用计算机程序计算三维随机漫步

2015301020169 马奇云

引言

在一维空间中，一个粒子可能向左或向右运动，向左或向右是随机的，运动的距离是单位长度或随机的任意长度，并且每一次运动的起点都是上一次运动的终点。这样的模型称为一维随机漫步模型。将它推广到三维空间，一个粒子向随机方向运动单位距离或随机距离，并且每一次运动的起点都是上一次运动的终点。这样的模型即是三维随机漫步模型。

随机漫步模型是布朗运动的理想数学状态，在数学、物理、互联网链接分析和金融股票市场中都有应用。研究随机漫步模型具有重要意义。

一维随机运动模型

假设一维空间中在坐标 x=0 处有一个粒子，它向左或向右运动的概率均为 50%，每一次它运动的距离为单位长度。设粒子运动 n 次以后的位置为 xn，则有

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

其中s_i是粒子第 i 次运动的位移，向左运动一个单位长度记为-1，向右运动一个单位长度记为 1。

许多这样的粒子运动 n 次后，由于它们每次向左运动的可能性与向右运动的可能性相同，故它们的平均位置$\langle x_n \rangle$=0。考虑这些粒子位置平方的平均$\langle x_n^2 \rangle$。

$$< x_n^2 >= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} s_i s_j)$$

由于每一步运动之间相互独立，当 i≠ j 时$s_i s_j$取± 1的可能性相等。因此，当运动次数非常大时，上式转化为

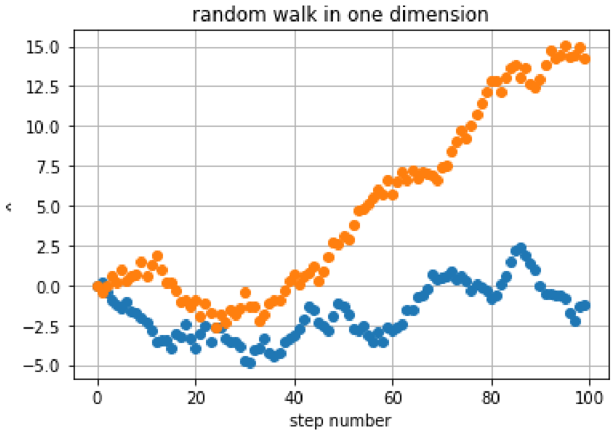
$$< x_n^2 >= \sum_{i=1}^{n} s_i^2 = n^2$$

上式中已经应用了$s_i^2 = 1$。由于运动次数与时间成正比，因此有

$$< x_n^2 >= 2\mathrm{Dt}$$

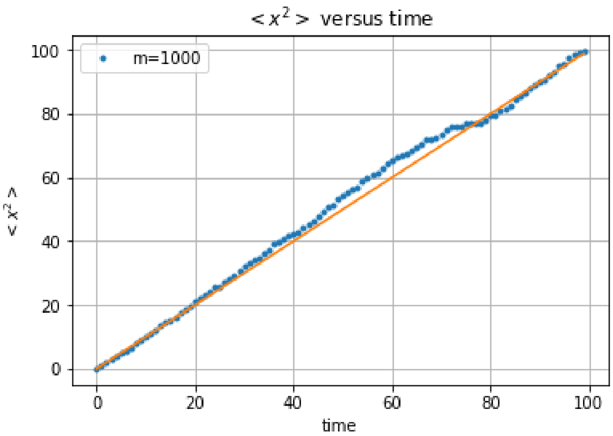
D 是一个常数，这里 D=1/2。

下面，我们用计算机程序来做随机漫步实验，下面是一些结果展示



左图中展示了两次一维随机漫步的结果，每次随机漫步运动 100 步，每步运动单位长度。由于运动的随机性，两次运动最后的位置坐标相差很远。

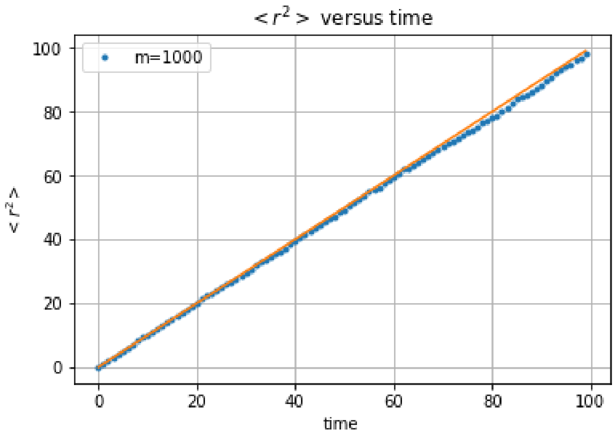
右图展示了 1000 次随机漫步实验的位置平方的平均与运动步数之间的关系图，蓝点为实际实验得到的数值，橙色线为蓝点的线性拟合线，可以看出拟合线斜率为 1，这与上面公式推得的结果一致。



三维随机漫步

考虑一个粒子在三维空间中做随机漫步，每次运动单位长度，每次运动的方向完全随机。这样的粒子的运动是否还满足位置的平方平均$< r^2 >$与运动步数成正比呢？

把上面用到的计算机程序稍作修改，计算三维随机漫步实验，并做出$< r^2 >$与步数的关系图。



可以看出，经过对 1000 个粒子的位置坐标的平方平均，看出它依然与运动步数成正比，并且依然满足与一维情形时相同的公式，式中常数 D 依然为 1/2。

结论

通过使用计算机程序对三维随机漫步运动的模拟，我们可以得出结论，当粒子向各个方向运动的可能性相同，并且每次运动单位长度时，三维随机漫步依然是散布性的(diffusive)，即满足

$$< x_n^2 >= n^2 = 2\mathrm{Dt}$$