Université de Paris
L3 MATH

Algèbre 2 Maths 2
Année 2021-2022

Contrôle du 14 février 2022
Durée : 1heure

Les documents et calculatrices sont interdits durant l'épreuve.
Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

Soit $P(X) = X^4 + X^3 + X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Démontrer que le polynôme P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. (3 pts)
2. Le polynôme P est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$? (1pt)
3. Soit K un corps, démontrer que $K[X]$ est un anneau principal. (3pts)
4. Pour $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, l'anneau $A[X]/(P)$ est-il un corps ? (2,1,1 pts)
5. L'idéal $(2, P)$ est-il maximal dans l'anneau $\mathbb{Z}[X]$? (2 pts)

Exercice 2

On considère le polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 + 5X^2 - 8X + 4 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Factoriser $P(X)$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. (2 pts)
2. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{X^3}{P}$ dans $\mathbb{R}(X)$. (5 pts)