Modèles Statistiques

Partie 1 - Manipulation et décomposition matricielle

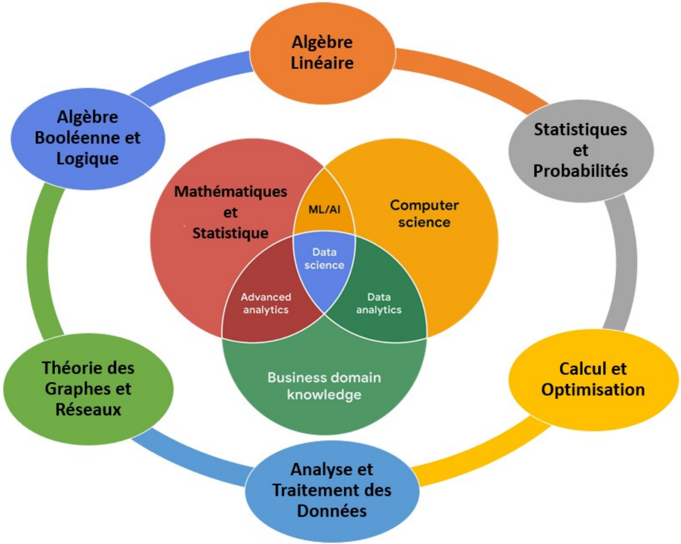
$3^{ème}$ année Ingénierie Informatique et Réseaux

Dr. HAJJAMI Riane

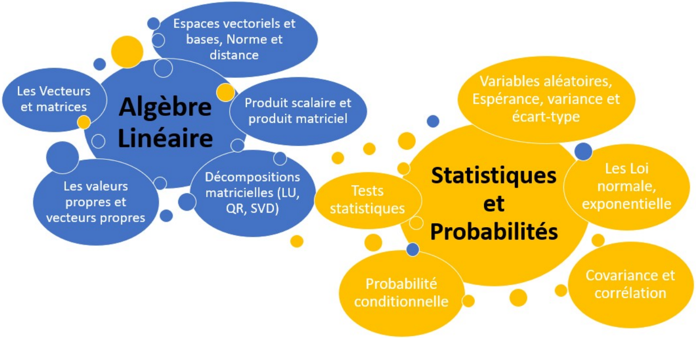
Semestre 2, Année universitaire 2024/2025

ECOLE MAROCAINE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
EMSI
Membre de HONORIS UNITED UNIVERSITIES

Introduction



Introduction



Plan de Cours

01 — Partie 1: Manipulation et décomposition matricielle

- Rappel des opérations de base sur les matrices
- Décomposition **LU**.
- Décomposition **QR**.
- Décomposition en valeurs singulières (**SVD**).

02 — Partie 2: Rappel des Statistique descriptive

- Types de données et échelles de mesure.
- Représentations **Graphiques**
- Mesures de tendance centrale : **moyenne, médiane, mode.**
- Mesures de dispersion : **variance** et **écart type** et **coefficient de variation**

03 — Partie 3: Espérance et probabilité conditionnelle

- Diagramme de **Venn**
- Théorème de **bayes** et **probabilité totale**
- Tableau de contingence
- Lois de distributions **discrètes** et **continues**

04 — Partie 4: Relations entre variables

- **Corrélation** : coefficient de corrélation de Pearson
- **Régression linéaire simple** : modèle et interprétation
- Modèle de **régression multiple**
- Modèle de **régression logistique binaire**

05 — Partie 5: Tests des hypothèses

- Tests des hypothèses (valeur P et intervalle de confiance)
- Test-T, test-Z
- Test chi-carrée
- Test ANOVA

Partie 1 - Manipulation et décomposition matricielle

1. **Rappel et Généralités**
2. Décomposition matricielle

Types des matrices

Ligne ou colonne

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Matrice Ligne

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

Matrice colonne

Carrée

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

n ligne

n colonne

Rectangulaire

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

n ligne

m colonne

$n \neq m$

Nulle

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Identité

$$\begin{bmatrix} 1_{11} & \cdots & 0_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{n1} & \cdots & 1_{1n} \end{bmatrix}, \text{ Exemple : } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Symétrique

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} \neq a_{ji}$

Diagonale

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Triangulaire supérieur

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Triangulaire inférieure

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

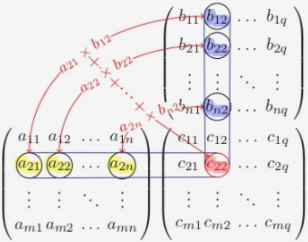
Opérations sur les matrices

$A = (a_{ij})$ est une matrice de dimension $m \times n$

$B = (b_{ij})$ est une matrice de dimension $p \times q$

Pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$:

