

Elettrodinamica classica

June 18, 2017

1 Maxwell equations

Trasformazioni delle velocità, dove \mathbf{u} è la velocità di traslazione fra i due sistemi, e \mathbf{v} è la velocità della particella nel primo sistema

1.1 idk lol

$$\vec{A}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' dt' \vec{J}(\mathbf{x}', t) \frac{\delta(t - t' - \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}{c})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}$$

(α costanti se S.I.)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' dt' \rho(\mathbf{x}', t) \frac{\delta(t - t' - \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}{c})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|}$$

(α altre costanti se S.I.)

$$v_{\parallel} = \frac{v'_{\parallel} + u}{1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}}{c^2}}$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}'_{\perp}}{\gamma(1 + \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}}{c^2})}$$

$$v'_{\parallel} = \frac{v_{\parallel} - u}{1 - \frac{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}}{c^2}}$$

Supponendo $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}}$

1.2 Waves in dielectrics

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1)$$

e:

$$a_{\perp} = \frac{a'_{\perp} + \square}{denominator} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \gamma_j \omega - \omega^2} \\ \epsilon_p = \frac{Ze^2 N}{\epsilon_0 m} \end{cases} \quad (2)$$

[Lasciamo perdere!]

Questo quadrivettore velocità è invariante

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2 \quad (3)$$

$$u^{\mu} := \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\sigma_{Drude} = \frac{N f_0 e^2}{m \gamma_0 \epsilon_0} \quad (4)$$

Vediamo ora il quadrivettore accelerazione:

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{Per i plasmi} \quad (5)$$

$$a^{\mu} := \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \gamma \begin{pmatrix} c \frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} \mathbf{v} + \gamma \mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \gamma^4 \dot{\beta} \cdot \beta \\ \gamma^4 \dot{\beta} \cdot \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{a} \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{2}{1 + n(\omega)} \right] A(\omega) e^{i(k \cdot x - \omega t)}$$

(onda piana incidente in mezzo con $n(\omega)$)

$$a^2 = -\gamma^6 \left[a^2 - \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2}{c^2} \right] \quad (13)$$

2 Special relativity

2.1 Introduction

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} \quad (14)$$

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathcal{L}}{d\mathbf{v}} = m\gamma \mathbf{v} \quad (15)$$

$$ds = \frac{d\tau}{\gamma} \quad (6) \quad H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = m\gamma c^2 = \epsilon \quad (\text{Hamiltonian})$$

Introduciamo il quadrivettore momento:

$$p^\mu = mv^\mu = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$p^2 = mc^2 \quad (17)$$

Consideriamo ora un'onda piana, abbiamo **invarianza della fase**, poichè la fase è un conteggio di creste

$$\phi = k \cdot \mathbf{x} - \omega t = k' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' \quad (18)$$

Da qui, sostituendo x'^μ usando il boost di Lorentz, ricavo l'ultimo quadrivettore:

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Queste formule contengono l'effetto Doppler e la legge di aberrazione:

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta) \tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma \cos \theta - \beta} \quad (20)$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \quad (21)$$

2.2 Covarianza dell'elettrodinamica

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{E} \\ \frac{q}{c} (u_0 \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{pmatrix} \quad (22)$$

Voglio che il membro di destra sia un quadrivett, per cui introduco:

$$J^\mu := \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} \quad (23)$$

$$\partial^\mu J_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_\mu & \quad \text{gauge di Lorenz} \\ \square A^\mu &= 4\pi J^\mu \end{aligned} \quad (25)$$

Da cui:

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (26)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

$$F^{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{B}) \quad (28)$$

$$F_{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{B}) \quad (29)$$

$$F^{*\mu\nu} = (\mathbf{B}, \mathbf{E}) \quad (30)$$

$$F_{\mu\nu}^* = (-\mathbf{B}, -\mathbf{E}) \quad (31)$$

Riscriviamo le eq. di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (32)$$

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0 \quad (33)$$

$$\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$$

(forma alternativa per la seconda)

Posso riscrivere le eq. del moto in forma covariante

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (34)$$

2.3 Leggi di trasformazione dei campi

$$\text{stranote} \quad (35)$$

Vediamo alcuni invarianti

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = \text{cost} \quad (36)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \text{cost} \quad (37)$$

2.4 Lagrangiana e Hamiltoniana di particella

Un po' di formule a caso

$$\mathcal{L}_{free} = -\frac{mc^2}{\gamma} \quad (38)$$

$$\mathcal{L}\gamma = \text{cost} \quad (39)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d\mathcal{L}}{d\mathbf{v}} = \frac{d\mathcal{L}}{d\mathbf{x}} \quad (40)$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{free}}{d\mathbf{x}} = 0 \quad (41)$$

$$(42)$$

2.5 Soluzione all'eq. delle onde in 5 M.U. forma covariante

$$1 \text{ eV} \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (53)$$

Risolviemo l'equazione 25 a pagina 2, supponendo $J^\mu = J^\mu(x)$, utilizzando una funzione di Green:

$$\square_x D(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \quad (43)$$

$$z := x - x' \quad (44)$$

Passando ad uno spazio di Fourier si ha

$$D(k) = \frac{1}{k \cdot k} \quad (45)$$

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk D(k) e^{-ik \cdot x} \quad (46)$$

Risolvendo, si hanno due soluzioni:

$$D_{ritardata} = \frac{1}{2\pi} \theta(x_0 - x'_0) \delta[(x - x')^2] \quad (47)$$

$$D_{anticipata} = \frac{1}{2\pi} \theta(x'_0 - x_0) \delta[(x - x')^2] \quad (48)$$

3 Moving charges

Posso scrivere il quadrivettore delle sorgenti per una carica in moto come:

$$J^\mu = qc \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - r(\tau)) \quad (49)$$

$$u^\mu := \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad r(t) := \begin{pmatrix} ct \\ r(t) \end{pmatrix} \quad (50)$$

3.1 Lienerd-Wichert

Partiamo trovando i potenziali

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_r(x - x') J^\mu(x') \quad (51)$$

Sostituendo l'eq 49 a pagina 3, si ottiene

4 Notazione

$$\begin{array}{ll} X_\mu & \text{covariante} \\ X^\mu & \text{controvariante} \end{array} \quad (52)$$