\ \sum \tau &= I(\dot{\Omega}) + \Omega \times I\Omega \end{aligned} \quad (32)$$

כאשר F, τ הם המומנטים והכוחות החיצוניים הפועלים על הגוף בהתאמה, Ω היא המהירות הזוויתית של הגוף, v מייצג את ווקטור המהירות הקווית של הגוף ו- I, m הן מסת הגוף ומטריצת האינרציה בהתאמה.

תחילה נבחן את משוואת הכוחות, נכתוב את משוואת הכוחות הווקטורית באופן מפורט במערכת העולם,

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}_e \quad (33)$$

האיבר של הכוח הצנטריפוגלי המתבטא באמצעות המכפלה הווקטורית במשוואה (32) מתבטל מכיוון שהמערכת האינרציאלית אינה מסתובבת (Artale et al 2013). את ווקטור הכוחות נפריד לווקטור המייצג את כוח הכבידה, ולווקטור הכוחות הפועלים על הגוף הנובע מכוח הדחף של המנועים.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{m} R \begin{bmatrix} 0 \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (34)$$

מתקבלת משוואה זהה למשוואה שפיתחנו בשיטת אוילר-לגרנז', משוואה (28).

עבור משוואת המומנטים, נפרק את כלי הטייס לשני גופים קשיחים, גוף כלי הטייס, והנדנדה. נכתוב את משוואת המומנטים עבור כל גוף בנפרד כאשר קיימים מומנטים שהגופים מפעילים אחד על השני.

עבור גוף כלי הטייס נכתוב את משוואת המומנטים במערכת הגוף,

$$\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\psi} \end{bmatrix} = I_b \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}_b + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_b \times I_b \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_b \quad (35)$$

כאשר $\tau_{r\theta}, \tau_{r\psi}$ הינם המומנטים שהנדנדה מפעילה על גוף כלי הטייס וערכם החיובי נקבע שרירותית. סביב ציר x הנדנדה אינה מפעילה מומנט על גוף כלי הטייס מכיוון שההנחה היא שהציר בו מחוברת הנדנדה לגוף הוא חסר חיכוך.

נציב את הקשר בין המהירות הזוויתית לבין הנגזרות של זוויות אוילר המופיע במשוואה (6) ונקבל,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\psi} \end{bmatrix} &= I_b \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} J_{\Omega b} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + J_{\Omega b} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times I_b J_{\Omega b} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\psi} \end{bmatrix} &= I_b J_{\Omega b} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + I_b \dot{J}_{\Omega b} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + J_{\Omega b} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times I_b \dot{J}_{\Omega b} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{36}$$

באופן דומה נכתוב את משוואת המומנטים עבור הנדנדה של שלי הטייס,

$$\begin{bmatrix} \tau_\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\psi} \end{bmatrix} = I_s J_{\Omega s} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + I_s \dot{J}_{\Omega s} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + J_{\Omega s} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \times I_s J_{\Omega s} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{37}$$

מתוך משוואה (37) ניתן לבודד שתי משוואות סקלריות המתארות את המומנטים שמפעילים גוף כלי הטייס והנדנדה אחד על השני. בהצבת המטריצות I_s ו- $J_{\Omega s}$ נקבל,

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} &= -I_{ys} \left[C(\beta)\ddot{\theta} + C(\theta)S(\beta)\ddot{\psi} - S(\beta)\dot{\beta}\dot{\theta} + C(\theta)C(\beta)\dot{\beta}\dot{\psi} - S(\theta)S(\beta)\dot{\theta}\dot{\psi} \right] + \dots \\
(I_{zs} - I_{xs}) &\left[(\dot{\beta} - S(\theta)\dot{\psi})(C(\theta)C(\beta)\dot{\psi} - S(\beta)\dot{\theta}) \right]
\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\psi} &= -I_{zs} \left[-S(\beta)\ddot{\theta} + C(\theta)C(\beta)\ddot{\psi} - C(\beta)\dot{\beta}\dot{\theta} - C(\theta)S(\beta)\dot{\beta}\dot{\psi} - S(\theta)C(\beta)\dot{\theta}\dot{\psi} \right] + \dots \\
(I_{xs} - I_{ys}) &\left[(\dot{\beta} - S(\theta)\dot{\psi})(C(\beta)\dot{\theta} + C(\theta)S(\beta)\dot{\psi}) \right]
\end{aligned} \tag{39}$$

כאשר השתמשנו בסימון המקוצר, $S(\cdot) = \sin(\cdot)$, $C(\cdot) = \cos(\cdot)$.

מהצבת משוואות (38) ו-(39) במשוואה (36) ניתן לקבל סט של שתי משוואות עבור הנעלמים $\ddot{\theta}, \ddot{\psi}$ באופן הבא:

$$\begin{aligned}
a\ddot{\theta} + b\ddot{\psi} &= c \\
d\ddot{\theta} + e\ddot{\psi} &= f
\end{aligned} \tag{40}$$

כאשר:

$$\begin{aligned}
a &= I_{ys} C(\beta) + I_{yy} C(\phi) \\
b &= I_{ys} C(\theta)S(\beta) + I_{yy} C(\theta)S(\phi) \\
c &= \tau_\theta + \dot{\phi}\dot{\theta}I_{yy}S(\phi) + (I_{zs} - I_{xs}) \left(\dot{\psi}C(\beta)C(\theta) - \dot{\theta}S(\beta) \right) (\dot{\beta} - \dot{\psi}S(\theta)) + (I_{zz} - I_{xx}) \left(\dot{\psi}C(\phi)C(\theta) - \dot{\theta}S(\phi) \right) (\dot{\phi} - \dot{\psi}S(\theta)) - \dots \\
&I_{ys} \left[\dot{\beta}\dot{\psi}C(\beta)C(\theta) - \dot{\beta}\dot{\theta}S(\beta) - \dot{\theta}\dot{\psi}S(\beta)S(\theta) \right] + \dot{\psi}I_{yy} \left[-\dot{\phi}C(\phi)C(\theta) + \dot{\theta}S(\phi)S(\theta) \right] \\
d &= -[I_{zz}S(\phi) + I_{zs}S(\beta)] \\
e &= I_{zz}C(\phi)C(\theta) + I_{zs}C(\beta)C(\theta) \\
f &= \tau_\psi + (I_{xs} - I_{ys}) \left(\dot{\theta}C(\beta) + \dot{\psi}C(\theta)S(\beta) \right) (\dot{\beta} - \dot{\psi}S(\theta)) + (I_{xx} - I_{yy}) \left(\dot{\theta}C(\phi) + \dot{\psi}C(\theta)S(\phi) \right) (\dot{\phi} - \dot{\psi}S(\theta)) - \dots \\
&I_{zs} \left[-\dot{\beta}\dot{\theta}C(\beta) - \dot{\beta}\dot{\psi}C(\theta)S(\beta) - \dot{\theta}\dot{\psi}C(\beta)S(\theta) \right] + I_{zz} \left[\dot{\phi}\dot{\theta}C(\phi) + \dot{\phi}\dot{\psi}C(\theta)S(\phi) + \dot{\theta}\dot{\psi}C(\phi)S(\theta) \right]
\end{aligned}$$

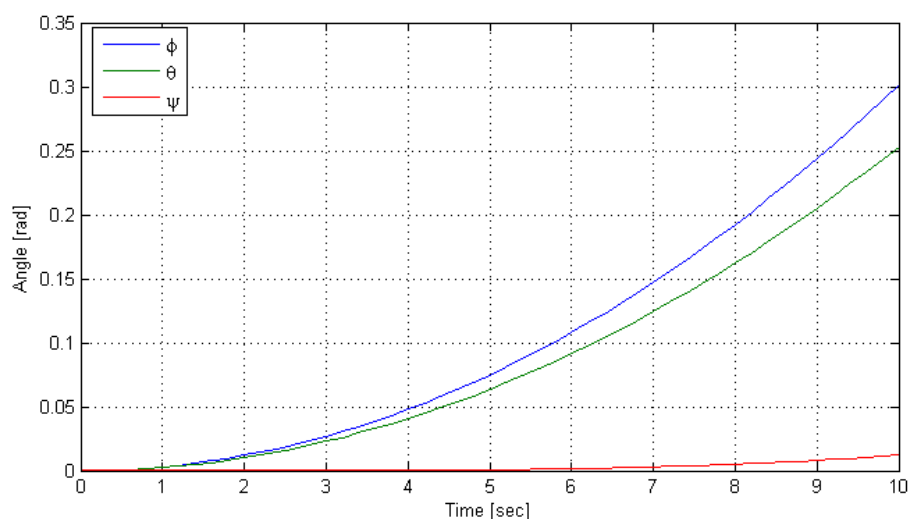
ממשוואה (40) נמצא את $\ddot{\theta}, \ddot{\psi}$ ולאחר מכן נציב את הפתרון במשוואה הסקלרית הראשונה ב-(36) על מנת

למצוא את $\ddot{\phi}$, ובמשוואה הסקלרית הראשונה ב-(37) על מנת למצוא את $\ddot{\beta}$.

צורת המשוואות אינה דומה לצורה שהתקבלה בפיתוח לפי אוילר-לגרנז' במשוואה (31) ולכן קשה להשוות בין שתי השיטות. מתוך השוואה בין שני המודלים ע"י סימולציה, איורים 3.2 ו-3.3, התגלה שהם אינם מתנהגים באופן זהה, ככל הנראה מכיוון שהשיטות השונות מתבססות על הנחות שונות. מבדיקה שנעשתה התגלה כי גם מודלים מקובלים של Quad-copter אינם מתנהגים באופן זהה כאשר פותחו לפי אוילר-לגרנז' או לפי ניוטון-אויילר. בעבודה זו נשתמש במודל המקיים את עיקרון האנרגיה המינימלית לפיו כל גוף שואף למינימום אנרגיה ולכן נע לאורך מסלול מסוים, עיקרון זה תואם את פיתוח השיטה לפי אוילר-לגרנז'. נערוך סימולציה בה שני המודלים (שהתקבלו בשתי השיטות) עם אותה המסה ומטריצות אינרציה, מופעלים על ידי מומנטים חיצוניים זהים,

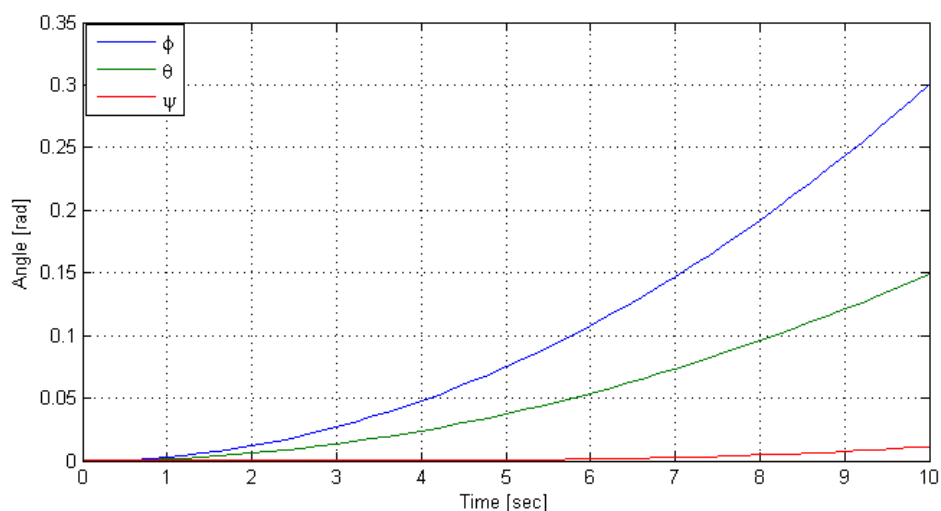
$$\begin{aligned}\tau_\phi &= 0.001[Nm] \\ \tau_\theta &= 0.001[Nm]\end{aligned}\quad (41)$$

עבור המודל שפותח בשיטת אוילר-לגרנז' התקבלו התוצאות הבאות:



איור 3.2: התנהגות כלי הטייס עבור מודל לפי אוילר-לגרנז'.

עבור המודל שפותח בשיטת ניוטון-אויילר התקבלו התוצאות הבאות,



איור 3.3: התנהגות כלי הטייס עבור מודל לפי ניוטון אוילר.

ניתן לראות כי המודל שפותח לפי אוילר-לגרנז' מגיע לזוויות גדולות יותר (בזווית העלרוד) וזאת עבור אותם הכוחות שהופעלו.

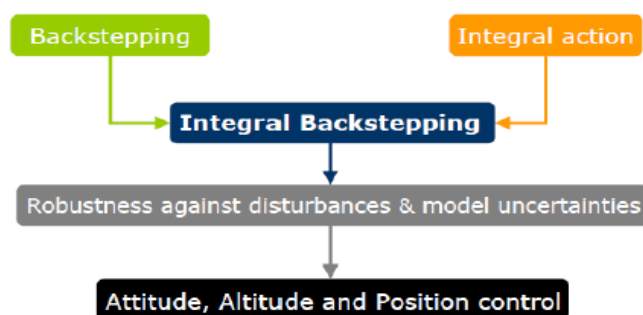
בעבודה זו נשתמש במודל שפותח לפי אוילר-לגרנז' מכיוון שהוא מקיים את עיקרון האנרגיה המינימלית וכן המשוואות שהתקבלו בפיתוח זה נוחות יותר לעבודה. בנספח 2 מופיע פיתוח של משוואות התנועה לפי ניוטון-אויילר בהנחת זוויות קטנות. כאשר מעוניינים במודל פשוט יותר, כדי להקטין את מאמץ החישוב, ניתן לעבוד עם מודל זה.

4. פיתוח מערכות בקרה.

פיתוח מערכות הבקרה מתחלק לשני נושאים עיקריים, בקרת יציבות ובקרת מסלול. בקרי היציבות מאפשרים ייצוב המצב הזוויתי של כלי הטייס סביב מצב זוויתי רצוי וגם ייצוב הגובה של כלי הטייס סביב גובה טיסה רצוי. האפשרות לקבוע זוויות אלו בכלי הטייס תאפשר לנו בהמשך לבקר גם את המקום והאפשרות טיסה לאור מסלול רצוי. מבחינה מעמיקה של משוואות התנועה (28) ו-(31) ניתן לראות כי הדינמיקה של המקום של כלי הטייס המוצגת במשוואה (28) תלויה בזוויות אוילר ובזוויות הנדנדה אך הזוויות אינן תלויות במקום, כך שלמעשה כניסות הבקרה של תת מערכת המקום הינן כוחות הדחף והמצב הזוויתי של כלי הטייס. בקרת המסלול למעשה תכתיב כיצד לקבוע את המצב הזוויתי הרצוי על מנת לאפשר תנועה לאור מסלולים רצויים. בכלי טייס זה קיימת יתירות בחלק מאופני התנועה, כלומר קיימת יותר מדרך אחת המאפשרת להשיג תנועה רצויה. לדוגמא, על מנת שכלי הטייס ינוע לאורך ציר y (ימינה ושמאלה) בתאוצה מסוימת, ניתן לשנות את זווית הנדנדה, אך ניתן גם לשנות את זווית הגלגול (roll). למעשה ישנן אינסוף קומבינציות של הזוויות האלה שיאפשרו את התנועה הרצויה. מכיוון שקיימת יתירות, בתכנון בקר המסלול נחפש חוקי בקרה שיאפשרו לנצל את היתירות ויביאו לידי ביטוי את יתרונותיו של כלי הטייס.

4.1. בקרת יציבות.

בקרת היציבות של משתני המצב השונים פותחה בשיטת Integral Backstepping, שיטה זו משלבת פעולה של אינטגרל עם הבקרה בשיטת Backstepping. בקרה בשיטת Backstepping מאפשרת למתכנן להתחיל מהמצב היציב ומשם "לסגת" לתכנון הבקר שיביא ליציבות. הרעיון להוספת האינטגרל הוצג לראשונה במאמרם של Kanellakopoulos & Krein (1993). בקרה בשיטת Backstepping הנשענת על הוכחת יציבות (ע"י פונקציית ליאפונוב מתאימה) מבטיחה התכנסות יחד עם אגן התכנסות רחב. פעולת האינטגרל מתווספת לתכנון ה-Backstepping. תוספת האינטגרל תורמת לעמידה (רובסטיות) בפני אי-וודאות במודל והפרעות חיצוניות, ולכן משפרת את ביצועי העקיבה במצב המתמיד (Yaolong et al, 2000). סכמה עקרונית של רעיון זה מוצגת באיור 4.1. יישום שיטה זו על Quad-copter עם מודל מקורב (לזוויות קטנות) נעשה בעבודתו של Bouabdallah, (2007), ויישום של השיטה על המודל המלא נעשה בעבודתו של דויד (2011).



איור 4.1: שילוב אינטגרל בשיטת בקרת backstepping, Bouabdallah, (2007).

כאמור הוספת האינטגרל משפרת את הרובסטיות של הבקר, ומאפשרת לו להתמודד בצורה טובה יותר עם חוסר וודאות בפרמטרים של המודל. נבחר את חשיבות תוספת האינטגרל על ידי סימולציה של בקר הגובה בפרק 4.1.4, סימולציה בה המסה של הכלי שונה במקצת מהמסה אותה הבקר מכיר.

4.1.1. תכנון בקר יציבות לזוויות הכלי, Attitude control.

נציג כעת את תכנון הבקר עבור זוויות כלי הטייס. התכנון הינו עבור המודל המלא המוצג בסעיף 3.3, כך שאין הנחת זוויות קטנות בתכנון המודל. תכנון הבקר והוכחת היציבות נעשה בדומה לתכנון בעבודתו של דויד (2011), אך כאן התכנון הוא עבור כלי הטייס הייחודי המוצג בעבודה זו. כניסות הבקרה של כלי הטייס בפועל הן מהירויות הסיבוב של המדחפים אך ניתן להציג אותן גם בדרך שונה, שתקל על תכנון הבקר.

$$\bar{U} = [F_b \quad F_s \quad \tau_\phi \quad \tau_\theta \quad \tau_\psi \quad \tau_\alpha]^T \quad (42)$$

כאשר F_b הוא סכום הכוחות של ארבעת מנועי הגוף, F_s הוא סכום הכוחות של שני המנועים שעל הנדנדה, ו- $\tau_{\phi, \theta, \psi} = \tau_{x, y, z}$ בהתאמה, כפי שהוגדר במשוואה (11), וכן τ_α הוא כפי שהוגדר במשוואה (11). במקרה בו המודל כתוב לפי הזוויות של הנדנדה ביחס לעולם, β , $\tau_\beta = \tau_\alpha$.

נפתח את הבקר עבור ארבעת דרגות החופש הזוויתיות בצורה וקטורית $\sigma = [\phi \quad \theta \quad \psi \quad \beta]^T$, כאשר במשוואה (31) מוצגת הדינמיקה בצורה וקטורית.

תחילה נגדיר את השגיאה בין הזוויות הרצויות לבין זוויות כלי הטייס,

$$e_\sigma = \sigma_d - \sigma \quad (43)$$

על מנת לקבל את הדינמיקה של השגיאה נגזור לפי הזמן את משוואה (43) ונקבל,

$$\dot{e}_\sigma = \dot{\sigma}_d - \dot{\sigma} \quad (44)$$

בכדי שהשגיאה תתכנס לאפס נבחר את ההתנהגות הרצויה של $\dot{\sigma}$, נגדיר את הכניסה הזאת כ- $\dot{\sigma}_w$

$$\dot{\sigma}_w = c_1 e_\sigma + \dot{\sigma}_d + k_\sigma \chi_\sigma \quad (45)$$

כאשר χ_σ הינו האינטגרל על השגיאה, $\chi_\sigma = \int_0^t e_\sigma d\tau$, זו היא התוספת של האינטגרל בבקר. הסימנים c_1, k_σ מייצגים מטריצות חיוביות אלכסוניות המגדירות את קבועי הבקר עבור כל דרגת חופש זוויתית.

מכיוון שבחרנו אות בקרה רצוי $\dot{\sigma}_w$, ניתן כעת להגדיר שגיאה נוספת בין אות זה לאות האמיתי $\dot{\sigma}$,

$$e_{\sigma'} = \dot{\sigma}_w - \dot{\sigma} \quad (46)$$

בכדי לתכנן את הבקר שיביא להתכנסות השגיאה נגזור לפי הזמן את משוואה (46).

$$\frac{de_{\sigma'}}{dt} = \dot{e}_{\sigma'} = \ddot{\sigma}_w - \ddot{\sigma} = c_1 \dot{e}_\sigma + \ddot{\sigma}_d + k_\sigma e_\sigma - \ddot{\sigma} \quad (47)$$

בכדי למצוא את אות הבקרה הרצוי, כלומר סט המומנטים τ_σ , נרצה להציג את נגזרת השגיאה ממשוואה

(44) כפונקציה של השגיאות בלבד. לצורך כך נבודד את נגזרת הזוויות האמתיות $\dot{\sigma}$ מתוך משוואה (46)

ונציב אליו את הביטוי עבור $\dot{\sigma}_w$ המוצג במשוואה (45)

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_w - e_{\sigma'} = c_1 e_\sigma + \dot{\sigma}_d + k_\sigma \chi_\sigma - e_{\sigma'} \quad (48)$$

בהצבת משוואה (48) למשוואה (44) נקבל,

$$\dot{e}_\sigma = -c_1 e_\sigma - k_\sigma \chi_\sigma + e_{\sigma'} \quad (49)$$

כעת נציב את משוואה (49) למשוואה (47), מה שייתן,

$$\begin{aligned} \dot{e}_{\sigma'} &= c_1(-c_1 e_\sigma - k_\sigma \chi_\sigma + e_{\sigma'}) + \ddot{\sigma}_d + k_\sigma e_\sigma - \ddot{\sigma} \\ \dot{\chi}_\sigma &= e_\sigma \end{aligned} \quad (50)$$

על מנת שהשגיאה תדעך לאפס נרצה לתכנן בקר כך שהדינמיקה של השגיאה תהיה ,

$$\dot{e}_{\sigma'} = -c_2 e_{\sigma'} - e_\sigma \quad (51)$$

כאשר גם c_2 הינה מטריצה חיובית אלכסונית.

מתוך משוואה (49) ניתן לבדוד את $e_{\sigma'}$ ובהצבתו ובהצבת משוואה (51) במשוואה (50) נקבל,

$$\ddot{\sigma} = \ddot{\sigma}_d + (I_{4 \times 4} + k_\sigma - c_1 c_2) e_\sigma + (c_1 + c_2) \dot{e}_\sigma + c_2 k_\sigma \chi_\sigma \quad (52)$$

כאשר $I_{4 \times 4}$ הינה מטריצת יחידה בגודל ארבע.

לתוצאה שהתקבלה יש מבנה דומה לזה המתקבל כאשר מערכת מסדר שני מבוקרת עם בקר PID.

במשוואה (52) ניתן לזהות את השגיאה e_σ , את נגזרת השגיאה \dot{e}_σ , ואת האינטגרל על השגיאה χ_σ .

ומכאן ניתן להציג את משוואה (52) גם בצורה הבאה,

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma} &= \ddot{\sigma}_d + k_p e_\sigma + k_D \dot{e}_\sigma + k_I \chi_\sigma \\ k_p &= I_{3 \times 3} + k_\sigma + c_1 c_2, k_D = c_1 + c_2, k_I = c_2 k_\sigma \end{aligned} \quad (53)$$

את הביטוי עבור $\ddot{\sigma}$ הנובע מהדינמיקה של המערכת קיבלנו במשוואה (31) נשווה בין הביטוי המופיע

במשוואה (31) לביטוי שקיבלנו במשוואה (53),

$$D^{-1}(\sigma) [\tau_\sigma + C(\sigma, \dot{\sigma}) \dot{\sigma}] = \ddot{\sigma}_d + k_p e_\sigma + k_D \dot{e}_\sigma + k_I \chi_\sigma \quad (54)$$

ומכאן ניתן למצוא את אות הבקרה הרצוי, שהוא וקטור המומנטים τ_σ , אשר גורם לשגיאה בין הזוויות

הרצויות לזוויות כלי הטייס להתכנס לאפס:

$$\tau_\sigma = D(\sigma) \{ \ddot{\sigma}_d + k_p e_\sigma + k_D \dot{e}_\sigma + k_I \chi_\sigma \} - C(\sigma, \dot{\sigma}) \dot{\sigma} \quad (55)$$

משפט 1: נקודת שיווי המשקל $\sigma = \sigma_d$ הינה יציבה אסימפטוטית עבור המערכת ב- (31) והבקר ב- (55)

הוכחה: לצורך ההוכחה נבחר את פונקציית ליאפונוב המועמדת הבאה:

$$V = \frac{1}{2} \{ [\chi_\sigma^T k_\sigma \chi_\sigma] + [e_\sigma^T e_\sigma] + [e_{\sigma'}^T e_{\sigma'}] \} \quad (56)$$

הפונקציה הינה פונקציה ריבועית ולכן מקיימת $V \geq 0 \forall (e_\sigma, e_{\sigma'}, \chi_\sigma)$ ומתאפסת בנקודת שיווי המשקל. כעת

נגזור את פונקציית ליאפונוב המופיעה במשוואה (56) ונקבל,

$$\dot{V} = [\chi_\sigma^T k_\sigma \dot{e}_\sigma] + [e_\sigma^T \dot{e}_\sigma] + [e_{\sigma'}^T \dot{e}_{\sigma'}] \quad (57)$$

נציב את הנגזרות של השגיאות כפי שהן מופיעות במשוואות (49) ו- (51) ונקבל,

$$\dot{V} = [\chi_\sigma^T k_\sigma e_\sigma] + [e_\sigma^T (-c_1 e_\sigma - k_\sigma \chi_\sigma + e_{\sigma'})] + [e_{\sigma'}^T (-c_2 e_{\sigma'} - e_\sigma)] \quad (58)$$

מכיוון שהביטויים במשוואה הם סקלרים מתקבל $\chi_\sigma^T k_\sigma e_\sigma = e_\sigma^T k_\sigma \chi_\sigma$ וכן $e_\sigma^T e_\sigma = e_\sigma^T e_\sigma$ ומכאן הנגזרת של פונקציית ליאפונוב המתקבלת היא,

$$\dot{V} = [-e_\sigma^T c_1 e_\sigma] + [-e_\sigma^T c_2 e_\sigma] \quad (59)$$

ממשוואה (59) ניתן לראות כי הנגזרת של פונקציית ליאפונוב מקיימת $V \leq 0 \forall (e_\sigma, \dot{e}_\sigma)$ כלומר היא מוגדרת שלילית למחצה. לפי LaSalle's Invariance Principle אם הנגזרת של פונקציית ליאפונוב מוגדרת שלילית למחצה והמסלול היחיד בו היא מתאפסת הוא בנקודת שיווי משקל אזי המערכת הינה יציבה אסימפטוטית. (Khalil, 2001). אם כן ב(59) מופיע ביטוי ריבועי עם סימן שלילי של השגיאה, כדי שביטוי זה יתאפס על השגיאה להיות שווה לאפס כלומר חייב להתקיים $\dot{V} = 0$ רק כאשר $e_\sigma = 0$ וכן מתקיים התנאי של הבקר $e_\sigma = 0$ בנוסף מתוך ההגדרה של χ_σ המופיעה אחרי משוואה (45) מתקיים $\chi_\sigma = \int_0^t e_\sigma|_{e_\sigma=0} d\tau = 0$ מכאן שמסלול היחיד בו הנגזרת של פונקציית ליאפונוב מתאפסת (בכל שאר המסלולים היא שלילית) הוא נקודת שיווי משקל ולכן נקודת שיווי משקל מוגדרת יציבה אסימפטוטית.

4.1.2 סימולציות עבור בקרי יציבות לזוויות הכלי.

כעת נערוך סימולציות בתוכנת Matlab\Simulink אשר בודקות את יעילות הבקר. לצורך הסימולציה נציב את הפרמטרים הבאים למודל הכלי, I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} הם רכיבי טנזור האינרציה של הגוף, וערכם $I_{zz} = 0.297[kg \cdot m^2]$, $I_{xx} = I_{yy} = 0.167[kg \cdot m^2]$. $I_{zs} = 0.04[kg \cdot m^2]$, $I_{xs} = I_{ys} = 0.03[kg \cdot m^2]$ הם רכיבי טנזור האינרציה של הנדנדה, וערכם $m = 1[kg]$ ומסת הכלי היא $m = 1[kg]$. נבחר את קבועי הבקרה הבאים,

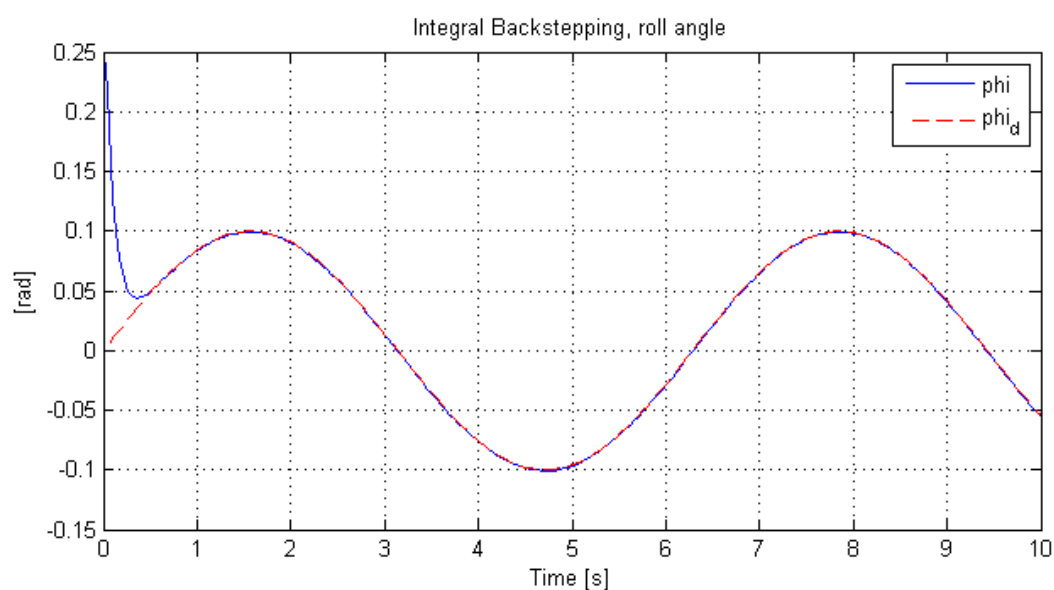
$$\begin{aligned} c_1 &= 35I_{4 \times 4} \\ c_2 &= 10I_{4 \times 4} \\ k_\sigma &= I_{4 \times 4} \end{aligned}$$

תנאי ההתחלה של הסימולציה הם,

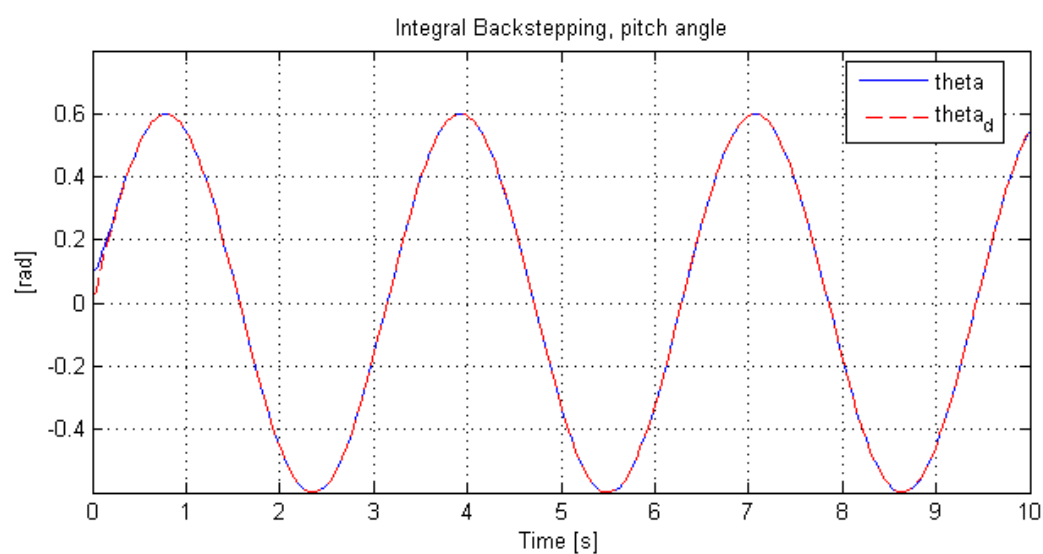
$$\begin{aligned} \phi_0 &= 0.25[rad] \\ \theta_0 &= 0.1[rad] \\ \psi_0 &= 0.2[rad] \\ \beta_0 &= 0[rad] \end{aligned}$$

ונרצה לעקוב אחרי מסלול הזוויות הבא,

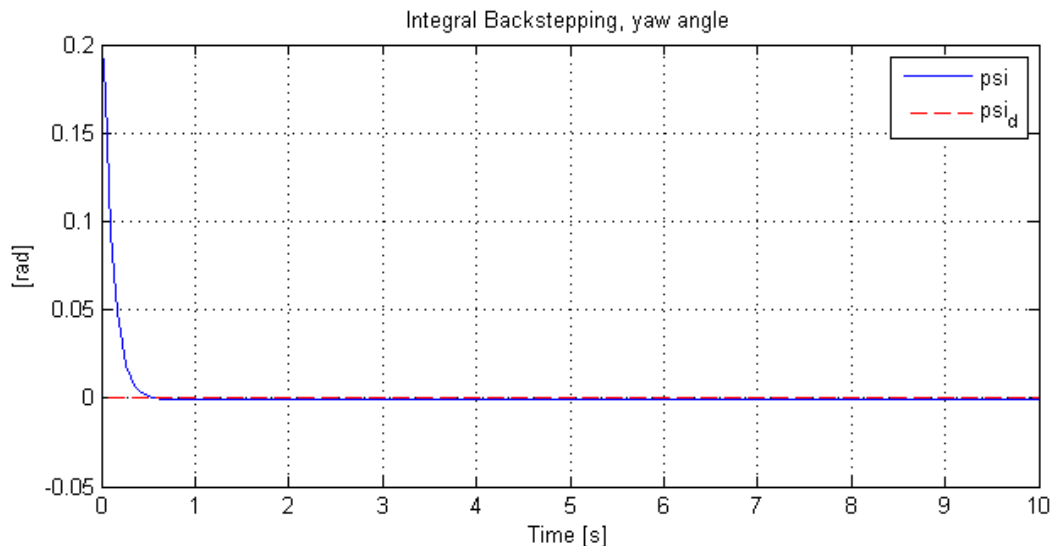
$$\begin{aligned} \phi_d &= 0.1 \sin(t) \\ \theta_d &= 0.6 \sin(2t) \\ \psi_d &= 0 \\ \beta_d &= 0.2 \cos(t/2) \end{aligned}$$



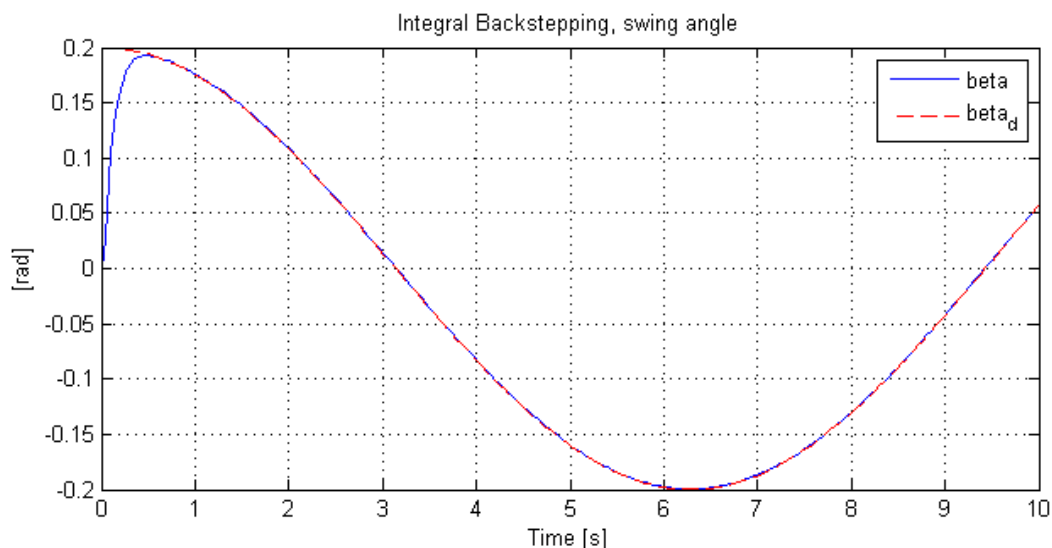
איור 4.2: תוצאת העקיבה של זווית הגלגול אחרי זווית רצויה המושגת באמצעות בקרת יציבות בשיטת Integral Backstepping.



איור 4.3: תוצאת העקיבה של זווית העלרוד אחרי זווית רצויה המושגת באמצעות בקרת יציבות בשיטת Integral Backstepping.



איור 4.4 : תוצאת העקיבה של זווית הסבסוב אחרי רצויה המושגת באמצעות בקרת יציבות בשיטת Integral Backstepping



איור 4.5 : תוצאות העקיבה של זווית הנדנדה אחרי רצויה המושגת באמצעות בקרת יציבות בשיטת Integral Backstepping

מאיורים 4.2-4.5 ניתן לראות שבקרי היציבות מאפשרים ייצוב המצב הזוויתי של כלי הטייס סביב מצב זוויתי רצוי, הן עבור תנאי התחלה שונים והן עבור מסלולים שונים של זוויות הייחוס. כמו כן מאיור 4.3 ניתן לראות כי הבקר עובד היטב גם עבור זוויות גדולות.

4.1.3. תכנון בקר יציבות לגובה הכלי, Altitude control.

בקרת הגובה של כלי הטייס מוצגת כאן כמרכיב של בקרת היציבות (על אף שמדובר במשתנה מקום). המצב הזוויתי של הכלי משפיע על הדינמיקה בכיוון האנכי אך בניגוד לשני משתני המקום x, y , ניתן לקבוע כוח בקרה מתאים לייצוב הגובה עבור כל מצב זוויתי נתון (כוח זה יקבע את כוח הדחף השקול).