- ✧ $A = B \iff m = p;\ n = q$ et $a_{ij} = b_{ij}$
- ✧ $C = A + B$ avec $m = p$ et $n = q$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- ✧ $C = kA$: $c_{ij} = k a_{ij}$
- ✧ $C = A \times B$: $c_{ij} =$ ligne $i_{|A} \times$ colonne $j_{|B}$
- ✧ $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$ si $n \neq 0$ et $A^0 = I$



$(kA)B = k(AB)$

$ABC = (AB)C = A(BC)$

$A(B + C) = AB + BC$

$(A + B)C = AC + BC$

$AI = IA = A$

⚠ en général :

$AB \neq BA$

Remarque

Le produit de deux matrices $A \times B$ n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Inversion d'une matrice carrée

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n. s'il existe $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AA' = A'A = I_n.$$

  Alors A est dite inversible.
- L'ensemble des matrices inversibles de taille n est noté $GL_n(\mathbb{K})$.
- Si $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, la matrice $\mathbf{A}$ est dite singulière

Inversion d'une matrice carrée

Propriétés

- $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$
- $\left(\mathbf{A}^{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{T}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (Attention au changement d'ordre !)
- $[\mathrm{diag}\,(\mathrm{D_{ii}})]^{-1} = \mathrm{diag}\,(1/\mathrm{D_{ii}})$
- La matrice **A** est dite orthogonale si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$

Méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Méthode de Gauss-Jordan

Opérations élémentaires

- Dilatation ou multiplication d'une ligne L_i par un scalaire λ non nul ($\lambda \in \mathbb{K}^*$) ce que l'on note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Permutations (ou plus exactement transpositions) où on échange des lignes L_i et L_j avec $i \neq j$ ce que l'on note $L_i \leftrightarrow L_j$;
- Transvections: Ajout de βL_j à L_i avec $i \neq j$ ce que l'on note $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$ où $\beta \in \mathbb{K}$.

Remarque

Les mêmes opérations élémentaires sont applicables sur les colonnes.

Algorithme de Gauss-Jordan pour calcul de l'inverse d'une matrice

1. **Augmenter la matrice** :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   On forme la matrice augmentée $[A|I]$ en combinant la matrice A et la matrice identité I.

2. **Appliquer les opérations sur les lignes** :

$$R_1 \to R_1 \cdot \frac{1}{a_{11}}, \quad R_2 \to R_2 - a_{21} R_1, \quad R_3 \to R_3 - a_{31} R_1$$

   Ces opérations réduisent progressivement la matrice A à la matrice identité.

3. **Obtenir l'inverse** :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

   Lorsque le côté gauche devient l'identité, le côté droit devient A^{-1}.

Exemple d'inversion par la méthode de Gauss-Jordan

On veut calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice augmentée associée est donc

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Exemple d'inversion par la méthode de Gauss-Jordan

- Le coefficient $a_{1,1}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2$ pour simplifier la suite des calculs. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple d'inversion par la méthode de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 9 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{2,2}$ vaut 1 on effectue donc $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_2$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -7 + \frac{27}{4} & -2 + \frac{9}{4} & -\frac{9}{4} & 1 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul. La matrice est donc inversible!

Exemple d'inversion par la méthode de Gauss-Jordan

- Pour obtenir des 1 sur la diagonale, on effectue donc $L_3 \leftarrow -4L_3$ et $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Le coefficient $a_{3,3}$ est non nul on effectue donc $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{4}L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$. On obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & \frac{5}{2} & -18 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

Exemple d'inversion par la méthode de Gauss-Jordan

- Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et on obtient,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 9 & -4 \end{array}\right)$$

- Ceci produit l'identité à gauche et la matrice de droite est donc A^{-1}. ie :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ -1 & 7 & -3 \\ -1 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

Méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Méthode de déterminant

Matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2×2. Si $det(A) = ad - bc \neq 0$ alors A est inversible et on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice carrée
Méthode de déterminant

Matrice 3×3

Soit $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ une matrice de taille 3×3. Si A est inversible alors son inverse

est $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\,{}^t comA$ avec : $\det A = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$$\text{Et } comA=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Règle de Sarrus

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

Méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice carrée

Méthode de déterminant

Matrice $n \times n$

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$$

Si $det(A) \neq 0$ alors A est inversible et on a:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} {}^{T}Com(A),$$

0ù $Com(A) = ((-1)^{i+j} A_{ij})$, avec A_{ij} est le déterminant de la sous-matrice obtenue en éliminant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

Exemple d'inversion par la méthode de déterminant

Calculons l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemple d'inversion par la méthode de déterminant

Donc

$$\operatorname{com} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$(\operatorname{com} A)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, $det(A) = 1$. On conclut que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{com} A)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inversion par la méthode de déterminant

Proposition

- le déterminant de la matrice nulle 0_n vaut 0,
- le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1,
- Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.
- Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$
- $\det\left(A^{T}\right) = \det A$.

