Eléments d'Analyse pour l'Ingénieur

Valérie Burdin, Dominique Pastor, Mai Quyen Pham, Safouana Tabiou

UE ATSA
Analyse, Traitement du Signal et Automatique

Formation : FISE 1A

Polycopié de cours

Année 2023-2024

Version : Septembre 2023

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

Eléments d'Analyse pour l'Ingénieur

Polycopié de cours

FISE1A – UE ATSA – Analyse, Traitement du signal et Automatique

Contacts :

Valérie BURDIN
valerie.burdin@imt-atlantique.fr

Dominique PASTOR
Dominique.pastor@imt-atlantique.fr

Mai Quyen PHAM
mai-quyen.pham@imt-atlantique.fr

Safouana TABIOU
safouana.tabiou@imt-atlantique.fr

Cours moodle :
https://moodle.imt-atlantique.fr/course/view.php?id=17

Table des matières

Notations et symboles

$\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels

$\mathbb{Z}$: Ensemble des entiers relatifs

$\mathbb{Q}$: Ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels

$\overline{\mathbb{R}}$: Droite réelle étendue

$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes

$\Re e$: Partie réelle d'un nombre complexe

$\Im m$: Partie imaginaire d'un nombre complexe

$\bar{z}$: conjugué complexe de $z \in \mathbb{C}$

$\mathcal{C}^k(I)$: Ensemble des fonctions réelles k-fois dérivables sur l'intervalle I, de dérivée k-ième, $f^{(k)}$, continue. On dit de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Par défaut, $I = \mathbb{R}$

$\mathcal{C}^0$: Ensemble des fonctions réelles continues

$\mathcal{C}_b^0$: Ensemble des fonctions réelles continues et bornées

$\mathcal{C}^\infty$: Ensemble des fonctions réelles indéfiniment dérivables

$\mathbb{S}$: Ensemble des fonctions simples

L^1 : Espace vectoriel des fonctions sommables

L^2 : Espace vectoriel des fonctions de carré sommable

L^∞ : Espace vectoriel des fonctions bornées

L^1_{loc} : Espace vectoriel des fonctions localement sommables

L^2_{loc} : Espace vectoriel des fonctions localement de carré sommable

$\|f\|_1$: norme L^1 de la fonction sommable f

$\|f\|_2$: norme L^2 de la fonction de carré sommable f

$\|f\|_\infty$: norme L^∞ de la fonction bornée f, égale au Sup de $|f|$

$\stackrel{déf}{=}$: Egalité par définition

$\mathcal{P}$ vraie (p.p) : $\mathcal{P}$ vraie presque partout c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle

$\stackrel{p.p}{=}$: Relation d'équivalence "égalité presque partout" pour les applications mesurables

$*$: Symbole de l'opérateur de convolution (ex : $f * g$)

τ_a : Opérateur de translation par $a \in \mathbb{R}$ d'une fonction ou d'une distribution : $\tau_a f(x) = f(x-a)$

Supp$f$: support de la fonction f

$\mathcal{D}$: Ensemble des fonctions tests, indéfiniment dérivables à support borné, souvent notées φ

$\mathcal{S}$: Ensemble des fonctions tests indéfiniment dérivables à décroissance rapide

$\mathcal{E}$: Ensemble des fonctions tests indéfiniment dérivables

$\mathcal{D}'$: Ensemble de toutes les distributions (régulières et singulières)

$\mathcal{S}'$: Ensemble des distributions tempérées (admettant une TF)

$\mathcal{E}'$: Ensemble des distributions à support borné

χ_A : Fonction caractéristique ou indicatrice de $A \subset \overline{\mathbb{R}}$

Y : Fonction échelon ou de Heaviside

Y : Distribution de Heaviside

Π : Fonction ou distribution porte

sign : Fonction ou distribution signe

sinc : Fonction ou distribution sinus cardinal, prolongée par continuité en 0

δ_a : Distribution singulière Dirac en $x = a$

Ш : Distribution Peigne de Dirac

$\widehat{Ш}$: Transformée de Fourier du peigne de Dirac

vp : Symbole Valeur Principale

pf : Symbole Partie Finie

$vp\,\dfrac{1}{x}$: Distribution Valeur Principale $\frac{1}{x}$

$\mathcal{F}$: Symbole de l'opérateur Transformation de Fourier. On note $\mathcal{F}[f(x)]$

L : Symbole de l'opérateur Transformation de Laplace. On note $L[f(x)]$

$\mathcal{H}$: Symbole de l'opérateur Transformation de Hilbert. On note $\mathcal{H}[f(x)]$

