Un corrigé de l'interrogation écrite n° 2 (J-Y D)

Exercice 1.

On note $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé des matrices carrées de taille 2 et à coefficients réels. On pourra utiliser la norme du maximum $\|\cdot\|_\infty$ telle que $\|M\|_\infty = \max\{|M_{i,j}|\}$ pour toute matrice $M = (M_{i,j})_{1\le i,j\le} \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$.

On note det l'application déterminant définie sur $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ et $\mathbf{I}_2$ est la matrice identité de taille 2.

On considère les parties de $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \{M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0 \text{ et } |\det M| \le 2\}, \qquad B = O_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) \mid {}^tMM = \mathbf{I}_2\}.$$

1. L'ensemble A est-il ouvert ? fermé ? borné ?

On considère les suites $(U_n)_{n\ge0}$, $(V_n)_{n\ge0}$ et $(W_n)_{n\ge0}$ d'éléments de $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ définies par :

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2+\frac{1}{n+1}\end{pmatrix},\ V_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n+1}\end{pmatrix} \text{ et } W_n = \begin{pmatrix} n+1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n+1}\end{pmatrix} \text{ pour } n\ge 0.$$

On a : $U_n \notin A$ pour $n \ge 0$ et $U_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} U$ avec $U := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix} \in A$.

Donc le complémentaire de A dans $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ n'est pas fermé, puis $\boxed{A \text{ n'est pas un ouvert de } \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})}$.

On a : $V_n \in A$ pour $n \ge 0$ et $V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} V$ avec $V := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \notin A$.

Donc $\boxed{A \text{ n'est pas un fermé de } \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})}$.

On a : $W_n \in A$ et $\|W_n\|_\infty = n+1$ pour $n \ge 0$ avec $n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc $\boxed{\text{l'ensemble } A \text{ n'est pas borné}}$.

2. Mêmes questions pour l'ensemble B.

On considère la suite $(U'_n)_{n\ge0}$ d'éléments de $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ définie par :

$$U'_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{n+1}\end{pmatrix} \text{ pour } n \ge 0.$$

On a : $U'_n \notin B$ pour $n \ge 0$ et $U'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{I}_2$ avec $\mathbf{I}_2 \in B$.

Donc le complémentaire de B dans $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$ n'est pas fermé, puis $\boxed{B \text{ n'est pas un ouvert de } \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})}$.

L'application $\begin{array}{rcl}\alpha : \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}(2,\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM\end{array}$ est continue car les coefficients de ${}^tMM$ sont des applications polynomiales des coefficients de M . Or, on a : $B = \alpha^{-1}(\{\mathbf{I}_2\})$ où $\{\mathbf{I}_2\}$ est un fermé de $\mathfrak{M}(2,\mathbb{R})$.

Donc $\boxed{B \text{ est un fermé de } \mathfrak{M}(2,\mathbb{R})}$.

L'égalité « ${}^tMM = \mathbf{I}_2$ » signifie que les vecteurs colonne de M forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.
En particulier, lorsque $M \in B$, les coefficients de M sont dans $[-1,1]$, et donc $\|M\|_\infty \le 1$.
Par conséquent $\boxed{\text{l'ensemble } B \text{ est borné}}$.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, on note $f_m : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_m(P) = \sum_{k=1}^{m} P(k)$$

On fixe $m \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'application f_m est continue.

   L'application f_m est linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.
   $\left[\text{En effet : } f_m(\alpha P+\beta Q) = \sum_{k=1}^{m} (\alpha P(k)+\beta Q(k)) = \alpha \sum_{k=1}^{m} P(k) + \beta \sum_{k=1}^{m} Q(k) = \alpha f_m(P) + \beta f_m(Q).\right]$
   Donc : $\boxed{f_m \text{ est continue}}$.

