Elettrodinamica classica

June 19, 2017

1 Maxwell equations

1.1 idk lol

$$\vec{A}(\mathbf{x},t) = \int d^3\mathbf{x}'dt'\vec{J}(\mathbf{x}',t)\frac{\delta(t-t'-\frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}{c})}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}$$
(α costanti se S.I.)

$$\phi(\mathbf{x},t) = \int d^3\mathbf{x}'dt'\rho(\mathbf{x}',t)\frac{\delta(t-t'-\frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}{c})}{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|}$$
(α altre costanti se S.I.)

1.2 Waves in dielectrics

$$\mathrm{D} = \epsilon_0\mathrm{E} + \mathrm{P} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 + \omega_p^2\sum_j \frac{\frac{f_j}{Z}}{w_j^2-\gamma_j\omega-\omega^2} \\ \epsilon_p = \frac{Ze^2N}{\epsilon_0 m} \end{cases} \tag{2}$$

$$\omega^2 = k^2c^2 + \omega_p^2 \tag{3}$$

$$\sigma_{Drude} = \frac{Nf_0e^2}{m\gamma_0\epsilon_0} \tag{4}$$

$$\frac{\epsilon(\omega)}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{Per i plasmi} \tag{5}$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{2}{1+n(\omega)}\right] A(\omega)e^{i(k\cdot x-\omega t)}$$
(onda piana incidente in mezzo con $n(\omega)$)

2 Special relativity

2.1 Introduction

$$ds = \frac{d\tau}{\gamma} \tag{6}$$

Trasformazioni delle velocità, dove $\mathbf{u}$ è la velocità di traslazione fra i due sistemi, e $\mathbf{v}$ è la velocità della particella nel primo sistema

$$\begin{aligned} v_\parallel &= \frac{v'_\parallel + u}{1+\frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{u}}{c^2}} \\ \mathbf{v}_\perp &= \frac{\mathbf{v}'_\perp}{\gamma(1+\frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{u}}{c^2})} \end{aligned} \tag{7}$$

$$v'_\parallel = \frac{v_\parallel - u}{1-\frac{\mathbf{v}'\cdot\mathbf{u}}{c^2}} \tag{8}$$

Supponendo $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{x}}$

$$a_x = \tag{9}$$

e:

$$a_\perp = \frac{a'_\perp + []}{denominator} \tag{10}$$

[Lasciamo perdere!]

Questo quadrivettore velocità è invariante

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} c\gamma \\ \mathbf{v}\gamma \end{pmatrix} \tag{11}$$

Vediamo ora il quadrivettore accelerazione:

$$a^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma\begin{pmatrix} c\frac{d\gamma}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt}\mathbf{v} + \gamma\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\gamma^4\dot{\beta}\cdot\beta \\ \gamma^4\dot{\beta}\cdot\beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{a} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$a^2 = -\gamma^6\left[a^2 - \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{a})^2}{c^2}\right] \tag{13}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} \tag{14}$$

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathcal{L}}{d\mathbf{v}} = m\gamma\mathbf{v} \tag{15}$$

$$H = \mathbf{p}\cdot\mathbf{v} - \mathcal{L} = m\gamma c^2 = \epsilon \quad \text{(Hamiltonian)}$$

Introduciamo il quadrivettore momento:

$$p^\mu = mv^\mu = m \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$p^2 = mc^2 \tag{17}$$

Consideriamo ora un'onda piana, abbiamo **invarianza della fase**, poichè la fase è un conteggio di creste

$$\phi = k \cdot \mathbf{x} - \omega t = k' \cdot \mathbf{x}' - \omega' t' \tag{18}$$

Da qui, sostituendo x'^μ usando il boost di Lorentz, ricavo l'ultimo quadrivettore:

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Queste formule contengono l'effetto Doppler e la legge di aberrazione:

$$\omega' = \gamma\omega(1 - \beta\cos\theta) \tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma\cos\theta - \beta} \tag{20}$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu \tag{21}$$

2.2 Covarianza dell'elettrodinamica

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q}{c}\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} \\ \frac{q}{c}(u_0\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \end{pmatrix} \tag{22}$$

Voglio che il membro di destra sia un quadrivett, per cui introduco:

$$J^\mu := \begin{pmatrix} \rho c \\ \rho \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\partial^\mu J_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \tag{24}$$

$$\partial^\mu A_\mu \qquad \text{gauge di Lorenz}$$

$$\Box A^\mu = 4\pi J^\mu \tag{25}$$

Da cui:

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{26}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$F^{\mu\nu} = (\mathbf{E}, \mathbf{B}) \tag{28}$$

$$F_{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{B}) \tag{29}$$

$$F^{*\mu\nu} = (\mathbf{B}, \mathbf{E}) \tag{30}$$

$$F^*_{\mu\nu} = (-\mathbf{B}, -\mathbf{E}) \tag{31}$$

Riscriviamo le eq. di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{32}$$

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0 \tag{33}$$

$$\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\rho\mu} = 0$$

(forma alternativa per la seconda)