Inversion d'une matrice carrée

Remarque

Les méthodes précédentes permettent de calculer la solution en calculant l'inverse de la matrice associée s'il existe, c'est-à-dire si $det(A) \neq 0$. En effet,

$$AX = B \Leftrightarrow X = BA^{-1},$$

avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^n$ et $X \in \mathbf{R}^n$.

Rang d'une matrice

Définition

Soit $\mathcal{A}$ une matrice à n lignes et p colonnes, de terme général $a_{i,j}$ appartenant à $\mathbf{K}$. Les vecteurs colonnes de $\mathcal{A}$ sont notées $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_p$ sont des vecteurs de $\mathbf{K}$. On appelle rang de $\mathcal{A}$ la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ engendré par $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_p$.

Rang d'une matrice

- Si $\mathcal{A}$ est une matrice à n lignes et p colonnes, son rang est inférieur ou égal au minimum de n et de p.
- Les opérations élémentaires conservent le rang de la matrice.
- La suppression d'une colonne nulle ou d'une ligne nulle préserve le rang.
- Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est égal au nombre de lignes ou de colonnes de la plus grande sous-matrice carrée de déterminant non nul que l'on peut extraire de A.
- Pour une matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \text{ inversible} \iff \text{rang } A = n.$$

Valeurs propres-vecteurs propres

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

- λ est dite valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$AX = \lambda X$$

- Le vecteur X est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
- Le polynôme caractéristique de A est

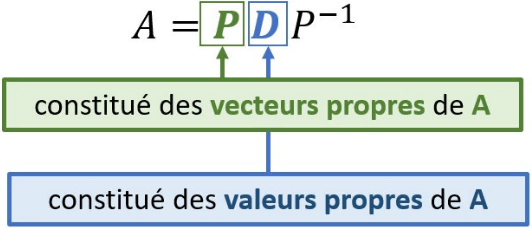
$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$$

  et on a

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \quad \Longleftrightarrow \quad \chi_A(\lambda) = 0$$

Diagonalisation d'une matrice

- On dit qu'une matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale, $D = P^{-1}AP$. Diagonaliser A, c'est trouver D et P.



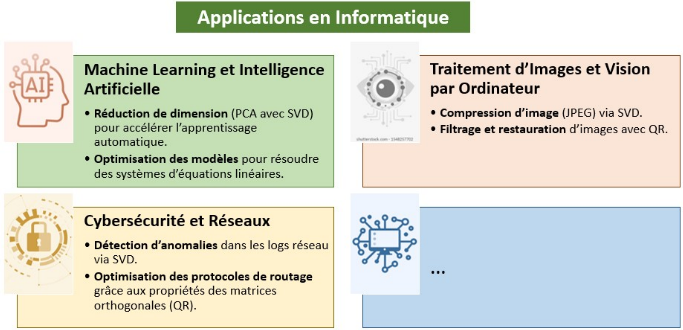
- s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

Partie 1 - Manipulation et décomposition matricielle

Introduction à la Décomposition Matricielle

Pourquoi décomposer une matrice ?

- En mathématiques et en **informatique**, la décomposition matricielle permet de réécrire une matrice sous une forme plus simple pour faciliter les calculs.
- Elle est essentielle pour résoudre des systèmes d'équations, analyser des données et optimiser des algorithmes.



Introduction à la Décomposition Matricielle

Les trois principales décompositions qui seront abordées dans ce cours:

Décomposition LU (Lower-Upper)

- Factorise une matrice A en un produit de **deux matrices triangulaires** : $A = LU$

↳ La résolution rapide de systèmes linéaires et les simulations numériques.

Décomposition QR

- Exprime A sous la forme d'un **produit d'une matrice orthogonale et d'une matrice triangulaire** : $A = QR$

↳ La régression linéaire et la stabilité numérique des calculs.

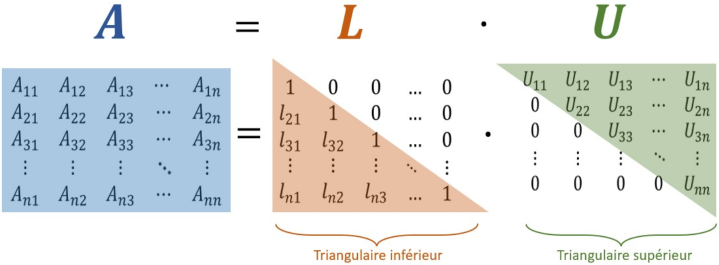
Décomposition SVD (Singular Value Decomposition)

- Transforme une matrice en **trois matrices** avec des propriétés fondamentales : $A = U\Sigma V^T$

↳ La compression de données, le traitement d'images et le ML.