2. Montrer que l'application f_m est différentiable, et déterminer sa différentielle en tout point.

   L'application f_m est linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.
   Donc : $\boxed{f_m \text{ est différentiable}}$ et $\boxed{Df_m(P)\cdot Q = f_m(Q) \text{ pour tous } P, Q \in \mathbb{R}_n[X]}$.
   $\left[\text{En effet : } f_m(P+Q) = f_m(P) + f_m(Q) \underset{Q\to 0}{=} f_m(P) + f_m(Q) + o(\|Q\|) \text{ où } f_m \text{ est linéaire (continue).}\right]$

3. Soit N la norme définie sur E par

   $$N(P) = \sup_{x\in[1,m]} |P(x)|$$

   Déterminer la norme subordonnée de f_m relative à N.

   Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a : $f_m(P) = P(1) + \cdots + P(m)$, donc $\left|f_m(P)\right| \leq |P(1)| + \cdots + |P(m)| \leq m\,N(P)$.
   Cela montre que $\|f_m\| \leq m$.
   D'autre part, on a : $\frac{|f_m(1)|}{N(1)} = \frac{m}{1} = m$, en particulier $\|f_m\| \geq m$.
   En conclusion : $\boxed{\|f_m\| = m}$.

Exercice 3.

1. **Soit F l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F(0,0)=0$ et pour tout $(x,z)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,**
$$F(x,z)=\frac{x^2z}{x^2+z^2}.$$
Montrer que F est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

   Tout d'abord, $\{(0,0)\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, donc $\Omega:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   Par ailleurs, la restriction de F à Ω est continue car rationnelle.
   Il en résulte que l'application F est continue en tout point $(x,z)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   Soit $(x,z)\in\mathbb{R}^2$. On a : $|F(x,z)|=\frac{x^2}{x^2+z^2}|z|$ quand $(x,z)\neq(0,0)$ et $F(0,0)=0$, donc $0\le|F(x,z)-F(0,0)|\le|z|$.
   D'où : $F(x,z)\underset{(x,z)\to(0,0)}{\longrightarrow}F(0,0)$ par le théorème des gendarmes, ce qui montre que F est continue en $(0,0)$.
   Par conséquent : $\boxed{\text{l'application } F \text{ est continue}}$.

2. **On considère à présent l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0,0)=0$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,**
$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^4}.$$
   (a) **Étudier la continuité de l'application f.**

   On remarque que : $f(x,y)=\frac{x^2(y^2)}{x^2+(y^2)^2}=F(x,y^2)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   D'après (1) et grâce à la continuité $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto(x,y^2)\in\mathbb{R}^2$: $\boxed{\text{l'application } f \text{ est continue}}$.

   (b) **Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et les calculer.**

   La restriction f_Ω de f à l'ouvert $\Omega:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ est différentiable car rationnelle. Il en résulte que pour tout $(x,y)\in\Omega$, l'application f est différentiable en (x,y) et $Df(x,y)=Df_\Omega(x,y)$. En particulier les dérivées partielles de f en $(x,y)\in\Omega$ s'obtiennent en calculant celles de f_Ω :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy^2(x^2+y^4)-2x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^2y(x^2+y^4)-4x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}$$
$$\text{puis}\quad\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x^4y-2x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}\quad\text{quand }(x,y)\neq(0,0)}.$$
   Il reste à étudier ce qui se passe en $(0,0)$.
   On a $f(x,0)=0$ pour $x\in\mathbb{R}$ (isoler $x=0$) donc f a une dérivée partielle suivant x en $(0,0)$ et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$.
   On a $f(0,y)=0$ pour $y\in\mathbb{R}$ (isoler $y=0$) donc f a une dérivée partielle suivant y en $(0,0)$ et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$.