פיתוח של בקר הגובה נעשה גם כן בשיטת Integral backstepping באותו אופן שבו פותח בקר היציבות

של המצב הזוויתי בסעיף 4.1.1. לאחר הפיתוח מתקבל הביטוי עבור \ddot{z} ,

$$\ddot{z} = k_{p_z} e_z + k_{D_z} \dot{e}_z + k_{I_z} \chi_z + \ddot{z}_d \quad (60)$$

כאשר e_z הינה השגיאה בין הגובה הרצוי לגובה הכלי, $e_z = z_d - z$,

\dot{e}_z היא הנגזרת בזמן של השגיאה, $\dot{e}_z = \dot{z}_d - \dot{z}$,

$$\chi_z = \int_0^t e_z d\tau, \quad t, \quad \text{הינו אינטגרל על השגיאה מזמן אפס ועד } t$$

הינם קומבינציה של קבועי הבקרה החיוביים $k_{p_z}, k_{D_z}, k_{I_z}$ הנתונה באופן הבא,

$$k_{p_z} = 1 + k_z + c_{z1} c_{z2}$$

$$k_{D_z} = c_{z1} + c_{z2}$$

$$k_{I_z} = c_{z2} k_z$$

ממשוואה (28) נקבל שהדינמיקה בכיוון z היא,

$$\ddot{z} = g + \frac{1}{m} \{ \cos(\theta) \sin(\phi) \sin(\alpha) F_s - \cos(\theta) \cos(\phi) [F_b + F_s \cos(\alpha)] \} \quad (61)$$

מהשוואה של משוואה (60) עם משוואה (61) ובידוד של אותות הבקרה F_b, F_s נקבל,

$$[\cos(\theta) \cos(\phi) \quad \cos(\theta) [\cos(\phi) \cos(\alpha) - \sin(\phi) \sin(\alpha)]] \begin{bmatrix} F_b \\ F_s \end{bmatrix} = m (g - k_{p_z} e_z - k_{D_z} \dot{e}_z - k_{I_z} \chi_z - \ddot{z}_d) \quad (62)$$

ניתן לראות שקיימים שני אותות כניסה המאפשרים לייצב את גובה הכלי, בכדי למצוא פתרון יעיל לבעיה

זו בה קיימת משוואה אחת עם שני נעלמים, ניתן להשתמש במטריצה הופכית מדומה. מטריצה הופכית של

מטריצה לא ריבועית היא pseudo-inverse (הופכית מדומה) ומחושבת כך $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$ כאשר עבור

$A, m > n$ הינה מטריצה בגודל $n \times m$ ו- A^+ היא המטריצה ההופכית המדומה. נקרא לאיבר הראשון של

מטריצת המקדמים A_{11} , ולאיבר השני A_{12} . מכיוון ש- F_b הוא תוצאה של ארבעה מדחפים ואילו F_s

תוצאה של שני מדחפים, נרצה לייצג נתון זה במטריצת המקדמים. לכן נכתוב את משוואה (62) כך,

$$\begin{bmatrix} 2A_{11} & \sqrt{2}A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_b / 2 \\ F_s / \sqrt{2} \end{bmatrix} = m (g - k_{p_z} e_z - k_{D_z} \dot{e}_z - k_{I_z} \chi_z - \ddot{z}_d) \quad (63)$$

כעת ניתן לפתור את המשוואה על ידי שימוש ב pseudo-inverse.

$$\begin{bmatrix} F_b / 2 \\ F_s / \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A_{11} & \sqrt{2}A_{12} \end{bmatrix}^+ m (g - k_{p_z} e_z - k_{D_z} \dot{e}_z - k_{I_z} \chi_z - \ddot{z}_d) \quad (64)$$

השימוש במטריצת ה- pseudo-inverse הינו פתרון יעיל לבעיית היתירות, אך במקרים מסוימים פתרון זה

אינו מתאים ליישום בפועל של הבקר מכיוון שהוא אינו מאפשר הוספת אילוצים. בבקר הגובה כניסות

הבקרה אינן יכולות להיות שליליות וכן כוח הדחף של המדחפים הינו מוגבל. בתכנון הבקר אין התחשבות

במגבלות אלו ולכן לא תמיד הערכים שהתקבלו מהחישוב במשוואה (64) יהיו ערכים הניתנים ליישום

במערכת הבקרה. בכדי להימנע מערכים אשר אינם ניתנים ליישום ניתן להקטין את מספר כניסות הבקרה

כך שיתאימו למספר דרגות החופש אותן יש לבקר. השימוש בכוח הדחף של שני מדחפי הנדנדה אינו חייב

לשמש לבקרת הגובה. ניתן לתכנן את הכוח של מדחפי הנדנדה מתוך שיקולים של הקטנת זווית ההטיה של

הנדנדה. במקרה כזה לבקר הגובה תהיה כניסת בקרה אחת, F_b , וכוחות הדחף שמספקים מנועי הנדנדה יהיה מצב נתון עבור בקרה הגובה כמו המצב הזוויתי של הכלי. ממשוואה (62) נקבל את הבקר הבא,

$$F_b = \frac{1}{\cos(\theta)\cos(\phi)} \left[m(g - k_{pz}e_z - k_{Dz}\dot{e}_z - k_{Iz}\chi_z - \ddot{z}_d) - F_s \cos(\theta)\cos(\phi + \alpha) \right] \quad (65)$$

4.1.4. סימולציה עבור בקר יציבות הגובה.

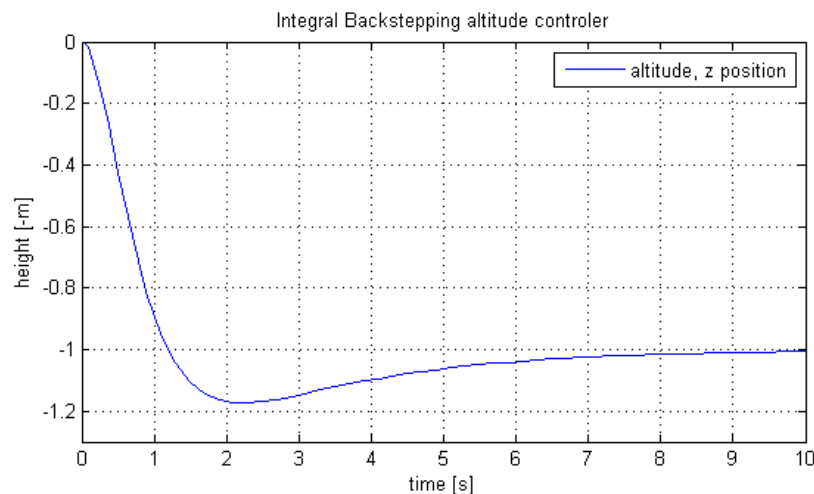
נערוך סימולציה לבקרת הגובה, נשתמש באותם מאפיינים של הכלי כפי שהשתמשנו בסימולציה של בקר המצב הזוויתי בסעיף 4.1.2. נבחר את קבועי הבקרה באופן הבא (נדגיש כי הפיתוח כאן אינו וקטורי ולכן קבועי הבקרה במערכת הגובה הם סקלרים חיוביים),

$$c_{z1} = 1$$

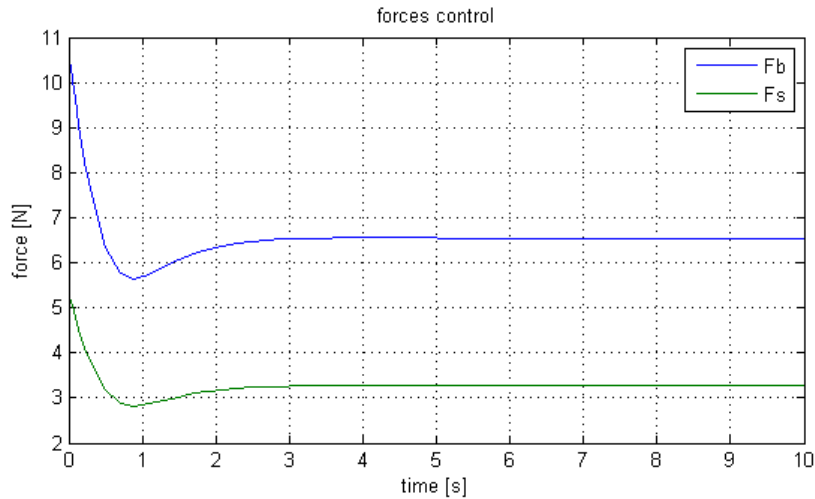
$$c_{z2} = 2$$

$$k_z = 1$$

נבחן את היכולת של מערכת הבקרה לייצב את כלי הטיס בגובה מטר אחד, לכן $z_d = -1$. נזכור שהכיוון החיובי של ציר z הוא כלפי מטה כפי שרואים באיור 4.1. כמו כן, נבחר את כל זוויות הכלי ביחס לעולם להיות אפס, כלומר $\alpha = 0 \Rightarrow \phi, \theta, \psi, \beta = 0$.



איור 4.6: תוצאת עקיבה של כלי הטיס אחרי גובה רצוי המושגת באמצעות בקרה בשיטת Integral Backstepping.



איור 4.7 : מאמצי הבקרה בבקרת הגובה.

מאיור 4.6 ניתן לראות כי אכן בקרת הגובה מייצבת את כלי הטייס עבור גובה רצוי. מאיור 4.7 ניתן לראות שמכיוון שאין שינוי בזווית α הכוחות F_b, F_s באותו כיוון ומאמצי הבקרה של F_b כפולים ממאמצי הבקרה של F_s .

סימולציה נוספת לבקרת הגובה מאפשרת להתבונן בחשיבות הוספת האינטגרל לבקר הגובה. החלק האינטגרלי בבקר מוסיף עמידות בפני אי וודאות, לדוגמא של הפרמטרים במודל. בסימולציה זו נשנה את ערכה של המסה במודל המערכת ל-1.2 ק"ג ואילו הבקר יפעל תחת ההנחה שהמסה היא 1 ק"ג, כלומר קיימת חוסר וודאות במסת כלי הטייס והיא גדולה ב-20% מהמסה המוערכת. עבור סימולציה זו נשתמש בבקר המתוכנן במשוואה (65) אשר מייצב את גובה כלי הטייס באמצעות מנועי הגוף בלבד.

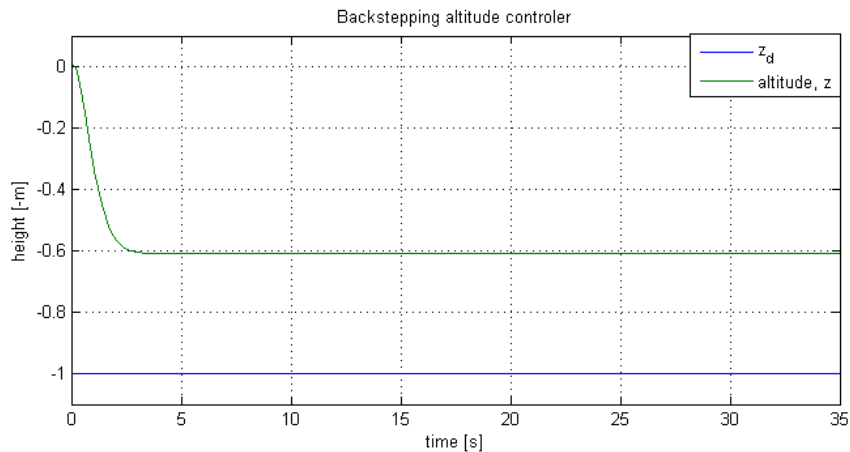
נבחן שוב את התייצבות כלי הטייס בגובה מטר אחד, $z_d = -1$. הסימולציה נערכה עם אותם הפרמטרים של כלי הטייס אשר נבחרו בסימולציות הקודמות מלבד מסת כלי הטייס ששונתה ל- $m = 1.2[kg]$. נזכיר שוב כי מסה זו אינה ידועה לבקר, הבקר מחושב עבור כלי טייס במסה של ק"ג אחד. תחילה נערכה סימולציה אשר אינה כוללת את פעולת האינטגרל. קבועי הבקרה שנבחרו הם,

$$c_{z1} = 4$$

$$c_{z2} = 1$$

$$k_z = 0$$

גם בסימולציה זו כלי הטייס נשאר אופקי וכך גם הנדנדה, $\phi, \theta, \psi, \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.



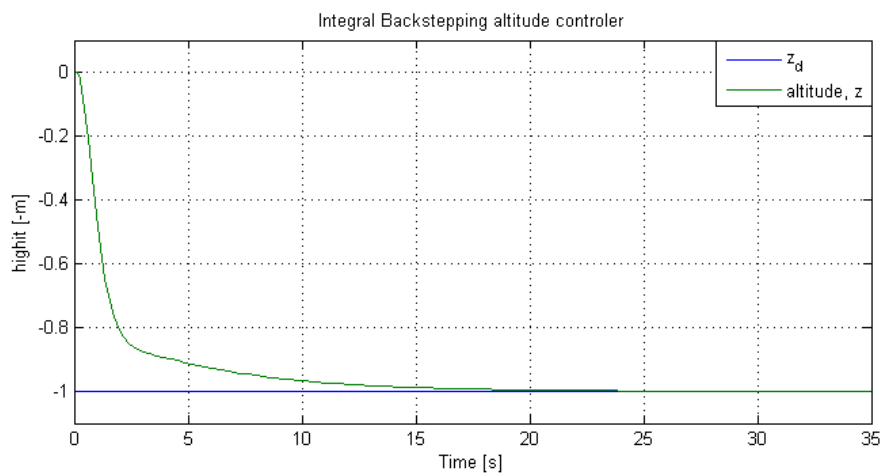
איור 4.8: התייצבות כלי הטייס על גובה רצוי באמצעות בקר מסוג Backstepping.

כעת נציג את תוצאות הסימולציה כאשר הבקר כולל את פעולת האינטגרל. גם כאן כלי הטייס נדרש להתייצב בגובה מטר אחד, $z_d = -1$. קבועי הבקר הם,

$$c_{z1} = 4$$

$$c_{z2} = 1$$

$$k_z = 1$$



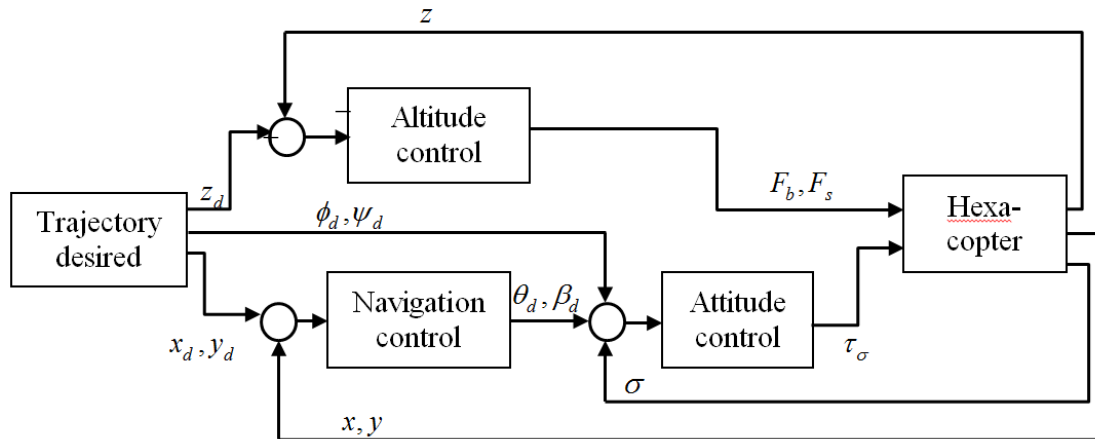
איור 4.9: התייצבות כלי הטייס על גובה רצוי באמצעות בקר מסוג Integral Backstepping

איורים 4.8-4.9 ממחישים את הרובסטיות ביחס לאי וודאות שמתקבל כתוצאה מהוספת החלק האינטגרלי של הבקר. באיור 4.8 ניתן לראות כי הבקר ללא החלק האינטגרלי מתייצב על ערך קבוע אך בסטייה מהערך הרצוי, מכיוון שהבקר אינו מכיר את המודל באופן מושלם. אותות הבקרה אינם מייצרים את הכוח המתאים בכדי לתקן את השגיאה ונותרת סטייה קבועה מהערך הרצוי. באיור 4.9 ניתן לראות שהבקר מייצב את כלי הטייס בגובה הרצוי, התוספת של החלק האינטגרלי אינה מאפשרת לכלי הטייס שגיאה קבועה במצב המתמיד מכיוון שהחלק האינטגרלי סוכם את השגיאה ומגדיל את אות הבקרה עד להתכנסות לערך הרצוי.

4.2. בקרת מסלול.

תפקידה של בקרת המסלול הוא לאפשר לכלי לנוע במרחב בין נקודות רצויות או לעקוב אחר מסלול רצוי. ממשוואות התנועה (28) ניתן לראות שהדינמיקה של משתני המקום של כלי הטייס תלויה במצב הזוויתי (זווית אוילר) ובכוח הדחף השקול של המדחפים. כוח הדחף השקול נבחר כדי לייצב את כלי הטייס בגובה טיסה רצוי כמתואר בסעיף 4.1.3, ולכן נשתמש במשתנים של המצב הזוויתי כאותות בקרה ווירטואליים לצורך ניווט הכלי (ווירטואליים מכיוון שהם אינם אותות הבקרה בפועל).

האופן שבו מתבצעת טיסה לאורך מסלול רצוי מוצג באיור 4.10. כלי הטייס מקבל את המסלול הרצוי הכולל חמש דרגות חופש, שלוש דרגות חופש מייצגות מקום רצוי ושתי דרגות חופש נוספות הן זווית הסבסוב וזווית הגלגול. זווית הנדנדה יכולה גם כן להיות דרגת חופש בלתי תלויה, אך במקרה זה זווית הגלגול כבר אינה בלתי תלויה והיא אחראית על ייצוב מקום הכלי לאורך ציר y . בקר הגובה קובע את כוח הדחף השקול שמייצרים המדחפים על מנת לשמור על גובה רצוי. בקר המסלול מייצר את הזוויות הרצויות לצורך טיסה לאורך מסלול רצוי, ובקר היציבות של הזוויות מטה את הכלי בזוויות הרצויות שנקבעו על ידי בקרה המסלול.



איור 4.10: דיאגרמת בלוקים של בקרת כלי הטייס.

בקר המסלול מתוכנן בשיטת Backstepping, כאשר זווית העלרוד (pitch) אחראית על ייצוב בכיוון ציר x במערכת הגוף. התזוזה בציר y (של מערכת הגוף) מבוקרת דרך זווית הגלגול (roll) או באמצעות הזווית של הנדנדה. ייחודו של כלי זה מתבטא באפשרות לנוע באופן מבוקר לאורך ציר y עם זווית גלגול רצויה (כלומר שני משתני מצב אלה ניתנים לבקרה באופן בלתי תלוי).

4.2.1 בקרת מסלול בכיוון ציר x .

נציג כעת את פיתוח בקר המסלול המאפשר תנועה מבוקרת לאורך ציר x של המערכת האינרציאלית, כאשר אות הבקרה (הווירטואלי) הוא זווית העלרוד של כלי הטייס. הפיתוח הינו עבור המודל המוצג בסעיף 3.3, אשר אינו מניח זוויות קטנות.

תחילה נגדיר את השגיאה בין המקום הרצוי והמקום בפועל של כלי הטייס,

$$e_x = x_d - x \quad (66)$$

בכדי לקבל את הדינמיקה של השגיאה נגזור את משוואה (66) בזמן ונקבל,

$$\dot{e}_x = \dot{x}_d - \dot{x} \quad (67)$$

נניח כי מהירות כלי הטייס, \dot{x} , הינה אות בקרה וירטואלי המסומן ב- \dot{x}_w . נבחר את אות הבקרה הוירטואלי כך שהשגיאה תתכנס לאפס,

$$\dot{x}_w = c_{x1}e_x + \dot{x}_d \quad (68)$$

c_{x1} הינו קבוע חיובי המשמש כקבוע בקרה בניווט על ציר x .

לאחר שנבחר את בקרה וירטואלי \dot{x}_w , ניתן להגדיר שגיאה נוספת בין האות הרצוי ובין המהירות בפועל של כלי הטייס \dot{x} .

$$e_{x'} = \dot{x}_w - \dot{x} \quad (69)$$

נציג גם את הדינמיקה של השגיאה הזו על ידי גזירה של משוואה (69) בזמן.

$$\frac{de_{x'}}{dt} = \dot{e}_{x'} = \ddot{x}_w - \ddot{x} \quad (70)$$

בכדי לתכנן את הבקר שיביא להתכנסות השגיאה לאפס נציב את הנגזרת בזמן של משוואה (68) למשוואה (70).

$$\dot{e}_{x'} = c_{x1}\dot{e}_x + \ddot{x}_d - \ddot{x} \quad (71)$$

כעת, על מנת למצוא את אות הבקרה הרצוי, כלומר זווית העלרוד הרצויה, נציג את הדינמיקה של משתנה השגיאה ב- (67) כפונקציה של e_x, \dot{e}_x בלבד. לצורך כך נבודד את המהירות של כלי הטייס, \dot{x} , ממשוואה (69) ונציב למשוואה זו את הביטוי עבור \dot{x}_w המוצג במשוואה (68). התוצאה המתקבלת היא,

$$\dot{x} = \dot{x}_w - e_{x'} = c_{x1}e_x + \dot{x}_d - e_{x'} \quad (72)$$

מהצבת משוואה (72) במשוואה (67) נקבל,

$$\dot{e}_x = -c_{x1}e_x + e_{x'} \quad (73)$$

כעת נציב את משוואה (73) למשוואה (71) ונקבל,

$$\dot{e}_{x'} = c_{x1}(-c_{x1}e_x + e_{x'}) + \ddot{x}_d - \ddot{x} \quad (74)$$

נרצה לתכנן בקר כך שהשגיאה תדעך לאפס, לכן נבחר את הדינמיקה של השגיאה $e_{x'}$ להיות,

$$\dot{e}_{x'} = -c_{x2}e_{x'} - e_x \quad (75)$$

כאשר c_{x2} הינו קבוע חיובי.

נציב את משוואה (75) במשוואה (74), וכן נבודד את $e_{x'}$ ממשוואה (73) ונציב אותו במשוואה (74). נקבל את התוצאה הבאה,

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + (1 + c_{x1}c_{x2})e_x + (c_{x1} + c_{x2})\dot{e}_x \quad (76)$$

לתוצאה שהתקבלה יש צורה של מערכת מסדר שני עם בקר מסוג PD. ב- (76) ניתן לזהות את השגיאה ואת נגזרת השגיאה בזמן, לכן נציג את משוואה (76) בצורה הבאה,

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_d + k_{Px}e_x + k_{Dx}\dot{e}_x \\ k_{Px} &= 1 + c_{x1}c_{x2}, k_{Dx} = c_{x1} + c_{x2} \end{aligned} \quad (77)$$

מתוך משוואות התנועה של הרחפן המוצגות ב- (28), משוואה התנועה בכיוון x היא,

(78)

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} (\cos(\psi) \sin(\phi) \sin(\theta) - \cos(\phi) \sin(\psi)) (F_s \sin(\alpha)) + (\cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) + \sin(\phi) \sin(\psi)) (-F_s \cos(\alpha) - F_b)$$

באופן שיוסבר בהמשך ניתן להניח כי זווית הסבסוב שווה אפס ($\psi = 0$) מבלי להגביל כלליות הפתרון. לאחר הנחה זו נשווה בין משוואה (78) למשוואה (77).

$$\sin(\phi) \sin(\theta) (F_s \sin(\alpha)) + \cos(\phi) \sin(\theta) (-F_s \cos(\alpha) - F_b) = m(\ddot{x}_d + k_{Px} e_x + k_{Dx} \dot{e}_x) \quad (79)$$

נזכור כי אות הבקרה כאן היא זווית העלרוד, θ , נבודד אותה ממשוואה (79). כמו כן נזכור כי $\phi + \alpha = \beta$. לכן זווית העלרוד הדרושה לצורך התכנסות למקום רצוי לאורך ציר x היא,

$$\theta_d = \arcsin \left(\frac{m(\ddot{x}_d + k_{Px} e_x + k_{Dx} \dot{e}_x)}{-F_b \cos(\phi) - F_s \cos(\beta)} \right) \quad (80)$$

4.2.2. בקר מסלול בכיוון ציר y .

באופן דומה לפיתוח בקר המסלול בכיוון ציר x , נפתח את בקרת המסלול בכיוון ציר y , כאשר כאן אות הבקרה (הווירטואלי) כולל את זווית הגלגול ואת זווית הנדנדה. מכיוון שיש כאן יתירות, ניתן להתייחס לאחת הזוויות כאל אות כניסה נתון הנקבע לפי דרישות המפעיל ולזווית השנייה כאות בקרה לייצוב המקום. למעשה העובדה שניתן לייצב תנועה בכיוון ציר y בשני אופנים מאפשרת דרגת חופש מבוקרת נוספת לכלי הטייס. זאת מכיוון שניתן לבקר את התנועה בכיוון y ללא תלות בזווית הגלגול וניתן לבקר את זווית הגלגול ללא תלות בבקרת המקום בכיוון y .

תכנון הבקר מתבצע עם המודל המוצג בסעיף 3.3 ללא הנחת זוויות קטנות. פיתוח בקר בשיטת Backstepping בדומה לפיתוח שנעשה בסעיף 4.2.1 מוביל אל הביטוי עבור \ddot{y} ,

$$\ddot{y} = \ddot{y}_d + (1 + c_{y1} c_{y2}) e_y + (c_{y1} + c_{y2}) \dot{e}_y \quad (81)$$

כאשר c_{y1}, c_{y2} הינם קבועי הבקר והם קבועים חיוביים. e_y הינה השגיאה בין המקום הרצוי והמקום האמיתי, $e_y = y_d - y$, ו- \dot{e}_y היא הנגזרת בזמן של שגיאת המקום $\dot{e}_y = \dot{y}_d - \dot{y}$.

נציג את משוואה (81) בצורה המזכירה בקר PD,

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \ddot{y}_d + k_{Py} e_y + k_{Dy} \dot{e}_y \\ k_{Py} &= 1 + c_{y1} c_{y2}, k_{Dy} = c_{y1} + c_{y2} \end{aligned} \quad (82)$$

משוואה (82) כוללת את משוואות התנועה של כלי הטייס, הביטוי עבור \ddot{y} במשוואות התנועה הינו,

(83)

$$\ddot{y} = \frac{1}{m} [(\cos(\phi) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi)) (F_s \sin(\alpha)) + (\cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \cos(\psi) \sin(\phi)) (-F_s \cos(\alpha) - F_b)]$$

גם כאן ללא הגבלת הכלליות ניתן להניח כי זווית הסבסוב היא אפס ($\psi = 0$). נשווה בין הביטוי המתקבל במשוואה (82) לביטוי המתקבל במשוואה (83).

$$\frac{1}{m} [\cos(\phi) (F_s \sin(\alpha)) + (-\sin(\phi)) (-F_s \cos(\alpha) - F_b)] = \ddot{y}_d + k_{Py} e_y + k_{Dy} \dot{e}_y \quad (84)$$

נזכור כי $\alpha + \phi = \beta$ ולכן את הביטוי במשוואה (84) ניתן להציג בצורה הבאה,

$$F_s \sin(\beta) + F_b \sin(\phi) = m(\ddot{y}_d + k_{py}e_y + k_{Dy}\dot{e}_y) \quad (85)$$

כאשר נרצה להשתמש בזווית הגלגול לצורך בקרת המקום בכיוון y , עבור זווית נתונה של הנדנדה, זווית הגלגול הדרושה היא,

$$\phi_d = \arcsin\left(\frac{m(\ddot{y}_d + k_{py}e_y + k_{Dy}\dot{e}_y) - F_s \sin(\beta)}{F_b}\right) \quad (86)$$

כאשר נרצה להשתמש בהטיית הנדנדה לצורך בקרת המקום בכיוון y , עבור זווית גלגול נתונה, זווית הנדנדה הדרושה היא,

$$\beta_d = \arcsin\left(\frac{m(\ddot{y}_d + k_{py}e_y + k_{Dy}\dot{e}_y) - F_b \sin(\phi)}{F_s}\right) \quad (87)$$

את הוכחת יציבות מערכת הבקרה ניתן לראות בנספח 4.

4.2.2.1. בחירת הכוח F_s .

כדי לאפשר טיסה עם חמש דרגות חופש מבוקרות, כאשר זווית הגלגול היא אחת מדרגות החופש שנקבעות על ידי המפעיל, יש צורך ליצר מספיק כוח דחף עם המדחפים של הנדנדה כדי שכלי הטייס יוכל לנוע בתאוצות הדרושות. במקרה כזה, בקר הגובה נקבע לפי משוואה (65), כדי להשאיר חופש בבחירת הכוח שמספקים מנועי הנדנדה. נציג את משוואה (87) בצורה הבאה,

$$F_s \sin(\beta_d) = m(\ddot{y}_d + k_{py}e_y + k_{Dy}\dot{e}_y) - F_b \sin(\phi) \quad (88)$$

כלומר אות הבקרה מורכב גם מזווית הנדנדה הרצויה וגם מהכוח שמפעילים מנועי הנדנדה. כמובן שהבקרה חייבת להיות תלויה בשני הפרמטרים מכיוון שמנועי הנדנדה אינם יכולים לספק כוח שלילי ולכן כיוון הכוח תלוי בזווית הנדנדה ואילו זווית הנדנדה אינה מספקת כוח ולא ניתן לבקר את מיקום כלי הטייס ללא הכוח שמספקים מנועי הנדנדה.

מכיוון שערכו של $\sin(\beta_d)$ נע בין הערכים $[-1, 1]$ ברור כי הכוח שמספקים מנועי הנדנדה צריך להיות גדול מסך הכוח הדרוש לתנועה רצויה בכיוון ציר y .

נציג כעת את הדרך לבחירת F_s .

בחירת F_s גם תספק את הכוח הרצוי וגם תגדיר זווית מקסימלית בה הנדנדה יכולה לסטות, נבחר את הכוח להיות,

$$F_s = p_1 e_{\Delta y} + p_2 \quad (89)$$

כאשר $e_{\Delta y} = m(\ddot{y}_d + k_{py}e_y + k_{Dy}\dot{e}_y) - F_b \sin(\phi)$ ו- p_1, p_2 הינם קבועים. p_1 מגדיר את הזווית המקסימלית בה הנדנדה יכולה לנטות והוא מקבל ערכים גדולים או שווים לאחד, ו- p_2 מונע את האפשרות לחלוקה באפס ויוצר את התחום בו הנדנדה אינה מוטה בזווית המקסימלית והוא מקבל ערכים גדולים מאפס. לדוגמא עבור בחירת הערכים $p_1 = 2$ $p_2 \rightarrow 0$, זווית הנדנדה תקבל את הערך המקסימלי המתקבל

מהביטוי $\beta_d = \arcsin\left(\frac{e_{\Delta y}}{2e_{\Delta y}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$ והיא תנועה בין ערכו החיובי לערכו השלילי ללא תחום ביניים.

דוגמא נוספת היא בחירת הערכים $p_1 = 1$, $p_2 = 2mg/6$, זווית הנדנדה אינה מוגבלת ועבור שגיאות גדולות מאוד היא שואפת ל- $\pm 90^\circ$, אך עבור שגיאות קטנות יותר היא מקבלת את ערכי הביניים. כמו כן במצב ריחוף במקום, עם זווית גלגול אפס (כאשר הדרישה היחידה היא יצירת כוח עילוי להחזקת הכלי באוויר) כל המדחפים של כלי הטיס יספקו כוח שווה.

ב(89) אנו מוצאים את הכוח F_s בידיעת הכוח F_b אך ב-(65) אנו מוצאים את הכוח F_b בידיעת הכוח F_s בכדי להימנע ממצב זה נפתור את שתי המשוואות האלו כמערכת משוואות. מהצבת (65) ב-(89) ניתן לבדוד ולמצוא את F_s ולאחר מכן להציבו ב-(65).

4.2.3. סימולציות של בקר המסלול.

בתת פרק זה נערוך סימולציות לבדיקת בקר המסלול. הסימולציות מתחלקות לשתי קבוצות :
Set-point – מקרה בו הבקר מקבל את הנקודה הסופית אליה יש להגיע ואין דרישה על המסלול עצמו.
Trajectory tracking – מקרה בו נדרשת טיסה לאורך מסלול רצוי. כאן המקום הרצוי של הכלי מוגדר בכל זמן נתון.
הפרמטרים הפיזיקליים של כלי הטיס (המסה ומומנטי האינרציה) הינם אותם פרמטרים כפי שהוצגו בסעיף 4.1.2, כך גם הקבועים של בקר המצב הזוויתי.
קבועי בקר המסלול הם,

$$c_{x1} = c_{y1} = 4.79$$

$$c_{x2} = c_{y2} = 0.1$$

בסימולציות אלו נעסוק במיקום המרחבי של כלי הטיס. בקר הגובה המהווה מרכיב של בקר היציבות משמש גם כן מרכיב של בקר המסלול. בקר הגובה הינו הבקר המוצג במשוואה (65) כאשר קבועי הבקר הם,

$$c_{z1} = 4.79$$

$$c_{z2} = 0.1$$

$$k_z = 0.1$$

I. הסימולציה הראשונה הינה עבור Set point כאשר ישנן 5 דרגות חופש מבוקרות, מיקום הכלי, x, y, z , זווית הסבסוב, ψ , וזווית הגלגול ϕ .
תנאי ההתחלה הם,

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0[m]$$

$$\phi_0 = \theta_0 = \psi_0 = \beta_0 = 0[rad]$$

הנקודה הרצויה והמצב הרצוי אליו יש להגיע הם,

$$x_d = 100[m]$$

$$y_d = 5[m]$$

$$z_d = -10[m]$$

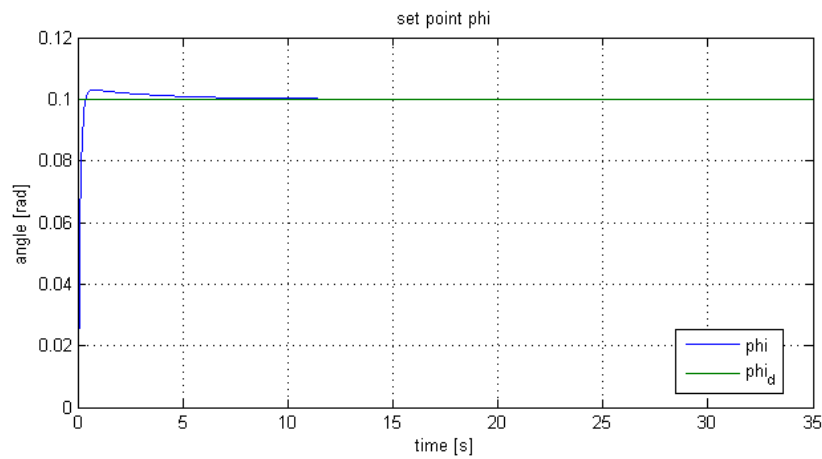
$$\phi_d = 0.1[rad]$$

$$\psi_d = 0[rad]$$

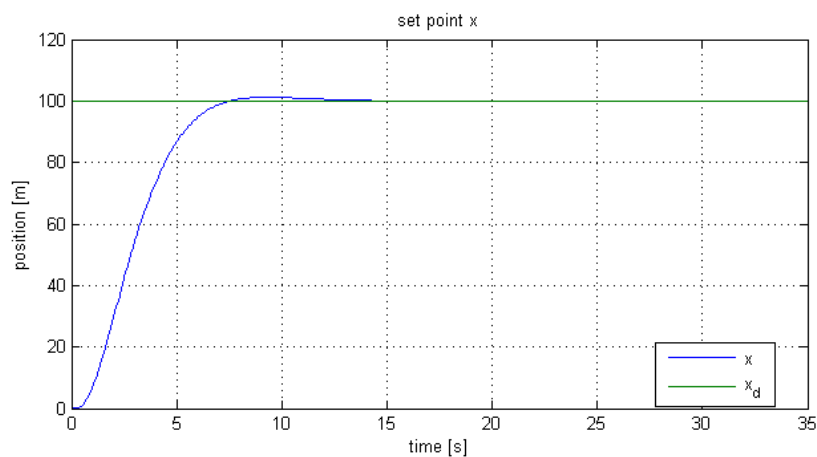
מכיוון שהשגיאה ההתחלתית היא גדולה מאוד והמהירות היא אפס, בקר המסלול קובע זוויות רצויות גדולות. כדי להימנע מדרישה לזוויות גדולות ניתן להעביר את שגיאת המקום דרך מסנן (עם הגבר סטטי יחידה) וכך להימנע מהמצב בו השגיאה ההתחלתית שרואה בקר המקום היא גדולה. עם זאת נרצה מסנן שמגיב מהר בכדי שלא יאט את פעולת הבקר. בדוגמא זו נשתמש במסנן הבא,

$$G = \frac{10}{s^2 + 10s + 10} \quad (90)$$

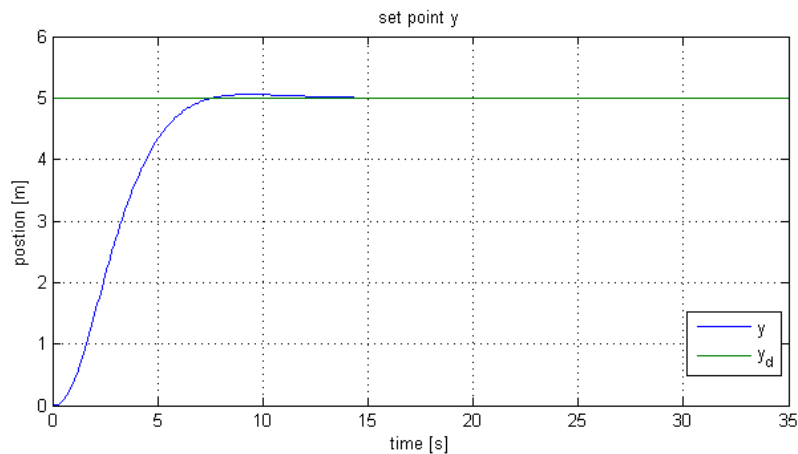
התוצאות המתקבלות עבור סימולציה זו הן,



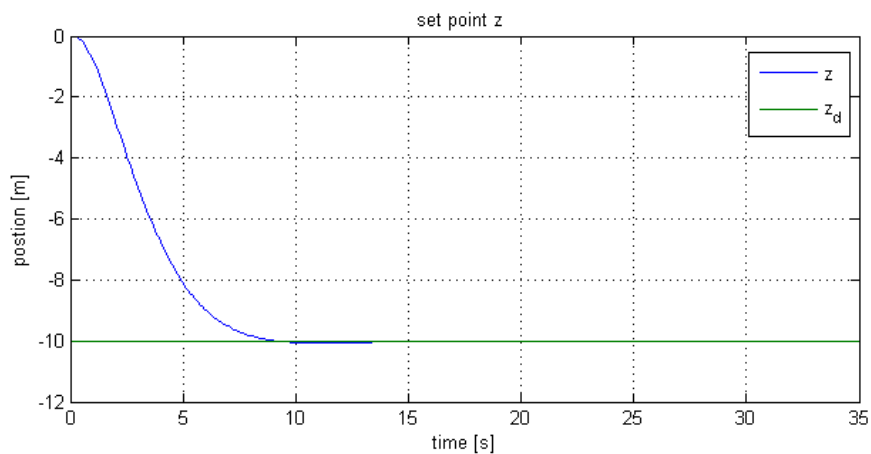
איור 4.11 : עקיבה אחרי זווית גלגול רצויה.



