Contrôle n° 4

Exercice 1.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

1. Déterminer le gradient et la matrice hessienne de f en chaque $(x, y) \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer la nature de ces points critiques (minimum local, maximum local, point selle).

Solution :

1. f est polynômiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. Le gradient au point (x, y) est

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x(x^2-1)-2(2xy-1)(x^2y-x-1) \\ -2x^2(x^2y-x-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x^3-4x^3y+2x+6x^2y+4xy-2 \\ -2x^4y+2x^3+2x^2 \end{pmatrix}$$

et la Hessienne au point (x, y) est

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x^2-12x^2y^2+12xy+4y+2 & -8x^3y+6x^2+4x \\ -8x^3y+6x^2+4x & -2x^4 \end{pmatrix}$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x(x^2-1)-2(2xy-1)(x^2y-x-1)=0 \\ -2x^2(x^2y-x-1)=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y-x-1=0 \\ -4x(x^2-1)=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x=0 \\ 2=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y-x-1=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2y-x-1=0 \\ x^2=1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -1=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}
\end{aligned}.$$

Les points critiques de f sont donc $(-1,0)$ et $(1,2)$.

3. On calcule la Hessienne en les points critiques

$$\nabla^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} -22 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

On obtient que $\det\big(\nabla^2 f(-1,0)\big) = 18 > 0$ et $\operatorname{tr}\big(\nabla^2 f(-1,0)\big) = -12 < 0$ donc $(-1,0)$ est un maximum local strict et $\det\big(\nabla^2 f(1,2)\big) = 8 > 0$ et $\operatorname{tr}\big(\nabla^2 f(1,2)\big) = -24 < 0$ donc $(1,2)$ est un maximum local strict.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application définie par $f(x, y, z) = (e^y + e^z, e^x - e^z, x - y)$.

1. Quel est le rang de la matrice Jacobienne de f au point (x, y, z) ?
2. Montrer qu'au voisinage de tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.
3. f est-elle un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$?

Solution :

1. La matrice Jacobienne de f au point (x, y, z) est

$$\mathbb{J}f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & e^y & e^z \\ e^x & 0 & -e^z \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de déterminant $\det\big(\mathbb{J}f(x, y, z)\big) = -e^z\,(e^x + e^y) < 0$ donc la matrice est de rang 3

2. Par le théorème d'inversion locale, comme pour tout point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{J}f(x, y, z)$ est inversible, il existe un voisinage ouvert U de (x, y, z) et un voisinage ouvert V de $f(x, y, z)$ tels que $f : U \to V$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

3. Pour montrer la question, il suffit de montrer que f est injective. Soit $(a, b, c) \in f(\mathbb{R}^3)$. Montrons que l'équation $(a, b, c) = f(x, y, z)$ admet au plus une solution. (En fait, on calcule explicitement la fonction réciproque). On obtient par somme des deux premières coordonnées et en passant à l'exponentielle dans la troisième

$$e^x + e^y = a + b \text{ et } e^x e^{-y} = ec$$

et on déduit par substitution

$$(e^c + 1)e^y = a + b \text{ et } (e^{-c} + 1)e^x = a + b$$

d'où on tire

$$x = \ln\left(\frac{a+b}{e^{-c}+1}\right) \text{ et } y = \ln\left(\frac{a+b}{e^c+1}\right)$$

puis

$$z = \ln\left(\frac{e^c a + b}{e^c + 1}\right).$$

Ainsi, $f : \mathbb{R}^3 \to f(\mathbb{R}^3)$ est bijective. Grâce au théorème d'inversion locale (question précédente), c'est une application ouverte et sa fonction réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$. Donc c'est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 3.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ associée au produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application norme définie par $f(x) = \|x\|$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. Montrer que f n'est pas différentiable en 0.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En remarquant que pour $h \in \mathbb{R}^2$, $\|x + h\| = \sqrt{\|x + h\|^2}$ et que $\|x + h\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2$, effectuer le développement limité de f en x à l'ordre 2.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $u, v \in \mathbb{R}^n$. En déduire $Df(x).u$, $D^2 f(x).(u, u)$ à l'aide de la formule de Taylor, puis $D^2 f(x).(u, v)$.
5. La fonction $\cos \circ f$ est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^n$?

Solution :

1. L'application $\|.\|^2 : x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ est polynômiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et l'image réciproque par $\|.\|^2$ de $]0, +\infty[$ est $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ car la norme est définie positive. Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par composition.

2. On a $f((t, 0, \cdots, 0)) = |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cette application n'est pas dérivable en 0 (la dérivée à gauche vaut -1 et la dérivée à droite vaut 1). Donc f n'admet pas de dérivées partielles en 0. Elle n'est donc pas différentiable en 0.