Décomposition LU

La décomposition LU consiste à écrire une matrice carrée A comme le produit de deux matrices: **une matrice triangulaire inférieure** L **et une matrice triangulaire supérieure** U



$$l_{ii} = 1, i = 1, 2, ..., n$$

Condition pour l'existence de la décomposition LU (cas d'une matrice carrée)

Propriétés

Une matrice inversible A admet une décomposition LU si et seulement si tous ses mineurs principaux sont non nuls, où un mineur principal d'ordre k est le déterminant de la sous-matrice obtenue en gardant les k premières lignes et les k premières colonnes de A. Si l'on impose les valeurs, non nulles, de la diagonale de L (ou de U), cette décomposition est unique.

Condition pour l'existence de la décomposition LU (cas d'une matrice carrée)

Propriétés

Une matrice inversible A admet une décomposition LU si et seulement si tous ses mineurs principaux sont non nuls, où un mineur principal d'ordre k est le déterminant de la sous-matrice obtenue en gardant les k premières lignes et les k premières colonnes de A. Si l'on impose les valeurs, non nulles, de la diagonale de L (ou de U), cette décomposition est unique.

Remarques

- Si cette condition n'est pas remplie, la décomposition LU existe tout de même, mais elle nécessite un pivotage, ce qui implique une réorganisation des lignes (ou des colonnes) de la matrice A.
- Dans ce cours, on se limite à la **décomposition LU de Crout qui impose que les éléments diagonaux de la matrice L sont fixés à 1**.

Algorithme de décomposition LU

L'algorithme pour obtenir les matrices L et U est basé essentiellement sur des opérations élémentaires sur les lignes.

- **1.Initialisation** : on commence par poser L comme la matrice identité de taille n et U comme une copie de la matrice A.
- **2.Élimination de Gauss** pour chaque colonne $\boldsymbol{j}$ de la matrice U, à partir de la première jusqu'à la $\boldsymbol{n}$-ième, soustrais de la $\boldsymbol{i}$-ième ligne un multiple de la $\boldsymbol{j}$-ième ligne pour annuler les éléments en dessous de la diagonale dans la colonne $\boldsymbol{j}$. Le facteur multiplicatif utilisé pour cette opération sera stocké dans L_{ij}. La matrice U est modifiée à chaque étape de sorte qu'à la fin du processus, elle devient une matrice triangulaire supérieure.
- **3. Finalisation** A la fin de ces opérations sur toutes les colonnes, on obtient L comme une matrice triangulaire inférieure et U comme une matrice triangulaire supérieure telles que $A = LU$.

Décomposition LU

Exemple

Décomposition LU

Application à la résolution d'un système d'équations linéaires

La résolution d'un système linéaire $AX = B$ pour tout vecteur B devient plus simple si la matrice A peut être factorisée sous la forme LU,

$$\boxed{AX = B} \quad \Rightarrow \quad \boxed{LUX = B}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \textbf{Résolution par substitution avant (forward substitution)} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ \textbf{Résolution par substitution arrière (backward substitution)} \\ \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

Décomposition LU

Cas d'une matrice réctanglaire

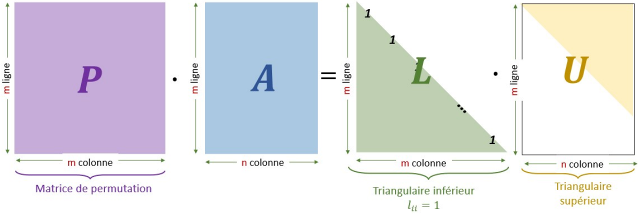
Remarque

- La décomposition LU se généralise aux matrices rectangulaires A de taille $m \times n$ avec $m \geq n$, en écrivant toujours $A = LU$, mais avec des structures adaptées : la matrice L devient une matrice de taille $m \times n$ avec une structure triangulaire inférieure généralisée, tandis que U reste une matrice triangulaire supérieure carrée de taille $n \times n$.
- L'algorithm de calcul des élements de L et U s'applique tel qu'il est à une matrice réctangulaire.
- La décomposition LU existe si la sous-matrice carrée $n \times n$ formée par ces colonnes est inversible.

Décomposition PLU

La décomposition LU n'est pas toujours possible, car un pivot nul peut apparaître, empêchant l'élimination sans permutation. La décomposition PLU résout ce problème en introduisant une matrice de permutation P, garantissant toujours une factorisation sous la forme :

$$PA = LU$$



Décomposition LU

Matrice de permutation

Matrice de permutation

- Une matrice de permutation d'ordre n est une matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 0 , sauf un coefficient sur chaque ligne et sur chaque colonne égal à 1 .
- Les matrices de permutation P_σ permettent de permuter les lignes et les colonnes d'une matrice A. Ainsi, AP_σ est la matrice déduite de A en permutant les colonnes de A suivant la permutation σ, et $P_\sigma A$ est la matrice déduite de A en permutant les lignes de A suivant la permutation σ^{-1};

Décomposition PLU

Algorithme de décomposition PLU

L'algorithme repose sur l'élimination de Gauss avec pivotage partiel.

