CONTRÔLE DU 19 NOVEMBRE 2022

Corrigé

Les documents, calculatrices et objets connectés ne sont pas autorisés.
Toute réponse doit être justifiée

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet, on rappelle que $\mathcal{L}(E)$, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans E muni de la norme $|||\cdot|||$ subordonnée à $\|\cdot\|$ est aussi complet.

(1) Montrer que

$$\forall f, g \in \mathcal{L}(E), |||f \circ g||| \leq |||f||| \,.\, |||g||| \,.$$

Soit $v \in E$. On a

$$\|f \circ g(v)\| = \|f(g(v))\| \leq |||f|||\, \|g(v)\| \leq (|||f||| \cdot |||g|||)\, \|v\|,$$

d'où on trouve la propriété sous-multiplicative de $|||\cdot|||$ souhaitée.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on convient de noter $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

(2) Si $f \in \mathcal{L}(E)$, montrer que la série de terme général $\frac{1}{n!}f^n$ est convergente dans $\mathcal{L}(E)$.

On montrera que la série en question est absolument convergente : comme $(\mathcal{L}(E), |||\cdot|||)$ est complet, on en déduira que la série $\sum_n \frac{1}{n!}f^n$ est convergente. Il nous suffit donc montrer que la série de terme général $\frac{1}{n!}|||f^n|||$ converge. Par sous-multiplicativité, on a que $\frac{1}{n!}|||f^n||| \leq \frac{1}{n!}|||f|||^n$.

Donc la série dé terme général $\frac{1}{n!}|||f^n|||$ converge si la série $\phi := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}z^n$ converge, où $z = |||f|||$.

Mais le rayon de convergence de ϕ est $+\infty$ (il s'agit de la série de Taylor de l'exponentielle), donc ϕ converge, comme souhaité.

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^3 + 3xy^2}{x^2 + 6y^2}.$$

(1) Montrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

La fonction f est le rapport de deux fonctions polynomiales, $f(x, y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. Les fonctions polynomiales sont différentiables en tout $\mathbb{R}^2$. De plus, l'application polynomiale Q ne s'annule que en $(x, y) = (0,0)$. Donc f est le rapport de deux fonctions différentiables, avec celle au dénominateur qui ne s'annule pas dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle est donc différentiable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(2) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

Pour montrer la continuité en 0, il suffit montrer que

$$\lim_{\substack{\|(x,y)\| \to 0 \\ (x,y) \neq (0,0)}} |f(x, y)| = 0,$$

où $\|\cdot\|$ est n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^2$, par exemple la norme euclidienne. On remarque que $x^2 + 6y^2 \geq x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2$. De façon similaire, $|x^3 + 3xy^2| \leq |x|(x^2 + 3y^2) \leq 3\|(x, y)\|^3$. On en déduit que $|f(x, y)| \leq 3\|(x, y)\|$, et on conclut que la limite pour $\|(x, y)\| \to 0$ est 0 par le lemme des gendarmes.

(3) Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ suivant toute direction.
Considérons la dérivée directionnelle lelong la direction $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il faut donc calculer la dérivée en 0 de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto f(ta,tb)$. Par calcul directe, on a que $g(t) = \frac{a^3+3ab^2}{a^2+6b^2}t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial(a,b)}(0) = \frac{a^3+3ab^2}{a^2+6b^2}.$$

(4) f est-elle différentiable en $(0,0)$?
On montre que f n'est pas différentiable en $(0,0)$. Supposons par l'absurde qu'elle l'est et notons par $L := Df_{(0,0)}$ sa différentielle. Alors l'application qui a (a,b) associe $\frac{\partial f}{\partial(a,b)}(0)$ devrait etre linéaire (donnée par L agissant sur (a,b) vu comme vecteur colonne). Mais l'application $L : (a,b) \mapsto \frac{a^3+3ab^2}{a^2+6b^2}$ (pour $(a,b) \neq (0,0)$, et 0 si $(a,b) = (0,0)$) n'est pas linéaire (car, par exemple, $L(1,0) = 1$, $L(0,1) = 0$, mais $L(1,1) = \frac{4}{7} \neq 1 = L(1,0) + L(0,1)$). On en conclut que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Etant donnée une matrice A, on notera ${}^tA$ sa matrice transposée.

