Université Paris Cité
Intégration, séries de Fourier
L3 groupes MFA & MI, 2021-22

Campus des Grands Moulins
MT16E010
13 avril 2022

Un corrigé de l'interrogation écrite n° 4

Questions de cours

a) *Soient X un ensemble, $\mathcal{A}$ une tribu sur X, et μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.*

(4) *Définir $\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$.*

Pour toute $f\colon X \to \mathbb{C}$ mesurable ($\mathbb{C}$ est muni de $\mathscr{B}(\mathbb{C})$), on pose : $\|f\|_2 := \big(\int_X |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x)\big)^{\frac12} \leq +\infty$.

On note $\boxed{\mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu) := \{f\colon X \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \|f\|_2 < +\infty\}}$, $\mathcal{N}_\mu$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ formé des fonctions mesurables nulles μ-presque partout, et $\boxed{L^2_{\mathbb{C}}(\mu) := \mathscr{L}^2_{\mathbb{C}}(\mu)/\mathcal{N}_\mu}$.

[On sait que $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ muni de $\dot{f} \mapsto \|f\|_2$ est un espace vectoriel normé.]

(3) b) *Énoncer le « théorème de représentation de Riesz » : hypothèse ? conclusion ?*

Hypothèse.

Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ le produit scalaire de H.

(Un espace de Hilbert est un espace vectoriel normé complet dont la norme vient d'un produit scalaire.)

Conclusion.

Pour toute $\varphi\colon H \to \mathbb{K}$ linéaire continue, il existe $y \in H$ unique tel que $\boxed{\varphi(x) = \langle x, y\rangle}$ pour tout $x \in H$.

(En notant H' l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de H dans $\mathbb{K}$, on a plus précisément : l'application $\mathbb{R}$-linéaire $y \in H \mapsto \langle\,\cdot\,, y\rangle \in H'$ est bijective et conserve la norme.)

Exercice 1. *On pose* $\Omega =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ *et* $\Omega' =]0, +\infty[\times]0, 1[$.

On considère $S\colon \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega' \\ (x,y) & \longmapsto & (u,v) := (x+y, \frac{x}{x+y}) \end{array}$ *et* $T\colon \begin{array}{ccc} \Omega' & \longrightarrow & \Omega \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) := (uv, u(1-v)) \end{array}$.

On admet que les applications S et T sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Calculer $I := \iint_\Omega \frac{x^2 y}{x+y}\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *en utilisant le changement de variable* $(u,v) = S(x,y)$.

(8) Indication : *on pourra utiliser l'égalité* $(\star)$ $\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$ *valable pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

• Les parties Ω et Ω' de $\mathbb{R}^2$ sont des produits de deux ouverts de $\mathbb{R}$, donc des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
Les applications S et T sont rationnelles, donc de classe C^1.
Par conséquent, S est un C^1-difféomorphisme de Ω sur Ω'.

De plus, pour tout $(u,v) \in \Omega'$, en notant $(x,y) = T(u,v) = (uv, u(1-v))$ on trouve :

$$(\mathrm{Jac}T)(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \frac{D(x,y)}{D(u,v)} := \det\big((\mathrm{Jac}T)(u,v)\big) = -u.$$

• On définit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ en posant : $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x+y}\,\mathrm{e}^{-(x+y)}$ pour tout $(x,y) \in \Omega$.
L'application f est continue donc borélienne. Par ailleurs f est positive.

• On effectue le changement de variable $(u,v) = S(x,y) = (x+y, \frac{x}{x+y})$ entre Ω et Ω'.
Vu que $x+y = u$, $x = uv$ et $y = u(1-v)$, on obtient : $f(x,y) = \frac{(uv)^2\,u(1-v)}{u}\,\mathrm{e}^{-u} = u^2\,v^2\,(1-v)\,\mathrm{e}^{-u}$.
De plus : $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$.

On utilise le théorème de changement de variable pour les fonctions boréliennes positives :

$$I = \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Omega'} f(T(u,v))\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{\Omega'} u^3\,v^2\,(1-v)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

On applique ensuite le théorème de Fubini-Tonelli (fonction positive, continue donc borélienne) :

$$I = \iint_{\Omega'} u^3\,v^2\,(1-v)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \Big(\int_0^{+\infty} u^3\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\Big)\underbrace{\Big(\int_0^1 v^2\,(1-v)\,\mathrm{d}v\Big)}_{\frac{1}{12}}.$$

D'où, à l'aide de l'égalité $(\star)$ de l'indication avec $n = 3$: $\boxed{I = \frac12}$.

Exercice 2. *On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ et $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\lambda)$ muni de $\| \ \|_2$.*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose : $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n^\alpha]}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(3) a) *Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on : $\|f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?*

On a : $\|f_n\|_2 = \frac{1}{n}\big\|\mathbb{1}_{[0,n^\alpha]}\big\|_2 = \frac{1}{n}\big(\int_0^{n^\alpha} \mathrm{d}x\big)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{\alpha}{2}-1}$ donc $\|f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \frac{\alpha}{2} - 1 < 0.$

D'où : $\boxed{\|f_n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \alpha < 2}$.

(4) b) *Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge t-elle au sens de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$?*

Si (les classes d'équivalences des termes de) la suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge(nt) vers une (classe de) fonction(s) f dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq1}$ a une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq0}$ qui converge simplement presque partout vers f. Or la suite $(f_n)_{n\geq1}$ converge simplement vers 0 car $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$. Ainsi la seule limite possible pour la suite $(f_n)_{n\geq1}$ dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ est la fonction nulle.

Compte tenu du (a), on obtient : $\boxed{(f_n)_{n\geq1} \text{ converge dans } L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \alpha < 2}$.