איור 4.12 : ניווט לנקודה רצויה על ציר x .



איור 4.13 : ניווט לנקודה רצויה על ציר y .



איור 4.14 : ניווט לנקודה רצויה על ציר z .

מאיורים 4.11-4.14 ניתן לראות כי בקר המסלול מייצר את הזוויות הדרושות לצורך ניווט לנקודה שהוגדרה וכן גם בקר הגובה ובקר זווית הגלגול מביאים את הכלי למצב המבוקש.

II. הסימולציה הבאה הינה עבור Trajectory tracking, זווית הסבסוב וזווית הגלגול הרצויות קבועות והן אותן הזוויות אשר הוגדרו בסימולציה הראשונה,

$$\psi_d = 0[rad]$$

$$\phi_d = 0.1[rad]$$

המסלול הרצוי מוגדר באופן הבא,

$$x_d = 3\cos(t)[m]$$

$$y_d = 1\sin(t/2)[m]$$

$$z_d = -t/5[m]$$

תנאי התחלה של הסימולציה הם,

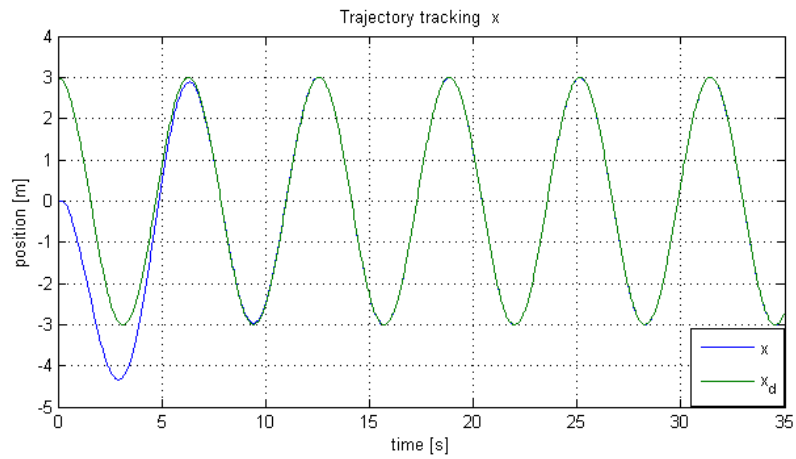
$$\phi_0 = \theta_0 = \psi_0 = 0[rad]$$

$$x_0 = 0[m]$$

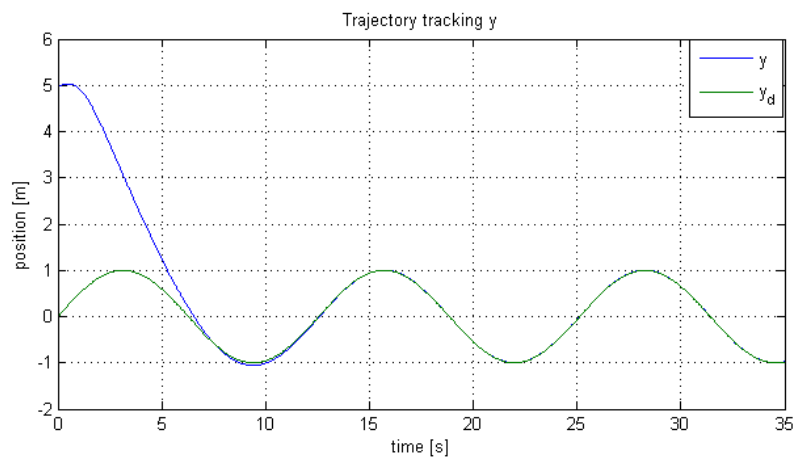
$$y_0 = 5[m]$$

$$z_0 = -1[m]$$

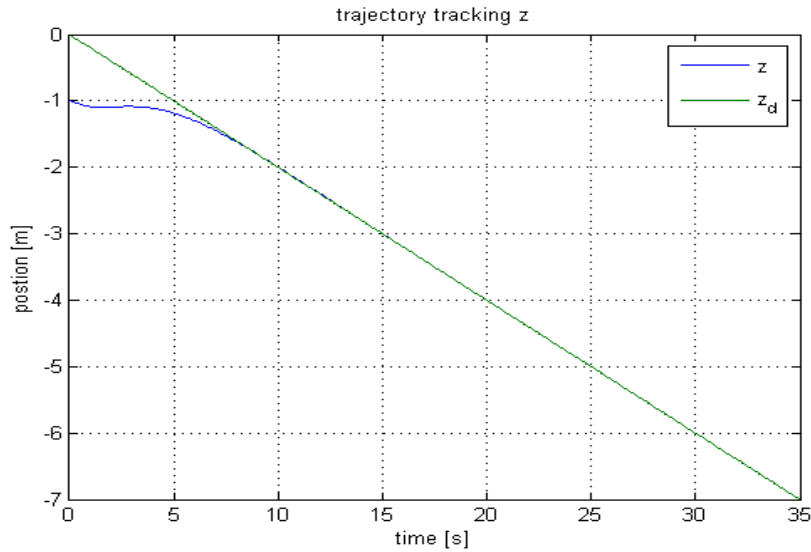
ותוצאות הסימולציה הן,



איור 4.15: מעקב אחרי מסלול על ציר x .



איור 4.16: מעקב אחרי מסלול על ציר y .



איור 4.17: עקיבה אחרי מסלול על ציר z .

מאיורים 4.15-4.17 ניתן לראות כי בקר המסלול מאפשר טיסה לאורך המסלול רצוי.

III. הסימולציה הבאה ממחישה את היתרונות של כלי הטיס כאשר היא מדגימה בקרה של חמש דרגות חופש באופן בלתי תלוי. המטרה כאן היא שכלי הטיס יצביע על נקודה מסוימת, כלומר שהניצב לגוף כלי הטיס במרכז הגוף יהיה בכיוון נקודה מוגדרת במרחב בכל זמן הטיסה (לדוגמא לצורך צילום הנקודה ע"י מצלמה רתומה לכלי הטיס). מכיוון שלכלי הטיס ישנן רק חמש דרגות חופש בלתי תלויות הטיסה מעל הנקודה הרצויה היא בקו ישר לאורך ציר y . בסימולציה זו מוצגת טיסה לאורך מסלול רצוי יחד עם דרישה לזווית גלגול רצויה המשתנה בזמן.

את זווית הגלגול הרצויה נחשב בהתאם לגיאומטריה של הבעיה,

$$\phi_d = \arctan\left(\frac{e_y}{e_z}\right) \quad (91)$$

כאשר e_y, e_z הם המרחקים בציר z ובציר y בין הנקודה עליה יש להצביע ובין המקום של כלי הטיס.

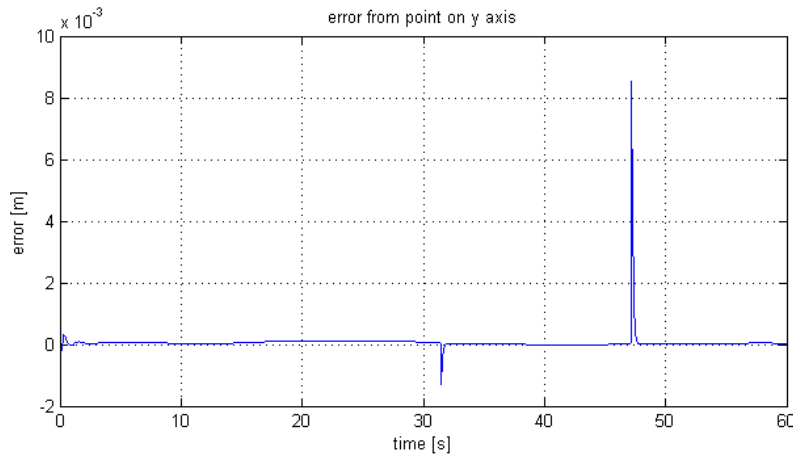
הנקודה עליה נרצה להצביע היא $(0,0,1)$.

כאשר מסלול הטיסה הרצוי הינו,

$$y_d = 2\sin(t/5)[m]$$

$$z_d = -10[m]$$

נציג כעת את הגרף המתאר את השגיאה בין הנקודה עליה "מצביע" כלי הטיס לבין הנקודה הרצויה.



איור 4.18: השגיאה בין הנקודה עליה "מצביע" כלי הטייס לבין הנקודה הרצויה.

ניתן לראות מאיור 4.18 כי השגיאות הן קטנות מאוד וכי מתאפשרת טיסה לאורך המסלול הרצוי יחד עם מצב זוויתי רצוי, דבר זה ייחודי לכלי הטייס הנדון בעבודה זו. בניגוד לכלים אחרים יכולת דומה, הכלי כאן אינו דורש התקנה של מנועים נוספים שתפקידם להטות את המדחפים.

4.2.4. הרחבת בקרי המסלול עבור זווית סבסוב שונה מאפס.

תת פרק זה עוסק בהרחבה של בקר המסלול למקרה של זווית סבסוב שונה מאפס. בתתי הפרקים 4.2.1 ו-4.2.2 תוכנן בקר המסלול בהנחה כי זווית הסבסוב שווה לאפס. תכנון כזה אינו מחייב ניווט עם זווית סבסוב אפס אך דורש התאמות מסוימות. למעשה בקר המסלול מתוכנן למערכת הצירים \hat{e} המוצגת בפרק 3, מערכת זו הינה המערכת המסובבת בזווית ψ (זווית הסבסוב) מהמערכת האינרציאלית. בצורה פשוטה ניתן להציג את בקר המסלול לצורך ניווט עם זווית סבסוב קבועה ושווה לאפס אך הניווט אינו מתבצע במערכת האינרציאלית אלא במערכת \hat{e} . כמובן שכלי הטייס עוקב אחרי המסלול הדרוש במערכת האינרציאלית.

בפרק 3 הוצג הקשר בין המערכת האינרציאלית למערכת הגוף הצמודה לכלי הטייס, קשר זה מתואר על ידי זוויות אוילר ומטריצת הסיבוב המוצגת במשוואה (1). המסלולים אחריהם כלי הטייס צריך לעקוב הינם מסלולים המתוארים במערכת האינרציאלית ולכן משתמשים בקשרים שיוצרת מטריצת הסיבוב בכדי לנווט את כלי הטייס, בקר המסלול המופיע בסעיפים 4.2.1 ו-4.2.3 מתבסס על קשרים אלו. אם מניחים שכלי הטייס אינו יכול להסתובב בכיוון זווית הסבסוב, מטריצת הסיבוב המעבירה בין מערכת הגוף למערכת האינרציאלית תהיה,

$$R' = R_y R_x = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\sin(\phi) & \sin(\theta)\cos(\phi) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (92)$$

אותות הבקר בסעיפים 4.2.2-4.2.3 תוכננו לפי הקשרים המתקבלים משימוש במטריצה המוצגת במשוואה (92) למעשה זו המטריצה המקשרת בין המערכת \hat{e} למערכת הגוף באופן הבא,

$$\hat{e}' = R' \hat{b} \quad (93)$$

בכדי להשלים את הקשר בין מערכת הגוף למערכת האינרציאלית נרצה להציג את הקשר בין המערכת האינרציאלית למערכת המשנית \hat{e}' ,

$$\hat{e} = R_z \hat{e}' \quad (94)$$

המטריצה R_z הינה המטריצה המייצגת את זווית הסבסוב, זו מטריצת הסיבוב סביב ציר z כפי שמוצגת בפרק 3. מהצבת משוואה (93) במשוואה (94) מתקבל הקשר בין מערכת הגוף למערכת האינרציאלית כפי שהתקבל במשוואה (2). בכדי שבקר המסלול יקיים את הדרישות במערכת האינרציאלית יש להעביר את הווקטורים של המקום המהירות והתאוצה מהמערכת האינרציאלית למערכת \hat{e}' . מתוך משוואה (94) ומהעובדה שמטריצות סיבוב מקיימות את הקשר $R^{-1} = R^T$ מתקבל הקשר הבא,

$$\hat{e}' = R_z^T \hat{e} \quad (95)$$

לכן בכדי לא להגביל את הכלליות של בקר המסלול ולאפשר תנועה וניווט גם עם זווית סבסוב שונה מאפס, ווקטורי המקום והמהירות מסובבים למערכת המשנית \hat{e}' כפי שמוצג במשוואה (95).

4.2.5. סימולציה עבור בקרי המסלול עם זווית סבסוב משתנה.

נציג סימולציה עבור Trajectory tracking, זווית הסבסוב וזווית הגלגול הרצויות הן,

$$\begin{aligned} \psi_d &= \pi / 4 [rad] \\ \phi_d &= 0.1 \sin(t / 2) [rad] \end{aligned}$$

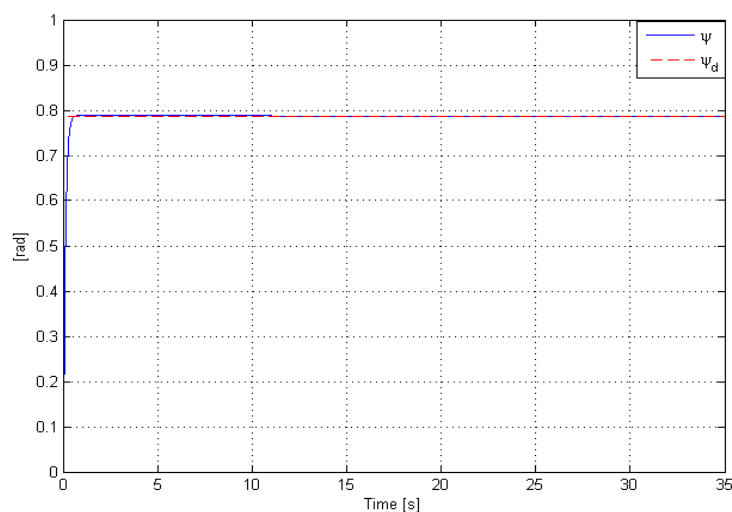
המסלול הרצוי מוגדר באופן הבא,

$$\begin{aligned} x_d &= -1 [m] \\ y_d &= 2 \sin(t) [m] \end{aligned}$$

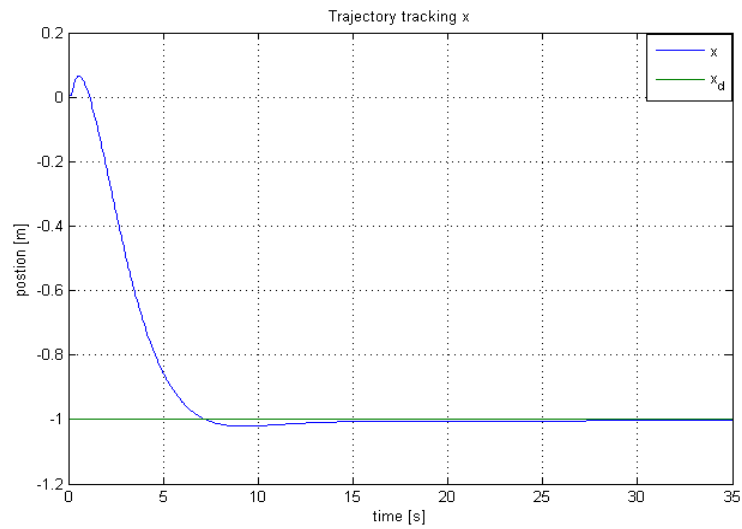
תנאי ההתחלה של הסימולציה הם,

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \theta_0 = \psi_0 = 0 [rad] \\ x_0 &= 0 [m] \\ y_0 &= 0 [m] \end{aligned}$$

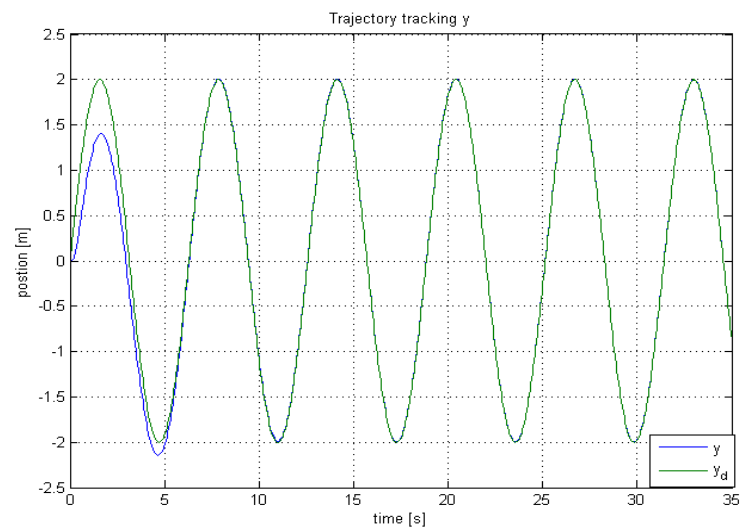
תוצאות הסימולציה שהתקבלו,



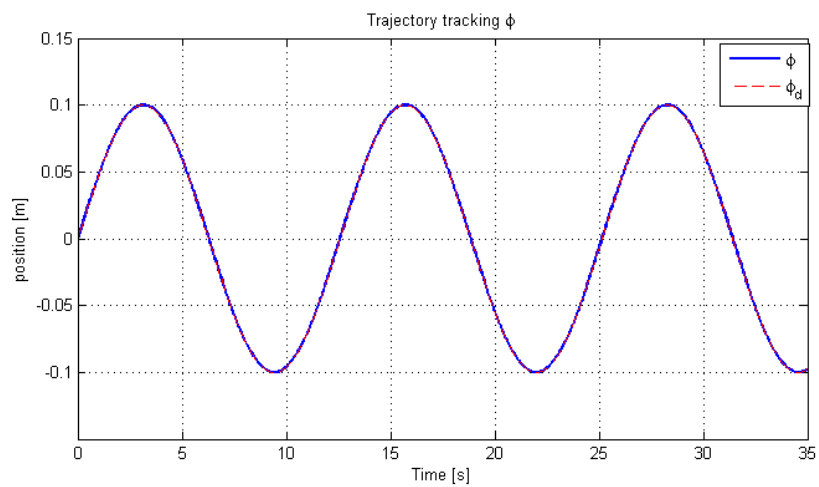
איור 4.19: זווית הסבסוב במהלך הסימולציה.



איור 4.20: ניווט לנקודה על ציר x .



איור 4.21: מעקב אחרי מסלול על ציר y .



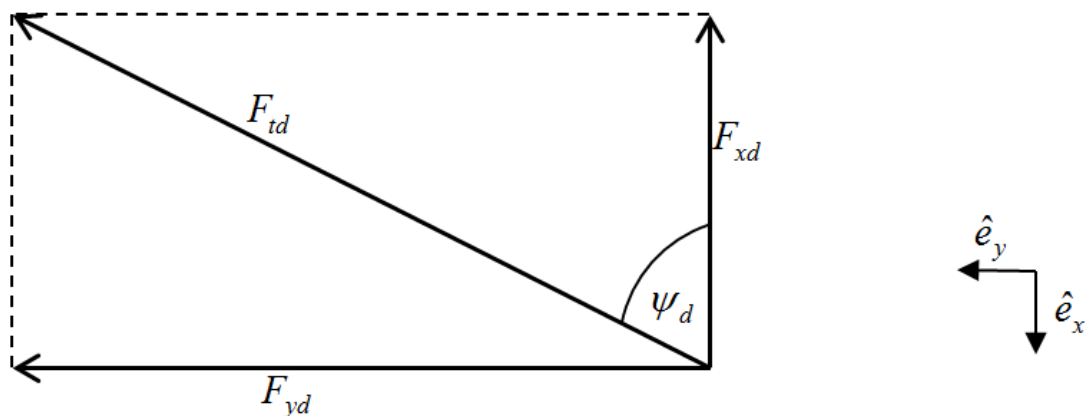
איור 4.22 מעקב אחרי זווית גלגול רצויה.

מאיורים 4.19-4.22 ניתן לראות כי קיימת עקיבה טובה ומתאפשרת התכנסות אל המסלול הרצוי. זווית הסבסוב עוקבת אחרי זווית הסבסוב הרצויה והדבר אינו משפיע על ביצועי בקר המקום. אם כך, ניתן לקבוע כי ההנחה שהוצגה בפיתוח בקר המסלול אינה מגבילה את הכלליות והתכנסות אל המסלול הרצוי מתאפשרת גם כאשר זווית הסבסוב שונה מאפס.

4.3. צורות טיסה נוספות המנצלות את דרגת החופש הנוספת.

תוספת דרגת חופש מבוקרת לכלי הטייס מאפשרת ניסוח בקר עם יתירות. יתירות זו ניתן לנצל בדרכים שונות לצורך צורות טיסה שונות שאינן אפשריות בכלי טייס מרחף ללא דרגת החופש הנוספת. בפיתוח בקר המסלול לאורך ציר y הוצגה יתירות זו בצורה הבסיסית, התנועה לאורך ציר y יכולה להתקבל גם על ידי הטיית הנדנדה וגם על ידי הטיית הגוף ובכך אחת מדרגות החופש האלו ניתנת לבחירת המפעיל ללא שתשפיע על דרגות החופש האחרות. אך יתירות זו ניתן לנצל גם בדרכים שונות, בתת פרק זה יוצגו מספר דרכים נוספות להפעלה של כלי הטיס עם דגש על ניצול יכולותיו הייחודיות.

1. אחת הדרכים לבקר את מיקומו של כלי הטייס היא באמצעות זווית הסבסוב והנדנדה. במקרה כזה גוף כלי הטייס יכול להישאר אופקי לאורך כל מסלול הטיסה (מסלול הכולל גם תנועה בכיוון x). חמש דרגות החופש הניתנות לבחירה הן: שלושת דרגות החופש של המקום, זווית הגלגול וזווית העלרוד. נניח כי קיימת דרישה שזווית העלרוד תישאר אפס. התנועה מתקבלת על ידי הטיית הנדנדה על מנת ליצור כוח אופקי וסיבוב כלי הטייס (סביב ציר הסבסוב) כדי לכוון את הכוח האופקי של הנדנדה אל כיוון ההתקדמות הרצוי. היתרון בצורת טיסה זו הוא שניתן להשאיר את גוף כלי הטייס אופקי לאורך כל הטיסה, אך יכולת השליטה בתנועת כלי הטייס פוחתת ונוצרות שגיאות לאורך מסלול הטיסה הנובעות מכך שעד שזווית הסבסוב מתייצבת על ערכה הרצוי מופעל כוח לכיוון שאינו נחוץ ובכך נוצרות שגיאות נוספות. שיטת הבקרה כאן כוללת שילוב של הבקר המוצג בסעיף 4.2.2 כאשר הנדנדה היא שמספקת את הכוח הרצוי לתנועה אופקית ושל הבקר המוצג בסעיף 4.2.4 בו זווית הסבסוב שונה מאפס. כל שנותר הוא למצוא את זווית הסבסוב הרצויה בכדי לכוון את הכוח לכיוון הנכון. זווית הסבסוב הרצויה הינה הזווית של שקול הכוחות הנוצר מהכוחות הרצויים בציר x ובציר y . כפי שמוצג באיור 4.23. המטרה הינה למצוא את זווית הסבסוב הרצויה כך שכשנסובב את כלי הטייס בזווית זו הכוח בכיוון x במערכת הגוף יתאפס, וזאת מכיוון שבצורת הטיסה הזו לא ניתן לספק כוח בכיוון זה.



איור 4.23 : דיאגרמת הכוחות המספקים את התנועה הרצויה.

כאשר F_{xd}, F_{yd} הינם הכוחות אשר יתנו את התנועה הרצויה, ו- F_{td} הינו שקול הכוחות. לפי איור 4.22 אנו יכולים למצוא את זווית הסבסוב הרצויה בעזרת המשוואה הבאה,

$$\psi = \arctan\left(\frac{F_{xd}}{F_{yd}}\right) \quad (96)$$

הזזה בזווית הסבסוב כפי שהיא מחושבת במשוואה (96) תכוון את ציר x לכיוון הרצוי אך הנדנדה מפעילה את הכוח בכיוון ציר y , לכן נחסיר מזווית זו 90° בכדי לכוון את הנדנדה לכיוון שקול הכוחות ובנוסף נציב במשוואה (96) את משוואת התנועה של ניוטון בצורתה הסקלרית, $F = ma$, ונקבל,

$$\psi_d = \arctan\left(\frac{m\ddot{x}}{m\ddot{y}}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (97)$$

את התאוצות הרצויות קיבלנו בפיתוח בקר המסלול והן מוצגות במשוואות (77) ו-(82), נציב אותן במשוואה (97) ונקבל את זווית הסבסוב הרצויה,

$$\psi_d = \arctan\left(\frac{\ddot{x}_d + k_{px}e_x + k_{Dx}\dot{e}_x}{\ddot{y}_d + k_{py}e_y + k_{Dy}\dot{e}_y}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (98)$$

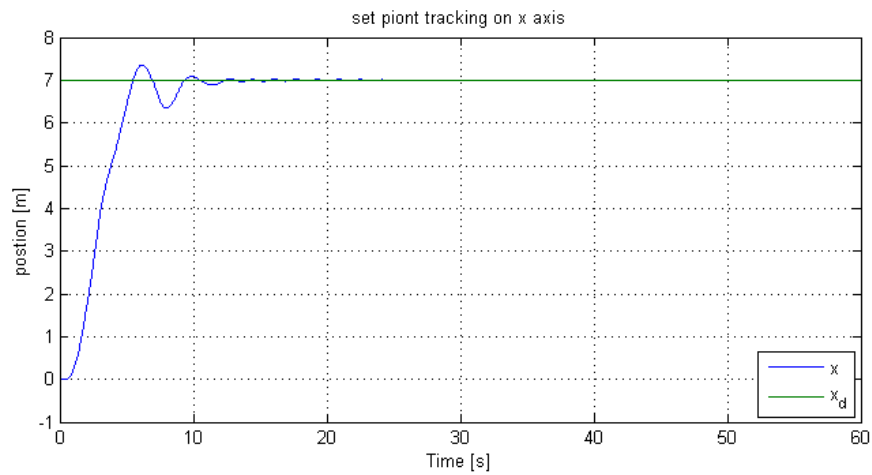
נשים לב כי ניתן להשתמש בפונקציה \arctan ולא בפונקציה atan2 , אף על פי שהיא כוללת בתוכה רק את תחום הזוויות $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. זאת מכיוון שזווית הנדנדה יכולה לקבל זוויות שליליות כלומר ניתן להפעיל את הכוח גם "קדימה", בכיוון החיובי של ציר y , וגם "אחורה", בכיוון השלילי של ציר y במערכת הגוף. הכוח השקול מתקבל מהזזת המסלולים הרצויים בזווית הסבסוב הרצויה כפי שמוסבר בתת הפרק 4.2.4. במידה ו $\ddot{y} = 0$ מתקיימת חלוקה באפס ב- (97) מכיוון שביטוי זה נמצא בתוך \arctan אין כאן בעיה אנליטית, במימוש עלינו להוסיף תנאי שיחליף את החלוקה באפס בחלוקה ב- ε .

נציג תוצאות סימולציה על מנת להמחיש את היתרונות והחסרונות של צורת טיסה זו.

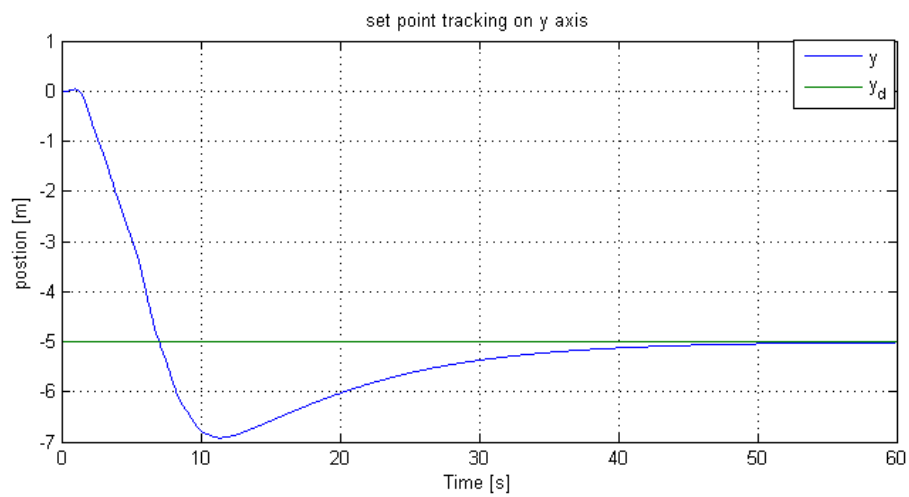
תנאי ההתחלה של הסימולציה שווים אפס בכל דרגות החופש. המסלול הרצוי נתון ע"י,

$$\begin{aligned} x_d &= 7 \\ y_d &= -5 \\ z_d &= \frac{-t}{5} \end{aligned}$$

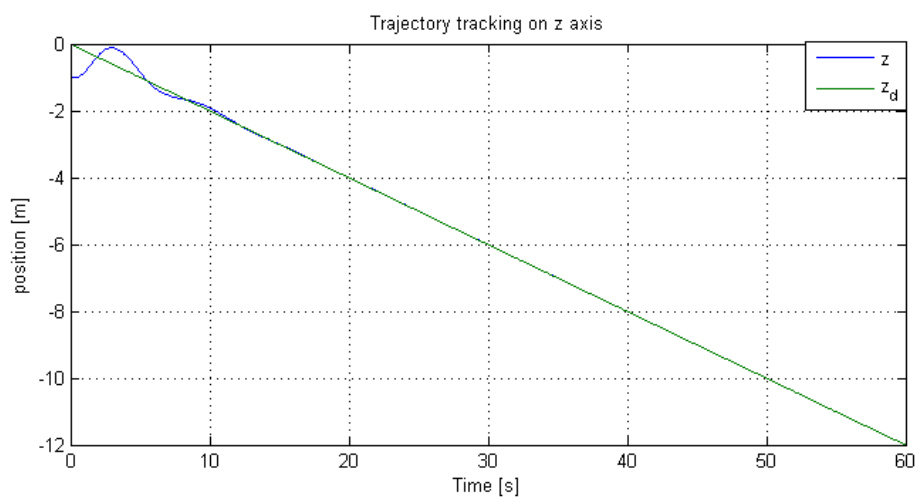
כמו כן נדרוש שגוף כלי הטייס יישאר אופקי לאורך כל הטיסה כלומר זווית העלרוד וזווית הגלגול הרצויות שוות אפס $\phi_d = \theta_d = 0$. תוצאות הסימולציה הן,



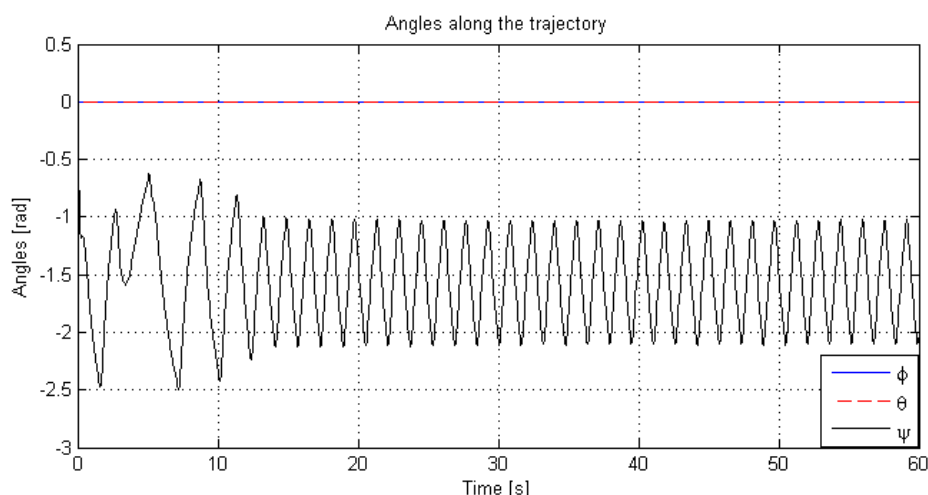
איור 4.24 : טיסה לנקודה בציר x ללא הטיית גוף כלי הטייס.



איור 4.25 : טיסה לנקודה בציר ה- y ללא הטיית גוף כלי הטייס.



איור 4.26 : מעקב אחרי מסלול בציר z ללא הטיית גוף כלי הטייס.



איור 4.27 : זוויות כלי הטייס בעת עקיבה אחר מסלול רצוי.

מאיורים 4.24-4.26 ניתן לראות כי כלי הטייס מתכנס אל המקום הרצוי (עם גובה רצוי משתנה בזמן). ניתן לראות כי ההתכנסות אל המיקום הרצוי היא איטית ונמשכת כ-50 שניות. כמו כן באיור 4.27 ניתן לראות כי אכן כלי הטייס נשאר אופקי, כלומר זוויות הגלגול והעלרוד שוות אפס במשך כל זמן הטיסה. זווית הסבסוב אחראית על הפניית כוח הדחף שמייצרת הנדנדה אל כיוון ההתקדמות הרצוי.

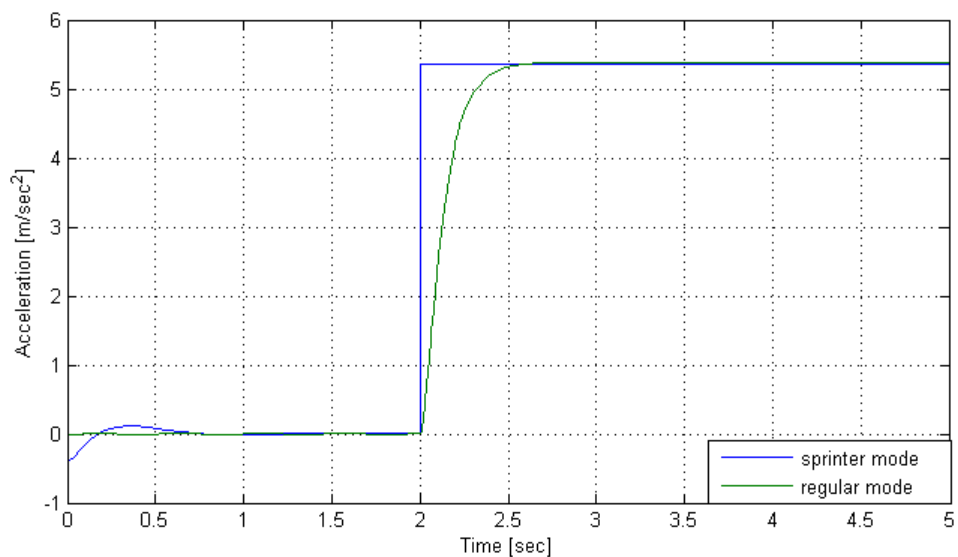
לסיכום ניתן לראות כי אכן בצורת טיסה זו מתאפשרת שמירה על גוף כלי הטייס אופקי תוך כדי טיסה אל מקום רצוי. עם זאת, צורת טיסה זו היא מסורבלת, זמן ההתכנסות אל המקום הרצוי הוא גדול ובמהלך הטיסה נוצרות שגיאות אשר נובעות מחוסר היכולת לבקר את תנועת הכלי בכל כיוון בכל זמן נתון.

II. אופן טיסה נוסף של כלי הטיס המיוחד הינו טיסה במצב "ספרינטר" (Sprinter). אחת היכולות הייחודיות של כלי הטייס עם הנדנדה היא שינוי זווית הגלגול מבלי שהדבר ישפיע על מיקומו. זו כאמור דרגת חופש מבוקרת נוספת הקיימת בכלי טייס זה. ניתן לנצל תכונה זו כדי להאיץ באופן מידי, כאשר יש צורך בטיסה למרחק קצר במהירות רבה. ההאצה המיידית מאפשרת לעבור מרחק רצוי בזמן קצר יותר. את ההאצה המיידית ניתן לקבל על ידי הטיית גוף כלי הטייס בזווית רצויה בכיוון אליו יש להתקדם, מדחפי הנדנדה נוטים בכיוון ההפוך ומחזיקים את כלי הטייס במקום. ברגע שרוצים להתחיל את התנועה, מנמיכים באופן מידי את כוח הדחף בנדנדה וכך נוצרת תאוצה גדולה בכיוון ההתקדמות הרצוי. זאת בהשוואה לרחפן סטנדרטי (ללא נדנדה) בו הטיית הגוף כדי להשיג תאוצה רצויה דורשת זמן (לא ניתן להתחיל את התנועה עם גוף מוטה).

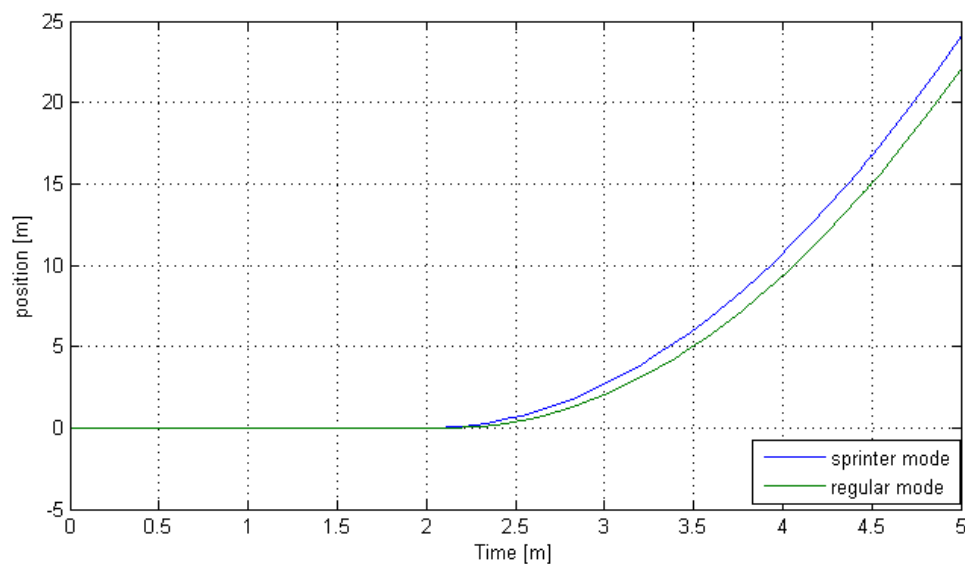
להמחשת היתרון המאפשר יציאה מהירה מהמקום נערכו סימולציות, כאשר בשתי השניות הראשונות הכלי צריך לרחף במקום ולאחר מכן להאיץ. בסימולציה אחת כלי הטייס עומד במקום כאשר כל המדחפים פונים כלפי מעלה, זהו regular mode. בסימולציה השנייה כלי הטייס עומד במקום כאשר גוף כלי הטייס מוטה ב-0.5 [rad] לכיוון התנועה והנדנדה מוטה לכיוון ההפוך ומחזיקה את כלי הטייס במקומו, כאן מוצג

ה-Sprinter mode.

תוצאות הסימולציה הן,



איור 4.28 : תאוצות כלי הטייס במצבים השונים.