   (c) **Montrer que l'application f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe C^1 ?**

   On a remarqué dans la démonstration du (b) que : $\boxed{f \text{ est différentiable en tout point de } \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$.
   Au vu des dérivées partielles de f en $(0,0)$, il reste à prouver que $Df(0,0)=0$.
   Pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, on a :
$$\left|f(h,k)\right|=\frac{h^2+0}{h^2+k^4}|k||k|\le\sqrt{0+k^2}^2|k|\le\|(h,k)\|_2|k|\quad\text{donc}\quad 0\le\left|\frac{f((0,0)+(h,k))-f(0,0)-0}{\|(h,k)\|_2}\right|\le|k|.$$
   Par le théorème des gendarmes, on en déduit que :
$$\frac{f((0,0)+(h,k))-f(0,0)-0}{\|(h,k)\|_2}\underset{(h,k)\to(0,0)\ \text{et}\ (h,k)\neq(0,0)}{\longrightarrow}0.$$
   Donc $\boxed{f \text{ est différentiable en } (0,0) \text{ et } Df(0,0)=0}$.

   D'après (b), on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x(y^2)^3}{(x^2+(y^2)^2)^2}$ quand $(x,y)\neq(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$.
   On pose : $v_n=(\frac{1}{n+1},\frac{1}{\sqrt{n+1}})$ pour $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On a : $v_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}(0,0)$ mais $\frac{\partial f}{\partial x}(v_n)=\frac{1}{2}\underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
   Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$, et a fortiori : $\boxed{\text{l'application } f \text{ n'est pas de classe } C^1}$.

   (d) **Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par $g(t)=\ln(1+e^t)$. En utilisant la formule sur la différentielle d'une composée, calculer la différentielle de $g\circ f$ au point $(0,0)$.**

   L'application g est dérivable, donc g est différentiable avec $Dg(t)\cdot u=g'(t)\,u$ pour tous $t,u\in\mathbb{R}$.
   Par conséquent : $g\circ f$ est différentiable et $D(g\circ f)(0,0)=Dg(f(0,0))\circ Df(0,0)$.
   Or $Df(0,0)=0$ d'après (c). D'où : $\boxed{D(g\circ f)(0,0)=0}$.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n et à coefficients réels est muni de la norme du maximum, i.e. $\|M\|_\infty = \max\{|M_{i,j}|\}$ pour toute matrice $M = (M_{i,j})_{1\le i,j\le n}$.

On note $\mathrm{tr}_n : E \to \mathbb{R}$ l'application *trace*. On rappelle que tr_n est $\mathbb{R}$-linéaire et que $\mathrm{tr}_n(AB) = \mathrm{tr}_n(BA)$ pour tout $(A,B) \in E^2$.

1. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et $\mathbb{R}$ de la norme $x \mapsto |x|$. Calculer la norme subordonnée de l'application tr_n .

   Soit $M = (M_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$. On a : $\mathrm{tr}_n(M) = M_{1,1} + M_{2,2} + \cdots + M_{n,n}$.
   Donc : $|\mathrm{tr}_n(M)| \le |M_{1,1}| + |M_{2,2}| + \cdots + |M_{n,n}| \le n\|M\|_\infty$.
   Cela montre que $\|\mathrm{tr}_n\| \le n$.

   D'autre part, on a : $\frac{|\mathrm{tr}_n(\mathbf{I}_n)|}{\|\mathbf{I}_n\|_\infty} = \frac{n}{1} = n$, en particulier $\|\mathrm{tr}_n\| \ge n$.

   En conclusion : $\boxed{\|\mathrm{tr}_n\| = n}$.

2. Prouver que, pour tout $(A,B) \in E^2$, $\|AB\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$ et $|\mathrm{tr}_n(AB)| \le n^2\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

   Soient $A = (A_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$ et $B = (B_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$.
   On introduit $C = (C_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$ tel que $C = AB$.
   Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, on a :
   $$|C_{i,j}| = |A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \cdots + A_{i,n}B_{n,j}| \le |A_{i,1}||B_{1,j}| + |A_{i,2}||B_{2,j}| + \cdots + |A_{i,n}||B_{n,j}| \le n\|A\|_\infty\|B\|_\infty.$$
   On en déduit que : $\boxed{\|AB\|_\infty \le n\|A\|_\infty\|B\|_\infty}$.

