

Contrôle du 21 mars 2022
Durée : 1 heure

*Les documents et calculatrices sont interdits durant l'épreuve.
Les réponses doivent être justifiées.*

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. Réaliser le corps \mathbb{F}_{27} comme corps de rupture d'un polynôme de $\mathbb{F}_3[X]$. Ce corps contient-il un sous-corps à 9 éléments ?
2. Un corps de rupture d'un polynôme irréductible est-il toujours un corps de décomposition de ce polynôme ?

Exercice 2

Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{12}} \in \mathbb{C}$.

1. Justifier que ζ est algébrique sur \mathbb{Q} .
2. Montrer que le polynôme minimal de ζ divise $X^4 - X^2 + 1$.
3. Montrer que $\zeta \in \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$.
4. Démontrer que $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$.
5. Quel est le degré de $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ sur \mathbb{Q} ?
6. En déduire le polynôme minimal de ζ sur \mathbb{Q} .
7. Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ est-il un corps de décomposition du polynôme $X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$?
8. Même question pour le polynôme $X^{12} - 1 \in \mathbb{Q}[X]$.