Algorithm Décomposition PLU avec pivotage partiel

Entrée : Matrice A de taille $m \times n$
Sortie : Matrices P, L, U telles que $PA = LU$
Initialisation:
Définir P comme la matrice identité de taille m.
Définir L comme la matrice identité de taille m.
Copier A dans U.
Pivotage et Élimination de Gauss:
for $k = 1$ à $\min(m, n)$ **do**
    Rechercher l'indice p correspondant au plus grand élément en valeur absolue dans la colonne k, en considérant uniquement les lignes $i \geq k$.
    if $p \neq k$ **then**
        Permuter les lignes k et p dans U.
        Répercuter la permutation sur les lignes de P.
        Répercuter également cette permutation sur les $k-1$ premières colonnes de L.
    end if
    for $i = k+1$ à m **do**
        if $U_{k,k} \neq 0$ **then**
            Calculer le facteur d'élimination :

$$L_{i,k} = \frac{U_{i,k}}{U_{k,k}}$$

            Insérer $L_{i,k}$ dans L sous la diagonale.
            Modifier les éléments de U en soustrayant la contribution de la ligne k :

$$U_{i,j} = U_{i,j} - L_{i,k} \cdot U_{k,j}, \quad \forall j \geq k$$

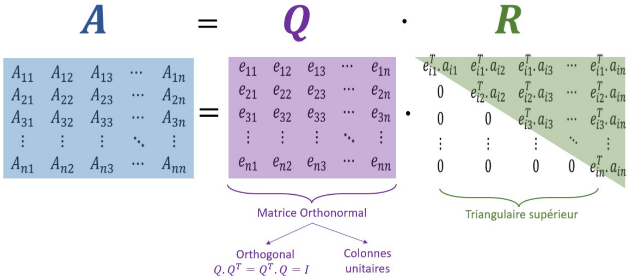
        end if
    end for
end for
Retourner P, L, U.

Décomposition PLU

Exemple

Décomposition QR

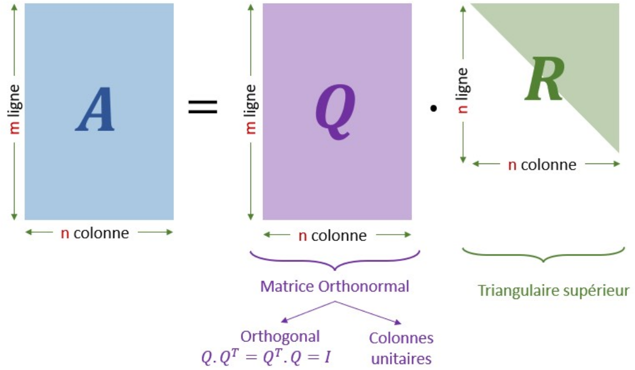
Si A est **une matrice carrée** (réelle) de taille n inversible, alors il existe une **unique matrice orthogonale** Q et une **unique matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs** R telle que



Cette factorisation s'appelle la décomposition QR de la matrice A.

Décomposition QR

Si la matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est **réctangulaire de rang n ou n'est pas inversible**, elle peut toujours se décomposer sous la forme $A = QR$, mais cette fois on ne peut plus demander que les coefficients diagonaux de R soient strictement positifs ni que la décomposition soit unique.



Décomposition QR

Matrice orthogonale- Base orthogonale

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la matrice orthogonale dans la décomposition QR. Dans ce cours, nous nous limiterons à la méthode de Gram-Schmidt. Introduisons d'abord quelques propriétés des matrices orthogonales et des bases orthogonales.

Décomposition QR

Matrice orthogonale- Base orthogonale

Il existe plusieurs méthodes pour calculer la matrice orthogonale dans la décomposition QR. Dans ce cours, nous nous limiterons à la méthode de Gram-Schmidt. Introduisons d'abord quelques propriétés des matrices orthogonales et des bases orthogonales.

Matrice orthogonale

- On dit qu'une matrice Q est orthogonale si $Q^TQ = QQ^T = I$
- Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à 1 ou -1 .
- **Une matrice $Q \in \mathcal{M}_{m,n}$ est orthogonale si et seulement si ses colonnes $e_{i,i=1,\ldots n}$ (ou lignes) (vues comme des vecteurs) sont unitaires ($\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$) et deux à deux orthogonales ($< e_i, e_j >= e_i^T e_j = 0,\ i \neq j$).**

Décomposition QR

Matrice orthogonale- Base orthogonale

Base orthogonale

- Un ensemble de vecteurs non nuls et mutuellement orthogonaux est toujours linéairement indépendant.
- Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est une base de l'espace qu'elle engendre.
- Donnée une base de $\mathbb{R}^n$, il existe un procédé simple pour en déduire une base orthonormale. Essentiellement, on procède par projections successives d'un vecteur sur le sous-espace engendré par ses prédécesseurs. Il s'agit de procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Décomposition QR

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de transformer une base quelconque d'un espace euclidien (un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire) en une base orthonormale (une base où tous les vecteurs sont deux à deux orthogonaux et ont une norme de 1).