$\widehat{f}$: Transformée de Fourier de la fonction f. On note $\mathcal{F}[f(x)](\nu) = \widehat{f}(\nu)$

T : Distribution quelconque de $\mathcal{D}'$

$\widehat{\mathrm{T}}$: Transformée de Fourier d'une distribution T de $\mathcal{S}'$

Introduction

Dans le cadre du cursus FISE de IMT Atlantique, et dès la première année, nous souhaitons introduire des concepts mathématiques plus avancés que ceux utilisés auparavant dans votre formation. Ces concepts d'analyse ont été introduits suite aux travaux de mathématiciens renommés comme Henri Lebesgue, Paul Dirac, Laurent Schwartz, qui ont repensé des notions connues grâce à un changement de point de vue, souvent lié à une meilleure interprétation physique de phénomènes réels. Ces changements de point de vue ont abouti à la construction et introduction de nouveaux espaces fonctionnels dans lesquels de nombreuses "pathologies" mathématiques sont résolues grâce à un cadre plus large et des résultats plus généraux, englobant les cas particuliers connus précédemment. Le cadre de ce cours d'analyse mathématique pour ingénieurs ne permet pas de développer tous les aspects théoriques liés à ces nouvelles notions. Cependant nous sommes convaincus qu'il est possible d'expliquer ces nouveaux objets à moindre coût et en restant rigoureux, ainsi que de faire comprendre leur intérêt en ingénierie. En effet, une fois dépassée la difficulté de "changement de point de vue", la manipulation de ces nouveaux outils permet une élégance de notation, une rapidité de résolution, et la suppression de tous les cas particuliers pathologiques qui font le bonheur des concepteurs de sujets d'examens ou concours...

Les notions d'analyse présentées dans ce cours seront utilisées dans les enseignements de *Traitement du signal* et *Automatique* de cette même UE, et plus largement dans les UE de physique pour formaliser rigoureusement les équations en jeu. Ils seront également repris et utilisés dans l'UE *Probabilité et statistiques* du second semestre. En particulier, le lecteur est renvoyé vers les trois documents suivants :

- le livre de Bruno Fracasso et Alain Peden "Physique des communications" paru chez Ellipse en 2015 [3]. Il traite de la physique des télécommunications à l'aide de nombreux exemples concernant la modélisation des signaux et du bruit, les opérateurs physiques, la propagation guidée (optique) et non guidée (radio), et utilise ce formalisme,

- le polycopié de Karine Amis et al. "Introduction aux Signaux et Systèmes" [1] qui est enseigné dans cette même UE,

- le polycopié de Naly Rakoto et al. "Introduction à l'automatique" [7] qui est enseigné dans cette même UE.

Ces deux derniers polycopiés constituent un prolongement et un terrain applicatif de ce cours d'analyse. Ensemble, ces trois documents forment le socle de cette UE.

Dans ce cours, nous utiliserons des notions d'intégration plus poussées que la notion d'intégrale de Riemann vue communément. Ces notions font l'objet du chapitre 1, qu'il faut aborder avec une ouverture d'esprit car le contenu est basé sur un **changement de point de vue** permettant la construction de l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions numériques (de variables réelles). En particulier, à la fin du chapitre 1, nous comparons les intégrales de Riemann et Lebesgue d'un point de vue de leur utilisation pour le calcul afin de bien fixer les idées. Les principaux résultats de ces notions sont présentés et utilisés dans les démonstrations pour justifier l'existence des objets manipulés. Nous renvoyons le lecteur intéressé par des aspects théoriques plus poussés vers les deux documents suivants :

- le livre de Dominique Pastor et Christophe Sintes "Probabilités pour l'ingénieur : des fondements aux calculs" [5]
- le polycopié de Bernard Petit "Introduction aux fonctions d'une variable complexe" [6] (disponible sous moodle).

Les chapitres 2 et 3 traitent de transformations intégrales, outils de base incontournables pour le traitement du signal, l'automatique, la physique et la théorie moderne des probabilités, sans exhaustivité. Il s'agit de définir et donner les propriétés de ces intégrales dépendant d'un paramètre réel ou complexe. On présente ainsi trois transformations intégrales :

- la transformée de Fourier qui est définie par une intégrale dépendant d'un paramètre réel et, quand elle existe, étend la notion de série de Fourier aux fonctions non périodiques (chapitre 2),
- l'opérateur de convolution qui est défini par une intégrale dépendant d'un paramètre réel et qui régit tout système linéaire, invariant dans le temps et continu, i.e. s'exprimant à partir d'une équation aux dérivées ordinaires (EDO) (chapitre 2),
- la transformée de Laplace qui est définie par une intégrale dépendant d'un paramètre complexe et donne une fonction de la variable complexe. Le chapitre 3 aborde également la notion de continuité et dérivation pour les fonctions d'une variable complexe, dites fonctions holomorphes. Ce chapitre ne sera pas étudié dans la partie analyse.