   D'après (1), on a aussi : $|\mathrm{tr}_n(AB)| \le n\|AB\|_\infty$.

   En combinant ces deux inégalités, on obtient ensuite : $\boxed{|\mathrm{tr}_n(AB)| \le n^2\|A\|_\infty\|B\|_\infty}$.

3. On note G l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que $G(M) = \mathrm{tr}_n(M^3)$ pour tout $M \in E$.

   (a) Montrer que G est de classe C^1.

   L'application $G\colon M \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}_n(M^3) \in \mathbb{R}$ est une application polynomiale des coefficients de M.
   Par conséquent : $\boxed{\text{l'application } G \text{ est de classe } \mathrm{C}^1}$.

   (b) Montrer que, si $(M,H) \in E^2$, $G(M+H) = G(M) + 3\,\mathrm{tr}_n(M^2H) + 3\,\mathrm{tr}_n(MH^2) + \mathrm{tr}_n(H^3)$.

   Soient $M, H \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$. On a :
   $$\begin{aligned} G(M+H) &= \mathrm{tr}_n\big((M+H)(M+H)(M+H)\big) = \mathrm{tr}_n\big((M+H)(M^2+MH+HM+H^2)\big) \\ &= \mathrm{tr}_n\big(M^3 + M^2H + MHM + HM^2 + MH^2 + HMH + H^2M + H^3\big) \\ &= G(M) + \mathrm{tr}_n(M^2H) + \mathrm{tr}_n((MH)M) + \mathrm{tr}_n(HM^2) + \mathrm{tr}_n(MH^2) + \mathrm{tr}_n(H(MH)) + \mathrm{tr}_n(H^2M) + \mathrm{tr}_n(H^3). \end{aligned}$$
   On sait, d'après un rappel au début de cet exercice, que : $\mathrm{tr}_n(AB) = \mathrm{tr}_n(BA)$ pour tous $A, B \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$.
   Il en résulte que : $\boxed{G(M+H) = G(M) + 3\,\mathrm{tr}_n(M^2H) + 3\,\mathrm{tr}_n(MH^2) + \mathrm{tr}_n(H^3)}$.

   (c) Calculer la différentielle D_MG de G en tout $M \in E$.

   Soient $M, H \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$.
   D'après (b), on a : $G(M+H) - G(M) - 3\,\mathrm{tr}_n(M^2H) = 3\,\mathrm{tr}_n(MH^2) + \mathrm{tr}_n(H^3)$.

   Compte tenu des questions (1) et (2), on a aussi, en itérant :
   $$|\mathrm{tr}_n(A_1 \dots A_k)| \le n\|A_1\dots A_k\|_\infty \le n\,n^{k-1}\,\|A_1\|_\infty \cdots \|A_k\|_\infty \quad \text{quand } k \in \mathbb{N} \text{ et } A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}).$$
   D'où : $\left|G(M+H) - G(M) - 3\,\mathrm{tr}_n(M^2H)\right| \le 3n^3\|M\|_\infty\|H\|_\infty^2 + n^3\|H\|_\infty^3$
   puis $0 \le \frac{|G(M+H)-G(M)-3\,\mathrm{tr}_n(M^2H)|}{\|H\|_\infty} \le 3n^3\|M\|_\infty\|H\|_\infty + n^3\|H\|_\infty^2$ lorsque $H \ne 0$.

   On fait maintenant varier H et utilise le théorème des gendarmes :
   $$\lim_{\substack{H\to 0\\ H\ne 0}} \frac{G(M+H)-G(M)-L(H)}{\|H\|_\infty} = 0 \quad \text{où } L \text{ est l'application linéaire } L\colon \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(3,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ H & \mapsto & 3\,\mathrm{tr}_n(M^2H) \end{array}.$$
   Finalement : $\boxed{\underbrace{DG(M)}_{D_MG} \cdot H = 3\,\mathrm{tr}_n(M^2H) \text{ pour tous } M, H \in \mathfrak{M}(n,\mathbb{R})}$.