(1) Montrer l'application suivante est continue.

$$f: \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^tA.A \end{array}.$$

L'application f est continue si et seulement si $\pi_{i,j} \circ f$ est continue pour tout $i,j \in \{1,\dots,n\}$, où $\pi_{i,j}$ est la fonction qui associe à toute matrice A son coefficient en position (i,j). Or, l'application $\pi_{i,j} \circ f$ est polynomiale (de degré 2) en les coefficients $(a_{h,k})$ de A. Explicitement,

$$\pi_{i,j} \circ f(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}a_{k,j}.$$

On en déduit que $\pi_{i,j} \circ f$ est continue pour tout (i,j), et donc que f est continue.

(2) On rappelle qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tA.A = I_n$ où I_n désigne la matrice de l'identité. Montrer que l'ensemble $O(n)$ des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.
On peut décrire $O(n)$ comme l'image réciproque par f de la matrice I_n. Comme f est continue et $\{I_n\}$ est fermé (en étant un point), on en déduit que $O(n) = f^{-1}(\{I_n\})$ est fermé.

(3) Montrer que le complémentaire de $O(n)$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
Il suffit montrer que pour tout $A \in O(n)$ il existe une suite $(A_k)_k$ telle que $A_k \to A$ et $A_k \notin O(n)$ pour tout k assez grand. Pour cela, soit $A_k = (1+\frac{1}{k})A$ (avec $k \geq 1$). On a que $\|A_k - A\|_\infty = \frac{1}{k}\|A\|_\infty \to 0$ pour $k \to +\infty$. De plus,

$$f(A_k) = \left(1+\tfrac{1}{k}\right)^2 f(A) = \left(1+\tfrac{1}{k}\right)^2 I_n \neq I_n,$$

donc $A_k \notin O(n)$, comme souhaité.

(4) Quel est l'intérieur de $O(n)$?
L'intérieur de $O(n)$ dans $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble vide. En fait, si A est un point intérieur à $O(n)$, alors il existe $r > 0$ tel que la boule centrée en A et de rayon r est contenue dans $O(n)$. En particulier A n'appartient pas à l'adhérence du complémentaire de $O(n)$ contre le point précédent qui montrait que $M_n(\mathbb{R}) \setminus O(n)$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

(J) Montrer que f est différentiable et donner sa différentielle.
Comme les applications polynomiales sont différentiables, le même argument dit que f est différentiable en tout point. Soit maintenant $A \in M_n(\mathbb{R})$. On calcule la différentielle en A en calculant la dérivée directionnelle lelong toute direction $H \in M_n(\mathbb{R})$. Pour cela, il faut calculer la dérivée en 0 de la fonction $s \mapsto f(A+sH)$. On a

$$f(A+sH) - f(A) = ({}^tA + s\,{}^tH)(A+sH) - {}^tAA = s\big({}^tHA + {}^tAH\big) + s^2\big({}^tHH\big).$$

On en déduit que $Df_A(H) = {}^tHA + {}^tAH$, et donc que Df_A est l'endomorphisme linéaire de M_n qui à H associe ${}^tHA + {}^tAH$.

Exercice 4. On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On le munit de l'application $N : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E, N(f) = \max_{t\in[0,1]} |e^t f(t)|.$$

(1) Montrer que N est une norme.
Dans le texte, on a déjà que E est un espace vectoriel, et que N est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il faut montrer que N est positive et non-dégénérée, absolue-homogène, et satisfait la propriété triangulaire.
Comme $|e^t f(t)| \geq 0$ pour tout t, on en déduit que $N(f) \geq 0$ pour tout f. Supposons que $N(f) = 0$. Cela arrive si et seulement si $|e^t f(t)| = 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Comme $e^t \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, on en déduit que $f(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$, et donc que $f = 0$.
Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$. On a que $|e^t(\lambda f)(t)| = |e^t \lambda f(t)| = |\lambda||e^t f(t)|$. En prenant le max sur $t \in [0,1]$, on en déduit que $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.
Soient $f, g \in E$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a que $|e^t(f+g)(t)| = |e^t(f(t)+g(t))| \leq |e^t f(t)| + |e^t g(t)|$. Mais alors

$$\begin{aligned} N(f+g) &= \max_{t\in[0,1]} \left|e^t(f+g)(t)\right| \leq \max_{t\in[0,1]} \left(\left|e^t f(t)\right| + \left|e^t g(t)\right|\right) \\ &\leq \max_{(s,t)\in[0,1]^2} \left(|e^s f(s)| + \left|e^t g(t)\right|\right) = \max_{s\in[0,1]} |e^s f(s)| + \max_{t\in[0,1]} \left|e^t g(s)\right| = N(f) + N(g). \end{aligned}$$