Pour concrétiser le procédé de Gram-Schmidt, nous commençons par illustrer deux concepts fondamentaux :

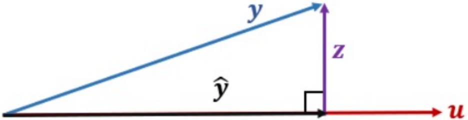
- Projection d'un vecteur sur un autre vecteur
- Projection d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel

Ces notions sont essentielles car elles constituent la base du processus d'orthonormalisation.

Décomposition QR

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Projection d'un vecteur sur un autre



$$\boxed{\hat{y} = ku}$$
$$\Downarrow$$
$$k = ?$$

$$y = \boxed{\hat{y}} + z$$
$$\Downarrow$$
$$y = \boxed{ku} + z$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{y - ku = z}$$

$$z \perp u$$
$$\Downarrow$$
$$z.u = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{(y - ku)}.u = 0$$
$$\Downarrow$$
$$y.u - k(u.u) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\frac{y.u}{u.u} = k}$$

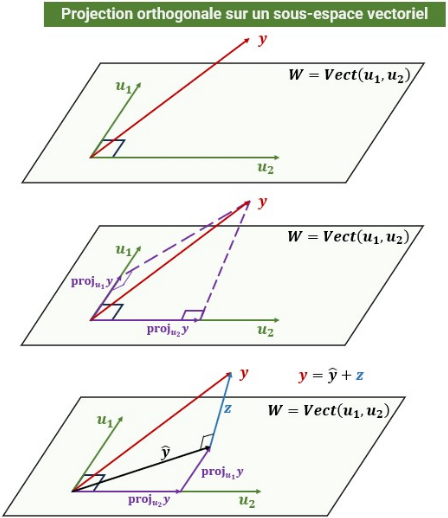
Décomposition QR

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Projection orthogonale sur un S.E.V

Si $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{p}})$ est une base orthogonale quelconque d'un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout vecteur $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\text{proj}_W\, y = \text{proj}_{u_1}\, y + \cdots + \text{proj}_{u_p}\, y$$



$$\begin{aligned} z &= y - \text{proj}_{u_1}\, y - \text{proj}_{u_2}\, y \\ &= y - \frac{< y, u_1 >}{< u_1, u1 >} u_1 - \frac{< y, u_2 >}{< u_2, u_2 >} u_2 \end{aligned}$$

Décomposition QR

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Procédé de Gram-Schmidt

Pour créer une famille de vecteurs orthonormale $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ à partir d'une famille de vecteurs $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est décrit comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{q}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{a}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{a}_2), & \mathbf{q}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{a}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{a}_3) - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{a}_3), & \mathbf{q}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} \\
\mathbf{u}_4 &= \mathbf{a}_4 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{a}_4) - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{a}_4) - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_3}(\mathbf{a}_4), & \mathbf{q}_4 &= \frac{\mathbf{u}_4}{\|\mathbf{u}_4\|} \\
&\vdots & &\vdots \\
\mathbf{u}_k &= \mathbf{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{a}_k), & \mathbf{q}_k &= \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}.
\end{aligned}$$

où la projection orthogonale est donnée par :

$$\boxed{\mathrm{proj}_{\mathbf{u}_j}(\mathbf{a}_k) = \frac{\langle \mathbf{a}_k, \mathbf{u}_j \rangle}{\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j \rangle} \mathbf{u}_j}$$

Décomposition QR

Calcul de la matrice triangulaire supérieur R

Après l'obtention de la matrice **orthogonale** Q par le biais du procédé de **Gram-Schmidt**, le calcul de la matrice **triangulaire supérieure** R devient immédiat. En effet, cette matrice est obtenue par la relation fondamentale:

$$R = Q^T A$$

où : $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$ est la **matrice initiale**, et $Q = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n]$ est la **matrice orthogonale** associée.