Posso riscrivere le eq. del moto in forma covariante

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m\frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \tag{34}$$

2.3 Leggi di trasformazione dei campi

$$\textit{stranote} \tag{35}$$

Vediamo alcuni invarianti

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 = cost \tag{36}$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = cost \tag{37}$$

2.4 Lagrangiana e Hamiltoniana di particella

Un po' di formule a caso

$$\mathcal{L}_{free} = -\frac{mc^2}{\gamma} \tag{38}$$

$$\mathcal{L}\gamma = cost \tag{39}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathcal{L}}{d\mathbf{v}} = \frac{d\mathcal{L}}{d\mathbf{x}} \tag{40}$$

$$\frac{d\mathcal{L}_{free}}{d\mathbf{x}} = 0 \tag{41}$$

$$\tag{42}$$

2.5 Soluzione all'eq. delle onde in forma covariante

Risolviamo l'equazione 25 a pagina 2, supponendo $J^\mu = J^\mu(x)$, utilizzando una funzione di Green:

$$\Box_x D(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \tag{43}$$

$$z := x - x' \tag{44}$$

Passando ad uno spazio di Fourier si ha

$$D(k) = \frac{1}{k \cdot k} \tag{45}$$

$$D(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk D(k) e^{-ik\cdot x} \tag{46}$$

Risolvendo, si hanno due soluzioni:

$$D_{ritardata} = \frac{1}{2\pi}\Theta(x_0 - x_0')\delta[(x - x')^2] \tag{47}$$

$$D_{anticipata} = \frac{1}{2\pi}\Theta(x_0' - x_0)\delta[(x - x')^2] \tag{48}$$

3 Moving charges

Un po' di notazione

x^μ	osservatore
r^μ	carica in moto
R	distanza fra osservatore e carica
$\hat{\mathbf{n}}$	versore dalla carica all'osservatore

Posso scrivere il quadrivettore delle sorgenti per una carica in moto come:

$$J^\mu = qc \int d\tau u^\mu(\tau)\delta^{(4)}(x - r(\tau)) \tag{49}$$

$$u^\mu := \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \mathbf{v} \end{pmatrix} \qquad r(t) := \begin{pmatrix} ct \\ r(t) \end{pmatrix} \tag{50}$$

3.1 Lienerd-Wichert

Partiamo trovando i potenziali

$$A^\mu(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_r(x - x')J^\mu(x') \tag{51}$$

Sostituendo l'eq 49 a pagina 3, si ottiene

$$A^\mu(x) = 2q \int d\tau u^\mu(\tau)\Theta(x_0 - r_0(\tau))\delta([x - r(\tau)]^2) \tag{52}$$

Considering the properties of the delta, and that $\delta([x-r(\tau)])$ implies that only the points on the trajectory that lie on the backward light cone starting from x^μ can contribute to the potential (and also that $x_0 - r_0(\tau_0) = |\mathbf{x} - \mathbf{r}(\tau)|$), we have:

$$A^\mu(x) = \left.\frac{qu^\mu(\tau)}{u^\nu(\tau)(x - r(\tau))_\nu}\right|_{\tau=\tau_0} \tag{53}$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \left.\frac{q}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R}\right|_{\tau=\tau_0} \qquad A(\mathbf{x}, t) = \left.\frac{q\boldsymbol{\beta}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R}\right|_{\tau=\tau_0} \tag{54}$$

$$\text{con } \tau_0 \text{ definito da } (x - r(\tau_0))^2 = 0 \tag{55}$$

Tramite derivazione di 52, si trova il tensore del campo EM

$$F^{\mu\nu} = \frac{e}{u \cdot (x - r)} \frac{d}{d\tau} \left.\left[\frac{(x - r)^\mu u^\nu - (x - r)^\nu u^\nu}{u \cdot (x - r)}\right]\right|_{\tau=\tau_0} \tag{56}$$

E di conseguenza i campi

$$\mathbf{E} = q \left.\frac{\mathbf{n} - \beta}{\gamma^2(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^3 R^2}\right|_{\tau=\tau_0} + \frac{q}{c} \cdot \left.\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \beta) \times \dot{\beta}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \beta)^3 R}\right|_{\tau=\tau_0} \tag{57}$$

$$\mathbf{E} = \text{campo di velocita}'(\alpha\frac{1}{r^2}) + \text{campo di accelerazione}(\alpha\frac{1}{r}) \tag{58}$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{n}]_{rit} \times \mathbf{E} \tag{59}$$

$$\tag{60}$$

Sappiamo che

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \tag{61}$$

Considerando solo il campo di radiazione, e mettendoci nel caso non relativistico, otteniamo le *formule di Larmor* non relativistica

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3}\dot{v}^2 \sin^2\theta \tag{62}$$

$$P = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^2}|\dot{v}|^2 \tag{63}$$

4 Notazione

$$\begin{aligned} &X_\mu && \text{covariante} \\ &X^\mu && \text{controvariante} \end{aligned} \tag{64}$$

5 M.U.

$$1 \text{ eV} \approx 1.6 \cdot 10^{-19}\text{J} \tag{65}$$