Ces trois transformations intégrales seront la base des concepts introduits dans les cours de "Traitement du signal" et "Automatique" qui suivront la partie "Analyse". Elles sont la clé pour résoudre des problèmes de transfert modélisés par des équations différentielles.

Le chapitre 4 introduit un nouveau cadre théorique que l'on doit en particulier à Paul Dirac (1902-1984)[1], puis à Laurent M. Schwartz (1915-2002)[2]. Le **changement de point de vue**, possible grâce à l'introduction de nouvelles notions telles que les distributions, permet d'étendre des résultats valides pour des fonctions numériques régulières (ayant des fluctuations raisonnables) à des objets modélisant des phénomènes très irréguliers comme des impulsions, des discontinuités. Ce chapitre présente les résultats essentiels permettant de comprendre la notion de distributions sans toutefois dévoiler les aspects théoriques liés aux structures des espaces fonctionnels. L'objectif ici est de pouvoir manipuler les signaux au sens des distributions et de mener des calculs

1. mathématicien et physicien britannique, père de la mécanique quantique, et colauréat avec Erwin Schrödinger du prix Nobel de physique de 1933
2. premier mathématicien français à obtenir la Médaille Fields pour sa théorie des distributions, en 1950

rigoureux et élégants pour le traitement du signal, l'automatique, et la physique.

Le chapitre 5 est un chapitre essentiel qui étend la notion de Transformée de Fourier (et Laplace) à des fonctions qui ne sont pas sommables et même à des signaux qui ne sont pas des fonctions mais des distributions. Grâce à ce chapitre, vous serez capable de calculer rigoureusement la plupart des transformées de Fourier des fonctions et distributions utilisées en physique, en traitement du signal, ou en probabilité.

Enfin le chapitre 6 présente l'opérateur de convolution pour les distributions, en particulier la distribution de Dirac y jouera un rôle essentiel. La convolution est un opérateur clé pour le traitement des signaux. Elle a un rôle majeur par sa propriété de régularisation des signaux (les rendre plus lisses et dérivables à un ordre plus élevé). Elle est au cœur des réseaux de neurones convolutifs (CNN) utilisés dans les systèmes d'intelligence artificielle. La convolution permet de modéliser les systèmes linéaires continus et invariants dans le temps. Couplée aux transformées intégrales, Fourier et Laplace, elle permet de résoudre de nombreux problèmes de physique modélisés par des équations différentielles ordinaires (EDO) ou équations aux dérivées partielles (EDP).

Selon votre culture mathématique antérieure, il vous sera nécessaire de travailler par vous-même l'aisance calculatoire en analyse. Un polycopié de S. Tabiou [11] donne les points clés à retenir pour manipuler les notions des chapitres 1 et 2 : le calcul de dérivées partielles, d'intégrales multiples, en particulier, le changement de variables dans les intégrales de fonctions à plusieurs variables, et l'intégration par parties, dans ce nouveau contexte. Nous vous invitons à étudier ce document disponible sous Moodle. Vous serez ainsi plus à l'aise avec les concepts des chapitres suivants.

Ce polycopié est votre base de travail. A vous de lire et de vous approprier les pages demandées avant les séances présentielles, afin de relever les difficultés rencontrées qui seront explicitées et discutées avec l'enseignant. Chaque chapitre se termine par des exercices d'application directe du cours avec éléments de correction. Les résoudre en autonomie, vous permettra d'assimiler et d'ancrer les notions théoriques étudiées.
Des exercices avancés seront résolus en séances présentielles appelées "Petites Classe" (PC) en groupes restreints encadrés par un enseignant. **Les énoncés de PC sont dans un polycopié dédié qui complète celui-ci** et dans lequel vous trouverez l'organisation de cette partie de l'UE ainsi que les connaissances et compétences attendues. Vous pourrez trouver des exercices corrigés supplémentaires couvrant l'ensemble des chapitres de ce polycopié dans le livre de Ghorbanzadeh et al. [4].