On définit l'application $F : E \to E$ qui à $f \in E$ associe $F(f)$ définie par

$$\forall t \in [0,1], F(f)(t) = \int_0^t e^{s-t} f(s)ds.$$

(2) Montrer que F est une application linéaire continue de (E,N) dans (E,N).
Tout d'abord, on montre que F est linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $t \in [0,1]$ on a que

$$\begin{aligned} F(\lambda f + \mu g)(t) &= \int_0^t e^{s-t}(\lambda f + \mu g)(s)ds = \int_0^t e^{s-t}(\lambda f(s) + \mu g(s))ds \\ &= \lambda \int_0^t e^{s-t} f(s)ds + \mu \int_0^t e^{s-t} f(s)ds = \big(\lambda F(f) + \mu F(g)\big)(t). \end{aligned}$$

On en déduit que $F(\lambda f + \mu g) = \lambda F(f) + \mu F(g)$, et donc que F est linéaire.
On montre maintenant la continuité de F. On remarque que E a dimension infinie, et donc la réponse n'est pas triviale : F est continue si et seulement si

$$|||F|||_N := \sup_{N(f)=1} N(F(f)) < +\infty.$$

Or,

$$|F(f)(t)| = \left|\int_0^t e^{s-t}f(s)ds\right| = e^{-t}\left|\int_0^t e^s f(s)ds\right|$$
$$\leq e^{-t}\int_0^t e^s|f(s)|ds \leq e^{-t}tN(f).$$

On en déduit que

$$N(F(f)) = \max_{t\in[0,1]} e^t|F(f)(t)| \leq \max_{t\in[0,1]} tN(f) = N(f).$$

Donc $|||F|||_N \leq 1$ et F est continue.

(3) Calculer $|||F|||_N$ où $|||\cdot|||_N$ désigne la norme subordonnée à N.
Dans le point précédent on a déjà montré que $|||F|||_N \leq 1$. On va montrer que $|||F|||_N = 1$. Pour cela, on considère la fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(t) = e^{-t}$. Dans ce cas on a $N(f) = \max_{t\in[0,1]} |e^t f(t)| = 1$, et $F(f)(t) = \int_0^t e^{s-t}e^{-s}ds = te^t$, d'où $N(F(f)) = 1$. On en déduit $|||F|||_N \geq 1$ comme souhaité.

Exercice 5. Etant donné un réel $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = |xy|^\alpha$.

(1) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.
Indication : on pourra tirer de l'inégalité $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ une majoration de $|xy|$.
On remarque que la restriction de f sur les axes coordonnées est constante (nulle). On en déduit que, si f est différentiable en $(0,0)$, sa différentielle en $(0,0)$ doit etre nulle. Il suffit donc montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Par l'indication, on a que $2|xy| \leq \|(x,y)\|^2$. En alternative, $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et de façon analogue $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$. Dan les deux cas, on en déduit que $|xy|^{\frac{1}{2}} \leq \|(x,y)\|$. Donc

$$\frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} \leq \|(x,y)\|^{\alpha-\frac{1}{2}}.$$

Ce dernier tend vers 0 car $\alpha > \frac{1}{2}$. On conclut par le lemme des gendarmes.

(2) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,1)$.
Indication : on étudiera sa dérivée directionnelle dans la direction de l'axe des abscisses.
On a que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{d}{dt}f(t,1)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|^\alpha}{t}.$$

Pour $t > 0$ on a que $\frac{|t|^\alpha}{t} = t^{\alpha-1} \to +\infty$, car $\alpha < 1$. On en déduit que f n'admet pas la première dérivée partielle en $(0,1)$, et donc elle n'est pa différentiable en $(0,1)$.