איור 4.29 : מיקום כלי הטייס במצבים השונים.

מאיור 4.28 ניתן לראות כי אכן התאוצה במצב "ספרינטר" מתקבלת באופן מידי. לעומת זאת, במצב הרגיל התאוצה מגיעה לשיאה רק לאחר כ-0.7 שניות. מאיור 4.29 ניתן לראות כי אכן כלי הטייס במצב "ספרינטר" מגיע רחוק יותר לאחר זמן טיסה זהה.

5. בדיקת היתרונות האנרגטיים.

פרק זה עוסק באפשרות שכלי הטייס עם הנדנדה מאפשר טיסה יעילה מבחינה אנרגטית. העיקרון שנבחן הוא היכולת להטות את כוח הדחף השקול (או לחילופין, לפצל את כוח הדחף לשני רכיבים בכיוונים שונים), והאם יכולת זו תורמת ליעילות האנרגטית. זאת בהשוואה לרחפן סטנדרטי בו כוח הדחף השקול תמיד ניצב לגוף כלי הטייס.

תחילה נבדוק מה היא הזווית בה צריכה להיות הנדנדה בכדי לספק את שקול הכוחות (מדחפי נדנדה ועוד מדחפי גוף) הגדול ביותר. ההנחה היא כי שקול הכוחות הגדול ביותר הינו כאשר שני כוחות הדחף פונים לאותו כיוון ושמהבחינה הזו אין לכלי הטייס הנדון כאן יתרון אנרגטי. נציג כעת הוכחה לטענה זו, כאשר ההוכחה מתייחסת אל המקרה הדו ממדי (אך ניתן להרחיב אותה גם למקרה תלת ממדי). ווקטור הכוחות שמפעילים המדחפים של הנדנדה והמדחפים של הגוף הינו,

$$F = \begin{bmatrix} F_b \cos(\phi) + F_s \cos(\beta) \\ F_b \sin(\phi) + F_s \sin(\beta) \end{bmatrix} \quad (99)$$

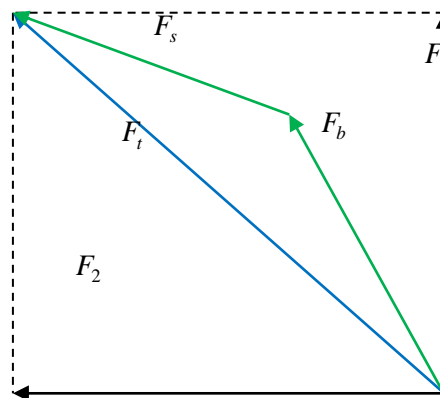
כאשר F_b הכוח השקול שמפעילים המדחפים בגוף, F_s הכוח השקול שמפעילים המדחפים בנדנדה, ϕ היא הזווית בה מוטה הגוף ו- β היא הזווית בה מוטה הנדנדה. הגודל של ווקטור הכוחות המוצג במשוואה (99) הינו,

$$|F| = \sqrt{F_b^2 \cos^2(\phi) + 2F_b F_s \cos(\phi) \cos(\beta) + F_s^2 \cos^2(\beta) + F_b^2 \sin^2(\phi) + 2F_b F_s \sin(\phi) \sin(\beta) + F_s^2 \sin^2(\beta)}$$

$$|F| = \sqrt{F_b^2 + F_s^2 + 2F_b F_s \cos(\phi - \beta)}$$

ממשוואה (100) ניתן לראות כי ערכו המקסימלי של שקול הכוחות מתקבל כאשר $\cos(\phi - \beta) = 1$ ומכאן שקול הכוחות המקסימלי מתקבל כאשר $\beta = \phi$, כלומר כאשר שני הכוחות פונים לאותו הכיוון.

דרך נוספת להמחיש תוצאה זו היא באמצעות איור 5.1. במידה יש לספק כוח F_1 כלפי מעלה וכוח F_2 הצידה, הדרך "הזולה" ביותר (כלומר החסכונית ביותר באנרגיה) הינה להפעיל את שני הכוחות בכיוון שקול הכוחות הנוצר.



איור 5.1: מערכת כוחות

מתקבל כי $F_t \leq F_b + F_s$ עבור כל הכוחות F_b, F_s המקיימים את הדרישה לספק את הכוחות F_1, F_2 , לפי המשפט שקובע כי כל צלע במשולש תמיד קטנה מסכום שתי הצלעות האחרות.

אם כן נראה כי לא קיים יתרון אנרגטי בפיצול הכוח לכיוונים שונים מכיוון שפיצול זה יכול רק להקטין את הכוח השקול המתקבל. למעשה, במידה ואין דרישות טיסה נוספות (מעבר לאלה הקיימים ברחפן רגיל) ניתן להשוות בין זווית הגוף לזווית הנדנדה וכך להשיג את שקול הכוחות המרבי (בדומה לרחפן רגיל), כך שהוספת הנדנדה אינה מורידה מיעילות כלי הטייס.

דרך נוספת לבחינת היעילות האנרגטית הינה בדיקת המומנט שיש להפעיל על מנת לסובב את כלי הטייס או את הנדנדה לזווית רצויה. המומנט שיש להפעיל על מנת לסובב גוף קשיח הינו תלוי במומנט האינרציה של הגוף, מומנט האינרציה בהגדרתו הינו התנגדות הגוף לסיבוב ולכן ככל שהוא יותר גדול יידרש מומנט גדול יותר על מנת ליצור תאוצה זוויתית רצויה, כפי שניתן לראות ממשוואה (31) בה מומנט האינרציה מיוצג על ידי מטריצה $D(\sigma)$. נבחן האם גורם זה משפיע על היעילות האנרגטית של כלי הטייס עם הנדנדה. מומנט האינרציה של הנדנדה קטן יותר ממומנט האינרציה של הגוף והנדנדה יחד ולכן יהיה יותר קל לסובב את הנדנדה בלבד. כאשר יש צורך לעקוב אחר מסלול רצוי ובנוכחות הפרעות חיצוניות נדרשים בכל העת תיקונים קטנים למיקום כלי הטייס, תיקונים אלו דורשים שינוי בזווית של הגוף או של הנדנדה לזמן קצר אך לעיתים תכופות ולכן משתלם מבחינה אנרגטית לסובב את הגוף בעל המומנט אינרציה הקטן ביותר.

כעת נותר לבדוק האם היתרון האנרגטי שמספקת הנדנדה בכך שלה מומנט אינרציה קטן, גדול יותר מהחיסרון של פיצול הכוח לשני כיוונים נפרדים. לצורך כך נערכו סימולציות המדמות טיסה לאורך מסלול רצוי לאורך ציר y . ההשוואה התבצעה בין סימולציה בה התנועה מתקבלת על ידי הנדנדה בלבד ובין סימולציה בה הנדנדה שומרת על זווית זהה לזווית גוף כלי הטייס והתנועה מתקבלת על ידי שקול הכוחות של מדחפי הנדנדה ומדחפי הגוף.

הסימולציה נערכה עבור תנאי התחלה אפס בכל דרגות החופש, ודרישה לטיסה לאורך המסלול,

$$x_d = 0$$

$$y_d = \sin(t)$$

$$z_d = 0$$

המאפיינים הפיזיקליים של כלי הטייס הם,

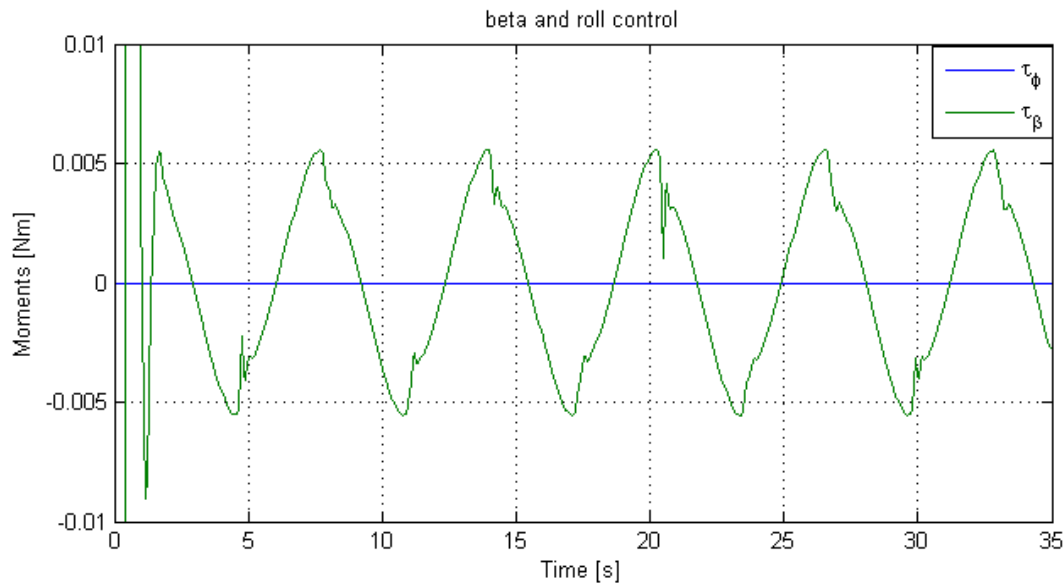
$$I_{xx} = I_{yy} = 0.167$$

$$I_{zz} = 0.297$$

$$I_{xs} = I_{ys} = 0.03$$

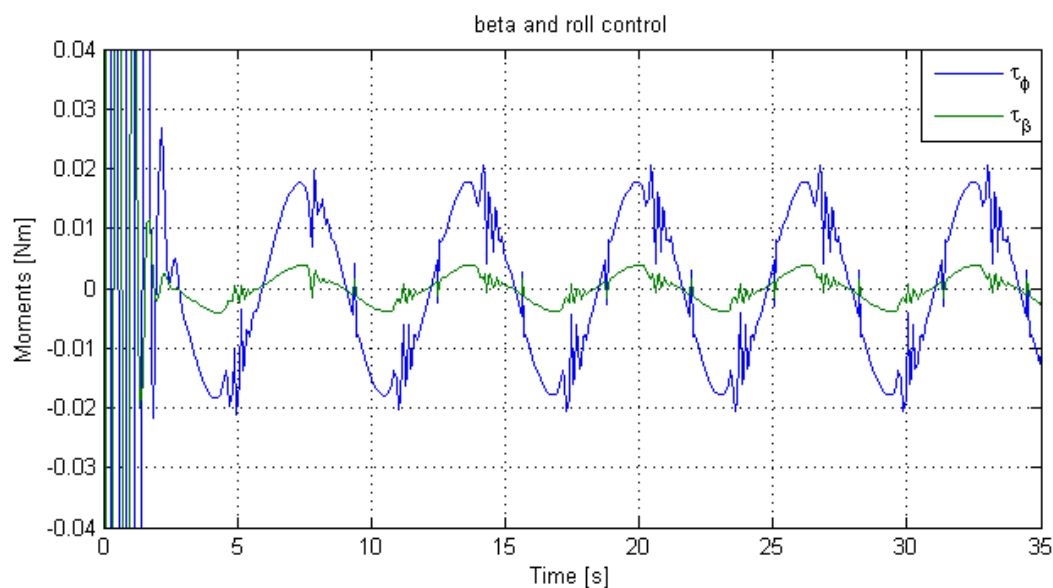
$$I_{zs} = 0.04$$

תחילה נערכה סימולציה בה התנועה היא תוצאה של מדחפי הנדנדה בלבד (ע"י הטית הנדנדה). אותות הבקרה שנדרשו על מנת לייצב את כלי הטייס במסלול הרצוי הם,



איור 5.2 : מאמצי הבקרה כאשר התנועה מתקבלת על ידי הנדנדה בלבד.

לאחר מכן נערכה סימולציה בה התנועה מתקבלת על ידי מדחפי הנדנדה ומדחפי הגוף יחד. אותות הבקרה שנדרשו על מנת לייצב את כלי הטייס סביב המסלול הרצוי הם,



איור 5.3 : מאמצי הבקרה כאשר התנועה מתקבלת על ידי הנדנדה והגוף יחד.

מאיורים 5.2-5.3 ניתן לראות כי אותות הבקרה הנדרשים לייצוב כלי הטייס על ידי תזוזת הנדנדה בלבד, קטנים מאותות הבקרה אשר נדרשים לייצוב כלי הטייס כאשר הנדנדה שומרת על אותה הזווית כמו גוף כלי הטייס. תוצאה זו תומכת בתיאוריה כי כאשר מומנט האינרציה קטן יותר נדרשים מומנטים קטנים יותר על מנת לסובב את הכלי. בכדי לבדוק את יעילות הטיסה, חושבה צריכת האנרגיה הכללית של כלי הטייס. האנרגיה חושבה על פי העבודה שיש להשקיע על מנת לקבל את האנרגיה הקינטית הנובעת מהתנועה הקווית, העבודה שיש להשקיע על מנת לקבל את האנרגיה הקינטית מהתנועה הסיבובית של כלי הטייס וכן העבודה שיש להשקיע על מנת להשאיר את כלי הטייס מרחף באוויר. מכיוון שהכוחות

והמהירויות של כלי הטייס משתנים במהלך הסימולציה נחשב את ההספק הרגעי ונבצע אינטגרל בזמן בכדי לקבל את צריכת האנרגיה.

את ההספק הרגעי הנצרך עבור התנועה הקווית נחשב כך,

$$p_{k\xi} = Fv \quad (101)$$

כאשר F הוא ווקטור הכוחות הפועלים על כלי הטייס ו- v הינו ווקטור המהירויות של כלי הטייס. האנרגיה הנצרכת בזמן הסימולציה היא,

$$J_{k\xi} = \int_{t_0}^{t_f} Fv dt \quad (102)$$

את ההספק הרגעי הנצרך עבור התנועה הסיבובית נחשב כך,

$$p_{k\sigma} = \tau\omega \quad (103)$$

כאשר τ הוא ווקטור המומנטים הפועלים על כלי הטייס ו- ω הוא ווקטור המהירויות הזוויתיות של כלי הטייס. האנרגיה הנצרכת לאורך הסימולציה היא,

$$J_{k\sigma} = \int_{t_0}^{t_f} \tau\omega dt \quad (104)$$

ההספק הנצרך על ידי כל מנוע על מנת לשמור על הכלי מרחף באוויר מחושב לפי המשוואה הבאה כאשר ההשפעות של מהירות כלי הטייס הוזנחו. (Lorenz (2001)).

$$p_h = \frac{T^{1.5}}{\sqrt{2\rho A}} \quad (105)$$

כאשר T הינו כוח העילוי הנוצר מסיבוב המדחף, ρ היא צפיפות האוויר ו- A הינו השטח הנוצר מסיבוב המדחף. נניח שכל המנועים תורמים באופן שווה על מנת לשמור את כלי הטייס באוויר, האנרגיה הנצרכת בזמן הסימולציה היא,

$$J_h = 6 \times \frac{(mg/6)^{1.5}}{\sqrt{2\rho A}} t \quad (106)$$

צריכת האנרגיה בזמן הסימולציה כאשר התנועה היא תוצאה של מדחפי הנדנדה בלבד הינה,

$$\begin{aligned} J_{k\xi} &= 12[J] \\ J_{k\sigma} &= 0.4[J] \\ J_h &= 1168[J] \\ J &= J_{k\xi} + J_{k\sigma} + J_h = 1182.4[J] \end{aligned} \quad (107)$$

צריכת האנרגיה בזמן הסימולציה כאשר התנועה היא תוצאה של מדחפי הגוף ומדחפי הנדנדה היא,

$$\begin{aligned} J_{k\xi} &= 6.8[J] \\ J_{k\sigma} &= 32.3[J] \\ J_h &= 1168[J] \\ J &= J_{k\xi} + J_{k\sigma} + J_h = 1207.1[J] \end{aligned} \quad (108)$$

כפי שציפינו, צריכת האנרגיה הדרושה לסיבוב כלי הטייס, כלומר האנרגיה הקינטית של התנועה הזוויתית, קטנה יותר כאשר תזוזת כלי הטייס מתקבלת מהטיית הנדנדה בלבד, ואף קטנה באופן משמעותי. אך

צריכת האנרגיה הזו זניחה ביחס לצריכת האנרגיה הדרושה לצורך ריחוף (כלומר כדי להחזיק את כלי הטיס שלו ייפול) ב- כשני סדרי גודל ולכן אינה משפיעה באופן מהותי על צריכת האנרגיה הכללית של כלי הטיס.

כמו כן חשוב לציין כי האפשרות להפעיל מומנטים קטנים יותר מאפשרת יישום פשוט יותר של הבקר בכלי הטיס, מכיוון שכאשר המומנטים גדולים מדי, אז ריבוע מהירויות הסיבוב כפי שמופיעה במשוואה (12) עלול לתת תוצאות שליליות אשר אינן פיסקליות.

לטיסה באמצעות הטיית הנדנדה יכול להיות גם יתרון אווירודינמי. על רחפנים מותקנים מחשבי טיסה וחיישנים, לרוב חיישנים אלו מותקנים על משטח המקביל לגוף כלי הטיס ומחובר אליו. כאשר גוף כלי הטיס משנה את זווית העלרוד או הגלגול נוצרת תנועה בכיוון מסוים אך המשטח עליו מורכבות המערכות השונות מקבל את אותה זווית, ולכן שטח פנים גדול יותר ניצב לכיוון התנועה ובכך מגדיל את כוח הגרר הפועל על כלי הטיס. כוח הגרר מחושב לפי המשוואה הבאה,

$$F_D = \frac{1}{2} \rho v^2 A C_D \quad (109)$$

כאשר ρ מייצג את צפיפות הזורם, v היא המהירות היחסית בין הזורם לגוף, C_D הינו מקדם כוח הגרר התלוי בפרמטרים רבים ולרוב נקבע אמפירית, ו- A הוא שטח ייחוס אשר יכול להיות שטח החתך הניצב לזרימה או השטח המקביל לזרימה. במקרה ש- A הינו השטח המקביל לזרימה, בתוך מקדם כוח הגרר נכנס פרמטר המתייחס לשטח הניצב לכיוון הזרימה (Sadraey 2011) כך שבכל מקרה כוח הגרר תלוי בשטח הניצב לזרימה.

בטיסה עם הטיית הנדנדה בלבד המשטח עליו מורכבות המערכות האלקטרוניות אינו מוטה לכן שטח החתך לחישוב הגרר יהיה קטן יותר. בהטיית הגוף ואתו המשטח כוח הגרר גדל באופן מקורב בצורה פרופורציונלית ל- $\sin(\phi)$.

בנוסף על הקטנת כוח הגרר, צורה אווירודינמית נכונה יכולה לתרום לעילוי של כלי הטיס. ניתן לעצב את המשטח עליו מורכבות המערכות בצורת כנף ובכך להרוויח כוח עילוי נוסף לכוח שיוצרים המדחפים. בטיסה עם הטיית הנדנדה ניתן לשמור את הכנף אופקית וכך להרוויח כוח עילוי הנוצר מזרימת האוויר סביב הכנף.

6. ניסויי טיסה.

בפרק זה נציג את מערכת הניסוי ואת תוצאות הניסויים. מערכת הניסוי נבנתה על מנת להוכיח את הישימות של הקונספט המוצג בעבודה זו וכדי להראות טיסה עם חמש דרגות חופש מבוקרות באופן בלתי תלוי. הניסויים מלמדים כי הפעלת רחפן מסוג Hexa-copter כאשר שניים ממנועיו מחוברים לנדנדה הינה אפשרית. הניסויים המוצגים ממחישים את יתרונותיו של כלי טייס המיוחד מכיוון שמראים טיסה עם מאפיינים שלא ניתן להשיג עם כלי טיס (רחפן) רגיל. הניסויים בוצעו בסביבה לא סטרילית, בחוץ, בנוכחות רוחות, וזאת כדי להראות כי ניתן להפעיל כלי טייס זה גם בסביבה שאינה אידיאלית.

6.1. מערכת הניסוי.

מערכת הניסוי (ראה איורים 6.1, 6.3 ו- 6.7) נבנתה כדי להדגים את מאפייני הטיסה המיוחדים של כלי הטיס (הנובעים משימוש בנדנדה). היא אינה מראה יישום של הבקרים שהוצגו בפרק הקודם (עקב הקושי ביישום הבקר במחשב הטיסה הקיים בכלי הטיס) אלא יישום של חוגי בקרה בסיסיים מסוג PID. מערכת הניסוי היא רחפן עם שישה מדחפים. מסגרת הרחפן בנויה מאלומיניום 6061, המנועים המותקנים הם מסוג Motor Robbe Roxxy 2827-35. על הרחפן מותקנים שני לוחות בקרה, הלוח הראשון הינו מסוג APM (Ardupilot Mega), לוח זה מחובר לארבעת מנועי הגוף. הלוח השני הינו מסוג AUAV3 (ראה איור 6.2), לוח זה מחובר לשני מנועי הנדנדה. השימוש בשני לוחות נועד כדי לנצל את היכולות של ה-APM. לוח זה כבר כולל מערכת בקרה לרחפן סטנדרטי ומאפשר תקשורת עם תחנת קרקע. בנוסף, ה-APM כולל גם חיבור ל-GPS ושמירת נתוני המקום של כלי הטיס בזמן טיסה. לוח הבקרה השני, ה-AUAV3, מתבסס על המעבד dsPIC33ep512au810. עבור מעבד זה ניתן לבנות קוד באופן אוטומטי מדיאגרמת מלבנים ב-MATLAB/Simulink. הכרטיס הנוסף משמש לבקרה של זווית הנדנדה.



איור 6.1 : מערכת הניסוי לפני המראה.

על ציר הנדנדה מורכב אנקודר מסוג HEDM-5500 B13 המשמש למדידת הזווית של הנדנדה ביחס לגוף וכן למדידת המהירות הזוויתית של הנדנדה. בנוסף, לכל כרטיס ישנו מקלט המאפשר תקשורת עם שלט רחוק. ה-APM שומר את הנתונים על רכיב זיכרון הנמצא על לוח הבקרה וגם משדר אותם לתחנת קרקע.

גם ה-AUAV3 משדר את הנתונים לתחנת קרקע שבעזרתה ניתן לכייל את הבקר של הנדנדה ולראות נתונים שונים בזמן אמת. גם ה-AUAV3 שומר את נתוני הטיסה על כרטיס זיכרון מסוג SD. גם על כרטיס AUAV3 מותקנים חיישנים שונים המאפשרים לבצע, בסופו של דבר, את הטסת הכלי ללא הלוח הנוסף (ללא ה-APM). על הכרטיס מותקנים שלושה חיישני תאוצה, שלושה חיישני מהירות זוויתית ושלושה חיישני שדה מגנטי (מגנטו-מטר). התוכנה על ה-AUAV3 פותחה ברובה ע"י יצור קוד אוטומטי מתוך סכמת בלוקים של ה-MATLAB/Simulink, לסכמה זו הוספו מספר פונקציות בשפת C המשמשות לפיענוח המידע מה-GPS ולשליחת הודעות תקשורת (Mavlink). חיישני התאוצה והמהירות הזוויתית מזינים אלגוריתם שיערוך של המצב הזוויתי של כלי הטיסה. שיערוך של המצב הזוויתי גם על ידי ה-AUAV3 (בנוסף ל-APM) מסיעת בתהליך איחוד הנתונים שנשמרו בשני הכרטיסים.



איור 6.2: לוח הבקרה מסוג AUAV3.

מכיוון שמשתני הזווית של כלי הטיסה אינם נמדדים באופן ישיר, מלבד הזווית היחסית של הנדנדה, יש צורך לשערך זוויות אלו מתוך קריאות החיישנים. החיישנים המותקנים על לוח הבקרה הינם חיישנים זולים והנתונים הנמדדים על ידם מלווים ברעשים ובהיסט (bias). נשתמש במסנן משלים בכדי לקבל שיערוך של הזוויות. המסנן המשלים בנוי בצורה כזו כך שהוא מנצל בצורה הטובה ביותר כל אחד מהמדידים, למעשה ניתן לחשב את הזוויות באמצעות מדדי התאוצה בלבד וגם על ידי ביצוע אינטגרל על המהירויות הזוויתיות אך לכל אחת מדרכים אלו ישנו חיסרון. מדדי התאוצה הינם מדידים רגישים עם רעשים בתדרים גבוהים מדידת הזוויות רק על ידי חיישנים אלו תהיה מדידה רועשת מאוד. לעומתם מדדי המהירות הזוויתית אינם מאפשרים מדידה של המצב ההתחלתי (של הזוויות) ושימוש במדידים אלו בלבד מניח זוויות התחלתיות אפס, דבר שאינו בהכרח נכון. בנוסף בביצוע אינטגרל על מדידות המהירות הזוויתיות (לצורך חישוב הזוויות) מתקבל ההיסט (סחיפה) של התוצאה. המסנן המשלים לוקח את הנתונים ממדדי התאוצה אחרי סינון במסנן מעביר נמוכים (LPF) בצורה כזו רוב רעשי המדידה שהם בתדרים גבוהים מסוננים. את המדידות של המהירות הזוויתיות המסנן מעביר דרך מסנן מעביר גבוהים, בצורה כזו גורמי ההיסט שהם ערכים קבועים (או בתדרים נמוכים) אינם משפיעים על התוצאה. שני המסננים

מתוכננים כך שהם יחסו את כל תחום התדרים ולמעשה חיבור של שני המסננים שווה לאחד (לכן שני המסננים יחד נקראים מסנן משלים). שערך המצב הזוויתי מתקבל אחרי סיכום שני האותות המסוננים.

6.2. תוצאות ניסויים.

במסגרת ניסויי הטיסה נערכו שני ניסויים הממחישים את היכולות הייחודיות של כלי טייס ואת האפשרות להשיג יכולות אלה בסביבה לא סטרילית. שני הניסויים מדגימים בקרה של חמש דרגות חופש באופן בלתי תלוי בזמן הטיסה. אותות הייחוס עבור דרגות החופש המבוקרות בניסוי נקבעים באמצעות שלט רחוק (שמחזיק המפעיל) בזמן אמת.

הניסוי הראשון הינו ניסוי טיסה אופקית בקו ישר. כאמור לכלי הטייס ישנם חמש דרגות חופש דבר זה מאפשר לו תמרון במרחב כאשר כלי הטיס במצב אופקי (ללא הטיה של זווית העלרוד או הגלגול). בניסוי זה כלי הטייס מופעל כך שזוויות הגלגול והעלרוד הרצויות הם אפס, כמו כן זווית הסבסוב מבוקרת כך שתשאר ללא שינוי. כלי הטייס מופעל במצב של שמירה על גובה רצוי ובאמצעות השלט נקבעים לו אותות ייחוס במטרה ליצור תנועה לאורך ציר y במערכת הגוף (אחרי ההמראה, מבוצעת תנועה בכיוון אחד ואחר כך חזרה בכיוון ההפוך). התנועה לאורך ציר y מתקבלת כתוצאה משינוי זווית הנדנדה ללא שינוי במצב הזוויתי של הגוף. חמש דרגות החופש המבוקרות כאן באופן בלתי תלוי הן: שלושה משתני המצב הזוויתי של הגוף (עלרוד, גלגול וסבסוב) ושני משתני מקום, גובה כלי הטייס והתנועה בכיוון ציר y של מערכת הגוף (את התנועה בכיוון ציר y קובע המפעיל באמצעות הנדנדה) ובקר הגובה קובע כוח הדחף השקול.

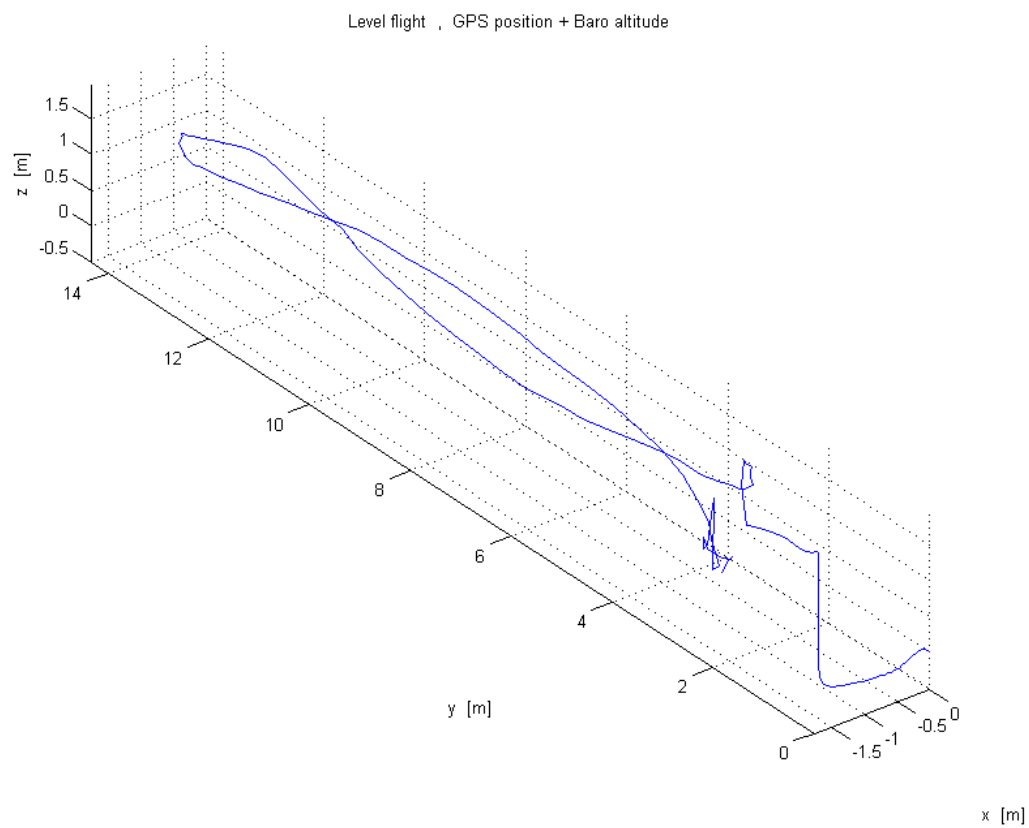
התמונה באיור 6.3 מציגה את כלי הטיס כשהוא בתנועה (הכלי נע מצד שמאל של התמונה אל צד ימין), כלי הטייס שומר על גוף אופקי, והתנועה נובעת מהטיית הנדנדה (ניתן לראות סרטון של טיסה זו בקישור

<https://www.youtube.com/watch?v=IGGPp3GKqh8>).

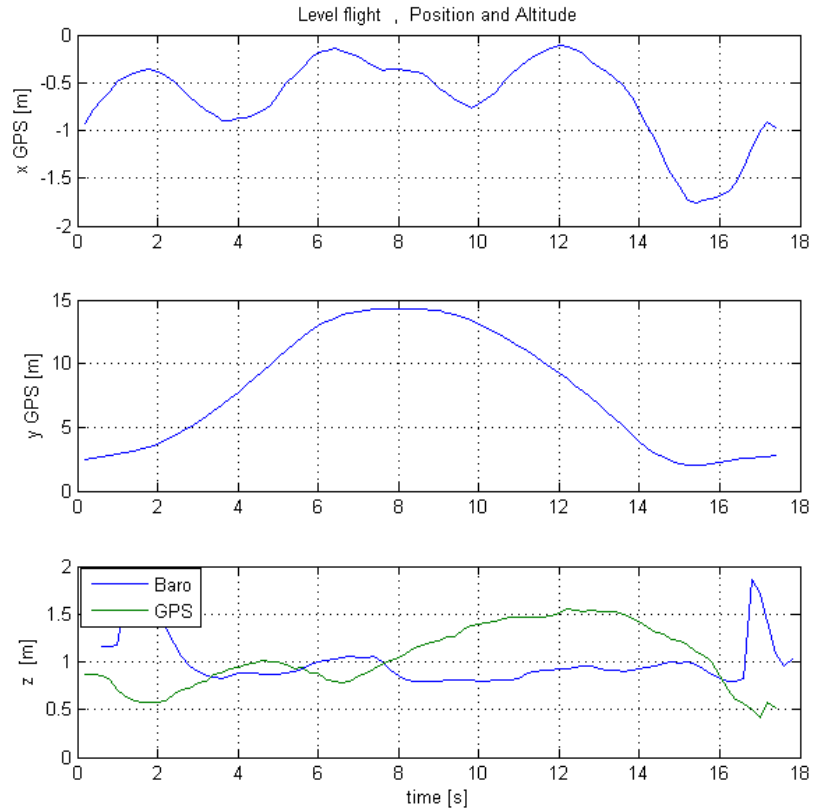


איור 6.3 : תמונה בזמן ביצוע הניסוי הראשון.

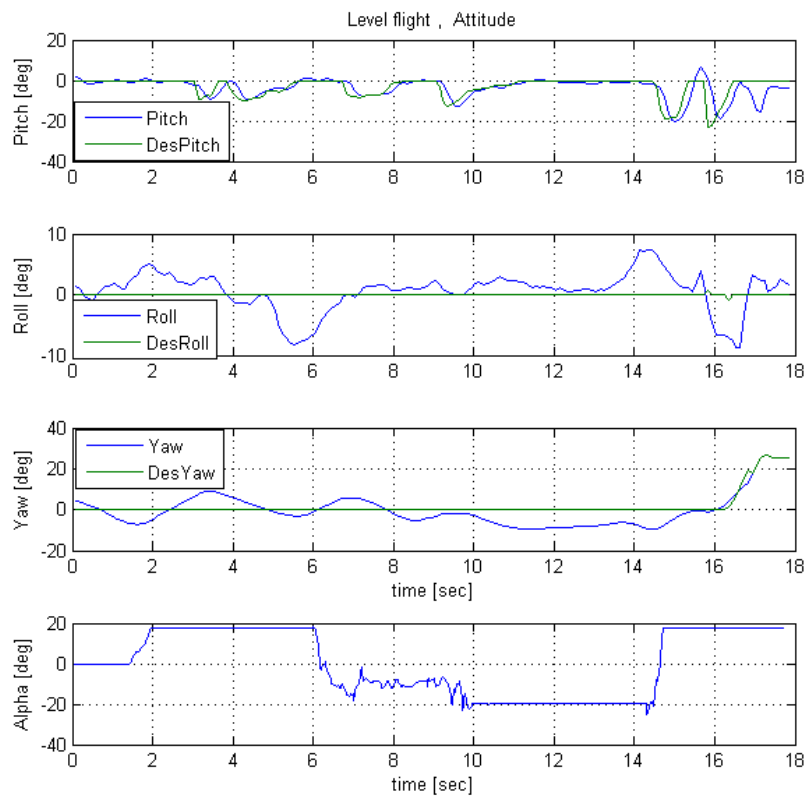
הגרפים הבאים מציגים את משתני המצב של כלי הטיס כפי שהוקלטו במהלך הניסוי. נציג בגרפים את התנועה המרחבית של כלי הטיס וכן כל דרגת חופש בנפרד. ניתן לראות את המסלול שכלי הטיס מבצע במרחב, את משתני המצב הזוויתיים.



איור 6.4 : תנועה המרחבית בעת ניסוי טיסה מאוזנת.



איור 6.5 : מיקום כלי הטייס בעת ניסוי טיסה מאוזנת.



איור 6.6 : זוויות כלי הטייס בעת ניסוי טיסה מאוזנת.

באיור 6.4 מוצגת התנועה המרחבית של כלי הטייס (כפי שנמדדה ע"י ה-GPS והברומטר). ניתן לראות כי אחרי ההמראה, כלי הטייס מבצע טיסה לאורך ציר y כ-14 מטר (בקו ישר בקירוב) כאשר שומר על גובה (1.5-1 מטר). הסטיות לאורך ציר x (קטנות מ-1 מטר) נובעות מתנאים סביבתיים, ומתקנות על ידי המטייס דרך הפעלת זווית עלרוד. נדגיש כי שתי דרגות חופש אלו (עלרוד ותנועה לאורך ציר x) הן מצומדות ולא ניתן לבקר אותן יחד באופן בלתי תלוי.

באיור 6.5 ניתן לראות בצורה ברורה יותר את התנועה לאורך כל אחד מהצירים. בעת ההמראה כלי הטייס התקדם מעט (כחצי מטר) בכיוון השלילי של ציר x . לאחר שתנועה זו נעצרה ע"י הפעלת זווית עלרוד כלי הטייס שומר פחות או יותר על מיקומו בכיוון ציר x עד סוף המסלול ולפני הנחיתה. התנועה לאורך ציר y גם היא כמצופה, כלי הטייס מתקדם לאורך ציר y ולאחר מכן חוזר חזרה. נדגיש כי התזוזה לאורך ציר y אינה נובעת מהפעלה של זווית גלגול אלא משינוי זווית הנדנדה.

גובה כלי הטייס הינו דרגת חופש נוספת המבוקרת בניסוי זה. ניתן לראות מאיור 6.5 כי כלי הטייס שומר בקירוב על גובה אחיד (מלבד בשלבי ההמראה והנחיתה). גובה הטיסה מבוקר ע"י ה-APM (בקר הגובה משתמש במד לחץ ברומטרי).

באיור 6.6 ניתן לראות את משתני המצב הזוויתיים של כלי הטייס יחד עם זווית הנדנדה. ניתן לראות כי זווית העלרוד בפועל עוקבת אחר זווית העלרוד הרצויה המתקבלת כפקודה מהשלט. דרך זווית העלרוד המטייס מתקן סטיות בכיוון x כדי להשיג טיסה לאורך ציר y .

מתחת ניתן לראות את זווית הגלגול. זווית הגלגול הרצויה הינה אפס לאורך כל הטיסה. ניתן לראות כי בזמן הטיסה (לאורך ציר y) מתקבלות באופן כללי זוויות גלגול קטנות. ישנם שני מקרים בהם זווית הגלגול קופצת לערכים גדולים יותר. קצת אחרי חמש שניות מתחילת הניסוי זווית הגלגול לפתע מקבלת ערכים שליליים, וכן לאחר כ-14 שניות של הניסוי זווית הגלגול מקבלת ערכים חיוביים. הסיבה לקפיצות אלו היא העובדה שזווית הנדנדה מגיעה לערכה המקסימלי (קיים מעצור מכני המונע זוויות גדולות מ-20 מעלות בקרוב), כתוצאה מכך הנדנדה מפעילה מומנט על גוף כלי הטייס. בקר המצב הזוויתי של ה-APM (שנדרש לשמור על זווית גלגול אפס) מפעיל מומנט נגדי. כאשר כלי הטייס מתחיל להאט זווית הנדנדה אינה נמצאת יותר על ערכה המקסימלי והנדנדה אינה מפעילה מומנט על הכלי. הקפיצה בזווית הגלגול הינה תוצאה של זמן התגובה של בקר המצב הזוויתי ב-APM (עד שמזהה את שינוי המצב ומפסיק להפעיל את המומנט הנגדי).

דרגת החופש החמישית המבוקרת באופן נפרד בניסוי זה הינה זווית הסבסוב כאשר זווית הסבסוב הרצויה לכל אורך הניסוי הינה אפס. באיור 6.6 ניתן לראות מעט תנודות סביב זווית הסבסוב הרצויה אך באופן כללי מדובר בסטיות קטנות.