3. On rappelle le développement limité suivant lorsque $t \to 0$

$$(1 + t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} t^2 + o(t^2)$$

soit lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ on a

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$$

donc si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et h tel que $\|h\| < \|x\|$,

$$\begin{aligned}
\|x+h\| = \sqrt{\|x+h\|^2} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2} &= \|x\| \sqrt{1 + 2\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h\right\rangle + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}} \\
&= \|x\| \left(1 + \frac{1}{2}\left(2\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h\right\rangle + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}\right) - \frac{1}{8}\left(2\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h\right\rangle + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}\right)^2 + o\left(\left(2\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h\right\rangle + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}\right)^2\right)\right)
\end{aligned}$$

lorsque $\|h\| \to 0$. En développant le carré et en ne gardant que les termes d'ordre 2 en $\|h\|$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|x+h\| &= \|x\| \left(1 + \left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h\right\rangle + \frac{1}{2}\frac{\|h\|^2}{\|x\|^2} - \frac{1}{8}\left(2\left\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h\right\rangle\right)^2 + o\left(\|h\|^2\right)\right) \\
&= \|x\| + \left\langle \frac{x}{\|x\|}, h\right\rangle + \frac{1}{2}\left(\frac{\|h\|^2}{\|x\|} - \frac{(\langle x, h\rangle)^2}{\|x\|^3}\right) + o\left(\|h\|^2\right)
\end{aligned}$$

4. De la formule de Taylor, on déduit

$$Df(x).h = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, h\right\rangle$$

et

$$D^2 f(x)(h,h) = \frac{\|h\|^2}{\|x\|} - \frac{(\langle x, h\rangle)^2}{\|x\|^3}$$

et comme $D^2 f(x)(u,v)$ est bilinéaire symétrique par rapport à (u,v) on a

$$\begin{aligned}
D^2 f(x)(u,v) &= \frac{D^2 f(x)(u+v, u+v) - D^2 f(x)(u,u) - D^2 f(x)(v,v)}{2} \\
&= \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2\|x\|} + \frac{(\langle x, u+v\rangle)^2 - (\langle x, u\rangle)^2 - (\langle x, v\rangle)^2}{2\|x\|^3} \\
&= \frac{\langle u, v\rangle}{\|x\|} + \frac{\langle x, u\rangle \langle x, v\rangle}{\|x\|^3}
\end{aligned}$$

5. $\cos \circ f$ est bien sûr différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par composition (et la question 1). Montrons qu'elle est différentiable. Lorsque $\|x\| \to 0$ on a le développement limité suivant

$$\cos\left(\sqrt{\|x\|^2}\right) = 1 - \frac{\|x\|^2}{2} + o\left(\|x\|^2\right) = 1 + o(\|x\|)$$

donc $\cos \circ f$ est différentiable en 0 et $D\left(\cos \circ f\right)(0) = 0$.

On peut même montrer que $\cos \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ en remarquant que $\cos(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$

Exercice 4.

Pour $n > 1$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur à n. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{3n}[X]$ de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$. Pour tout $f \in \mathbb{R}_n[X]$, on considère l'application linéaire $L_f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{3n}[X]$ définie par $L_f(h) = f^2 h$.

1. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{R}_n[X]$, l'application linéaire $L_f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{3n}[X]$ est continue, et calculer sa norme.
2. Soit l'application $\Psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{3n}[X]$ définie par $\Psi(f) = f^3$. Montrer que Ψ est différentiable sur $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa différentielle $D\Psi(f)$ en $f \in \mathbb{R}_n[X]$.

Solution :

1. L_f est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie et pour tout h,

$$\left\|L_f(h)\right\|_\infty = \left\|f^2 h\right\|_\infty \leq \left\|f^2\right\|_\infty \|h\|_\infty$$

donc on obtient

$$\left\|L_f\right\| \leq \left\|f^2\right\|_\infty$$

et en choisissant $h = 1$ on obtient $\left\|L_f(1)\right\|_\infty = \left\|f^2\right\|_\infty$ d'où

$$\left\|L_f\right\| = \left\|f^2\right\|_\infty$$

2. On a

$$\Psi(f+h) = (f+h)^3 = f^3 + 3f^2h + fh^2 + h^3 = \Psi(f) + 3L_f(h) + fh^2 + h^3.$$

et on a lorsque $\|h\|_\infty \to 0$,

$$\left\| fh^2 + h^3 \right\|_\infty \leq \left\| f \right\|_\infty \|h\|_\infty^2 + \|h\|_\infty^3 = o(\|h\|_\infty)$$

donc Ψ est différentiable et $D\Psi(f).h = 3L_f(h)$.

Exercice 5.

On définit pour $x_1 < x_2 < x_3$ les coefficients $a_1(x_1,x_2,x_3)$, $a_2(x_1,x_2,x_3)$, $a_3(x_1,x_2,x_3)$ obtenus en développant le polynôme

$$P(t,x_1,x_2,x_3) = (t-x_1)(t-x_2)(t-x_3) = t^3 + a_3(x_1,x_2,x_3)t^2 + a_2(x_1,x_2,x_3)t + a_1(x_1,x_2,x_3).$$

On pose l'application $f = (a_1,a_2,a_3) : U \to \mathbb{R}^3$ où $U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 ; x_1 < x_2 < x_3\}$.