Ce symbole indique une remarque importante qui aide la compréhension

Ce symbole indique un résultat incontournable à connaître et savoir manipuler

Chapitre 1

Intégrale de Lebesgue des fonctions numériques

Ce chapitre expose les rudiments de la théorie de l'intégration de Lebesgue en se limitant au cas des fonctions numériques. Nous emploierons le terme de fonction comme un synonyme d'application. C'est un abus de langage car dans la suite, ce sont bien des applications que nous considérons. En fait, une fonction associe à tout réel au plus un élément de $\mathbb{R}$ alors qu'une application associe à tout réel un seul autre réel. Si une application n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble de définition de cette fonction comme l'ensemble des réels où cette fonction est définie. La fonction devient alors une application de cet ensemble de définition dans $\mathbb{R}$. Dans la suite, sauf mention contraire, **nous ne considérons que des applications, même si nous les appelons fonctions**.

L'intégrale de Lebesgue permet d'intégrer plus d'applications que l'intégrale de Riemann. L'intégrale de Lebesgue conduit à des théorèmes puissants permettant de calculer des intégrales de limites simples de fonctions comme la limite des intégrales de ces fonctions, en échangeant le signe somme (le signe intégral) et le signe limite, sans recourir aux contorsions douloureuses requises lorsqu'on utilise l'intégrale de Riemann. **La théorie de Lebesgue permet ainsi de traiter aisément les intégrales impropres**.

La construction de l'intégrale de Lebesgue est en fait beaucoup moins coûteuse que la construction de l'intégrale de Riemann. En fait, l'intégrale de Riemann repose sur des propriétés très fortes de $\mathbb{R}$, qui est notamment complet (toute suite de Cauchy de réels converge dans $\mathbb{R}$). Avec la théorie de Lebesgue, les propriétés très fortes de $\mathbb{R}$ ne sont d'aucune utilité. C'est pour cela que **la construction de l'intégrale de Lebesque définie sur $\mathbb{R}$ s'étend facilement aux intégrales doubles et même multiples**.

Enfin, la théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue est le cadre théorique adéquat pour la théorie des probabilités. Ce cours n'est qu'une introduction à ce cadre théorique général de la théorie de la mesure et de l'intégration, présenté plus complètement en TAF MCE. Pour les élèves intéressés par des compléments de cours et exercices corrigés, ils pourront consulter [12], [14], [15].

1.1 Tribu et Mesure

1.1.1 Tribu

Soit E un ensemble ; $\mathcal{P}(E) = \{D : D \subseteq E\}$, l'ensemble de ses parties.

Définition 1.1.1 (Tribu)**.** On dit que $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ est une σ**-algèbre** ou **tribu** sur E si elle contient E et si elle est stable pour les opérations de complémentation et de réunion dénombrable, soit :

(T1) $E \in \mathcal{T}$

(T2) si $A \in \mathcal{T}$, alors $A^c \in \mathcal{T}$

(T3) si $A_n \in \mathcal{T}, n = 1, 2, \dots$, alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$

Exemple.

- $\{\emptyset, E\}$ est la plus petite tribu possible sur E (au sens de l'inclusion). C'est-à-dire qu'il n'existe pas une tribu $\mathcal{T}$ sur E telle que $\mathcal{T} \subset \{\emptyset, E\}$.
- $\{\emptyset, A, A^c, E\}$ avec $A \subset E$ est une tribu.
- $\mathcal{P}(E)$ est aussi une tribu. C'est la plus grande tribu possible sur E.

Proposition 1.1.1. *Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur l'ensemble E. On a les propriétés suivantes (démonstrations laissées en exercice) :*

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$,
2. *si* $A_n \in \mathcal{T}, n = 1, 2, \dots$, *alors* $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{T}$,
3. *si* $U \subset E$, *alors* $U \cap \mathcal{T} = \{A \cap U : A \in \mathcal{T}\}$ *est une tribu sur* U. *Cette tribu s'appelle* ***la trace de la tribu*** $\mathcal{T}$ *sur* U,
4. *si* $\mathcal{T}$ *et* $\mathcal{T}'$ *sont deux tribus sur* E *alors* $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ *est une tribu sur* E. *Elle est contenue dans* $\mathcal{T}$ *et dans* $\mathcal{T}'$. *Une intersection d'un nombre quelconque de tribus sur* E *est une tribu sur* E.

1.1.2 Tribu engendrée et Tribu de Borel

Définition 1.1.2 (Tribu engendrée)**.** Soit E un ensemble, et $\Gamma \subset \mathcal{P}(E)$, non vide. L'intersection de toutes les tribus sur E contenant Γ s'appelle la **tribu engendrée** par Γ. Nous la notons $\mathcal{T}_\Gamma$.

Remarque 1.1.1. $\mathcal{T}_\Gamma$ est la plus petite des tribus sur E contenant Γ. Une tribu $\mathcal{T}$ sur E est égale à $\mathcal{T}_\Gamma$ si $\Gamma \subset \mathcal{T}$ et si toute autre tribu contient $\mathcal{T}$.