נזכיר כי ניסוי זה מציג טיסה עם חמש דרגות חופש מבוקרות באופן בלתי תלוי (שלוש דרגות חופש של מקום במרחב ושתי דרגות חופש של מצב זוויתי – גלגול וסבסוב). נבחן את תנועת כלי הטייס ונראה כי זווית הנדנדה ביחס לגוף היא שגורמת לכלי הטייס להתקדם לאורך ציר y . זווית הנדנדה מתחילה לגדול אחרי 1.45 שניות והיא מגיע לערכה המקסימלי אחרי 2 שניות מתחילת הניסוי. באותו הזמן מתחילה תנועה של כלי הטייס בכיוון החיובי של ציר y . לאחר מכן, כ-6 שניות מתחילת הניסוי כלי הטייס מאט יחד עם שינוי זווית הנדנדה, מזווית חיובית לשלילית. כלי הטייס נשאר במקום (בקירוב) בזמן שזווית הנדנדה משתנה לזווית שלילית, וכאשר זווית הנדנדה מגיעה לזווית השלילית המקסימלית, לאחר כ-10 שניות

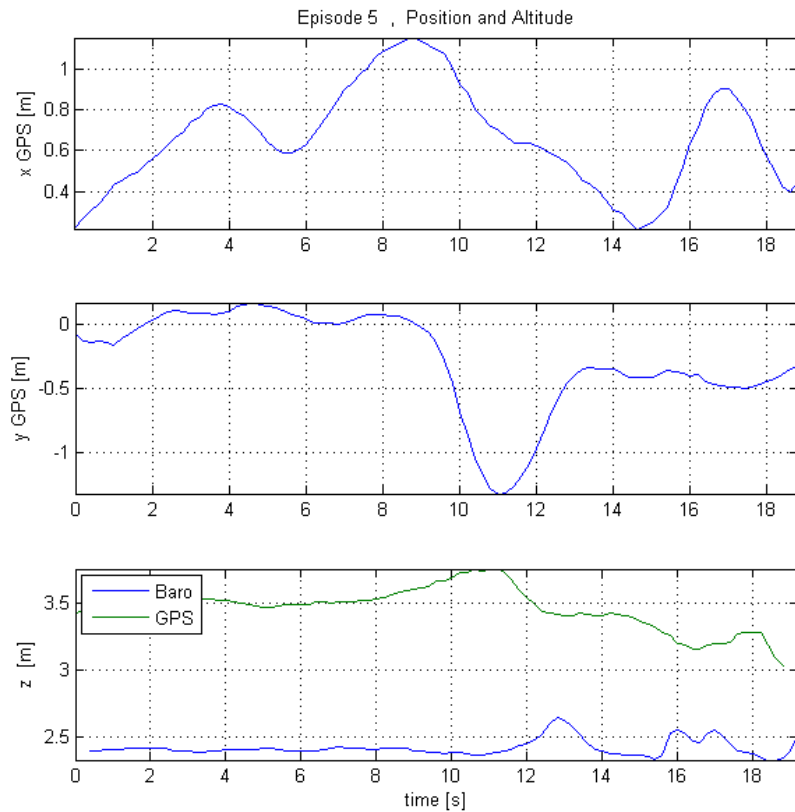
מתחילת הניסוי, מתחילה תנועה מהירה של כלי הטייס בכיוון השלילי של ציר y . לבסוף כלי הטייס מעט ועוצר כאשר זווית הנדנדה חוזרת להיות זווית חיובית. כל אלה מלמדים כי התנועה של כלי הטייס לאורך ציר y בניסוי זה היא תוצאה של מצב הנדנדה ולא של זווית הגלגול.



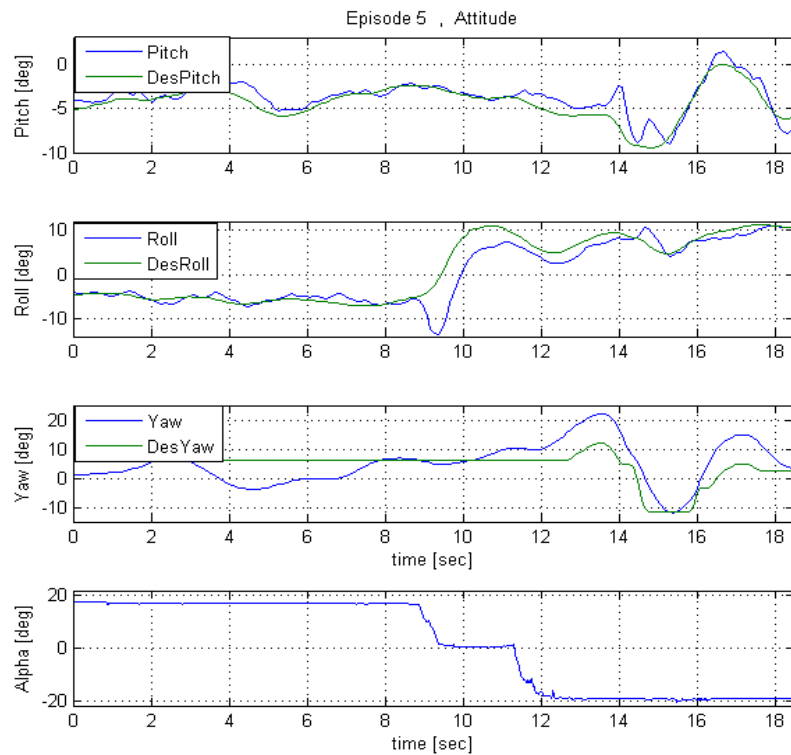
איור 6.7 : כלי הטייס בעת ביצוע הניסויים.

גם הניסוי השני נועד להמחיש את האפשרות לבקר חמש דרגות חופש באופן בלתי תלוי בכלי הטייס הנדון. בניסוי זה כלי הטייס נדרש לשמור על מקום קבוע במרחב בזמן שזווית הנדנדה אינה אפס. דרגת החופש החמישית המבוקרת כאן הינה זווית הסבסוב. בכדי שכלי הטייס ישמור על מקום קבוע במרחב בזמן שהנדנדה נוטה לכיוון מסוים, זווית הגלגול של כלי הטייס חייבת לנטות לכיוון ההפוך בכדי להתנגד לכוח הצידי שיוצרים המדחפים של הנדנדה. ניסוי זה מראה כי כלי הטייס הנדון יכול לרחף במקום קבוע במרחב יחד עם הפעלת זווית גלגול רצויה (נניח לצורך צילום ע"י מצלמה הרתומה לגוף הכלי). נזכיר כי מצב כזה אינו אפשרי ברחפנים סטנדרטיים בהם קיים צימוד בין זווית הגלגול והתנועה לאורך ציר y , מה שדורש התקנה של מצלמה על גימבל מיוחד (המתיר את הצימוד בין המצב הזוויתי של כלי הטייס והמצב הזוויתי של המצלמה). גימבל כזה מוסיף מורכבות ומשקל בכלי טיס סטנדרטי. הסרטון בקישור הבא מציג את מהלך הניסוי, <https://www.youtube.com/watch?v=Oa780pc5qto>

הגרפים הבאים מציגים את משתני המצב של כלי הטייס (מקום ומצב זוויתי) בזמן הניסוי יחד עם זווית הנדנדה (הגרפים כוללים רק את זמן הריחוף ללא ההמראה והנחיתה).



איור 6.8 : מיקום כלי הטייס בעת ניסוי שמירה על מיקום.



איור 6.9 : זוויות כלי הטייס והנדנדה בעת ניסוי שמירה על מיקום.

מאיור 6.8 ניתן לראות כי כלי הטייס חג סביב נקודה במרחב עם סטיות קלות. דווקא בציר x שם כלי הטייס מתפקד כמו רחפן רגיל הבקר מתקשה לשמור על המקום הרצוי, ככל הנראה כתוצאה מגורמים חיצוניים כגון משב רוח לא אחיד. לגבי ציר y , ניתן לראות כי הרחפן שומר על מקום בצורה טובה. בתחילת הניסוי הרחפן חג סביב האפס, לאחר מכן כאשר הנדנדה משנה זווית הרחפן נע בכיוון השלילי של ציר y , אך מיד מתקן את המקום ומתייצב על מקום חדש סביב -0.5 מטר. גובה כלי הטייס נשמר בקירוב קבוע (מתבסס על החיישן הברומטרי).

כאשר נבחן את המצב הזוויתי של כלי הטייס באיור 6.9 נראה כי המצב הזוויתי בפועל עוקב אחרי המצב הזוויתי הרצוי. כאן זווית העלרוד והגלגול הרצויות נקבעות ע"י בקר המקום (של ה-APM) וזווית הסבסוב ע"י המטיס. זווית העלרוד הרצויה נקבעת כדי לתקן סטיות בכיוון ציר x הנגרמות כנראה מרוח. זווית הגלגול הרצויה היא תוצאה של זווית הנדנדה.

ניתן לראות באיור 6.9 כי כאשר זווית הנדנדה היא חיובית, זווית הגלגול היא שלילית מה שמאפשר לכלי הטייס לשמור על מקום קבוע (בקירוב) בכיוון ציר y . תחום הזמנים 0 עד 9 שניות מראה בברור כיצד כלי הטייס שומר על זווית גלגול של כ-5 מעלות בזמן שהתנועה לאורך ציר y היא של סנטימטרים ספורים סביב האפס. לאחר כתשע שניות מתחילת הניסוי זווית הנדנדה מוסטת לאפס ולאחר מכן לזווית שלילית. שינוי זה מההווה הפרעה לבקר המקום, לכן בזמן השינוי כלי הטייס נע קלות בכיוון ציר y , עד לתגובה מספקת של בקר המקום שע"י הפעלת זווית גלגול מתאימה (חיובית במקרה זה) מייצב חזרה את כלי הטייס כדי לשמור על מקום קבוע במרחב (בזמן שזווית הנדנדה היא שלילית).

7. הרחבת קונספט הנדנדות לכלי טייס מרובי נדנדות

עבודת מחקר זו מרחיבה אף יותר את הקונספט של רחפנים עם נדנדות (מעבר ל- Single-Seesaw Hexa-copter). במסגרת עבודת המחקר פותחו שני סוגים של רחפים עם נדנדות המאפשרים בקרה של כל שש דרגות החופש של גוף כלי הטיס באופן בלתי תלוי. כלי הטיס הראשון שיוצג הינו רחפן עם שמונה מדחפים וארבע נדנדות (Four-Seesaw Octo-copter), וכלי הטיס השני הוא רחפן עם שישה מדחפים ושלוש נדנדות (Three-Seesaw Hexa-copter). מכיוון שהרחפן עם ארבע הנדנדות יותר אינטואיטיבי, נציג בעזרתו את פיתוח משוואות התנועה של רחפן מרובה נדנדות וכן פיתוח של מערכת בקרה מתאימה. הדיון בהמשך יתייחס גם לשוני הקיים בין שני כלי הטיס מרבי הנדנדות.

7.1. Four-Seesaw Octo-copter

פרק זה מציג פיתוח של רחפן מסוג Octo-copter עם שמונה מדחפים, כאשר כל זוג מדחפים מחובר לנדנדה אחת. ארבעת הנדנדות מאפשרות לרחפן זה ביצועי טיסה אשר אינם מתאפשרים ברחפן רגיל. ברחפן זה ניתן לבקר את המקום ואת המצב הזוויתי באופן בלתי תלוי, וכן ניתן לספק מומנט גדול עבור זווית הסבסוב.

מבנה הרחפן (מוצג באיור 7.1) כולל כאמור שמונה מדחפים וארבע נדנדות. שתי נדנדות (בלתי תלויות) ממוקמות לאורך ציר x במערכת הצירים הצמודה לגוף הרחפן. הנדנדות נמצאות במרחק שווה ממרכז המסה של הגוף כך שהמומנטים הפועלים על הגוף עקב משקלן בטל. שתי הנדנדות הנוספות מסודרות באותו אופן לאורך ציר y (במערכת הגוף). על כל נדנדה נמצאים שני מדחפים. היחס בין כוחות הדחף של שני המדחפים קובע את תזוזת הנדנדה ביחס לגוף, ואילו הכוח הכולל של שני המדחפים משפיע על תנועת הרחפן.

למעשה לכלי הטיס יש 10 דרגות חופש והן,

- מקום כלי הטיס במרחב, מיוצג על ידי הקואורדינטות (x, y, z) . אלה מייצגים למעשה את המקום של מרכז המסה של כלי הטיס.
 - המצב הזוויתי של גוף כלי הטיס, המיוצג ע"י שלושת זוויות אוילר של הגוף (ϕ, θ, ψ) . מצב זה כולל זווית גלגול סביב ציר x , זווית עלרוד סביב ציר y וזווית סבסוב סביב ציר z .
 - המצב של ארבעת הנדנדות ביחס לגוף (למעשה אבעת הזוויות של הנדנדות ביחס לגוף). אלה ארבע דרגות חופש נוספות מכיוון שתנועת הנדנדות אינה תלויה אחת בשנייה.
- תנועת הנדנדות ביחס לגוף משפיע על תנועת הגוף (קיים צימוד), וכדי להשיג תנועה מסוימת של הגוף קיים חופש מסוים באופן הנעת הנדנדות. כלומר, קיים יותר מפתרון אחד (הכולל את הזוויות של הנדנדות וכוח הדחף של שמונת המדחפים) המאפשר תנועה מסוימת של גוף הכלי.

7.1.1. מודל קינמטי.

בפיתוח המודל הקינמטי נעזר בשתי מערכות צירים עיקריות, מערכת צירים אינרציאלית שתסומן ב- $\hat{e} = [\hat{x}_e \ \hat{y}_e \ \hat{z}_e]^T$, זו היא מערכת NED בה ציר x מצביע צפונה, ציר y מצביע מזרחה ובהתאם למערכת ימנית ציר z מצביע למטה. מערכת הצירים השנייה היא מערכת הצמודה לגוף כלי הטיס

וראשיתה במרכז המסה, מערכת זו תסומן ב- $\hat{b} = [\hat{x}_b \quad \hat{y}_b \quad \hat{z}_b]^T$. מטריצת הסיבוב המעבירה ממערכת הגוף למערכת האינרציאלית מופיעה במשוואה (1). כמו כן קיימות עוד ארבע מערכות צירים עבור כל אחת מהנדנדות. לשתי מערכות הצירים של הנדנדות סביב ציר x יש את אותה מטריצת סיבוב ביחס למערכת האינרציאלית רק שזווית הגלגול שלהן שונה. נסמן את זוויות הגלגול של הנדנדות ביחס למערכת הגוף כך, ϕ', ϕ'' . לשתי המערכות האלה יש ציר x משותף עם המערכת של הגוף. לשתי מערכות הצירים של הנדנדות סביב ציר y גם כן קיימת מטריצת סיבוב המקשרת בין לבין המערכת האינרציאלית. הנדנדות נוטות ביחס לגוף בזוויות עלרוד שונות, נסמן זוויות אלו כך, θ', θ'' . לשתי מערכות הצירים האלה, ציר y משותף עם המערכת שצמודה לגוף. נציג את מטריצות הסיבוב המקשרות בין מערכות הצירים הצמודות לנדנדות לבין מערכת הצירים שצמודה לגוף,

(110)

$$\begin{aligned} {}^{\hat{b}}R_{\phi'} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi') & -\sin(\phi') \\ 0 & \sin(\phi') & \cos(\phi') \end{bmatrix}, & {}^{\hat{b}}R_{\phi''} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi'') & -\sin(\phi'') \\ 0 & \sin(\phi'') & \cos(\phi'') \end{bmatrix} \\ {}^{\hat{b}}R_{\theta'} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta') & 0 & \sin(\theta') \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta') & 0 & \cos(\theta') \end{bmatrix}, & {}^{\hat{b}}R_{\theta''} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta'') & 0 & \sin(\theta'') \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta'') & 0 & \cos(\theta'') \end{bmatrix} \end{aligned}$$

הכוח שמפעילים המדחפים פועל בכיוון z במערכת הצירים הצמודה לנדנדה המתאימה. הקשר בין הנגזרות של זוויות אוילר לבין ווקטור המהירות הזוויתית (של הנדנדות או של הגוף) מיוצג על ידי היעקוביאן הרוטציוני. במקרה של גוף כלי הטיס, קשר זה כבר הוצג (בפיתוח של הכלי עם נדנדה יחידה) במשוואות (4-7). עבור הנדנדות הסובבות סביב ציר x הקשר בין הנגזרת של זוויות אוילר לבין המהירות הזוויתית פותח אף הוא (עבור כלי טייס עם נדנדה יחידה) ומוצג במשוואות (16,17). נציג כעת את הקשר המקביל עבור הנדנדות הסובבות סביב ציר y . נשתמש במערכות הצירים הנמצאות בין המערכת האינרציאלית למערכת הצמודה לנדנדה בכדי לבטא את המהירות הזוויתית של הנדנדה. נזכיר כי מטריצות הסיבוב שייכות לקבוצה $SO \in R^3$ המקיימת את הקשר $R^{-1} = R^T$. המעבר בין מערכת הצירים הצמודה לנדנדה למערכת האינרציאלית הינו,

$${}^{\hat{b}}R_{\theta'} = [R] [{}^{\hat{b}}R_{\theta'}] \quad (111)$$

ולכן בכדי לעבור מהמערכת האינרציאלית למערכת הצמודה לנדנדה נשתמש במטריצה ההופכית,

$${}^{\theta'}R_{\hat{e}} = [{}^{\hat{b}}R_{\theta'}]^T [R_x]^T [R_y]^T [R_z]^T \quad (112)$$

כעת ניתן לקשר בין הנגזרות של זוויות אוילר לבין המהירות הזוויתית במערכת הצירים הצמודה לנדנדה. נציג את הנגזרות של זוויות אוילר ואת הנגזרת של זווית הנדנדה במערכת הצירים הצמודה לנדנדה,

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = (\dot{\theta}')_b \hat{e}_2 + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ R_{\theta'} \end{bmatrix}^T \dot{\phi}_b \hat{e}_1 + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ R_{\theta'} \end{bmatrix}^T [R_x]^T \dot{\theta}_b e_2 + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ R_{\theta'} \end{bmatrix}^T [R_x]^T [R_y]^T \dot{\psi}_b \hat{e}_3$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta') & \sin(\phi)\sin(\theta') & -\cos(\theta')\sin(\theta) - \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\theta') & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & 1 \\ \sin(\theta') & -\cos(\theta')\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta}' \end{bmatrix} \quad (113)$$

ניתן להגיע לקשר בין הנגזרות של זוויות אוילר לבין המהירות הזוויתית של הגוף במערכת העולם גם על ידי הקשר הבא,

$$s(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & -\omega_x \\ \omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = {}^e \dot{R}_{\theta'} {}^e R_{\theta'}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = J_{\omega\theta'} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta}' \end{bmatrix} \quad (114)$$

הכפלה של היעקוביאן במשוואה (113) במטריצת הסיבוב תיתן את היעקוביאן במשוואה (114). באופן דומה ניתן לחשב את הקשר בין הנגזרות של הזוויות לבין מהירות הסיבוב של שאר הנדנדות. למעשה מהירות הסיבוב של כל נדנדה תלויה בנגזרות של ארבע זוויות ולכן מטריצות היעקוביאן שייכות לקבוצה, $J \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. מכיוון שעבור כל נדנדה האופרטור פועל על ארבע משתנים (נגזרות של ארבע זוויות) נרחיב את המטריצה כך שתפעל על ווקטור הכולל את כל הנגזרות של הזוויות. כך היעקוביאן החדש שנקבל יהיה שייך לקבוצה $J \in \mathbb{R}^{3 \times 7}$. נדגים עבור היעקוביאן המוצג במשוואה (113),

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta') & \sin(\phi)\sin(\theta') & -\cos(\theta')\sin(\theta) - \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\theta') & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta') & -\cos(\theta')\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}' \\ \dot{\phi}'' \\ \dot{\theta}' \\ \dot{\theta}'' \end{bmatrix} \quad (115)$$

לכלי הטייס מחוברים שמונה מדחפים. כל מדחף מייצר כוח דחף בהתאם למהירות הסיבוב שלו. בעזרת הכוחות האלו ניתן להניע את כלי הטייס במרחב וכן להפעיל מומנטים סביב מרכז המסה בכדי לשנות את המצב הזוויתי של הגוף. בנוסף לכוח שכל מדחף מייצר, הוא גם מייצר גם מומנט בהתאם למהירות הסיבוב ולכיוון הסיבוב של המדחף. כדי שהמומנט השקול שמייצרים המדחפים לא ישפיע על גוף כלי הטייס כאשר אין בזה צורך נסדר כל זוג מדחפים הנמצאים על אותה הנדנדה כך שיתובבו בכיוונים הפוכים, כך כל זוג מדחפים שתמיד נמצאים באותו המישור יבטלו את המומנטים (הפועלים על הגוף) אחד של השני. לכן, המדחפים 1,4,5,8 מסתובבים עם כיוון השעון, והמדחפים 2,3,6,7 מסתובבים נגד כיוון השעון.

7.1.2. מודל דינאמי

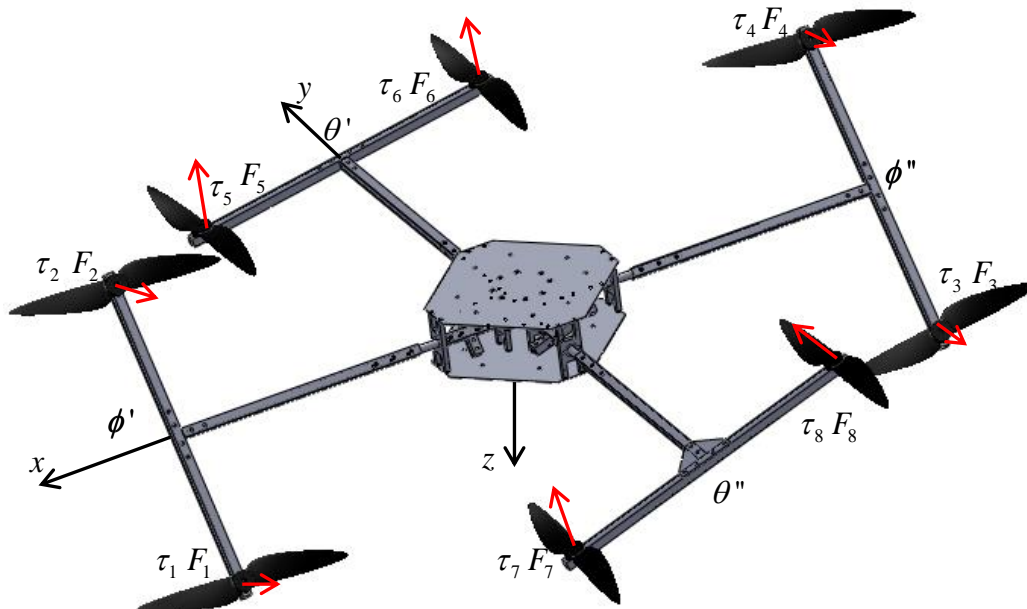
ההנחה באשר לכוח הדחף והמומנט שכל מדחף מפעיל היא שהם פרופורציונליים לריבוע מהירות הסיבוב של המדחף, לפי הקשרים הבאים,

$$\begin{aligned} F_i &= \gamma_1 \omega^2 \\ \tau_i &= \gamma_2 \omega^2 \end{aligned} \quad (116)$$

כאשר F, τ הינם כוח הדחף והמומנט, מהירות הסיבוב של המדחף היא ω , ו- $\gamma_{1,2}$ קבועים. כפי שהוזכר בפיתוח המודל הדינאמי לכלי טייס עם נדנדה יחידה, הקשר בין הכוח והמומנט של המדחף לבין ריבוע מהירות הסיבוב נבדק בצורה אמפירית עבור מנועי Brushless עם מדחפים מסוג EPP1045/5mm.

בהתאם לאיור 7.1 נציג מספר הסברים הקשורים במיקום המדחפים.

- מדחפים 1,2 נמצאים על צידו החיובי של ציר x השייך למערכת הצירים הצמודה לגוף הכלי. הפעלת מדחף 1 במהירות גבוהה מזו של מדחף 2 תגרום לשינוי זווית הנדנדה בכיוון החיובי של ϕ' .
- מדחפים 3,4 נמצאים על צידו השלילי של ציר x השייך למערכת הצירים הצמודה לגוף הכלי. הפעלת מדחף 3 במהירות גבוהה מזו של מדחף 4 תגרום לשינוי זווית הנדנדה בכיוון החיובי של ϕ'' .
- מדחפים 5,6 נמצאים על צידו החיובי של ציר y השייך למערכת הצירים הצמודה לגוף הכלי. הפעלת מדחף 5 במהירות גבוהה מזו של מדחף 6 תגרום לשינוי זווית הנדנדה בכיוון החיובי של θ' .
- מדחפים 7,8 נמצאים על צידו השלילי של ציר y השייך למערכת הצירים הצמודה לגוף הכלי. הפעלת מדחף 7 במהירות גבוהה מזו של מדחף 8 תגרום לשינוי זווית הנדנדה בכיוון החיובי של θ'' .



איור 7.1 : Four-seesaw Octo-copter.

נציג כעת את הכוחות הפועלים בכיוון שלושת הצירים של המערכת $\hat{x}_b, \hat{y}_b, \hat{z}_b$ (מערכת צמודה לגוף). כוחות אלו תלויים בזוויות בהן מוטות הנדנדות ביחס לגוף. כאן נעזר במטריצות הסיבוב המוצגות ב- (110) וקושרות בין מערכות הצירים של הנדנדות ומערכת הצירים של הגוף.

הכוח שמדחפים 1,2 מפעילים במערכת הצמודה הוא $F_{1,2} = -(F_1 + F_2)$ בכיוון ציר z . כדי להעביר את הכוח למערכת הגוף נפעיל את מטריצת הסיבוב המתאימה.

$$F_{1,2}^{\hat{b}} = {}^{\hat{b}}R_{\phi'} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{1,2} \end{bmatrix} = -(F_1 + F_2) \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(\phi') \\ \cos(\phi') \end{bmatrix} \quad (117)$$

באופן דומה, נעביר את יתר כוחות הדחף ממערכת הנדנדה אל מערכת הגוף, התוצאה שתתקבל היא,

$$\begin{aligned} F_{ix}^{\hat{b}} &= -(F_5 + F_6) \sin(\theta') - (F_7 + F_8) \sin(\theta'') \\ F_{iy}^{\hat{b}} &= (F_1 + F_2) \sin(\phi') + (F_3 + F_4) \sin(\phi'') \\ F_{iz}^{\hat{b}} &= -(F_1 + F_2) \cos(\phi') - (F_3 + F_4) \cos(\phi'') - (F_5 + F_6) \cos(\theta') - (F_7 + F_8) \cos(\theta'') \end{aligned} \quad (118)$$

כדי לנסח את המומנטים הפועלים על הנדנדות ועל גוף כלי הטייס נגדיר שני מרחקים. המרחק d הינו המרחק בין המדחף למרכז הנדנדה עליה הוא יושב, ו- l הינו המרחק בין מרכז הנדנדה למרכז המסה של הרחפן. לפי מינוח זה, המומנטים הפועלים על ארבעת הנדנדות כתוצאה מכוחות הדחף הם,

$$\begin{aligned} \tau_{\phi'} &= d(F_1 - F_2) \\ \tau_{\phi''} &= d(F_3 - F_4) \\ \tau_{\theta'} &= d(F_5 - F_6) \\ \tau_{\theta''} &= d(F_7 - F_8) \end{aligned} \quad (119)$$

והמומנטים הפועלים על גוף כלי הטייס נתונים באופן הבא,

$$\begin{aligned} \tau_{\phi} &= l(F_5 + F_6) \cos(\theta') - l(F_7 + F_8) \cos(\theta'') + (\tau_5 - \tau_6) \sin(\theta') + (\tau_7 - \tau_8) \sin(\theta'') \\ \tau_{\theta} &= l(F_1 + F_2) \cos(\phi') - l(F_3 + F_4) \cos(\phi'') + (\tau_1 - \tau_2) \sin(\phi') + (\tau_3 - \tau_4) \sin(\phi'') \\ \tau_{\psi} &= l(F_1 + F_2) \sin(\phi') - l(F_3 + F_4) \sin(\phi'') + (-\tau_1 + \tau_2) \cos(\phi') + (\tau_3 - \tau_4) \cos(\phi'') + \dots \\ &\dots l(F_5 + F_6) \sin(\theta') - l(F_7 + F_8) \sin(\theta'') + (-\tau_5 + \tau_6) \cos(\theta') + (\tau_7 - \tau_8) \cos(\theta'') \end{aligned} \quad (120)$$

הבקר של כלי הטייס יאפשר ייצוב כל דרגות החופש של הגוף (מקום ומצב זוויתי). ייצוב המצב הזוויתי דורש הפעלה של מומנטים מסוימים על גוף כלי הטייס, מומנטים אלה תלויים בכוחות הדחף ובמצב הזוויתי של הנדנדות. כדי להשיג תנועה בכיוון מסוים יש להפעיל כוחות מסוימים במערכת הגוף, כוחות אלה תלויים גם כן בכוחות הדחף ובזוויות של הנדנדות. לכן, כדי להשיג את הכוח והמומנט הדרושים לייצוב הגוף, יש צורך לקבוע את כוח הדחף השקול והמומנט בכל נדנדה. הקשרים הרלוונטיים מסתכמים למערכת של שש משוואות עם שמונה נעלמים. במערכת משוואות כזאת קיים חופש בבחירה של חלק מהנעלמים. נציג כעת את מערכת המשוואות. נסמן את הכוח השקול של מדחפים 1,2 ב- $F_{1,2}$ וכך גם עבור זוגות המדחפים בשאר הנדנדות, אלא ארבעת הנעלמים הראשונים במערכת המשוואות. ארבעת הנעלמים הנוספים כוללים את המומנט בכל נדנדה כתוצאה מהכוחות הדחף (אלה מוגדרים ב- (119)). תחילה נקשור בין המומנט הנוצר מסיבוב המדחפים (בכל נדנדה) ובין המומנט הפועל על הנדנדה כתוצאה מכוחות הדחף.

ידוע כי הקשר בין המומנט שמפעיל מדחף לבין ריבוע מהירות הסיבוב שלו הוא בקירוב לינארי. וכך גם לגבי כוח הדחף שמפעיל המדחף. לכן ניתן לכתוב את היחס הבא (בין המומנט וכוח הדחף שמפעיל המדחף),

$$\frac{\tau = \gamma_2 \omega^2}{F = \gamma_1 \omega^2} \rightarrow \frac{\tau}{F} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (121)$$

היחס המוצג במשוואה (121) נכון גם לגבי חיבור או חיסור של כוחות ומומנטים, לדוגמא,

$$\frac{(\tau_1 - \tau_2) = \gamma_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{(F_1 - F_2) = \gamma_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \rightarrow \frac{(\tau_1 - \tau_2)}{(F_1 - F_2)} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \quad (122)$$

בעזרת הקשר המוצג ב- (122) ניתן להציג את משוואה (119) כך,

$$\begin{aligned} \tau_{\phi'} &= d(\tau_1 - \tau_2) \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \rightarrow (\tau_1 - \tau_2) = \tau_{\phi'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \\ \tau_{\phi''} &= d(\tau_3 - \tau_4) \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \rightarrow (\tau_3 - \tau_4) = \tau_{\phi''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \\ \tau_{\theta'} &= d(\tau_5 - \tau_6) \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \rightarrow (\tau_5 - \tau_6) = \tau_{\theta'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \\ \tau_{\theta''} &= d(\tau_7 - \tau_8) \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \rightarrow (\tau_7 - \tau_8) = \tau_{\theta''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \end{aligned} \quad (123)$$

אחרי הצבה של קשרים אלה ב- (122) ויחד עם ניסוח מחדש של (118) מתקבלת מערכת של שש משוואות הקושרות בין הכוח והמומנט השקולים הפועלים על הגוף ובין הכוח השקול והמומנט הפועלים בכל נדנדה,

$$\begin{aligned} \tau_{\phi} &= lF_{5,6} \cos(\theta') - lF_{7,8} \cos(\theta'') + \tau_{\theta'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \sin(\theta') + \tau_{\theta''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \sin(\theta'') \\ \tau_{\theta} &= lF_{1,2} \cos(\phi') - lF_{3,4} \cos(\phi'') + \tau_{\phi'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \sin(\phi') + \tau_{\phi''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \sin(\phi'') \\ \tau_{\psi} &= lF_{1,2} \sin(\phi') - lF_{3,4} \sin(\phi'') - \tau_{\phi'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \cos(\phi') + \tau_{\phi''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \cos(\phi'') + \dots \\ &\dots lF_{5,6} \sin(\theta') - lF_{7,8} \sin(\theta'') - \tau_{\theta'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \cos(\theta') + \tau_{\theta''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \cos(\theta'') \end{aligned} \quad (124)$$

$$\begin{aligned} F_{tx}^b &= -F_{5,6} \sin(\theta') - F_{7,8} \sin(\theta'') \\ F_{ty}^b &= F_{1,2} \sin(\phi') + F_{3,4} \sin(\phi'') \\ F_{tz}^b &= -F_{1,2} \cos(\phi') - F_{3,4} \cos(\phi'') - F_{5,6} \cos(\theta') - F_{7,8} \cos(\theta'') \end{aligned}$$

כמובן שהכוח השקול והמומנט בנדנדה מסוימת הם אינם חלק מכניסות הבקרה בפועל לכן יש לקשר אותם עם מהירויות הסיבוב של המדחפים. קשר זה מתבסס על המשוואה הבאה,

$$\begin{bmatrix} F_{1,2} \\ F_{3,4} \\ F_{5,6} \\ F_{7,8} \\ \tau_{\phi'} \\ \tau_{\phi''} \\ \tau_{\theta'} \\ \tau_{\theta''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_1 \\ d\gamma_1 & -d\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\gamma_1 & -d\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d\gamma_1 & -d\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d\gamma_1 & -d\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \\ \omega_5^2 \\ \omega_6^2 \\ \omega_7^2 \\ \omega_8^2 \end{bmatrix} \quad (125)$$

ומכיוון שהמטריצה תמיד הפיכה, ניתן לחשב את כניסות הבקרה בפועל (בהינתן סט דרוש של כוחות ומומנטים).

7.1.3 פיתוח משוואות התנועה לפי אוילר לגרנז' (Euler Lagrange)

הקואורדינטות המוכללות במערכת של כלי הטייס עם ארבע נדנדות הן עשר דרגות החופש הקיימות בכלי הטייס,

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \\ \phi' \\ \phi'' \\ \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} \quad (126)$$

נסמן את ווקטור המקום כך $\xi = [x \ y \ z]^T$, ונציג ביטוי לאנרגיה הקינטית של המערכת המורכבת מחמישה גופים, גוף כלי הטייס וארבעת הנדנדות,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \omega_e^T I_e \omega_e + \frac{1}{2} \omega_{e\phi'}^T I_{e\phi'} \omega_{e\phi'} + \frac{1}{2} \omega_{e\phi''}^T I_{e\phi''} \omega_{e\phi''} + \frac{1}{2} \omega_{e\theta'}^T I_{e\theta'} \omega_{e\theta'} + \frac{1}{2} \omega_{e\theta''}^T I_{e\theta''} \omega_{e\theta''} \quad (127)$$

כאשר ω_e הינה המהירות הזוויתית של הגוף במערכת האינרציאלית, $\omega_{e\phi'}$ הינה המהירות הזוויתית של הנדנדה הראשונה במערכת האינרציאלית ובהתאמה גם שאר המהירויות הזוויתיות. I_e הוא טנזור האינרציה של כלי הטייס במערכת האינרציאלית, $I_{e\phi'}$ הוא טנזור האינרציה של הנדנדה הראשונה במערכת האינרציאלית, ובהתאמה מסומנים טנזורי האינרציה של שאר הנדנדות.

בנוסף נציג את האנרגיה הפוטנציאלית של המערכת,

$$U = -mg \xi^T e_3 \quad (128)$$

כאשר $e_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ הינו ווקטור הבסיס השלישי.

נציג את טנזורי האינרציה של כלי הטייס והנדנדות בעזרת טנזורי האינרציה ביחס למערכות הצירים שצמודות לגוף ולנדנדות בהתאמה.

$$\begin{aligned}
 I_e &= R I_b R^T \\
 I_{e\phi} &= R^{\hat{b}} R_{\phi}^T I_{b\phi}^{\hat{b}} R_{\phi}^T R^T \\
 I_{e\phi} &= R^{\hat{b}} R_{\phi}^T I_{b\phi}^{\hat{b}} R_{\phi}^T R^T \\
 I_{e\phi} &= R^{\hat{b}} R_{\theta}^T I_{b\theta}^{\hat{b}} R_{\theta}^T R^T \\
 I_{e\phi} &= R^{\hat{b}} R_{\theta}^T I_{b\theta}^{\hat{b}} R_{\theta}^T R^T
 \end{aligned} \tag{129}$$

הינם טנזורי האינרציה של הנדנדות ושל גוף כלי הטייס במערכות הצירים המקומיות. יחד עם ההנחה כי כל הגופים סימטריים, טנזורי האינרציה במערכות הצירים המקומיות הם אלכסוניים.

עבור טנזור האינרציה של כלי הטייס נבצע גם הנחה נוספת. נניח כי הזוויות של שתי נדנדות הנמצאות אחת מול השנייה משתנות באופן דומה ולכן בקירוב נשמרת ההנחה כי טנזור האינרציה במערכת הגוף הינו אלכסוני.