Ainsi, chaque coefficient de R est donné par un **produit scalaire** entre les colonnes de Q et celles de A, ce qui nous permet d'écrire R sous la forme explicite :

$$R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_1 \rangle & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{q}_2, \mathbf{a}_n \rangle \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \langle \mathbf{q}_n, \mathbf{a}_n \rangle \end{bmatrix}$$

Décomposition QR

En conculsion la décomposition QR d'une matrice est de la forme

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array}\right] = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c|c|c} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{array}\right]}_{\text{Vecteurs colonnes orthonormaux obtenue par Gram Schmidt}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \langle q_1, a_1\rangle & \langle q_1, a_2\rangle & \cdots & \langle q_1, a_n\rangle \\ 0 & \langle q_2, a_2\rangle & \dots & \langle q_2, a_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \langle q_2, a_n\rangle \end{bmatrix}}_{\text{Triangulaire supérieur}}$$

Décomposition QR

Exemple

Calculons une factorisation QR

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note, $A = [\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2]$, le procédé de Gram-Schmidt donne

$$\boldsymbol{v}_1 := \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 := \boldsymbol{a}_2 - \frac{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|^2}\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La normalisation de v_1 et v_2 se traduit comme suit

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/6 \\ 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

Décomposition QR

Exemple(suite)

On a donc, après normalisation,

$$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/6 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$$

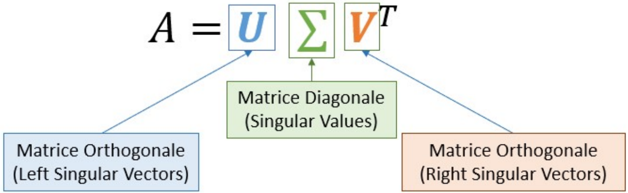
Ensuite,

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \\ 0 & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

La décomposition en valeurs singulières (SVD=Singular Value Decomposition) est une méthode très générale de factorisation qui donne une nouvelle interprétation géométrique de n'importe quelle application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Elle consiste à factoriser une matrice quelconque $A(m \times n)$ en un produit,



Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Théorème(Existence d'une SVD)

Toute matrice $A(m \times n)$ peut s'écrire comme un produit,

$$A = U\Sigma V^T$$

où

- U est $m \times m$, orthogonale: $U^T U = UU^T = I_m$; ses colonnes sont appelées **left singular vectors de** A.
- Σ est $m \times n$, diagonale, les coefficients situés sur sa diagonale sont $\geqslant 0$, et sont appelés **les valeurs singulières de** A.
- V est $n \times n$, orthogonale : $V^T V = VV^T = I_n$, ses colonnes sont appelées **right singular vectors de** A.

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Structure de la décomposition SVD

Avant de passer à la structure de toute décomposition SVD, commençons par énoncer les résultats suivants

Lemme

Pour une matrice $A(m \times n)$ quelconque,

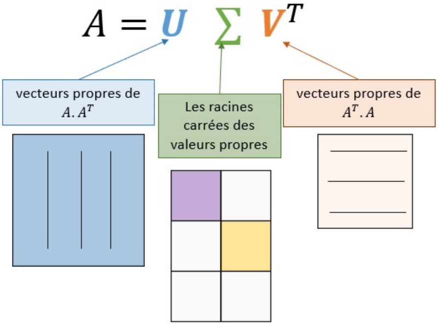
- $A^T A(n \times n)$ est symétrique,
- $AA^T(m \times m)$ est symétrique,
- Un scalaire $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $A^T A$ si et seulement si il est également valeur propre de AA^T,
- Si λ est valeur propre de $A^T A$ ou de AA^T, alors $\lambda \geqslant 0$.

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Structure

Les matrices U, Σ et V^T formant une décomposition SVD d'une matrice $A(m \times n)$ sont constituées comme suit

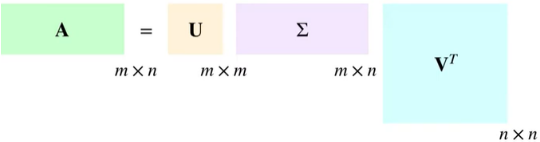
- U: de taille $m \times m$ formée des vecteurs propres normalisés de AA^T
- Σ: de taille $m \times n$, matrice diagonale rectangulaire avec r racines carrées non nulles de $\mathbf{A^TA}$ ou $\mathbf{AA^T}$, où r est le rang(A)
- V^T: de taille $n \times n$ formée des vecteurs propres normalisés de A^TA



Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Structure

- Si $m < n$



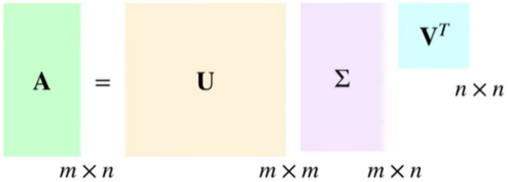
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_m & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \qquad \sigma_i = \sqrt{\text{V.p.}(AA^T)}$$

$$i = 1 \ldots m$$

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Structure

- <u>Si $m > n$</u>



$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n} \quad ; \quad \sigma_i = \sqrt{\text{V.p. de} A^T A}, i = 1 \ldots n$$

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Exemple

On se propose de décomposer en valeurs singulières $U\Sigma V^T$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

Pour construire la matrice V on calcule :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont **les valeurs propres** sont les racines du polynôme caractéristique

$$\det\left(A^T A - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$$

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Exemple

Valeurs singulières de A:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3}, \quad et \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1.$$

Donc la matrice diagonale :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

On complète avec une ligne de zéros pour que Σ soit de même taille que A.

