


# Principes de fonctionnement des machines binaires

2020–2021

Matthieu Picantin



codes  
de Gray



$F$		$cde$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
$ab$	00	0	1	1	0	0	0	1	1
	01	0	0	0	0	1	0	0	0
	11	1	1	1	1	0	1	0	0
	10	1	1	1	1	0	0	1	1

méthode *ordinaire*

		$b$	
		0	1
$a$	0	1	0
	1	1	1

$$J = \neg a \wedge \neg b \vee a \wedge \neg b \vee a \wedge b$$

$$J = \bar{a}\bar{b} + a\bar{b} + ab$$

## méthode de Karnaugh

		$b$	
		0	1
$a$	0	1	0
	1	1	1

$$J = \neg b \vee a$$

$$J = \bar{b} + a$$

ces méthodes correspondent...

		$b$	
		0	1
$a$	0	0	1
	1	1	0

... quand les 1 sont isolés

on représente le tableau sur un plan (fini)...

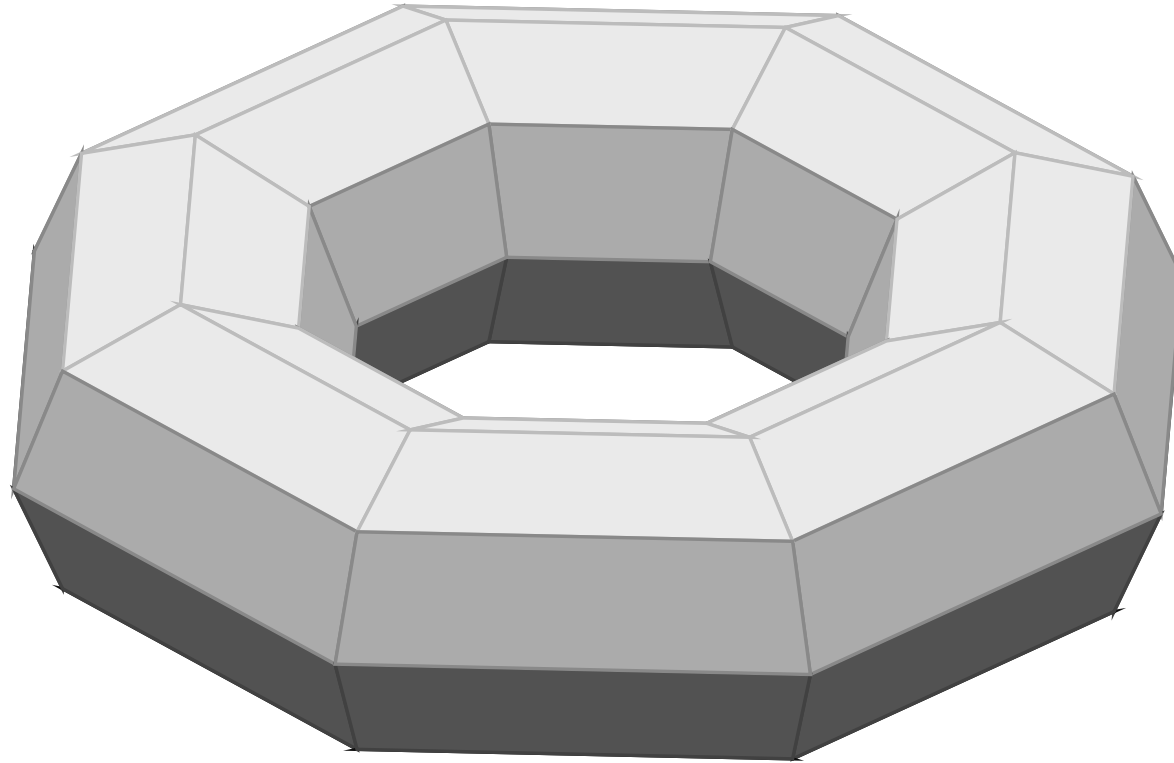
$F$		$cde$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
$ab$	00	0	1	1	0	0	0	1	1
	01	0	0	0	0	1	0	0	0
	11	1	1	1	1	0	1	0	0
	10	1	1	1	1	0	0	1	1

... mais on *pense* le tableau sur un plan infini,  
ou de façon équivalente sur un tore.

on représente le tableau sur un plan (fini)...


<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>0100101110</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>1111101010</div><div>111100011</div></div>							
<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>11110100</div><div>11110011</div></div>								<div><div>01100011</div><div>00001000</div><div>111101</div></div>															

... mais on *pense* le tableau sur un plan infini,  
ou de façon équivalente sur un tore.



... mais on *pense* le tableau sur un plan infini,  
ou de façon équivalente sur un tore.

codes  
de Gray



$F$		$cde$							
		000	001	011	010	110	111	101	100
$ab$	00	0	1	1	0	0	0	1	1
	01	0	0	0	0	1	0	0	0
	11	1	1	1	1	0	1	0	0
	10	1	1	1	1	0	0	1	1

$$F = \boxed{a\bar{c}} + \boxed{\bar{b}\bar{c}e} + \boxed{\bar{a}bcd\bar{e}} + \boxed{abcde} + \boxed{\bar{b}cd}$$

### La méthode de Karnaugh en bref

- ◆ Chaque 1 doit être dans au moins un rectangle.
- ◆ Un rectangle ne doit contenir que des 1 (ou des *jokers*).
- ◆ Un rectangle se place horizontalement ou verticalement, jamais en diagonale.
- ◆ Un rectangle est de taille  $2^k \times 2^\ell = 2^{k+\ell}$   
avec  $k + \ell$  le nombre de variables libres  
(les variables libres n'apparaissent pas dans la clause).
- ◆ Les rectangles peuvent s'intersecter.
- ◆ Les rectangles peuvent *glisser* sur les bords,  
*glisser* sur le tore.
- ◆ Chaque rectangle doit être aussi grand que possible.
- ◆ Il doit y avoir le moins possible de rectangle(s).