במשוואה (127) האנרגיה הקינטית מוצגת כתלות במהירות הזוויתית, נרצה להציג אותה בעזרת הנגזרות של זוויות אוילר אשר משמשות בתור הקואורדינטות המוכללות. נשתמש ביעקוביאן הרוטציוני בכדי לקשור בין המהירות הזוויתיות לנגזרות של זוויות אוילר ולנגזרות של זוויות הנדנדה. נציב את משוואה (129) (יחד עם הביטויים עבור היעקוביאן הרוטציוני) במשוואה 127. נקבל,

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J_{\omega}^T R I_b R^T J_{\omega} \dot{\eta} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\phi}^T \end{bmatrix} J_{\omega\phi}^T R^{\hat{b}} R_{\phi}^T I_{b\phi}^{\hat{b}} R_{\phi}^T R^T J_{\omega\phi} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\phi}^T \end{bmatrix}^T \dots \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\phi}^T \end{bmatrix} J_{\omega\phi}^T R^{\hat{b}} R_{\phi}^T I_{b\phi}^{\hat{b}} R_{\phi}^T R^T J_{\omega\phi} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\phi}^T \end{bmatrix}^T \dots \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\theta}^T \end{bmatrix} J_{\omega\theta}^T R^{\hat{b}} R_{\theta}^T I_{b\theta}^{\hat{b}} R_{\theta}^T R^T J_{\omega\theta} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\theta}^T \end{bmatrix}^T \dots \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\theta}^T \end{bmatrix} J_{\omega\theta}^T R^{\hat{b}} R_{\theta}^T I_{b\theta}^{\hat{b}} R_{\theta}^T R^T J_{\omega\theta} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\theta}^T \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{130}$$

מכיוון שהאנרגיה הקינטית אינה תלויה בבחירה של מערכת הצירים, ניתן לכתוב את משוואה (130) כך שהאנרגיה הקינטית של הגוף מוצגת במערכת הצירים הצמודה לגוף, והאנרגיה הקינטית של הנדנדות מוצגת במערכות הצירים הצמודות לנדנדה. דבר זה כמובן מתקבל גם בצורה אלגברית שכן מתקיים $J_{\Omega} = R^T J_{\omega}$ כפי שראינו במשוואה (7) וניתן לראות גם במשוואות (113, 114). המשוואה המתקבלת היא,

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J_{\Omega}^T I_b J_{\Omega} \dot{\eta} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\phi}^T \end{bmatrix} J_{\Omega\phi}^T I_{b\phi} J_{\Omega\phi} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\phi}^T \end{bmatrix}^T \dots \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\phi}^T \end{bmatrix} J_{\Omega\phi}^T I_{b\phi} J_{\Omega\phi} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\phi}^T \end{bmatrix}^T \dots \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\theta}^T \end{bmatrix} J_{\Omega\theta}^T I_{b\theta} J_{\Omega\theta} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\theta}^T \end{bmatrix}^T + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\theta}^T \end{bmatrix} J_{\Omega\theta}^T I_{b\theta} J_{\Omega\theta} \begin{bmatrix} \dot{\eta}^T & \dot{\theta}^T \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{131}$$

כעת נגדיר את ווקטור הזוויות הכולל את שלושת זוויות אוילר ואת ארבעת זוויות הנדנדה,

$$\sigma = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \\ \phi' \\ \phi'' \\ \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix} \quad (132)$$

וכן נרחיב את היעקוביאן הרוטציוני כפי שמוצג במשוואה (115). מכאן ניתן לכתוב את משוואה (131) בצורה הבאה,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T J_{\Omega}^T I_b J_{\Omega} \dot{\sigma} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T J_{\Omega\phi'}^T I_{b\phi'} J_{\Omega\phi'} \dot{\sigma} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T J_{\Omega\phi''}^T I_{b\phi''} J_{\Omega\phi''} \dot{\sigma} \dots \\ + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T J_{\Omega\theta'}^T I_{b\theta'} J_{\Omega\theta'} \dot{\sigma} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T J_{\Omega\theta''}^T I_{b\theta''} J_{\Omega\theta''} \dot{\sigma} \quad (133)$$

על מנת לפשט את משוואה (133) נגדיר את המטריצה הבאה,

$$D = J_{\Omega}^T I_b J_{\Omega} + J_{\Omega\phi'}^T I_{b\phi'} J_{\Omega\phi'} + J_{\Omega\phi''}^T I_{b\phi''} J_{\Omega\phi''} + J_{\Omega\theta'}^T I_{b\theta'} J_{\Omega\theta'} + J_{\Omega\theta''}^T I_{b\theta''} J_{\Omega\theta''} \quad (134)$$

המטריצה $D \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ מכילה את מטריצות היעקוביאן ואת מטריצות האינרציה עבור כל חלק ברחפן (גוף וארבע נדנדות). כעת ניתן לכתוב את משוואה (133) בצורה הבאה,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T D \dot{\sigma} \quad (135)$$

הלגרזיאן המתקבל מורכב ממשוואות (128 ו-135),

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^T D \dot{\sigma} + mg \xi^T e_3 \quad (136)$$

בכדי לפתח את משוואות התנועה נעזר במשוואת לגרנז' השנייה,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_{\xi} \\ \tau_{\sigma} \end{bmatrix} \quad (137)$$

כאשר $\tau_{\sigma} = [\tau_{\phi} \quad \tau_{\theta} \quad \tau_{\psi} \quad \tau_{\phi'} \quad \tau_{\phi''} \quad \tau_{\theta'} \quad \tau_{\theta''}]^T$ כפי שמוגדר במשוואות (123 ו-124). ווקטור הכוחות הלא משמרים במערכת האינרציאלית מתקבל על ידי הכפלת הכוחות המופיעים במשוואה (124) במטריצת הסיבוב,

$$F_{\xi} = R \begin{bmatrix} \hat{F}_{tx}^b \\ \hat{F}_{ty}^b \\ \hat{F}_{tz}^b \end{bmatrix} \quad (138)$$

נחלק את משוואת לגרנז' השנייה לסט של שתי משוואות ווקטוריות, אחת לפי קואורדינטות המיקום ξ ואחת לפי קואורדינטות הזוויות σ .

נציג את סט המשוואות הראשון המתאר את היקום של הרחפן במערכת האינרציאלית,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = [F_\xi] \quad (139)$$

נגזור את הלגראז'יאן (136) לפי הקואורדינטות המוכללות ξ וכן לפי הנגזרות שלהן $\dot{\xi}$ בהתאם למשוואה (139) ונקבל,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} &= m\dot{\xi} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) &= m\ddot{\xi} \\ \frac{\partial L}{\partial \xi} &= mge_3 \end{aligned} \quad (140)$$

מכאן מתקבלות משוואות התנועה הקוויות של כלי הטייס,

$$\ddot{\xi} = ge_3 + \frac{1}{m} F_\xi = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} R \begin{bmatrix} F_{tx}^b \\ F_{ty}^b \\ F_{tz}^b \end{bmatrix} \quad (141)$$

כעת נפתח את משוואות התנועה עבור התנועה הזוויתית. נגזור את הלאגראז'יאן לפי ווקטור הקואורדינטות המוכללות σ ולפי ווקטור הנגזרות $\dot{\sigma}$.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\sigma}} &= D(\sigma)\dot{\sigma} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\sigma}} \right) &= D(\sigma)\ddot{\sigma} + \dot{D}(\sigma)\dot{\sigma} \\ \frac{dL}{d\sigma} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} [\dot{\sigma}^T D(\sigma)\dot{\sigma}] \end{aligned} \quad (142)$$

מכאן מתקבלות משוואות התנועה הזוויתית עבור כל דרגות החופש הזוויתיות של כלי הטייס,

$$D(\sigma)\ddot{\sigma} = \left\{ \tau_\sigma + \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} [\dot{\sigma}^T D(\sigma)\dot{\sigma}] - \dot{D}(\sigma)\dot{\sigma} \right\} \quad (143)$$

כדי לפשט את המשוואה נגדיר $C(\sigma, \dot{\sigma}) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} [\dot{\sigma}^T D(\sigma)] - \dot{D}(\sigma)$ ונקבל את משוואת התנועה הזוויתית,

$$\ddot{\sigma} = D^{-1}(\sigma) [\tau_\sigma + C(\sigma, \dot{\sigma})\dot{\sigma}] \quad (144)$$

7.1.4. האפשרות לבקר שש דרגות חופש באופן בלתי תלוי.

לאחר שפותרו משוואות התנועה, ניתן לבדוק את הטענה כי כלי הטייס עם ארבע הנדנדות מאפשר בקרה של כל שש דרגות החופש של הגוף באופן בלתי תלוי. כדי להוכיח טענה זו, נראה כי דרגת מטריצת המקדמים של הכוחות החיצוניים במשוואות התנועה שווה למספר דרגות החופש אותן נרצה לבקר. כמובן

שהמערכת השלמה הינה מערכת תת-ממונעת (under-actuated) מכיוון שיש לה עשר דרגות חופש ורק שמונה כניסות בקרה.

כדי להראות שכל שש דרגות החופש של הגוף ניתנות לבקרה באופן בלתי תלוי, נציג את משוואות התנועה של דרגות חופש אלה כתלות בכניסות הבקרה בפועל (כלומר, כתלות במהירות הסיבוב של המדחפים). תחילה נציג את הכוחות ממשוואה (118) בצורה מטריצית כתלות במהירויות הסיבוב,

$$\begin{bmatrix} F_{tx} \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_1 \sin(\theta') & -\gamma_1 \sin(\theta') & -\gamma_1 \sin(\theta'') & -\gamma_1 \sin(\theta'') \\ \gamma_1 \sin(\phi') & \gamma_1 \sin(\phi') & \gamma_1 \sin(\phi'') & \gamma_1 \sin(\phi'') & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 \cos(\phi') & -\gamma_1 \cos(\phi') & -\gamma_1 \cos(\phi'') & -\gamma_1 \cos(\phi'') & -\gamma_1 \cos(\theta') & -\gamma_1 \cos(\theta') & -\gamma_1 \cos(\theta'') & -\gamma_1 \cos(\theta'') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \\ \omega_5^2 \\ \omega_6^2 \\ \omega_7^2 \\ \omega_8^2 \end{bmatrix} \quad (145)$$

נסמן את המטריצה במשוואה (145) בסימן A.

באופן דומה נציג את משוואות המומנטים ב- (119,120):

$$\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \\ \tau_{\phi'} \\ \tau_{\phi''} \\ \tau_{\theta'} \\ \tau_{\theta''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & l\gamma_1 \cos(\theta') + \gamma_2 \sin(\theta') & l\gamma_1 \cos(\theta') - \gamma_2 \sin(\theta') & -l\gamma_1 \cos(\theta'') + \gamma_2 \sin(\theta'') & -l\gamma_1 \cos(\theta'') - \gamma_2 \sin(\theta'') \\ l\gamma_1 \cos(\phi') + \gamma_2 \sin(\phi') & l\gamma_1 \cos(\phi') - \gamma_2 \sin(\phi') & -l\gamma_1 \cos(\phi'') + \gamma_2 \sin(\phi'') & -l\gamma_1 \cos(\phi'') - \gamma_2 \sin(\phi'') & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l\gamma_1 \sin(\phi') - \gamma_2 \cos(\phi') & l\gamma_1 \sin(\phi') + \gamma_2 \cos(\phi') & -l\gamma_1 \sin(\phi'') + \gamma_2 \cos(\phi'') & -l\gamma_1 \sin(\phi'') - \gamma_2 \cos(\phi'') & l\gamma_1 \sin(\theta') - \gamma_2 \cos(\theta') & l\gamma_1 \sin(\theta') + \gamma_2 \cos(\theta') & -l\gamma_1 \sin(\theta'') + \gamma_2 \cos(\theta'') & -l\gamma_1 \sin(\theta'') - \gamma_2 \cos(\theta'') \\ d\gamma_1 & -d\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\gamma_1 & -d\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d\gamma_1 & -d\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d\gamma_1 & -d\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \\ \omega_5^2 \\ \omega_6^2 \\ \omega_7^2 \\ \omega_8^2 \end{bmatrix} \quad (146)$$

נסמן את המטריצה במשוואה (146) בסימן B.

כעת נציב את משוואות (145,146) במשוואות התנועה (141,144) ונבנה את מטריצת המקדמים של הכוחות החיצוניים עבור שש דרגות החופש אותן יש לבקר. מתוך משוואות התנועה של המצב הזוויתי נבחן רק את שלוש אלה המתארות את המצב הזוויתי של גוף כלי הטיס.

$$M_1 = \begin{bmatrix} RA \\ D^{-1}B(1:3) \end{bmatrix} \quad (147)$$

המטריצה M במשוואה (147) היא מטריצת המקדמים של הכוחות החיצוניים. מטריצה זו תלויה הן בזוויות הגוף והן בזוויות הנדנדה. בבחינת המטריצה ניתן לראות כי דרגת המטריצה אינה תלויה במצב הזוויתי של גוף כלי הטיס. עבור מצב זוויתי מסוים של הנדנדות (בהנחה כי אין דרישה לזוויות מסוימות עבור הנדנדות) דרגת המטריצה היא 6, כלומר ניתן לבקר את כל דרגות החופש באופן בלתי תלוי. יש לשים לב כי מהירויות הסיבוב מופיעות כביטוי ריבועי שאינו יכול להיות שלילי. לכן על אף שהדרגה מלאה ייתכן ולא יהיה ניתן לייצר כל כוח או מומנט רצוי. לצורך בקרה של כל שש דרגות החופש של הגוף, ניתן לייצר כוחות ומומנטים רצויים (גם חיוביים וגם שליליים) כתלות בזוויות הנדנדות בלבד. לכן שש דרגות החופש הן אכן בלתי תלויות גם כאשר מגבילים את הביטויים הריבועיים של מהירות הסיבוב במדחפים להיות גודל חיובי בלבד.

נבחן כעת האם ניתן לבקר באופן בלתי תלוי יותר משש דרגות חופש (נזכיר כי בכלי טיס זה עשר דרגות חופש). נבחן את המטריצה הבאה,

$$M = \begin{bmatrix} RA \\ D^{-1}B \end{bmatrix} \quad (148)$$

לכאורה, ניתן להשיג שמונה דרגות חופש מבוקרות, כמספר כניסות הבקרה. אך זה הוא מקרה ספציפי ודורש זוויות מסוימות. מכיוון שכעת אנו רוצים שגם זוויות הנדנדות יהיו ניתנות לבקרה באופן בלתי תלוי, לא ניתן לבחור אותן כרצוננו ועבור זוויות מסוימות מספר דרגות החופש יורד לשבע. אם כן נרצה לבדוק האם ניתן לבקר את שש דרגות החופש של הגוף יחד עם המצב הזוויתי של נדנדה יחידה, באופן בלתי תלוי. בחינה של משוואות התנועה מראה כי הדבר אינו אפשרי. אם נקבע נדנדה אחת בזווית מסוימת, לא נוכל לאפשר בקרה של כל שש דרגות החופש של הגוף באופן בלתי תלוי. מתוך משוואות התנועה ניתן לראות כי לא ניתן לקיים תנועה רצויה בכיוונים x ו- y וגם לאפשר הפעלה של מומנטים רצויים סביב צירי הגוף.

7.1.5 מערכת הבקרה

כעת נפתח את מערכת הבקרה לכלי טייס עם ארבע נדנדות. הפיתוח דומה לזה שהוצג במקרה של כלי טיס עם נדנדה אחת. גם כאן מערכת הבקרה כוללת שני מרכיבים. מערכת בקרת יציבות אחראי על המצב הזוויתי זוויות, כלומר ייצוב משתני הזווית של כלי הטייס כל ערכים רצויים. תחת האחריות של מערכת זו נמצאות גם ארבע הזוויות של הנדנדות וגם שלוש הזוויות של הגוף. המרכיב השני כולל את מערכת בקרת המסלול, היא אחראית על הניווט (כלומר תנועה לאורך מסלול רצוי). בקר המסלול קובע את המצב הזוויתי הרצוי, ומצב זוויתי זה מהווה את אות הייחוס של בקר היציבות. במקרה של כלי טייס עם ארבע נדנדות קיימות מספר רב של אפשרויות באמצעותן ניתן להניע את כלי הטייס במסלול רצוי. לכן כלי טייס זה יכול לנוע במסלול רצוי וגם לקיים דרישות נוספות ביחס למצב הזוויתי. בהמשך נבחן מספר אופני טיסה ייחודיים לכלי טייס זה.

בקר יציבות לכלי טייס עם 4 נדנדות.

בקר היציבות כאן פותח באופן דומה לזה של בקר היציבות בכלי עם נדנדה יחידה. שיטת הבקרה היא Integral Backstepping והפיתוח הינו פיתוח ווקטורי עבור כל הזוויות כפי שהוצג בפרק 4.1.1. במקרה של רחפן עם 4 נדנדות ווקטור הזוויות שביחס אליו מבוצעת הבקרה הוא ווקטור עם שבעה רכיבים,

$$\sigma = [\phi \ \theta \ \psi \ \phi' \ \phi'' \ \theta' \ \theta'']^T$$

(149)

$$\ddot{\sigma} = \ddot{\sigma}_d + (I_{7 \times 7} + k_\sigma - c_1 c_2) \dot{\sigma} + (c_1 + c_2) \dot{\sigma} + c_2 k_\sigma \chi_\sigma$$

נחלץ מתוך משוואות התנועה הזוויתית ב- (144) את הביטוי עבור $\ddot{\sigma}$, ונקבל את הביטוי לאות הבקרה,

$$\tau_\sigma = D(\sigma) \{ \ddot{\sigma}_d + k_p \dot{\sigma} + k_D \dot{\sigma} + k_I \chi_\sigma \} - C(\sigma, \dot{\sigma}) \dot{\sigma} \quad (150)$$

כאשר $\tau_\sigma = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi \ \tau_{\phi'} \ \tau_{\phi''} \ \tau_{\theta'} \ \tau_{\theta''}]$. את הקשר בין המומנטים שיש להפעיל על כלי הטייס

$[\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]$ ובין אותות הבקרה כפי שהוגדרו במשוואה (125) ניתן לראות במשוואה (124). הרכיבים k_p, k_D, k_I הינם,

$$k_p = I_{7 \times 7} + k_\sigma + c_1 c_2, k_D = c_1 + c_2, k_I = c_2 k_\sigma \quad (151)$$

כאשר c_1, c_2, k_σ הינן מטריצות מוגדרות חיוביות.

סימולציות של בקר היציבות בכלי טייס עם 4 נדנדות.

כעת נערוך סימולציה בעזרת תוכנת MATLAB/Simulink להצגת הביצועים של בקר היציבות. בקר היציבות מאפשר ייצוב 7 זוויות, אלה 3 זוויות אוילר וארבע הזוויות של הנדנדות. הבקר בסימולציה הוא הבקר הנתון במשוואה (150). לצורך הסימולציה נבחרו הקבועים,

$$I_x = I_y = 0.15[kg \cdot m^2]$$

$$I_z = 0.3[kg \cdot m^2]$$

$$I_{x\phi 1} = I_{x\phi 2} = 0.01[kg \cdot m^2]$$

$$I_{x\theta 1} = I_{x\theta 2} = 0.01[kg \cdot m^2]$$

$$I_{y\phi 1} = I_{y\phi 2} = 0.01[kg \cdot m^2]$$

$$I_{y\theta 1} = I_{y\theta 2} = 0.01[kg \cdot m^2]$$

$$I_{z\phi 1} = I_{z\phi 2} = 0.02[kg \cdot m^2]$$

$$I_{z\theta 1} = I_{z\theta 2} = 0.02[kg \cdot m^2]$$

$$m = 1[kg]$$

לצורך מימוש הבקר נבחרו גם,

$$c_1 = 35I_{7x7}$$

$$c_2 = 10I_{7x7}$$

$$k_\sigma = I_{7x7}$$

נבהיר כי הקבועים בבקר אינם חייבים להיות זהים עבור כל דרגת חופש (עבור כל זוויות במקרה זה) וניתן לכייל אותם באופן אופטימלי עבור דרישות מערכת מסוימות. מכיוון שאין כאן דרישות שונות עבור דרגות החופש, נבחרו קבועים זהים.

בקר היציבות נדרש לייצב את המצב הזוויתי סביב המצב הזוויתי הרצוי הבא (כאן המצב הזוויתי הרצוי הוא פונקציה ש הזמן)

$$\phi_d = 0.1 \sin(t)$$

$$\theta_d = 0.2 \sin(t / 2)$$

$$\psi_d = 2$$

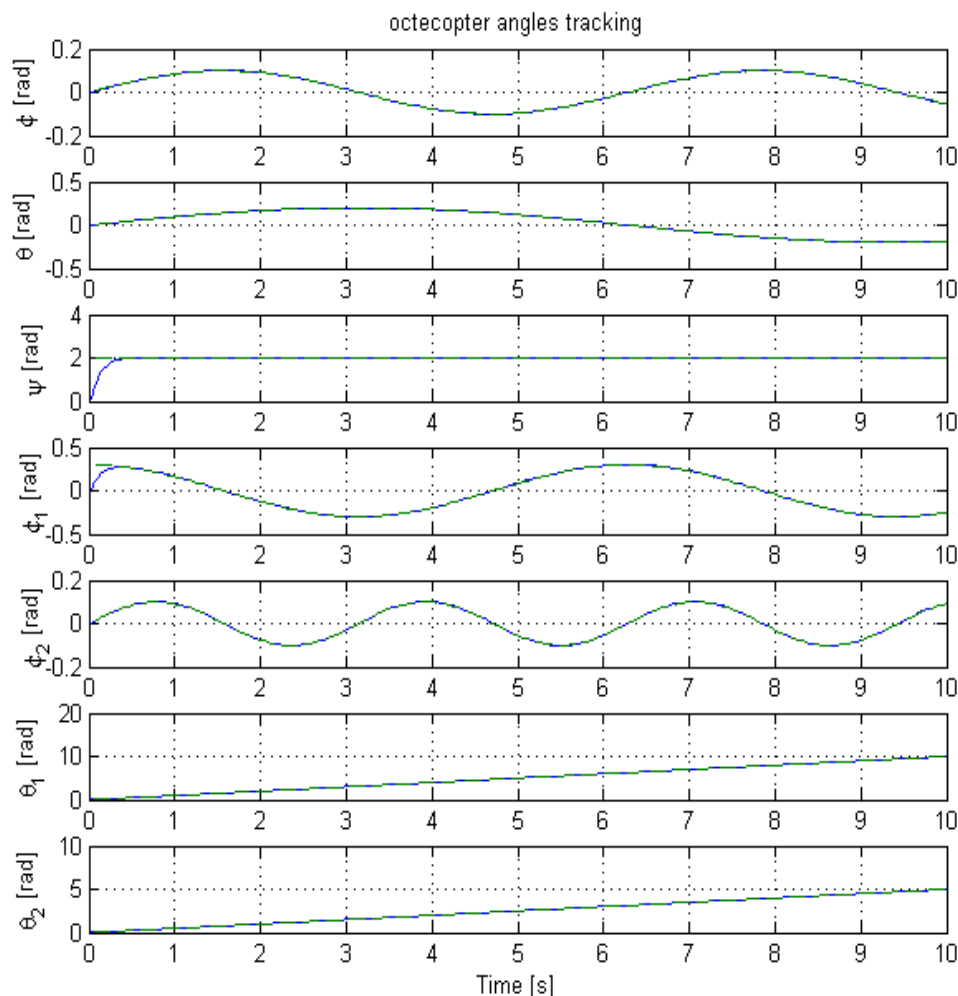
$$\phi_{1d} = 0.3 \cos(t)$$

$$\phi_{2d} = 0.1 \sin(2t)$$

$$\theta_{1d} = t$$

$$\theta_{2d} = 0.5t$$

תנאי ההתחלה של כל הזוויות נקבעו להיות אפס.



איור 7.2 : בקר יציבות (בשיטת Integral Backstepping) בכלי טייס עם ארבע נדנדות. הקו הכחול הרציף מתאר את המצב הזוויתי בפועל והקו הירוק את המצב הזוויתי הרצוי.

בקר מסלול בכלי טייס עם ארבע נדנדות.

נפתח כעת את בקר המסלול של כלי הטייס הנדון. כאמור בקר המסלול אחראי על קביעת כוחות הדחף ועל קביעת המצב הזוויתי הרצוי אשר מהווה אות ייחוס לבקר היציבות. אות הייחוס של בקר המסלול הוא מסלול רצוי או נקודה במרחב שאליה יש להגיע. אותות הבקרה במקרה זה כוללים את המצב הזוויתי של הגוף (גלגול ועלרוד), המצב הזוויתי של הנדנדות וכוחות דחף השקולים בנדנדות. ניתן לראות שקיימות כניסות בקרה רבות אך רק שלושה משתנים שיש לבקר (משתני המיקום), מכאן שאם נרצה לבקר רק את מקום כלי הטייס במרחב קיימת יתירות בבחירת אותות הבקרה. עם זאת, לא ניתן לבחור כל קומבינציה שנרצה מכיוון שקיים צימוד בין המשתנים. לדוגמא, בכדי לבקר את תנועת כלי הטייס יש צורך בכוחות דחף מסוימים של המדחפים וגם בהפניית המדחפים בכיוון מסוים.

בכדי לצמצם את היתירות וגם לאפשר שליטה מלאה בתנועת כלי הטייס (בקרה של כל שש דרגות החופש באופן בלתי תלוי) נפתח את בקר המסלול תחת ההנחה שהמצב הזוויתי של הגוף הוא דרישה של המפעיל

(ולא אותות בקרה של בקר המסלול כפי שמקובל ברחפנים סטנדרטיים). באופן זה ניתן לבקר את כל שש דרגות החופש של גוף כלי הטייס וגם לאפשר צורות טיסה ייחודיות. לכן, בקר המסלול יקבע את כוח הדחף השקול בכל נדנדה ואת הזוויות של הנדנדות.

נפתח את הבקר בשיטת Integral Backstepping בצורה ווקטורית עבור כל משתני המיקום. בדומה לבקר היציבות נתחיל בהגדרת השגיאה בין המקום הרצוי למקום בפועל,

$$e_\xi = \xi_d - \xi \quad (152)$$

נגזור את שגיאת המקום,

$$\dot{e}_\xi = \dot{\xi}_d - \dot{\xi} \quad (153)$$

נגדיר את ההתנהגות הרצויה של שגיאת המקום ע"י תכנון $\dot{\xi}$ רצוי, שיסומן ב- $\dot{\xi}_w$,

$$\dot{\xi}_w = c_{\xi 1} e_\xi + \dot{\xi}_d + k_\xi \chi_\xi \quad (154)$$

כאשר χ_ξ הינו האינטגרל על השגיאה, ו $c_{\xi 1}, k_\xi$ הינן מטריצות מוגדרות חיוביות.

כעת נגדיר שגיאה נוספת בין $\dot{\xi}$ לבין ערכו הרצוי,

$$e_{\xi'} = \dot{\xi}_w - \dot{\xi} \quad (155)$$

נגזור שגיאה זו בזמן כדי למצוא את הבקר שיביא להתכנסות השגיאה,

$$\frac{\partial e_{\xi'}}{\partial t} = \dot{e}_{\xi'} = \ddot{\xi}_w - \ddot{\xi} = c_{\xi 1} \dot{e}_\xi + \ddot{\xi}_d + k_\xi \dot{e}_\xi - \ddot{\xi} \quad (156)$$

כדי לתכנן את אות הבקרה נרצה להציג את משוואה (153) כפונקציה של השגיאות בלבד. נבודד את $\dot{\xi}$

מתוך משוואה (155) ונציב את הביטוי של $\dot{\xi}_w$ המוצג במשוואה (154), הביטוי המתקבל,

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_w - e_{\xi'} = c_{\xi 1} e_\xi + \dot{\xi}_d + k_\xi \chi_\xi - e_{\xi'} \quad (157)$$

בהצבת משוואה (157) למשוואה (153) נקבל:

$$\dot{e}_\xi = -c_{\xi 1} e_\xi - k_\xi \chi_\xi + e_{\xi'} \quad (158)$$

כעת נציב את משוואה (158) למשוואה (156) ונקבל:

$$\dot{e}_{\xi'} = c_{\xi 1} (-c_{\xi 1} e_\xi - k_\xi \chi_\xi + e_{\xi'}) + \ddot{\xi}_d + k_\xi \dot{e}_\xi - \ddot{\xi} \quad (159)$$

בכדי שהשגיאה תדעך לאפס נרצה שהדינמיקה של השגיאה תקיים את הקשר, (160) $\dot{e}_{\xi'} = -c_{\xi 2} e_{\xi'} - e_\xi$

גם כאן $c_{\xi 2}$ הינה מטריצה מוגדרת חיובית.

נציב את משוואה (160) וכן את הביטוי של $e_{\xi'}$ מתוך משוואה (158) במשוואה (159) ונקבל:

$$\ddot{\xi} = \ddot{\xi}_d + (I_{3 \times 3} + k_\xi - c_{\xi 1} c_{\xi 2}) e_\xi + (c_{\xi 1} + c_{\xi 2}) \dot{e}_\xi + c_{\xi 2} k_\xi \chi_\xi \quad (161)$$

נציג את הביטוי במשוואה (161) באופן הבא:

$$\ddot{\xi} = \ddot{\xi}_d + k_{\xi P} e_\xi + k_{\xi D} \dot{e}_\xi + k_{\xi I} \chi_\xi \quad (162)$$

$$k_{\xi P} = I_{3 \times 3} + k_\xi + c_{\xi 1} c_{\xi 2}, \quad k_{\xi D} = c_{\xi 1} + c_{\xi 2}, \quad k_{\xi I} = c_{\xi 2} k_\xi$$

את הביטוי עבור $\ddot{\xi}$ קיבלנו במשוואה (141) נשווה בין ביטוי זה לביטוי שהתקבל במשוואה (162):

$$ge_3 + \frac{1}{m}F_\xi = \ddot{\xi}_d + k_{\xi P}e_\xi + k_{\xi D}\dot{e}_\xi + k_{\xi I}\chi_\xi \quad (163)$$

אותות הבקרה מסתתרים בתוך הביטוי F_ξ , נבודד ביטוי זה ונקבל,

$$F_\xi = m(\ddot{\xi}_d + k_{\xi P}e_\xi + k_{\xi D}\dot{e}_\xi + k_{\xi I}\chi_\xi - ge_3) \quad (164)$$

הביטוי F_ξ הוא אינו אות הבקרה שאנו מחפשים, אלא הוא מורכב מקומבינציה של אותות הבקרה שהגדרנו עבור של בקר המסלול. נציג באופן מפורש את הביטוי עבור F_ξ ,

$$F_\xi = R \begin{bmatrix} F_{tx} \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix} \quad (165)$$

בדומה לבקר המסלול של רחפן עם נדנדה יחידה, גם כאן נתכנן את בקר המסלול במערכת הצירים המסובבת בזווית הסבסוב. גישה כזאת מאפשרת לנו לתכנן את בקר המסלול תחת הנחה כי זווית הסבסוב היא אפס. נציג את מטריצת הסיבוב תחת ההנחה $\psi = 0$,

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (166)$$

בעזרת משוואות (164-166) נרשום את הביטוי לכוחות F_{tx} , F_{ty} ו- F_{tz} באופן הבא,

$$\begin{bmatrix} F_{tx} \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix} = R^T \left[m(\ddot{\xi}_d + k_{\xi P}e_\xi + k_{\xi D}\dot{e}_\xi + k_{\xi I}\chi_\xi - ge_3) \right] \quad (167)$$

את התוצאה במשוואה (167) נכניס לתוך משוואת הכוחות (124) ונקבל שלושה אילוצים אותם אותות הבקרה צריכים לקיים. לגבי (167), נשתמש בסימון $e_{con} = \left[m(\ddot{\xi}_d + k_{\xi P}e_\xi + k_{\xi D}\dot{e}_\xi + k_{\xi I}\chi_\xi - ge_3) \right]$. המשוואות המתקבלות הן,

$$\begin{aligned} \cos(\theta)e_{con}(1) - \sin(\theta)e_{con}(3) &= -F_{5,6}\sin(\theta') - F_{7,8}\sin(\theta'') \\ \sin(\phi)\sin(\theta)e_{con}(1) + \cos(\phi)e_{con}(2) + \cos(\theta)\sin(\phi)e_{con}(3) &= F_{1,2}\sin(\phi') + F_{3,4}\sin(\phi'') \\ \cos(\phi)\sin(\theta)e_{con}(1) - \sin(\phi)e_{con}(2) + \cos(\phi)\cos(\theta) &= \dots \\ -F_{1,2}\cos(\phi') - F_{3,4}\cos(\phi'') - F_{5,6}\cos(\theta') - F_{7,8}\cos(\theta'') & \end{aligned} \quad (168)$$

שלושת המשוואות ב- (168) הן משוואות הניווט של כלי הטייס. קיום משוואות אלו יגרום לכלי הטייס תנועה במסלול רצוי. ב- (168) אנו מתייחסים משתני המצב הזוויתית של גוף כלי הטייס כאל גדלים נתונים, לכן יש לקיים גם את משוואות המומנטים שיביאו אותנו אל זוויות רצויות המאפשרות לקיים את משוואות (168). משוואות המומנטים הן שלוש המשוואות הראשונות ב- (124). נזכיר את משוואות המומנטים,

$$\begin{aligned}\tau_\phi &= lF_{5,6} \cos(\theta') - lF_{7,8} \cos(\theta'') + \tau_{\theta'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \sin(\theta') + \tau_{\theta''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \sin(\theta'') \\ \tau_\theta &= lF_{1,2} \cos(\phi') - lF_{3,4} \cos(\phi'') + \tau_{\phi'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \sin(\phi') + \tau_{\phi''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \sin(\phi'') \\ \tau_\psi &= lF_{1,2} \sin(\phi') - lF_{3,4} \sin(\phi'') - \tau_{\phi'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \cos(\phi') + \tau_{\phi''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \cos(\phi'') + \dots \\ &\dots lF_{5,6} \sin(\theta') - lF_{7,8} \sin(\theta'') - \tau_{\theta'} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \cos(\theta') + \tau_{\theta''} \frac{\gamma_2}{\gamma_1 d} \cos(\theta'')\end{aligned}$$

ניתן לראות כי המומנטים סביב שלושת הצירים הראשיים תלויים גם בכוחות הדחף וגם במומנטים הטהורים שיוצרים המדחפים. האיברים במשוואה התלויים במומנטים הטהורים הינם קטנים מכיוון שהאיבר γ_2 קטן ב- כשני סדרי גודל לעומת האיבר γ_1 . כלי הטייס עם הנדנדות מאפשר שליטה טובה יותר בזווית הסבסוב מכיוון שהטיית הנדנדות מאפשרת להפעיל מומנטים סביב ציר z (שהם תוצאה של כוחות דחף). ברחפן סטנדרטי השליטה בזווית הסבסוב נעשית על ידי המומנטים הטהורים הנוצרים מסיבוב המדחפים, והם קטנים באופן משמעותי מהכוחות שניתן להפעיל עם הנדנדות. אם כך נבחר להשתמש רק בכוחות הדחף ובזוויות של הנדנדות כדי ליצור את המומנטים הדרושים להנעת כלי הטיס. פתרון של המשוואות ב- (168) ומשוואות המומנטים מאפשרים לנו לקבוע את כוחות הדחף הדרושים ואת הזוויות שהנדנדות צריכות להגיע אליהן. ברוב שלבי הטיסה למעט זוויות קיצוניות, ישנם אינסוף פתרונות למשוואות אלו מכיוון שקיימות 6 משוואות ושמונה נעלמים. בכדי לפתור את המשוואות נקבע כוח דחף התחלתי במדחפים 5-8, גודל זה נקבע להיות,

$$F_{5-8} = |F_{tx}| + |F_{tz}| / 2 \quad (169)$$

זהו גודל התחלתי והוא יכול להשתנות בהתאם לדרישות נוספות. כדי לפתור את המשוואות נקבע כי הזוויות של שתי נדנדות נגדיות שוות אחת לשנייה, ובמקרה שיש להפעיל מומנט סביב ציר z ליצירת זווית סבסוב רצויה, נכניס שגיאה בין שתי הזוויות. כעת ניתן למצוא את הזוויות הרצויות עבור הנדנדות הסובבת סביב ציר y , מתוך משוואה (168) נקבל,

$$\theta' = \theta'' = \sin^{-1} \left(\frac{F_{tx}}{F_{5-8}} \right) \quad (170)$$

כעת עלינו לקבוע את כוח הדחף ביתר המדחפים. נשתמש במשוואות עבור F_{ty} ו- F_{tz} מ- (168). נבודד את הכוח שיש למצוא,

$$\begin{aligned}F_{ty} &= F_{1-4} \sin(\phi') \\ F_{tz} + F_{5-8} \cos(\theta') &= -F_{1-4} \cos(\phi')\end{aligned} \quad (171)$$

נעלה את המשוואות בריבוע ונחבר, המשוואה המתקבלת היא,

$$\begin{aligned}F_{1-4}^2 (\sin^2(\phi') + \cos^2(\phi')) &= F_{ty}^2 + (F_{tz} + F_{5-8} \cos(\theta'))^2 \\ F_{1-4} &= \sqrt{F_{ty}^2 + (F_{tz} + F_{5-8} \cos(\theta'))^2}\end{aligned} \quad (172)$$

מכאן ניתן למצוא בקלות את הזוויות של הנדנדות הנותרות,

$$\phi' = \phi'' = \sin^{-1} \left(\frac{F_{1y}}{F_{1-4}} \right) \quad (173)$$

משוואת (169-173) מתארות את כוחות הדחף הדרושים ואת הזוויות הרצויות בנדנדות, כדי להשיג תנועה (קווית) רצויה של כלי הטייס. משוואות אלו אינן מתייחסות למומנטים הדרושים כדי להשיג תנועה זוויתית. נציג כעת כיצד לשלב את שלושת משוואות המומנטים עם הכוחות והזוויות שנקבעו ע"י בקר המקום. הכוחות F_{1-4} ו- F_{5-8} שתוכננו מייצגים את סך הכוח שמפעילים ארבעת המדחפים הראשונים וסך הכוח שמפעילים ארבעת המדחפים הנוספים, לכן מתקיים,

$$\begin{aligned} F_{1,2} + F_{3,4} = F_{1-4} &\Rightarrow F_{3,4} = F_{1-4} - F_{1,2} \\ F_{5,6} + F_{7,8} = F_{5-8} &\Rightarrow F_{7,8} = F_{5-8} - F_{5,6} \end{aligned} \quad (174)$$

בנוסף נקבע כי כל זוג נדנדות אחראי על חצי מהמומנט הדרוש בכדי לסובב את כלי הטייס בזווית הסבסוב. בכדי להשלים את סט המשוואות יש צורך לקבוע שגיאה בין הזוויות של זוג נדנדות, נגדיר את הזוויות בצורה הבאה,

$$\begin{aligned} \bar{\phi}' &= \phi' + e_{\phi'} \\ \bar{\phi}'' &= \phi' - e_{\phi'} \\ \bar{\theta}' &= \theta' + e_{\theta'} \\ \bar{\theta}'' &= \theta' - e_{\theta'} \end{aligned} \quad (175)$$

כאשר $\bar{\phi}', \bar{\phi}'', \bar{\theta}', \bar{\theta}''$ הן הזוויות בהן מוטות הנדנדות. מכיוון שאנו משנים את הזוויות של הנדנדות נגדיל את הערכים של F_{1-4} ו- F_{5-8} בהתאם.