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Exemple(suite)

Continuons dans la constuction de la matrice V.

Vecteurs propres de $A^T A$

La résolution de $AX = \lambda X$, pour $X \neq 0$ donne :

- Valeur propre $\lambda = 3$: vecteur propre $\binom{1}{1}$
- Valeur propre $\lambda = 1$: vecteur propre $\binom{1}{-1}$

En normalisant (en divisant chaque vecteur par sa norme), on obtient les vecteurs de V

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Exemple(suite)

Construction des vecteurs de la matrice U: Ils existent deux méthodes à suivres.

- $1^{ère}$ méthode : U est formée des vecteurs propres normalisés de AA^T, donc il suffit de les calculer d'une manière classique.
- $2^{ème}$ méthode : on a $A = U\Sigma V^T \Rightarrow U = AV\Sigma^{-1}$. D'où l'on peut extraire

$$\boxed{u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i, \quad i = 1, 2}$$

Pour u_1 :

$$Av_1 = A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Exemple(suite)

Même chose pour u_2 avec v_2 :

$$Av_2 = A \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, U est constitué de :

$$U = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 \right]$$

Sachant que (u_1, u_2, u_3) doivent former une base orthonormale, on peut construire U_3 par le procédé d'orthonormalisation de Gram-shmidt
1. On Choisis un vecteur candidat w dans $\mathbb{R}^3$ (au hasard, mais pas colinéaire à u_1 ni u_2). Par exemple :

Exemple(suite)

1. On Choisis un vecteur candidat w dans $\mathbb{R}^3$ (au hasard, mais pas colinéaire à u_1 ni u_2). Par exemple :

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Enlève les projections sur u_1 et u_2 :

$$u_3 = w - \text{proj}_{u_1}(w) - \text{proj}_{u_2}(w)$$

Où :

$$\text{proj}_{u_i}(w) = \left(\frac{< w, u_i >}{\|u_i\|^2} \right) u_i$$

Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Exemple(suite)

Mais comme u_1 et u_2 sont déjà normalisés, les $\|u_i\|^2 = 1$, donc : Mais comme u_1 et u_2 sont déjà normalisés, les $\|u_i\|^2 = 1$, donc:

$$u_3 = w - (w \cdot u_1)\, u_1 - (w \cdot u_2)\, u_2$$

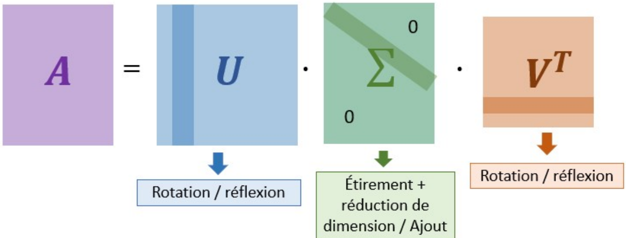
3. Puis on normalise u_3 :

$$u_3 := \frac{u_3}{\|u_3\|}$$

Décomposition en valeurs singulières (SVD): illustration

Les matrices orthogonales représentent des isométries, c'est-à-dire des transformations rigides de l'espace, et doivent être comprises essentiellement comme des rotations. D'autre part, une matrice diagonale $m \times n$ a pour effet de stretcher certaines directions (avec un changement de dimension, voir plus bas). Donc la décomposition en valeurs singulières permet de décomposer l'application $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en trois parties :

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{(V^T:rotation)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{(\Sigma:stretch)} \mathbb{R}^m \xrightarrow{(U:rotation)} \mathbb{R}^m$$



Comparaison : Application en Informatique

Que ce soit pour l'optimisation des modèles d'apprentissage automatique, la compression d'images, la détection d'anomalies en cybersécurité, ou encore la cryptographie, chaque méthode présente des avantages spécifiques, renforçant ainsi leur importance dans la résolution de problèmes complexes et l'amélioration des performances des algorithmes.

Décomposition	Machine Learning	Traitement d'Image	Cybersécurité	Cryptographie
QR	Bonne stabilité, rapide pour résoudre $AX = B$	Compression rapide mais moins performante que SVD	Détection rapide d'anomalies	Peut être utilisé pour l'analyse matricielle des clés et la **réduction de dimension** dans le chiffrement **homomorphe**
LU	Rapide pour les matrices carrées	Pas idéal pour compression	Moins précis pour anomalies	Peu utilisé directement, mais peut **accélérer les calculs** dans certains algorithmes cryptographiques
SVD	Très précis mais coûteux	Meilleure compression	Détection fine des anomalies	Utilisé dans la **stéganographie**, le cryptage par masquage matriciel et l'analyse des systèmes de chiffrement quantique

- Applications de la décomposition matricielle avec Python