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est injective sur U.
3. Calculer les dérivées partielles $\partial_{x_i} a_j$ pour $1 \leq i,j \leq 3$ en calculant les dérivées partielles $\partial_{x_i} P$ de deux façons.
4. Soit $x = (x_1,x_2,x_3) \in U$. On note J la matrice jacobienne de f en x, et B la matrice de coefficients $b_{i,j} = x_i^{j-1}$. Montrer que BJ est une matrice diagonale inversible.
5. En déduire que $f(U)$ est ouvert puis que $f : U \to f(U)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.
6. Calculer la différentielle de f^{-1} en au point $f(x_1,x_2,x_3)$ pour $(x_1,x_2,x_3) \in U$.

Solution :

1. On remarque que $U = \Psi^{-1}\left(]0,+\infty[\times]0,+\infty[\right)$ où $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est l'application continue définie par

$$\Psi(x_1,x_2,x_3) = (x_3 - x_2, x_2 - x_1)$$

et $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ est ouvert. Donc U est ouvert.

2. Soit $(x_1,x_2,x_3) \in U$ et $(y_1,y_2,y_3) \in U$ tels que $f(x_1,x_2,x_3) = f(y_1,y_2,y_3)$. Par définition, on obtient l'égalité entre les polynômes $(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3) = (t-y_1)(t-y_2)(t-y_3)$ et par unicité des racines d'un polynôme, on obtient $\{x_1,x_2,x_3\} = \{y_1,y_2,y_3\}$. Enfin, comme on a $x_1 < x_2 < x_3$ et $y_1 < y_2 < y_3$, on obtient l'égalité voulue $(x_1,x_2,x_3) = (y_1,y_2,y_3)$. f est donc injective.

3. On a

$$\partial_{x_1} P(t,x_1,x_2,x_3) = -(t-x_2)(t-x_3) = -t^2 + (x_2+x_3)t - x_1x_2$$
$$\partial_{x_2} P(t,x_1,x_2,x_3) = -(t-x_3)(t-x_1) = -t^2 + (x_3+x_1)t - x_3x_1$$
$$\partial_{x_3} P(t,x_1,x_2,x_3) = -(t-x_1)(t-x_2) = -t^2 + (x_1+x_2)t - x_1x_2$$

mais on a aussi par définition des coefficients a_i pour $i = 1,2,3$

$$\partial_{x_i} P(t,x_1,x_2,x_3) = \partial_{x_i} a_3(t,x_1,x_2,x_3)t^2 + \partial_{x_i} a_2(t,x_1,x_2,x_3)t + \partial_{x_i} a_1(t,x_1,x_2,x_3)$$

donc on obtient par identification des coefficients du poynôme en t

$$\partial_{x_i} a_3(x_1,x_2,x_3) = -1$$

$$\partial_{x_1} a_2(x_1,x_2,x_3) = x_2 + x_3 \text{ et } \partial_{x_2} a_2(x_1,x_2,x_3) = x_3 + x_1 \text{ et } \partial_{x_2} a_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2$$

$$\partial_{x_1} a_1(x_1,x_2,x_3) = -x_2x_3 \text{ et } \partial_{x_2} a_1(x_1,x_2,x_3) = -x_3x_1 \text{ et } \partial_{x_2} a_1(x_1,x_2,x_3) = -x_1x_2$$

4. On obtient de la question précédente

$$J = \begin{pmatrix} -x_2x_3 & -x_3x_1 & -x_1x_2 \\ x_2+x_3 & x_3+x_1 & x_1+x_2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on explicite la matrice B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & -x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$$

d'où on déduit par produit

$$BJ = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1)(x_1 - x_3) & 0 & 0 \\ 0 & (x_3 - x_2)(x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & 0 & (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) \end{pmatrix}.$$

5. L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ et comme la jacobienne f est inversible en tout point de U par la question précédente (qui donnait que J est inversible puisque $x_1 < x_2 < x_3$), on peut appliquer le théorème d'inversion locale. On en déduit que f est une application ouverte, et donc que $f(U)$ est ouverte. De plus, par la question 2, $f : U \to f(U)$ est bijective, et du théorème d'inversion locale, on tire que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$.

6. La différentielle de la réciproque en $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$ est

$$Df^{-1}(f(x_1, x_2, x_3)) = Df(x_1, x_2, x_3)^{-1}$$

Avec les notations de la question 4, on obtient pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$ et $h \in \mathbb{R}^3$

$$Df^{-1}(f(x)).h = J^{-1}.h = (BJ)^{-1}B.h = \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_2-x_1)(x_1-x_3)} & \frac{x_1}{(x_2-x_1)(x_1-x_3)} & \frac{x_1^2}{(x_2-x_1)(x_1-x_3)} \\ \frac{1}{(x_3-x_2)(x_2-x_1)} & \frac{x_2}{(x_3-x_2)(x_2-x_1)} & \frac{x_2^2}{(x_3-x_2)(x_2-x_1)} \\ \frac{1}{(x_1-x_3)(x_3-x_2)} & \frac{x_3}{(x_1-x_3)(x_3-x_2)} & \frac{x_3^2}{(x_1-x_3)(x_3-x_2)} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$