נציב את משוואות (174,175) במשוואות המומנטים ונחלק את משוואת המומנטים סביב ציר זווית הסבסוב לשתי משוואות. מתקבל סט המשוואות הבא,

$$\begin{aligned} I \quad & \frac{F_{1,2}}{\cos(e_{\phi'})} \cos(\phi' + e_{\phi'}) - \frac{F_{1-4} - F_{1,2}}{\cos(e_{\phi'})} \cos(\phi' - e_{\phi'}) = \tau_{\phi} / l \\ II \quad & \frac{F_{1,2}}{\cos(e_{\phi'})} \sin(\phi' + e_{\phi'}) - \frac{F_{1-4} - F_{1,2}}{\cos(e_{\phi'})} \sin(\phi' - e_{\phi'}) = \tau_{\psi} / 2l \\ III \quad & \frac{F_{5,6}}{\cos(e_{\theta'})} \cos(\theta' + e_{\theta'}) - \frac{F_{5-8} - F_{5,6}}{\cos(e_{\theta'})} \cos(\theta' - e_{\theta'}) = \tau_{\theta} / l \\ IV \quad & \frac{F_{5,6}}{\cos(e_{\theta'})} \sin(\theta' + e_{\theta'}) - \frac{F_{5-8} - F_{5,6}}{\cos(e_{\theta'})} \sin(\theta' - e_{\theta'}) = \tau_{\psi} / 2l \end{aligned} \quad (176)$$

קיבלנו ארבע משוואות כאשר הנעלמים הם $F_{1,2}, F_{5,6}, e_{\phi'}, e_{\theta'}$, נציג את הפתרון עבור שתי המשוואות הראשונות,

$$\begin{aligned}
I \quad & \frac{F_{1,2}}{\cos(e_{\phi'})} \left(\cos(\phi') \cos(e_{\phi'}) - \sin(\phi') \sin(e_{\phi'}) \right) - \dots \\
& \frac{F_{1-4} - F_{1,2}}{\cos(e_{\phi'})} \left(\cos(\phi') \cos(e_{\phi'}) + \sin(\phi') \sin(e_{\phi'}) \right) = \tau_{\phi} / l \\
II \quad & \frac{F_{1,2}}{\cos(e_{\phi'})} \left(\sin(\phi') \cos(e_{\phi'}) + \cos(\phi') \sin(e_{\phi'}) \right) - \dots \\
& \frac{F_{1-4} - F_{1,2}}{\cos(e_{\phi'})} \left(\sin(\phi') \cos(e_{\phi'}) - \cos(\phi') \sin(e_{\phi'}) \right) = \tau_{\psi} / 2l \\
I \quad & F_{1,2} \left(\cos(\phi') - \sin(\phi') \tan(e_{\phi'}) \right) - (F_{1-4} - F_{1,2}) \left(\cos(\phi') + \sin(\phi') \tan(e_{\phi'}) \right) = \tau_{\phi} / l \\
II \quad & F_{1,2} \left(\sin(\phi') + \cos(\phi') \tan(e_{\phi'}) \right) - (F_{1-4} - F_{1,2}) \left(\sin(\phi') - \cos(\phi') \tan(e_{\phi'}) \right) = \tau_{\psi} / 2l \\
I \quad & 2F_{1,2} \cos(\phi') - F_{1-4} \left(\cos(\phi') + \sin(\phi') \tan(e_{\phi'}) \right) = \tau_{\phi} / l \\
II \quad & 2F_{1,2} \sin(\phi') - F_{1-4} \left(\sin(\phi') - \cos(\phi') \tan(e_{\phi'}) \right) = \tau_{\psi} / 2l \\
I \quad & 2F_{1,2} - F_{1-4} \left(1 + \tan(\phi') \tan(e_{\phi'}) \right) = \tau_{\phi} / l \cos(\phi') \\
II \quad & 2F_{1,2} - F_{1-4} \left(1 - \frac{\tan(e_{\phi'})}{\tan(\phi')} \right) = \tau_{\psi} / 2l \sin(\phi') \\
I - II = & -F_{1-4} \tan(e_{\phi'}) \left(\tan(\phi') + \frac{1}{\tan(\phi')} \right) = \tau_{\phi} / l \cos(\phi') - \tau_{\psi} / 2l \sin(\phi') \\
e_{\phi'} = & \arctan \left(\frac{\tau_{\phi} / l \cos(\phi') - \tau_{\psi} / 2l \sin(\phi')}{-F_{1-4} \left(\tan(\phi') + \frac{1}{\tan(\phi')} \right)} \right) \\
F_{1,2} = & \frac{\tau_{\phi} / l \cos(\phi') + F_{1-4} \left(1 + \tan(\phi') \tan(e_{\phi'}) \right)}{2}
\end{aligned} \tag{177}$$

באופן דומה נמצא את שני הנעלמים הנוספים,

$$\begin{aligned}
e_{\theta'} = & \arctan \left(\frac{\tau_{\theta} / l \cos(\theta') - \tau_{\psi} / 2l \sin(\theta')}{-F_{5-8} \left(\tan(\theta') + \frac{1}{\tan(\theta')} \right)} \right) \\
F_{5,6} = & \frac{\tau_{\theta} / l \cos(\theta') + F_{5-8} \left(1 + \tan(\theta') \tan(e_{\theta'}) \right)}{2}
\end{aligned} \tag{178}$$

בכדי להשלים את התמונה יש לקבוע את הכוח שמפעיל כל מרחף בכל צמד מדחפים השייך לנדנדה. חלוקת כוח זו נקבעת בהתאם למומנט שצמד הכוחות נדרש להפעיל על הנדנדה. נקבע את הכוחות בהתאם למשוואה (119).

$$\begin{aligned}
F_1 + F_2 = F_{12} \\
d(F_1 - F_2) = \tau_{\phi'} \Rightarrow F_1 = \frac{F_{12} + \tau_{\phi'} / d}{2}
\end{aligned} \tag{179}$$

באותו אופן נקבעים גם שאר כוחות הדחף בשאר הנדנדות של כלי הטייס.

נציג כעת מספר סימולציות המדגימות את יכולות הטיסה של כלי הטייס עם ארבע נדנדות. הערכים של מומנטי האינרציה והמסה הם כמו אלה ששימשו בסימולציה של בקר היציבות.

בנוסף נקבע את המרחק בין מרכז הנדנדות למרכז המסה $l = 0.5[m]$, ואת המרחק בין כל מדחף למרכז הנדנדה $d = 0.2[m]$.

הקבועים שמערכת הבקרה הם,

$$c_1 = \begin{bmatrix} 19I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 35I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad c_{\xi 1} = 21I_{3 \times 3}$$

$$c_2 = \begin{bmatrix} 0.1I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 10I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad c_{\xi 2} = 0.3I_{3 \times 3}$$

$$k_\sigma = \begin{bmatrix} 0.1I_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & I_{4 \times 4} \end{bmatrix} \quad k_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

תנאי ההתחלה בכל דרגות החופש הם אפס, ואותות הייחוס הם,

$$\phi_d = 1.2 \sin(t) [rad]$$

$$\theta_d = 0.2 [rad]$$

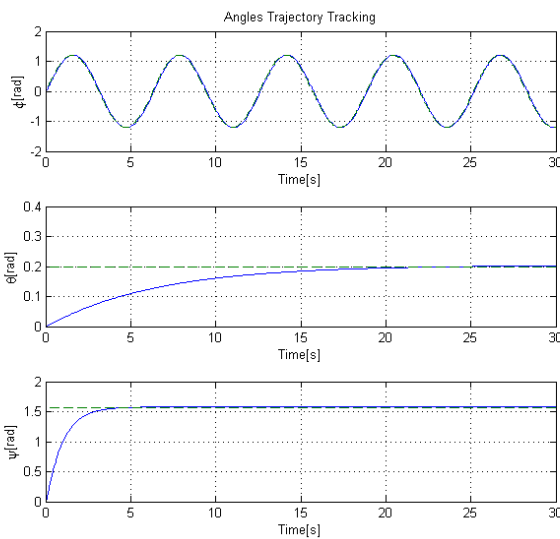
$$\psi_d = \frac{\pi}{2} [rad] \quad (180)$$

$$x_d = 10 [m]$$

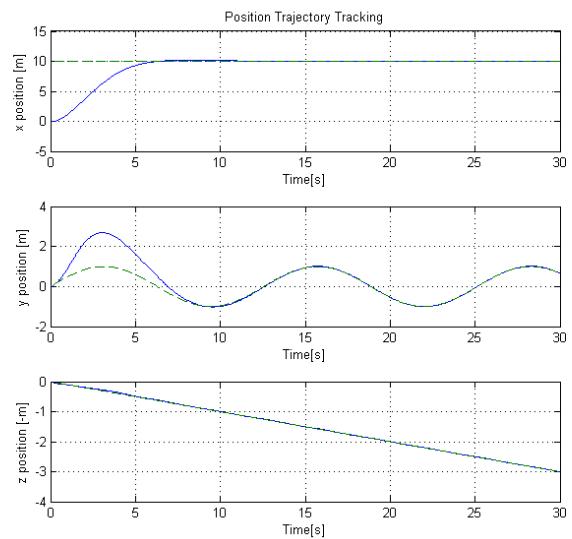
$$y_d = \sin(t/2) [rad]$$

$$z_d = -t/10$$

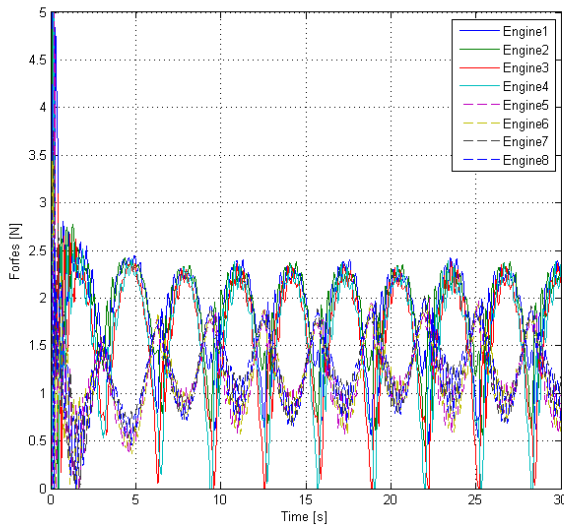
תוצאות הסימולציה הן,



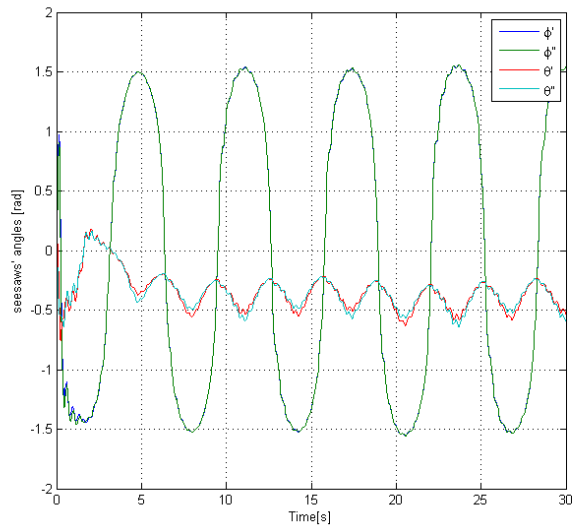
1b



1a



1d



1c

איור 7.3 : בגרף 1a רואים את משתני המצב של המקום, הקו הכחול מייצג את המקום בפועל ואילו הקו הירוק המקווקו את המקום הרצוי. בגרף 1b רואים את משתני המצב הזוויתי של הגוף, הקו הכחול מראה את הזוויות בפועל ואילו הקו הירוק המקווקו את הזוויות הרצויות. בגרף 1d רואים את שמונה כוחות הדחף ובגרף 1c את זוויות הנדנדה.

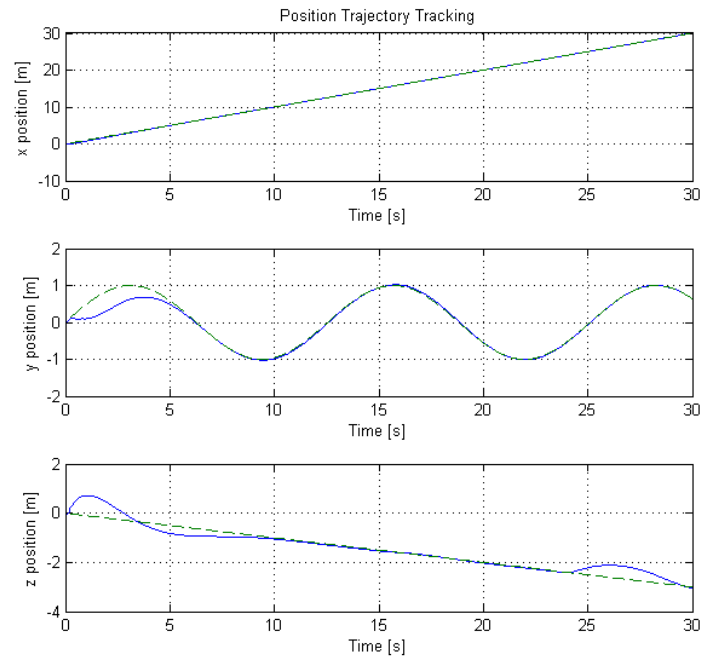
מאיור 7.3 ניתן לראות שכלי הטייס עוקב בצורה טובה אחרי אותות הייחוס בכל ששת דרגות החופש. כלי הטייס נדרש להימצא במצב זוויתי שחלקו קבוע בזמן וחלקו משתנה בזמן אך הדבר אינו מפריע לצורך טיסה לאורך המסלול המרחבי הרצוי (שגם בו קיימת תלות בזמן). ניתן לראות כי הזוויות של כל זוג נדנדות מקביל משתנות פחות או יותר באופן דומה על אף שמוגדרת שגיאה בניהן. השגיאה בין זוגות הנדנדות אינה גדולה מכיוון שהיא תלויה במומנטים הדרושים להזזת הגוף, מומנטים אלו אינם גדולים ופועלים לזמן קצר בלבד.

הסימולציה הבאה מדגימה טיסה בתנאים קיצוניים. נבחן אם כלי הטיס המיוחד יכול לטוס לאורך מסלול מרחבי רצוי, כאשר המצב הזוויתי הרצוי של כלי הטייס כולל זוויות גדולות. נדרוש מכלי הטיס להתייבב סביב $\pi/2$ (בזווית הגלגול), כך שהגוף הינו מאונך. לאחר מכן נשנה את הזווית הרצוי ל- π , כך שלמעשה כלי הטיס טס לאורך המסלול הרצוי כאשר הגוף הפוך. המסלול והמצב הזוויתי הרצויים הם,

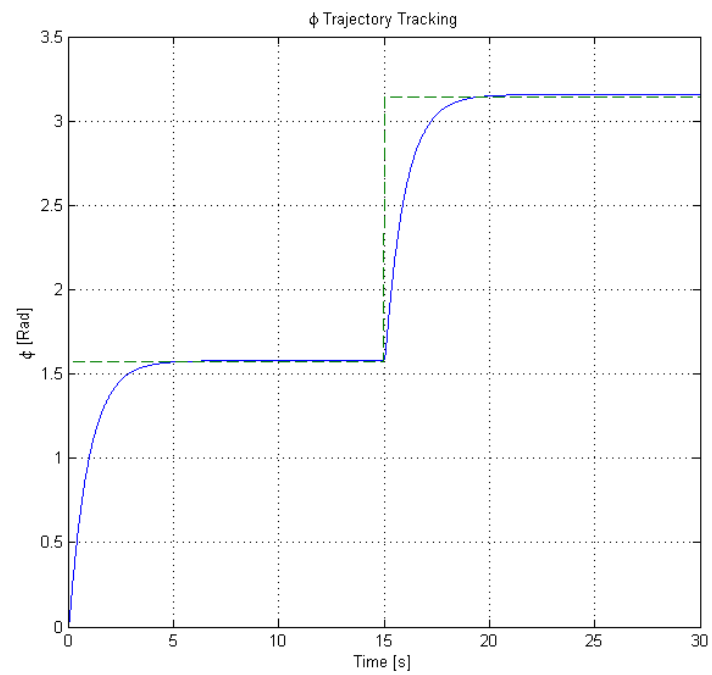
$$\begin{aligned}\phi_d &= \pi/2(u(t) + u(t-15))[\text{rad}] \\ x_d &= t[m] \\ y_d &= \sin(t/2)[\text{rad}] \\ z_d &= -t/10\end{aligned}\tag{181}$$

כאשר u הינה פונקציית מדרגה.

הזוויות הנוספות של גוף הרחפן נדרשות להישאר אפס.
תוצאות הסימולציה הן,



A



B

איור 7.4: A - טיסה לאורך מסלול מרחבי רצוי. בכחול (קו מלא) המקום של כלי הטייס ובירוק (מקווקו) המקום הרצוי. איור B - המצב הזוויתי של כלי הטייס, כאשר הזווית הרצוי משתנה באמצע הסימולציה. בכחול (קו מלא) המצב הזוויתי בפועל ובירוק (מקווקו) המצב הזוויתי הרצוי.

באיור 7.4 ניתן לראות כי כלי הטיס יכול לבצע טיסה לאורך המסלול הדרוש, גם כאשר גוף כלי נוטה בתשעים מעלות (מצב בו רחפן פשוט אינו יכול לטוס). בנוסף ניתן לראות כי ניתן לבצע טיסה לאורך מסלול רצוי, גם כאשר גוף הכלי הפוך לחלוטין, למעשה מצב בו הנדנדות מתהפכות ביחס לגוף וכאשר הן הפוכות הטיסה דומה לטיסה כאשר כלי הטיס אינו הפוך.

הערה- תכנון מערכת הבקרה כלל שימוש בפונקציה \arcsin , התמונה של פונקציה זו הינן זוויות בתחום $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. לצורך שליטה בכלי הטיס יש צורך להזיז את הנדנדות בתחום רחב יותר. כדי לשמור על רציפות, הפונקציה הורחבה לכל התחום $[-\infty, \infty]$.

7.2. Three-Seesaw Hexa-copter

בתת פרק זה נציג בקצרה את הרחבת הרעיון של כלי טייס מרובה נדנדות לכלי מסוג Hexa-copter, כלי טייס עם שישה מדחפים. גם כאן תוספת הנדנדות מאפשרת לכלי הטייס דרגות חופש נוספות אשר ניתנות לבקרה באופן בלתי תלוי. סידור המדחפים נעשה כך שכל מדחף על נדנדה מסוימת מסתובב בכיוון הפוך ביחס למדחף השני על אותה הנדנדה. מטריצות הסיבוב המקשרות בין מערכות הצירים הצמודות לנדנדות ובין מערכת הצירים של הגוף הן,

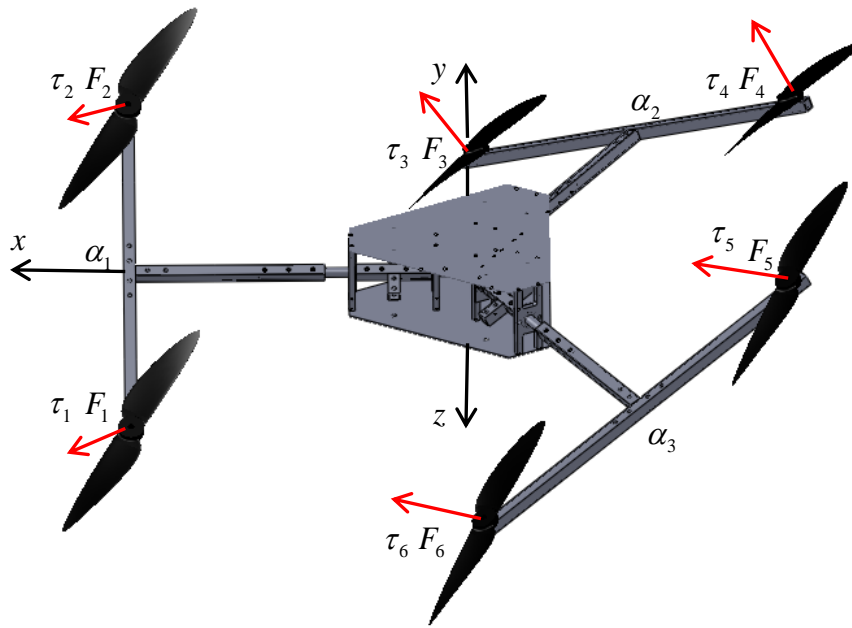
$${}^bR_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{bmatrix}$$

$${}^bR_{\alpha_3} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\cos(\alpha_3) & \frac{1}{2}\sin(\alpha_3) \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha_3) & -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha_3) \\ 0 & \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) \end{bmatrix} \quad {}^bR_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\cos(\alpha_2) & \frac{1}{2}\sin(\alpha_2) \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\alpha_2) & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha_2) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) \end{bmatrix} \quad (182)$$

נציג את הכוחות הפועלים על הגוף במערכת הגוף,

$$\begin{aligned} F_{tx} &= (-F_{3,4} \sin(\alpha_2) + F_{5,6} \sin(\alpha_3)) \sin(\pi/3) \\ F_{ty} &= F_{1,2} \sin(\alpha_1) - (F_{3,4} \sin(\alpha_2) + F_{5,6} \sin(\alpha_3)) \cos(\pi/3) \\ F_{tz} &= -F_{1,2} \cos(\alpha_1) - F_{3,4} \cos(\alpha_2) - F_{5,6} \cos(\alpha_3) \end{aligned} \quad (183)$$

הכוחות $F_{1,2}, F_{3,4}, F_{5,6}$ הן הכוחות השקולים שמפעילים המנועים בכל נדנדה, הזוויות $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ הם הזוויות של הנדנדות ביחס לגוף.



איור 7.5 : 3 seesaws hexacopter

המומנטים שפועלים על הגוף והמומנטים שפועלים על הנדנדות הם,

$$\begin{aligned}
 \tau_{\phi} &= l \sin(\pi / 3) \left(-F_{3,4} \cos(\alpha_2) + F_{5,6} \cos(\alpha_3) \right) \\
 \tau_{\theta} &= l F_{1,2} \cos(\alpha_1) - l \cos(\pi / 3) \left(F_{3,4} \cos(\alpha_2) + F_{5,6} \cos(\alpha_3) \right) \\
 \tau_{\psi} &= l \left(F_{1,2} \sin(\alpha_1) + F_{3,4} \sin(\alpha_2) + F_{5,6} \sin(\alpha_3) \right) \\
 \tau_{\alpha_1} &= d(F_1 - F_2) \\
 \tau_{\alpha_2} &= d(F_3 - F_4) \\
 \tau_{\alpha_3} &= d(F_5 - F_6)
 \end{aligned} \tag{184}$$

בכדי שנוכל לכתוב את משוואות התנועה אנו צריכים למצוא את היעקוביאן הרוטציוני של הנדנדות, כך נוכל לבטא את המהירות הזוויתית של הנדנדות בעזרת הנגזרות של זוויות אוילר ונגזרות של זוויות הנדנדות. נציג את הקשר בין המהירות הזוויתית לנגזרות של הזוויות,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{\alpha_1} = J_{\Omega\alpha_1} \dot{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi + \alpha_1) & \cos(\theta) \sin(\phi + \alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\phi + \alpha_1) & \cos(\theta) \cos(\phi + \alpha_1) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{\alpha_2} = J_{\Omega\alpha_2} \dot{\sigma} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}(-\cos(\alpha_2)\cos(\phi) + \sin(\alpha_2)\sin(\phi)) & \frac{1}{2}\cos(\theta)(\cos(\alpha_2)\sin(\phi) + \sin(\alpha_2)\cos(\phi)) + \sin(\theta)(\cos(\alpha_2)\cos(\phi) - \sin(\alpha_2)\sin(\phi)) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin(\alpha_2)\sin(\phi) - \cos(\alpha_2)\cos(\phi)) & \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos(\alpha_2)\sin(\phi) + \sin(\alpha_2)\cos(\phi)) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_2)\cos(\phi) + \cos(\alpha_2)\sin(\phi) & -\frac{1}{2}\sin(\theta)(\cos(\alpha_2)\sin(\phi) + \sin(\alpha_2)\cos(\phi)) + \cos(\theta)(\cos(\alpha_2)\cos(\phi) - \sin(\alpha_2)\sin(\phi)) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{\alpha_3} = J_{\Omega\alpha_3} \dot{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}(-\cos(\alpha_3)\cos(\phi) + \sin(\alpha_3)\sin(\phi)) & \frac{1}{2}\cos(\theta)(\cos(\alpha_3)\sin(\phi) + \sin(\alpha_3)\cos(\phi)) + \sin(\theta)(\cos(\alpha_3)\cos(\phi) - \sin(\alpha_3)\sin(\phi)) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}(\sin(\alpha_3)\sin(\phi) - \cos(\alpha_3)\cos(\phi)) & -\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos(\alpha_3)\sin(\phi) + \sin(\alpha_3)\cos(\phi)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_3)\cos(\phi) + \cos(\alpha_3)\sin(\phi) & -\frac{1}{2}\sin(\theta)(\cos(\alpha_3)\sin(\phi) + \sin(\alpha_3)\cos(\phi)) + \cos(\theta)(\cos(\alpha_3)\cos(\phi) - \sin(\alpha_3)\sin(\phi)) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix}$$

משוואות התנועה של כלי הטייס מפותחות בצורה דומה למשוואות שפותחו לכלי טייס עם ארבע נדנדות המוצגות ב- (127-144). המשוואות שהתקבלות הן,

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \frac{1}{m} R \begin{bmatrix} F_{tx} \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix} \quad (186)$$

$$\ddot{\sigma} = D^{-1}(\sigma) [\tau_\sigma + C(\sigma, \dot{\sigma}) \dot{\sigma}]$$

כאשר $\sigma = [\phi \ \theta \ \psi \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ המטריצה $D \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ מכילה את מומנטי האינרציה של הגוף

$$\text{והנדנדות ואת היעקוביאן הרוטציוני. } \dot{C}(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} [\dot{\sigma}^T D(\sigma)] - \dot{D}(\sigma).$$

כעת נבדוק כמה מדרגות החופש של הגוף הן בלתי תלויות. נציג את משוואות (181,182) בצורה מטריצית כתלות באותות הבקרה. משוואת הכוחות היא,

$$\begin{bmatrix} F_{tx} \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\gamma_1 \sin(\alpha_2) \sin(\pi/3) & -\gamma_1 \sin(\alpha_2) \sin(\pi/3) & \gamma_1 \sin(\alpha_3) \sin(\pi/3) & \gamma_1 \sin(\alpha_3) \sin(\pi/3) \\ \gamma_1 \sin(\alpha_1) & \gamma_1 \sin(\alpha_1) & -\gamma_1 \sin(\alpha_2) \cos(\pi/3) & -\gamma_1 \sin(\alpha_2) \cos(\pi/3) & -\gamma_1 \sin(\alpha_3) \cos(\pi/3) & -\gamma_1 \sin(\alpha_3) \cos(\pi/3) \\ -\gamma_1 \cos(\alpha_1) & -\gamma_1 \cos(\alpha_1) & -\gamma_1 \cos(\alpha_2) & -\gamma_1 \cos(\alpha_2) & -\gamma_1 \cos(\alpha_3) & -\gamma_1 \cos(\alpha_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \\ \omega_5^2 \\ \omega_6^2 \end{bmatrix} \quad (187)$$

משוואת המומנטים היא,

$$\begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \\ \tau_{\alpha_1} \\ \tau_{\alpha_2} \\ \tau_{\alpha_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l\gamma_1 \sin(\pi/3) \cos(\alpha_2) & -l\gamma_1 \sin(\pi/3) \cos(\alpha_2) & l\gamma_1 \sin(\pi/3) \cos(\alpha_3) & l\gamma_1 \sin(\pi/3) \cos(\alpha_3) \\ l\gamma_1 \cos(\alpha_1) & l\gamma_1 \cos(\alpha_1) & -l\gamma_1 \cos(\alpha_2) \cos(\pi/3) & -l\gamma_1 \cos(\alpha_2) \cos(\pi/3) & -l\gamma_1 \cos(\alpha_3) \cos(\pi/3) & -l\gamma_1 \cos(\alpha_3) \cos(\pi/3) \\ l\gamma_1 \sin(\alpha_1) & l\gamma_1 \sin(\alpha_1) & l\gamma_1 \sin(\alpha_2) & l\gamma_1 \sin(\alpha_2) & l\gamma_1 \sin(\alpha_3) & l\gamma_1 \sin(\alpha_3) \\ d\gamma_1 & -d\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\gamma_1 & -d\gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d\gamma_1 & -d\gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \\ \omega_5^2 \\ \omega_6^2 \end{bmatrix} \quad (188)$$

נציב את משוואות (186,187) במשוואות התנועה (185), ונבודד את מטריצת המקדמים של הכוחות החיצוניים במשוואה. נבדוק את המשוואות עבור דרגות החופש אותן נרצה לבקר (המקום והמצב הזוויתי של הגוף). מטריצת המקדמים תלויה בזוויות של הנדנדות ובזוויות של הגוף. בחינת המטריצה מראה כי כאשר זוויות הנדנדות נקבעות ע"י הבקר, דרגת מטריצת המקדמים של הכוחות החיצוניים היא 6, כלומר ניתן לבקר את כל דרגות החופש באופן בלתי תלוי. עבור זוויות מסוימות של הנדנדות דרגת המטריצה קטנה אך מכיוון שהבקר הוא שקובע את זוויות הנדנדות ניתן לצאת ממצבים אלו ולבקר את כל דרגות החופש.

7.2.1 מערכת הבקרה

מערכת הבקרה של כלי הטייס עם שלוש נדנדות מתחלקת גם כן לבקר יציבות (של המצב הזוויתי) ולבקר מסלול. עבור כלי טייס עם שלוש נדנדות ישנן שש זוויות שיש לבקר, שלושת זוויות אוילר של הגוף, ושלושת הזוויות של הנדנדות, לכן $\sigma = [\phi \ \theta \ \psi \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T$. בדומה לכלי הטייס עם ארבע נדנדות המומנטים הדרושים בכדי לסובב את כלי הטייס למצב הזוויתי הרצוי, כפי שדורשת מערכת הבקרה הם,

$$\tau_\sigma = D(\sigma) \{ \ddot{\sigma}_d + k_p e_\sigma + k_D \dot{e}_\sigma + k_I \chi_\sigma \} - C(\sigma, \dot{\sigma}) \dot{\sigma} \quad (189)$$

כאשר $C_1, C_2, k_\sigma \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ המטריצות, $k_p = I_{6 \times 6} + k_\sigma + c_1 c_2$, $k_D = c_1 + c_2$, $k_I = c_2 k_\sigma$ הן מטריצות מוגדרות

$$\tau_\sigma = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi \ \tau_{\alpha_1} \ \tau_{\alpha_2} \ \tau_{\alpha_3}]^T, \text{ חיובית ווקטור המומנטים הוא,}$$

בקר המסלול קובע את הכוחות במערכת הגוף הדרושים בכדי לאפשר טיסה לאורך מסלול רצוי,

$$\begin{bmatrix} F_{tx} \\ F_{ty} \\ F_{tz} \end{bmatrix} = R^T \left[m \left(\ddot{\xi}_d + k_{\xi P} e_\xi + k_{\xi D} \dot{e}_\xi + k_{\xi I} \chi_\xi - g e_3 \right) \right] \quad (190)$$

כאשר $C_{\xi 1}, C_{\xi 2}, k_\xi \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המטריצות, $k_{\xi P} = I_{3 \times 3} + k_\xi + c_{\xi 1} C_{\xi 2}$, $k_{\xi D} = c_{\xi 1} + c_{\xi 2}$, $k_{\xi I} = c_{\xi 2} k_\xi$ הן

מטריצות מוגדרות חיוביות.

משוואה (189) מספקת את המומנטים הדרושים, ומשוואה (190) מספקת את הכוחות הדרושים במערכת הגוף. הצבת גדלים אלו במשוואות (183,184) יוצרת מערכת משוואות עם שישה נעלמים. מערכת המשוואות כוללת את שלוש המשוואות המופיעות ב- (183) ואת שלוש המשוואות הראשונות המופיעות ב- (184),

$$\begin{aligned}
I \quad & F_{tx} = (-F_{3,4} \sin(\alpha_2) + F_{5,6} \sin(\alpha_3)) \sin(\pi/3) \\
II \quad & F_{ty} = F_{1,2} \sin(\alpha_1) - (F_{3,4} \sin(\alpha_2) + F_{5,6} \sin(\alpha_3)) \cos(\pi/3) \\
III \quad & F_{tz} = -F_{1,2} \cos(\alpha_1) - F_{3,4} \cos(\alpha_2) - F_{5,6} \cos(\alpha_3) \\
IV \quad & \tau_\phi = l \sin(\pi/3) (-F_{3,4} \cos(\alpha_2) + F_{5,6} \cos(\alpha_3)) \\
V \quad & \tau_\theta = l F_{1,2} \cos(\alpha_1) - l \cos(\pi/3) (F_{3,4} \cos(\alpha_2) + F_{5,6} \cos(\alpha_3)) \\
VI \quad & \tau_\psi = l (F_{1,2} \sin(\alpha_1) + F_{3,4} \sin(\alpha_2) + F_{5,6} \sin(\alpha_3))
\end{aligned} \tag{191}$$

הנעלמים הם, $F_{1,2}$, $F_{3,4}$, $F_{5,6}$, α_1 , α_2 , α_3 . מכיוון שקיימים במערכת רק שישה מדחפים ואנו רוצים לבקר שש דרגות חופש באופן בלתי תלוי, לא קיימת יתירות במערכת ואין באפשרותנו לבחור שרירותית את אחד המשתנים. נציג עכשיו את הפתרון של מערכת המשוואות. נמצא את הביטוי $F_{1,2} \sin(\alpha_1)$ מתוך משוואות (II,VI) ואת הביטוי $F_{1,2} \cos(\alpha_1)$ מתוך משוואות (III,V):

$$\begin{aligned}
F_{1,2} \sin(\alpha_1) &= \frac{\frac{\tau_\psi}{2} + l F_{ty}}{1.5} \\
F_{1,2} \cos(\alpha_1) &= \frac{\tau_\theta - \frac{l F_{tz}}{2}}{1.5l}
\end{aligned} \tag{192}$$

חלוקה של המשוואות ב- (192) תאפשר חישוב הזווית α_1 ,

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{l (\tau_\psi + 2l F_{ty})}{2\tau_\theta - l F_{tz}} \right) \tag{193}$$

לחישוב הזוויות ברביע הנכון נשתמש בפונקציה atan2 במקום בפונקציה arctan. כעת, בכדי לחשב את $F_{1,2}$ ניתן להציב את α_1 באחת מהמשוואות ב- (192). מכיוון שהמשוואות הן סינגולריות עבור זוויות שונות של α_1 , נבחר את המשוואה ממנה מתקבל פתרון ממשי. כעת שמצאנו את $F_{1,2}$, α_1 , נבודד מתוך משוואה VI את הביטוי $F_{5,6} \sin(\alpha_3)$ ונציב במשוואה I וכן נבודד ממשוואה III את הביטוי $F_{5,6} \cos(\alpha_3)$ ונציב במשוואה IV. נקבל את הביטויים הבאים,

$$\begin{aligned}
F_{3,4} \sin(\alpha_2) &= \frac{1}{2} \left(\frac{-2F_{tx}}{\sqrt{3}} + \frac{\tau_\psi}{l} - F_{1,2} \sin(\alpha_1) \right) \\
F_{3,4} \cos(\alpha_2) &= -\frac{2\tau_\phi}{l\sqrt{3}} - F_{tz} - F_{1,2} \cos(\alpha_1)
\end{aligned} \tag{194}$$

מחלוקה של המשוואות ב- (194) מתקבל הביטוי עבור הזווית α_2 ,

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{-2F_{tx}}{\sqrt{3}} + \frac{\tau_\psi}{l} - F_{1,2} \sin(\alpha_1)}{\frac{-2\tau_\phi}{\sqrt{3}} - F_{tz} - F_{1,2} \cos(\alpha_1)} \right) \quad (195)$$

לצורך חישוב הכוח $F_{3,4}$ נציב את הזווית ממשוואה (195) באחת מהמשוואות ב- (194). לא ניתן לפתור את שתי המשוואות עבור ערכים שונים של α_2 , לכן הן מגבות אחת את השנייה. לבסוף נציב את הערכים של $F_{3,4}, \alpha_2$ במשוואות (III, VI) ונקבל את הביטויים הבאים,

$$F_{5,6} \sin(\alpha_3) = \frac{\tau_\psi}{l} - F_{1,2} \sin(\alpha_1) - F_{3,4} \sin(\alpha_2) \quad (196)$$

$$F_{5,6} \cos(\alpha_3) = -F_{tz} - F_{1,2} \cos(\alpha_1) - F_{3,4} \cos(\alpha_2)$$

נחלק את המשוואות ב- (196) ונקבל את הזווית α_3 ,

$$\alpha_3 = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\tau_\psi}{l} - F_{1,2} \sin(\alpha_1) - F_{3,4} \sin(\alpha_2)}{-F_{tz} - F_{1,2} \cos(\alpha_1) - F_{3,4} \cos(\alpha_2)} \right) \quad (197)$$

נציב את הזווית שמצאנו במשוואה (197) לאחת מהמשוואות ב- (196) ונקבל את הכוח $F_{5,6}$.

8. סיכום ומחקר עתידי.

8.1. סיכום

פרויקט זה עוסק בכלי טייס מרחפים ייחודיים המאפשרים בקרה של דרגות חופש נוספות ביחס לכלים סטנדרטיים. החלק הראשון של העבודה עוסק בכלי טייס עם נדנדה יחידה ומהווה בסיס לפיתוח כלי טייס נוספים. סקר הספרות המוצג מראה מגוון כלי טייס קיימים עם אפשרות לבקרה של דרגות חופש נוספות אך בניגוד לכלי הטיס המוצגים כאן, הם אינם יעילים מבחינה אנרגטית (כי כוחות דחף פועלים אחד נגד השני באופן מתמיד) או שהם מאפשרים הטיה של כוח הדחף ע"י מנועי סרוו ייעודיים שאינם תורמים כוח דחף (אך מוסיפים משקל). יחד עם הצגת כלי הטיס הייחודי (עם נדנדה יחידה) מוצגים גם המודל הדינמי והקינמטי שלו ואשר על בסיסם פותחו חוגי הבקרה. חוגי הבקרה המוצגים מתבססים על שיטת Integral Backstepping, וביצועיהם נבחנו בסימולציות בתוכנת MATLAB/Simulink. עבור כלי טייס זה נמצא כי קיים שוני בין משוואות התנועה המתקבלות מתוך גישות פיתוח שונות. בעבודה זו בחרנו את המודל המתקבל בגישת אוילר-לגרנז' לצורך תכנון מערכות הבקרה ולצורך ייצוג כלי הטיס בסימולציה. הראינו כי מערכת הבקרה מייצבת את כלי הטיס סביב מצב זוויתי רצוי וגם מאפשרת טיסה לאורך מסלול רצוי. בכלי הטיס המיוחד קיימת דרגת חופש נוספת שניתן לבקר באופן בלתי תלוי. הראנו כי ניתן לאפשר טיסה לאורך מסלול רצוי יחד עם זווית גלגול רצויה, וגם הצגנו אופן טיסה ייחודי (לצורך טיסה במסלול רצוי) בו כלי הטיס אופקי במשך כל זמן הטיסה. לבסוף נבחנו היעילות האנרגטית והתגלה שחלוקת הכוח לכיוונים שונים (כפי שאפשרית בכלי המיוחד) אינה תורמת ליעילות האנרגטית. יכולות הטיסה המיוחדות של כלי הטיס עם נדנדה יחידה מוצגות הן באמצעות סימולציות והן באמצעות ניסויי טיסה.

על בסיס כלי הטיס עם נדנדה יחידה פותחו שני כלי טייס נוספים, ה-Octo-copter עם ארבע נדנדות ו-Hexa-copter עם שלוש נדנדות. כלי טייס אלו מאפשרים בקרה של שש דרגות החופש של הגוף (מקום ומצב זוויתי) באופן בלתי תלוי. בעבודה הוצגו הפיתוחים של משוואות התנועה של כלי הטיס וגם פיתוח מערכות בקרה מתאימות. עבור כלי הטיס עם ארבע נדנדות הוצגו גם סימולציות המראות את אפשרויות הטיסה המגוונות שמאפשר כלי טייס זה, לדוגמא, טיסה עם גוף מוטה בתשעים מעלות (נוטה על צידו) וטיסה עם גוף הפוך.

8.2. המלצות למחקר עתידי

פיתוח פלטפורמות שונות לכלי טייס מרחפים נחקר במקומות רבים וכולל גם פלטפורמות עם דרגות חופש מבוקרות נוספות. אולם ההשפעות של הוספת דרגות החופש לא נחקרה באופן מעמיק. בהמלצות למחקר עתידי נציג מספר נושאים למחקר עתידי בהקשר של כלי טייס עם נדנדות.

הוספת נדנדות לכלי טייס הינו נושא חדשני אשר הוצג בעבודה זו אולם ניתן להוסיף נדנדות לכלי טייס במגוון צורות רבות, גם כאלה שלא הוצגו בעבודה זו. לכן מומלץ לחקור תצורות נוספות לחיבור נדנדות בכלי טייס מרחפים ואת המאפיינים של כל תצורה. ייתכן וע"י תצורות מסוימות יהיה ניתן להשיג שליטה טובה יותר בתנועת כלי הטיס או שיהיה ניתן להשיג שליטה דומה לזו שהוצגה כאן בעבודה אך עם מספר קטן יותר של נדנדות.

נושא נוסף שדורש מחקר מעמיק כולל את ההיבטים האנרגטיים שקשורים בהוספת נדנדות (נושא זה נחקר בעבודה זו רק באופן חלקי עבור כלי עם נדנדה יחידה). הנושא מתחלק לשני היבטים, ההיבט הראשון הינו היתרון האנרגטי והמכני של כלי טייס עם נדנדות על פני כלי טייס דומים אך עם מנועי סרוו להטיית המדחפים. ההיבט השני הינו היתרון האנרגטי שעשוי להיות לכלי טיס עם נדנדות על פני רחפנים רגילים. בהיבט זה ניתן לחקור את יעילות המדחפים כאשר פועלים במשטר של רוח מציפה (מכיוון שבכלי טיס מרובה נדנדות ניתן לכוון חלק מהמדחפים כך שכוח הדחף שלהם יפעל בכיוון התנועה של כלי הטיס). נושא מחקר נוסף שרצוי להעמיק בו יכול לבדוק כיצד לנצל באופן מיטבי את היתירות במערכת הבקרה ואת יכולות הטיסה המיוחדות של כלי טייס עם נדנדות. היבט אחד של ניצול היתירות יכול להיות קשור בשרידות של כלי הטיס ובאפשרות להמשיך לפעול (אולי באופן חלקי) גם במצב תקלה.

רשימת מקורות.

- [1] אלפרט ל. שני ר. (2012) "בקרה של כלי טיס לא מאויש – שימוש ב – DGPS", פרויקט שנה ד, המחלקה להנדסת מכונות, אוניברסיטת בן גוריון.
- [2] דויד א. (2011) "בקרת מבנה לקבוצת כלי טייס לא מאוישים", עבודת תזה, אוניברסיטת בן גוריון.
- [3] נקש ע. אליה ר. (2013) "תכנון ובנייה של כלי טייס מרחף", פרויקט שנה ד, המחלקה להנדסת מכונות, אוניברסיטת בן גוריון.
- [4] Artale V., Milazzo C.L.R and Ricciardello A. (2013) " Mathematical Modeling of Hexacopter" Applied Mathematical Sciences, Vol. 7
- [5] Bouabdallah S.(2007), "Design and control of quadrotors with application to autonomous Flying". PhD thesis, Lausanne, EPFL.
- [6] Catler M. J. (2012) "Design and Control of an Autonomous Variable-Pitch Quadrotor Helicopter". Master thesis, massachusetts institute of technology.
- [7] Czyba R. Szafranski G. Janik M. Pampuch K. and Hecel M. " Development of Co-Axial Y6-Rotor UAV – Design, Mathematical Modeling, Rapid Prototyping and Experimental Validation", International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS) Denver. Marriott Tech Center. 2015.
- [8] Driessens s, Pounds p. (2013) "Towards A More Efficient Quadrotor Configuration". 2013, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems.
- [9] Escareno. J, Sanchez. A, Garcia. O, and Lozano. R, "Triple Tilting Rotor mini-UAV: Modeling and Embedded Control of the Attitude", in 2008 American Control Conference, 2008.
- [10] Fatih S. and Erdinç A. " Modeling and Control of a Novel Tilt – Roll Rotor Quadrotor UAV", International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2013.
- [11] khalil Hassan k. "Non Linear systems". Prentice-Hall, 2001.
- [12] Hofmann G. Rajnarayan D.G., Waslander S.L., Dostal D., Jang J.S. and Tomlin C.J. (2004), " The stanford testbed of autonomous rotorcraft for multi agent control (starmac)". 23rd Digital Avionics Systems Conference.
- [13] Kanellakopoulos I. and Krein P. (1993), " Integral-action nonlinear control of induction motors", 12th IFAC World Congress.
- [14] Kendoul. F, Fantoni. I, and Lozano. R, "Modeling and control of a small autonomous aircraft having two tilting rotors," IEEE Trans. On Robotics, vol. 22, no. 6, pp. 1297–1302, 2006.

- [15] Kenso N. (2007) "Prospect and Recent Research & Development for civil use autonomous Unmanned aircraft as UAV and MAV", Journal of System Design and Dynamics, Vo 1 ,No 2.
- [16] Langkamp. D, Roberts. G, Scillitoe. A, Lunnon. I, Llopis-Pascual. A, Zamecnik. J, Proctor. S, Rodriguez-Frias. M, Turner. M, Lanzon. A and Crowther. W, "An engineering development of novel hexrotor vehicle for 3D applications", in Proceedings of the International Micro Air Vehicles conference summer edition, 2011, pp. 32-39.
- [17] Leishman J. G. (2000) " A History of Helicopter Flight"
<http://terpconnect.umd.edu/~leishman/Aero/history.html>
- [18] Leishman R. Macdonald J. McLain T. and Beard R. " Relative Navigation and Control of a Hexacopter", IEEE International Conference on Robotics and Automation River Centre, Saint Paul, Minnesota, USA, 2012.
- [19] Long Y. and Cappelleri D.J. "Omnicopter: A Novel Overactuated Micro Aerial Vehicle", Mechanisms and Machine Science Volume 14, Editor: Marco Ceccarelli, springer, 2013.
- [20] Lorenz Ralph D. (2001) "Flight Power Scaling of Airplanes, Airships, and Helicopters: Application to Planetary Exploration". journal of aircraft.
- [21] Meng J.E. Shenghai Y. and Ning W. "Development, Control and Navigation of Octocopter", 10th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA) Hangzhou, China, 2013.
- [22] Ming C. (2003) "Formation and flight control of affordable Quadrotor Unmanned Air vehicle". PhD thesis, The University of British Columbia.
- [23] Nemati. A, and Kumar. M, "Modeling and Control of a Single Axis Tilting Quadcopter" in 2014 American Control Conference, 2014.
- [24] Newcome Laurence R. (2004) "Unmanned Aviation: A Brief History of Unmanned Aerial vehicles", American institute of aeronautics and astronautics.
- [25] Oner. K. T, Cetinsoy. E, Unel. M, Aksit. M. F, Kandemir. I, and Gulez. K, "Dynamic model and control of a new quadrotor unmanned aerial vehicle with tilt-wing mechanism," in Proc. of the 2008 World Academy of Science, Engineering and Technology, 2008, pp. 58–63.
- [26] Ryll M, Bulthoff H.H and Giordano P.R.(2012) "Modeling and Control of a Quadrotor UAV with Tilting Propellers", 2012 IEEE International Conference on Robotics and

Automation.

- [27] Ryll M, Bulthoff H.H and Giordano P.R.(2013) " First Flight Tests for a Quadrotor UAV with Tilting Propellers", 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation.
- [28] Sadraey m. (2011) " Aircraft Performance Analysis", chapter 3, VDM Verlag Dr. Müller.
- [29] Sanchez A, Escareño J, Garcia o. and Lozano R. (2008), " Autonomous Hovering of a Noncyclic Tiltrotor UAV: Modeling, Control and Implementation", 17th World Congress The International Federation of Automatic Control.
- [30] Santhosh L.M. and Chandrashekar T.K., " Anti collision Pentacopter for NDT Applications", ITEC India/IEEE Transportation Electrification Conference India, 2015
- [31] Shafayat H. Ariyan M.K. Pratyai M. Ahmedullah A. Masudul H. Azizul I. and Pran K.S, "Design and Development of an Y4 Copter Control System", 14th International Conference on Modelling and Simulation, 2012.
- [32] U.S Department Of Defense, (2002). "Introduction of the Unmanned Aerial Vehicles (UAVs)" <http://www.defense.gov/specials/uav2002/>
- [33] Waslander Steven L. and Hoffmann Gabriel M. (2005) "Multi-Agent Quadrotor Testbed control Design: Integral Sliding Mode vs. Reinforcement Learning", Intelligent Robots and Systems.
- [34] Pérez-Piñar D. "Attitude control in Mikrokopter quadrotor" bits of understanding, <http://bitsofunderstanding.wordpress.com/2011/08/20/attitude-control-in-mikrokopter-quadrotor/>
- [35] Xavier p. and La Hera M. (2011) " Underactuated Mechanical Systems: Contributions to trajectory planning, analysis, and control". PhD thesis. Umeå University.
- [36] Yaolong Tan, Jie Chang, Hualin Tan, and Jun Hu. (2000), " Integral backstepping control and experimental implentation for motion system", In Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications.

נספחים

נספח 1 – פיתוח משוואות התנועה בכלי טיס עם נדנדה יחידה כאשר הזווית של הנדנדה מוגדרת ביחס לגוף כלי הטייס.

בנספח זה נציג את הפיתוח של משוואות התנועה בשיטת אוילר-לגראנז', כאשר הזווית של הנדנדה מוגדרת ביחס לגוף כלי הטייס ולא ביחס לעולם. המשוואה עבור הקואורדינטות המוכללות η היא,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\eta}} \right) - \frac{dL}{d\eta} = [\tau_\eta + \tau_\alpha] \quad (198)$$

נגזור את L כפי שמופיע במשוואה (22) לפי $\eta, \dot{\eta}$ ונקבל,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\eta}} &= D_f(\eta)\dot{\eta} + D_s(\eta, \alpha)(\dot{\eta} + \dot{\alpha}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\eta}} \right) &= D_f(\eta)\ddot{\eta} + D_s(\eta, \alpha)(\ddot{\eta} + \ddot{\alpha}) + \dot{D}_f(\eta)\dot{\eta} + \dot{D}_s(\eta, \alpha)(\dot{\eta} + \dot{\alpha}) \\ \frac{dL}{d\eta} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\dot{\eta}^T D_f(\eta)\dot{\eta} + (\dot{\eta} + \dot{\alpha})^T D_s(\eta, \alpha)(\dot{\eta} + \dot{\alpha}) \right] \\ D_f(\eta)\ddot{\eta} + D_s(\eta, \alpha)(\ddot{\eta} + \ddot{\alpha}) &= \\ \left\{ \tau_\eta + \tau_\alpha + \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\dot{\eta}^T D_f(\eta)\dot{\eta} + (\dot{\eta} + \dot{\alpha})^T D_s(\eta, \alpha)(\dot{\eta} + \dot{\alpha}) \right] - \dot{D}_f(\eta)\dot{\eta} + \dot{D}_s(\eta, \alpha)(\dot{\eta} + \dot{\alpha}) \right\} \end{aligned} \quad (199)$$

מכיוון ש- τ_α הוא סקלר ו- τ_η הוא וקטור נגדיר $\tau_\alpha = [\tau_\alpha \ 0 \ 0]^T$. המשוואה עבור הקואורדינטה המוכללת α היא,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\alpha}} \right) - \frac{dL}{d\alpha} = [\tau_\alpha] \quad (200)$$

כאשר נגזור את L לפי $\alpha, \dot{\alpha}$ נקבל את המשוואה הסקלרית הבאה, (201)

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\dot{\alpha}} &= 2I_{xs}(\dot{\alpha} + \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin(\theta)) \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\eta}} \right) = I_{xs}\ddot{\alpha} + I_{xs}\ddot{\phi} - I_{xs}\ddot{\psi} \sin(\theta) - I_{xs}\dot{\psi}\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \frac{dL}{d\alpha} &= (I_{ys} - I_{zs})(\cos(2(\alpha + \phi))\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi} - \dot{\theta}^2 \sin(\alpha + \phi)\cos(\alpha + \phi) + \cos^2(\theta)\dot{\psi}^2 \sin(\alpha + \phi)\cos(\alpha + \phi)) \\ \ddot{\alpha} &= \frac{\tau_\alpha}{I_{xs}} - \ddot{\phi} + \ddot{\psi} \sin(\theta) + \frac{1}{I_{xs}} [I_{xs}\dot{\psi}\dot{\theta} \cos(\theta) + \dots \\ &\dots (I_{ys} - I_{zs})(\cos(2(\alpha + \phi))\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\psi} - \dot{\theta}^2 \sin(\alpha + \phi)\cos(\alpha + \phi) + \cos^2(\theta)\dot{\psi}^2 \sin(\alpha + \phi)\cos(\alpha + \phi))] \end{aligned}$$

כאשר, I_{xs}, I_{ys}, I_{zs} הינם איברי האלכסון של טנזור האינרציה I_s .
 מהצבת משוואה (201) במשוואה (199) נקבל את הביטוי עבור $\ddot{\eta}$. את הווקטור המתקבל מהאיבר
 $D_s(\eta, \alpha)(\ddot{\eta} + \ddot{\alpha})$ נפרק למטריצה הכופלת את הנגזרות השניות של זוויות אוילר $D'_s(\eta, \alpha)$, ולווקטור
 איברים שאינם מכילים את זוויות אוילר V_{Ds} . התוצאה המתקבלת היא,

$$\ddot{\eta} = [D_f(\eta) + D'_s(\eta, \alpha)]^{-1} \left\{ \tau_\eta + \tau_\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\dot{\eta}^T D_f(\eta) \dot{\eta} + (\dot{\eta} + \dot{\alpha})^T D_s(\eta, \alpha) (\dot{\eta} + \dot{\alpha}) \right] \dots \right. \\ \left. \dots - \dot{D}_f \dot{\eta} - \dot{D}_s (\dot{\eta} + \dot{\alpha}) - V_{Ds} \right\} \quad (202)$$

כאשר הביטויים של מטריצה $D'_s(\eta, \alpha)$ ושל הווקטור V_{Ds} הם,

$$D'_s(\eta, \alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_s(2,2) & D_s(2,3) \\ 0 & D_s(3,2) & D_s(3,3) - I_{xs} \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (203)$$

$$V_{Ds} = \begin{bmatrix} I_{xs} (\ddot{\alpha}(\text{without } \ddot{\eta})) \\ 0 \\ I_{xs} \sin(\theta) (\ddot{\alpha}(\text{without } \ddot{\eta})) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ddot{\alpha}(\text{without } \ddot{\eta}) = \ddot{\alpha} + \ddot{\phi} - \ddot{\psi} \sin(\theta)$$

כעת, מהצבת הפתרונות של $\ddot{\eta}$ ממשוואה (202) במשוואה (201) נקבל את משוואת התנועה עבור $\ddot{\alpha}$.

נספח 2 – פיתוח משוואות התנועה של כלי עם נדנדה יחידה בעזרת ניוטון-אווילר עם הנחה של זוויות קטנות.

נרשום את משוואות התנועה של ניוטון,

$$\begin{aligned}\sum F &= m\ddot{\xi} + \Omega \times m\dot{\xi} \\ \sum \tau &= I(\dot{\Omega}) + \Omega \times I\Omega\end{aligned}\quad (204)$$

נתמקד בפיתוח זה במשוואות המומנטים.

נציג את המשוואה באופן מפורש,

$$\begin{bmatrix} \tau_\phi + \tau_\beta \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = I_b \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times I_b \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + I_\alpha \begin{bmatrix} \dot{p}_\beta \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_\beta \\ q \\ r \end{bmatrix} \times R_\alpha I_\alpha R_\alpha^T \begin{bmatrix} p_\beta \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (205)$$

אם נניח כי על מנת לנווט את כלי הטייס מספיקות תזוזות קטנות במצב הזוויתי, ניתן להניח כי $\cos(\cdot) = 1, \sin(\cdot) = 0$. תחת הנחה זו, הביטוי המתקבל ב- (6) הופך להיות,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = I_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (206)$$

בנוסף, עם נניח כי גם הזווית של הנדנדה היא זווית קטנה, נקבל כי

$$R_\alpha I_\alpha R_\alpha^T = I_\alpha \quad (207)$$

נתבונן כעת במשוואה הראשונה של סט המשוואות ב- (205) ונניח כי כל הזוויות קטנות, המשוואה המתקבלת היא,

$$I_{xx}\ddot{\phi} + I_{xs}\ddot{\beta} = \tau_\phi + \tau_\beta - (I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi} - (I_{ys} - I_{zs})\dot{\theta}\dot{\psi} \quad (208)$$

כעת נניח כי אין חיכוך כלל בציר הנדנדה וכי המשתנים $\ddot{\phi}$ ו- $\ddot{\beta}$ אינם משפיעים אחד על השני. מכאן נקבל את שתי המשוואות הבאות,

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{I_{xx}} \left[(I_{yy} - I_{zz})\dot{\theta}\dot{\psi} + \tau_\phi \right] \quad (209)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{1}{I_{xs}} \left[(I_{ys} - I_{zs})\dot{\theta}\dot{\psi} + \tau_\beta \right] \quad (210)$$

וכן נקבל את המשוואות,

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{I_{yy} + I_{ys}} \left[(I_{zz} - I_{xx})\dot{\phi}\dot{\psi} + (I_{zs} - I_{xs})\dot{\beta}\dot{\psi} + \tau_\theta \right] \quad (211)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz} + I_{zs}} \left[(I_{xx} - I_{yy})\dot{\theta}\dot{\phi} + (I_{xs} - I_{ys})\dot{\theta}\dot{\beta} + \tau_\psi \right] \quad (212)$$

נספח 3 – בניית המטריצה D עבור כלי טיס עם 4 נדנדות.

נציג כעת פיתוח של המטריצה D המתארת את טנזורי האינרציה של כלי הטיס ושל הנדנדות ואת הקשר בין המהירות הזוויתית לנגזרות של זוויות אוילר על ידי היעקוביאן הרוטציוני. הנוסחה לחישוב המטריצה D מוצגת במשוואה (134), בנספח זה נפרט את כל המרכיבים של המטריצה ונציג את המטריצה באופן מפורש.

נזכור כי היעקוביאן הרוטציוני עבור זווית הנדנדה θ' מוצג במשוואה (113) ואילו היעקוביאן הרוטציוני המורחב מוצג במשוואה (115). באותו אופן נראה כאן את הקשר בין המהירות הזוויתית לנגזרות של זוויות אוילר עבור כל הרכיבים בכלי הטיס (4 נדנדות וגוף הכלי). המהירות הזוויתית של מערכת הגוף תלויה רק בשלושת הנגזרות של זוויות אוילר. היעקוביאן הרוטציוני של מערכת זו הינו,

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \dot{\phi} e_1 + \dot{\theta} [R_x]^T e_2 + \dot{\psi} [R_x]^T [R_y]^T e_3 \quad (213)$$

הצגת משוואה זו על ידי מטריצת היעקוביאן הרוטציוני מבוצעת באופן הבא,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_\Omega \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (214)$$

הרחבת המטריצה המוצגת במשוואה (214) למטריצה הכופלת את הווקטור המלא של נגזרות הזוויות מובילה ל,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}' \\ \dot{\theta}' \\ \dot{\psi}' \end{bmatrix} \quad (215)$$

כעת נציג את המהירות הזוויתית של הנדנדה המסתובבת בזווית ϕ' כתלות בנגזרות של הזוויות. נבנה את היעקוביאן הרוטציוני בצורה הבאה,

$$\Omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \dot{\phi}' e_1 + \dot{\phi} [\hat{b} R_{\phi'}]^T e_1 + \dot{\theta} [\hat{b} R_{\phi'}]^T [R_x]^T e_2 + \dot{\psi} [\hat{b} R_{\phi'}]^T [R_x]^T [R_y]^T e_3 \quad (216)$$

מכיוון שגם הנדנדה וגם זווית אוילר ϕ חולקים ציר משותף, לא נדרשת הזזה של מערכת הצירים כאשר עוברים מסיבוב בזווית ϕ' לסיבוב בזווית ϕ . במשוואה (216) מוצגת ההזזה בזווית ϕ' אך מכפלה של

מטריצה זו בווקטור היחידה e_1 אינה משנה אותו, כלומר $e_1 = e_1 \cdot [{}^b R_{\phi'}]^T$.

היעקוביאן הרוטציוני המתקבל הינו,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) & 1 \\ 0 & \cos(\phi + \phi') & \cos(\theta)\sin(\phi + \phi') & 0 \\ 0 & -\sin(\phi + \phi') & \cos(\theta)\cos(\phi + \phi') & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}' \end{bmatrix} = J_{\Omega\phi'} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}' \end{bmatrix} \quad (217)$$

הרחבת המטריצה המוצגת במשוואה (217) למטריצה הכופלת את הווקטור המלא של נגזרות הזוויות מבוצעת באופן הבא,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi + \phi') & \cos(\theta)\sin(\phi + \phi') & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\phi + \phi') & \cos(\theta)\cos(\phi + \phi') & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}' \\ \dot{\phi}'' \\ \dot{\theta}' \\ \dot{\theta}'' \end{bmatrix} \quad (218)$$

באותו אופן מתקבל היעקוביאן הרוטציוני המורחב עבור הזווית ϕ'' ,

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi + \phi'') & \cos(\theta)\sin(\phi + \phi'') & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\phi + \phi'') & \cos(\theta)\cos(\phi + \phi'') & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}' \\ \dot{\phi}'' \\ \dot{\theta}' \\ \dot{\theta}'' \end{bmatrix} \quad (219)$$

את היעקוביאן הרוטציוני של הזווית θ' ראינו במשוואה (115), נציג אותו כאן שוב, (220)

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta') & \sin(\phi)\sin(\theta') & -\cos(\theta')\sin(\theta) - \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\theta') & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta)\sin(\phi) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta') & -\cos(\theta')\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}' \\ \dot{\phi}'' \\ \dot{\theta}' \\ \dot{\theta}'' \end{bmatrix}$$

באופן דומה נפתח את היעקוביאן הרוטציוני עבור הזווית θ'' ,

(221)

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta'') & \sin(\phi) \sin(\theta'') & -\cos(\theta'') \sin(\theta) - \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta'') & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \cos(\theta) \sin(\phi) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sin(\theta'') & -\cos(\theta'') \sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\theta'') - \sin(\theta) \sin(\theta'') & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi}' \\ \dot{\phi}'' \\ \dot{\theta}' \\ \dot{\theta}'' \end{bmatrix}$$

נשים לב שהסימון של היעקוביאן הרוטציוני של הגוף ושל הנדנדות J_{Ω_x} מתייחס הן למטריצות הפועלות על הווקטור המצומצם והן למטריצות הפועלות על הווקטור המורחב.

עד כאן כתבנו באופן מפורש את כל המטריצות המשמשות למעבר בין מהירות זוויתית במערכת הגוף לנגזרות של הזוויות בהן נוטה הגוף ונוטות הנדנדות.

כעת נכתוב באופן מפורש את מטריצות האינרציה הנמצאות במשוואה (134), נזכיר כי מטריצות אלו הן מטריצות אלכסוניות דבר הנובע מסימטריה של הגופים.

$$I_b = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$$I_{b\phi'} = \begin{bmatrix} I_{x\phi'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y\phi'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z\phi'} \end{bmatrix}, \quad I_{b\phi''} = \begin{bmatrix} I_{x\phi''} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y\phi''} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z\phi''} \end{bmatrix} \quad (222)$$

$$I_{b\theta'} = \begin{bmatrix} I_{x\theta'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y\theta'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z\theta'} \end{bmatrix}, \quad I_{b\theta''} = \begin{bmatrix} I_{x\theta''} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y\theta''} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z\theta''} \end{bmatrix}$$

מהצבת משוואות (215,218,220,221,222) במשוואה (134) מתקבלת המטריצה D . מפאת גודלה נציג את אברי המטריצה בנפרד,

$$\begin{aligned}
D(1,1) &= I_{x\theta'} \cos^2(\theta') + I_{x\theta''} \cos^2(\theta'') + I_{z\theta'} \sin^2(\theta') + I_{z\theta''} \sin^2(\theta'') + I_x + I_{x\phi'} + I_{x\phi''} \\
D(1,2) &= D(2,1) = \sin(\phi) \left[(I_{x\theta'} - I_{z\theta'}) \cos(\theta') \sin(\theta') + (I_{x\theta''} - I_{z\theta''}) \cos(\theta'') \sin(\theta'') \right] \\
D(1,3) &= D(3,1) = \cos(\phi) \cos(\theta) \left[(I_{z\theta''} - I_{x\theta''}) \cos(\theta'') \sin(\theta'') + (I_{z\theta'} - I_{x\theta'}) \cos(\theta') \sin(\theta') \right] - \dots \\
&\quad \sin(\theta) \left[I_{x\theta'} \cos^2(\theta') + I_{x\theta''} \cos^2(\theta'') + I_{z\theta'} \sin^2(\theta') + I_{z\theta''} \sin^2(\theta'') + I_x + I_{x\phi'} + I_{x\phi''} \right] \\
D(1,4) &= D(4,1) = I_{x\phi'} \\
D(1,5) &= D(5,1) = I_{x\phi''} \\
D(2,2) &= (I_y + I_{y\theta'} + I_{y\theta''}) \cos^2(\phi) + I_{y\phi'} \cos^2(\phi + \phi') + I_{y\phi''} \cos^2(\phi + \phi'') + I_{z\theta'} \cos^2(\theta') \sin^2(\phi) + \dots \\
&\quad I_{z\theta''} \cos^2(\theta'') \sin^2(\phi) + I_z \sin^2(\phi) + I_{z\phi'} \sin^2(\phi + \phi') + I_{z\phi''} \sin^2(\phi + \phi'') + \dots \\
&\quad I_{x\theta'} \sin^2(\phi) \sin^2(\theta') + I_{x\theta''} \sin^2(\phi) \sin^2(\theta'') \\
D(2,3) &= D(3,2) = \frac{1}{4} \cos(\theta) \left[\left[2(I_y + I_{y\theta'} + I_{y\theta''} - I_z) - I_{x\theta'} - I_{x\theta''} - I_{z\theta'} - I_{z\theta''} + \dots \right] \sin(2\phi) + \dots \right] + \dots \\
&\quad \left[2(I_{y\phi'} - I_{z\phi'}) \sin(2(\phi + \phi')) + (I_{y\phi''} - I_{z\phi''}) \sin(2(\phi + \phi'')) \right] \\
&\quad \sin(\phi) \sin(\theta) \left[(I_{z\theta''} - I_{x\theta''}) \cos(\theta'') \sin(\theta'') + (I_{z\theta'} - I_{x\theta'}) \cos(\theta') \sin(\theta') \right] \tag{223} \\
D(2,6) &= D(6,2) = I_{y\theta'} \cos(\phi) \\
D(2,7) &= D(7,2) = I_{y\theta''} \cos(\phi) \\
D(3,3) &= \cos^2(\theta) \left[I_z \cos^2(\phi) + I_{z\phi'} \cos^2(\phi + \phi') + I_{z\phi''} \cos^2(\phi + \phi'') + (I_y + I_{y\theta'} + I_{y\theta''}) \sin^2(\phi) + \dots \right] \dots \\
&\quad I_{y\phi'} \sin^2(\phi + \phi') + I_{y\phi''} \sin^2(\phi + \phi'') \\
&\quad + \sin^2(\theta) (I_x + I_{x\phi'} + I_{x\phi''}) + I_{x\theta'} (\cos(\theta') \sin(\theta) + \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta'))^2 + \dots \\
&\quad I_{z\theta'} (\cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta'))^2 + I_{x\theta''} (\cos(\theta'') \sin(\theta) + \cos(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta''))^2 + \dots \\
&\quad I_{z\theta''} (\cos(\phi) \cos(\theta) \cos(\theta'') - \sin(\theta) \sin(\theta''))^2 \\
D(3,4) &= D(4,3) = -I_{x\phi'} \sin(\theta) \\
D(3,5) &= D(5,3) = -I_{x\phi''} \sin(\theta) \\
D(3,6) &= D(6,3) = I_{y\theta'} \cos(\theta) \sin(\phi) \\
D(3,7) &= D(7,3) = I_{y\theta''} \cos(\theta) \sin(\phi) \\
D(4,4) &= I_{x\phi'} \\
D(5,5) &= I_{x\phi''} \\
D(6,6) &= I_{y\theta'} \\
D(7,7) &= I_{y\theta''}
\end{aligned}$$

כל שאר האיברים במטריצה D שאינם מופיעים ב- (223) שווים אפס.

נספח 4 – הוכחת יציבות של בקר מסלול בכלי טיס עם נדנדה אחת.

בכדי להוכיח את יציבות הבקר נבחר את פונקציית ליאפונוב הבאה :

(224)

$$V = \frac{1}{2} \left\{ \left[\chi_\sigma^T k_\sigma \chi_\sigma \right] + \left[e_\sigma^T e_\sigma \right] + \left[e_{\sigma'}^T e_{\sigma'} \right] + \left[\chi_z^T k_z \chi_z \right] + \left[e_z^T e_z \right] + \left[e_{z'}^T e_{z'} \right] + \left[e_{xy}^T e_{xy} \right] + \left[e_{xy'}^T e_{xy'} \right] \right\}$$

כאשר $e_{xy} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix}$ ובהתאם גם $e_{xy'} = \begin{bmatrix} e_{x'} \\ e_{y'} \end{bmatrix}$ ו- $c_{1,xy} = \begin{bmatrix} c_{1x} \\ c_{1y} \end{bmatrix}$ $c_{2,xy} = \begin{bmatrix} c_{2x} \\ c_{2y} \end{bmatrix}$

אנו יכולים לראות כי פונקציית ליאפונוב מקיימת $V \geq 0 \forall (e_\sigma, e_{\sigma'}, \chi_\sigma, e_z, e_{z'}, \chi_z, e_{xy}, e_{xy'})$ מכיוון שכל הביטויים בה הם ריבועיים.

נגזור את פונקציית ליאפונוב ונקבל,

(225)

$$\dot{V} = \left[\chi_\sigma^T k_\sigma \dot{e}_\sigma \right] + \left[e_\sigma^T \dot{e}_\sigma \right] + \left[e_{\sigma'}^T \dot{e}_{\sigma'} \right] + \left[\chi_z^T k_z \dot{e}_z \right] + \left[e_z^T \dot{e}_z \right] + \left[e_{z'}^T \dot{e}_{z'} \right] + \left[e_{xy}^T \dot{e}_{xy} \right] + \left[e_{xy'}^T \dot{e}_{xy'} \right]$$

בהצבת השגיאות כפי שהן מוגדרות במשוואות (49,51) ובאופן דומה עבור בקר הגובה, והשגיאות המוגדרות ב (73,75) ובהתאם גם עבור ציר y, מתקבל,

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left[\chi_\sigma^T k_\sigma \dot{e}_\sigma \right] + \left[e_\sigma^T (-c_1 e_\sigma - k_\sigma \chi_\sigma + e_{\sigma'}) \right] + \left[e_{\sigma'}^T (-c_2 e_{\sigma'} - e_\sigma) \right] + \\ & \left[\chi_z^T k_z \dot{e}_z \right] + \left[e_z^T (-c_{1z} e_z - k_z \chi_z + e_{z'}) \right] + \left[e_{z'}^T (-c_{2z} e_{z'} - e_z) \right] + \\ & \left[e_{xy}^T (-c_{1,xy} e_{xy} + e_{xy'}) \right] + \left[e_{xy'}^T (-c_{2,xy} e_{xy'} - e_{xy}) \right] \end{aligned} \quad (226)$$

מכיוון שהאיברים ב (226) הם סקלרים מתקבל לדוגמא $\chi_\sigma^T k_\sigma \dot{e}_\sigma = e_\sigma^T k_\sigma \chi_\sigma$. לכן מתקבל,

(227)

$$\dot{V} = \left[-e_\sigma^T c_1 e_\sigma \right] + \left[-e_{\sigma'}^T c_2 e_{\sigma'} \right] + \left[-e_z^T c_{1z} e_z \right] + \left[-e_{z'}^T c_{2z} e_{z'} \right] + \left[-e_{xy}^T c_{1,xy} e_{xy} \right] + \left[-e_{xy'}^T c_{2,xy} e_{xy'} \right]$$

ניתן לראות מ-(227) כי מתקיים $\dot{V} \leq 0 \forall (e_\sigma, e_{\sigma'}, e_z, e_{z'}, e_{xy}, e_{xy'})$ ולכן הבקר הינו יציב.

Abstract

This work deals with control design and analysis of a novel type of hovering aerial vehicles. These aerial vehicles can control more than four independent degrees of freedom (DOF), and share a unique configuration. The unique structure includes a multi-copter platform that is enriched with freely rotating seesaws. The basic UAV presented in this thesis is an Hexa-copter with a single seesaw, such that four propellers are attached to the body and two propellers drive the seesaw. The seesaw can change its angle with respect to the UAV's body. This development includes modeling and control systems design, while the construction of the frame has been completed by a previous work. The Single Seesaw Hexa-copter is serving as a case study with conclusions that are generalized to a family of aerial vehicles with multiple seesaws. These unique UAVs with multiple seesaws can control all their body six degrees of freedom independently. Two of such aerial vehicles are presented and their unique capabilities are investigated.

The main contribution of this work is the development of novel platforms (and a concept) for hovering aerial vehicles. The novel platforms allows better actuation (and hence a more flexible control and a wider range of operation) compared to standard multi-copters (which are typically under-actuated systems with only four independent controlled DOFs). Hence, this development may be seen as a solution to the well-known under-actuation problem of standard multi-copters. Also, this work shows the development of the equations of motion for multibody hovering aerial vehicle. The main idea behind aerial vehicles with seesaws is to enable more independent controlled DOFs, by decoupling the direction of the total thrust from the angular state of the body. As opposed to other known solutions, the concept of seesaws allows this decoupling with no additional servo motors (which do not contribute thrust, but increase weight).

In these work, we show the development of the kinematic and the dynamic models of all presented platforms. A supplemental analysis investigates the level of actuation in these models to show that all presented structures allow more than four independent controlled DOFs (and the maximum number of controlled DOFs here is six). Based on the developed models, control algorithms are suggested and their performances are analyzed. The goal in this stage was to extend well known control methods of standard multi-copters (such as the Integral-backstepping) to the unique structure of the new aerial vehicles. This extension is not trivial because of the increased number of internal DOFs (i.e., seesaw angles w.r.t the body) and the redundancy due to the high number of independent propellers. By implementing the develop version of Integral-backstepping controller, a set of simulation results are presented, showing the effectiveness of these unique hovering aerial vehicle. In particular, we show various flight scenarios where the Single-Seesaw Hexa-copter control five of its DOFs independently. In addition, a test-bed of the Single-Seesaw Hexa-copter has been developed in order to proof the feasibility of seesaw multi-copter concept. Two experimental flight scenarios are presented which demonstrate the unique attributes of this novel concept. These flight experiments have been conducted in outdoor conditions.

Our analysis shows that even for the Single-Seesaw Hexa-copter (which is the simplest presented seesaw copter) its control problem is inherently a redundant control problem. Hence a few flying modes are developed and their advantages and disadvantages are explained, theoretically and numerically (using simulations).

Another important question that is being raised here touches on energy considerations. A detailed analysis is presented with the conclusion that there is no meaningful improvement, in terms of energy, when using a Single-Seesaw Hexa-copter. More research is required in order to establish a more general result concerning the energy efficiency of multi-seesaw UAVs.

The work shows a detailed theoretical development of two types of multi-seesaw aerial vehicles. The first is an Octo-copter with four seesaws, it uses eight propellers. Each couple of propellers drives a single seesaw. The kinematical and dynamical models, as well as the control approach, are all extensions of the results developed for the more simple Single-Seesaw Hexa-copter. These results show the ability of controlling all six body DOFs (position and attitude) independently. Simulations of the Four-Seesaw Octo-copter revealed its unique flying modes, such as, its ability to track a given trajectory while flying upside down. The last developed UAV in this work is Three-Seesaw Hexa-copter (with six propellers). Our analysis shows that this UAVs allows six independent controlled DOFs, but as opposed to its big brother (i.e., the Four-Seesaw Octo-copter), no control redundancy is achieved (concerning the 6-DOF control problem).

The thesis is organized as follow. Chapter 1 presents the motivation behind the development of the Single-Seesaw Hexa-copter, and hints on the possibility of extending the concept to more than a single seesaw. A literature review of other unconventional aerial vehicles is presented, and the principles of existing hovering UAVs with more than four controller DOFs are discussed and compared to the principle of the UAVs suggested here. Chapter 2 explains the structure of the Single-Seesaw Hexa-copter, and details the components of the developed test-bed. Chapter 3 presents the development of the UAV equations of motion using the Euler Lagrange method, then, the development of the control system is presented in chapter 4. This control system is presented as a cascaded system of a navigation and stability modules. This chapter is summarized with some simulations results showing the unique performances of the aerial vehicle. Chapter 5 analyzes the energy efficiency problem of the Single-Seesaw Hexa-copter. Chapter 6 presents two outdoors experiments demonstrating the feasibility of the seesaw-copter concept. Chapter 7 tells about the development of two types of multi-seesaw aerial vehicles, both with six independent controlled DOFs. Then, chapter 8 summarizes the research and provides some insights relevant for a future research.

BEN – GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
FACULTY OF ENGINEERING SCIENCE
DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING

Modeling and Control of Hovering Aerial Vehicles
with Rotating Seesaws

Thesis Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements
for the M.Sc. Degree

By: Dolev Korem Yecheskel

October 2015