Exemple.

- Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, A, A^c, E, \}$ est la tribu engendrée par $\{A\}$. *Le choix de cette tribu est rare.*
- **Tribus produits :** soit $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux tribus sur E_1 et E_2. $E_1 \times E_2$ est sans indication contraire muni de la tribu engendrée par la famille $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{T}_1, A_2 \in \mathcal{T}_2\}$ s'appelle la **tribu produit** de $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, notée $\mathcal{T}_1 \otimes \mathcal{T}_2$.

Définition 1.1.3 (Tribu de Borel sur $\mathbb{R}$)**.** C'est la plus petite tribu engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts finis $]a,b[$ avec $-\infty < a < b < \infty$ de $\mathbb{R}$. On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Elle est aussi engendrée par :

i) tous les intervalles $[a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$ de $\mathbb{R}$

ii) tous les intervalles $[a,b[$ avec $-\infty < a < b < \infty$ de $\mathbb{R}$

iii) tous les intervalles $]a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$ de $\mathbb{R}$

iv) tous les intervalles $]-\infty,a[$ avec $a \in \mathbb{R}$

v) tous les intervalles $]-\infty,a]$ avec $a \in \mathbb{R}$

vi) tous les intervalles $[a,\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$

vii) tous les intervalles $]a,\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$

Remarque 1.1.2. Les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sont appelés boréliens de $\mathbb{R}$.

On note $\overline{\mathbb{R}} \overset{déf}{=} \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et on l'appelle la droite réelle achevée. Définissons les opérations avec $\pm\infty$ comme suit :

1. $x \times (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } x > 0 \\ \mp\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$
2. $+\infty \times (+\infty) = +\infty$
3. $-\infty \times (-\infty) = +\infty$
4. $-\infty \times (+\infty) = -\infty$
5. $0 \times \infty = 0$
6. $\frac{1}{\infty} = 0$
7. $\frac{1}{0^+} = +\infty$
8. $\frac{1}{0^-} = -\infty$

Attention ! $\infty - \infty$ est non défini !

La tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est la tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Ses éléments s'appellent les **boréliens** de $\overline{\mathbb{R}}$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{T}_{\{[a,b]:\ (a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2\}} = \mathcal{T}_{\{]-\infty,b]:\ b\in\overline{\mathbb{R}}\}}$
2. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est une sous tribu de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, c'est sa trace sur $\mathbb{R}$.

Les tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ avec $n \geq 2$ sont les tribus produits $\otimes_{i=1}^n(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\otimes_{i=1}^n(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Définition 1.1.4 (Tribu de Borel sur $\mathbb{R}^n$)**.** La tribu de Borel sur $\mathbb{R}^n$ ou $\overline{\mathbb{R}}^n$ avec $(n \geq 1)$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ est la plus petite tribu engendrée par l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ ou $\overline{\mathbb{R}}^n$.

1.1.3 Espaces mesurables

Définition 1.1.5 (Espace mesurable)**.** Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur E, le couple $(E,\mathcal{T})$ s'appelle un **espace mesurable** ou **probabilisable**. Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les **parties mesurables**.

Remarque 1.1.3. Soit $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{'}$ deux tribus sur E. Si $\mathcal{T}^{'} \subset \mathcal{T}$, on dit que $\mathcal{T}^{'}$ est une sous-tribu de $\mathcal{T}$ ou $(E,\mathcal{T}^{'})$ est un sous-espace de $(E,\mathcal{T})$ ou $(E,\mathcal{T})$ est un sur-espace de $(E,\mathcal{T}^{'})$.

Définition 1.1.6 (Mesures positives et espaces mesurés)**.** On appelle **mesure positive** sur $(E,\mathcal{T})$, toute application $\mu : \mathcal{T} \to [0,+\infty]$ telle que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ (parties mesurables) deux à deux disjointes (*i.e.*, $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, m \neq n$, $A_n \cap A_m = \emptyset$), on a

$$\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Cette propriété s'appelle la σ-**additivité**. Si $A \in \mathcal{T}$, on dit que $\mu(A)$ est la mesure de A au sens de μ. Le triplet $(E,\mathcal{T},\mu)$ s'appelle un **espace mesuré**.

Définir une mesure positive sur des parties mesurables abstraites permet de manière élaborée de leur attribuer une mesure intuitive comme les mesures de longueur, d'aire, de volume, de masse ou de probabilité.

Le théorème suivant regroupe les propriétés fondamentales des mesures positives. Elles ne sont pas difficiles à établir et s'appuyent sur des notions ensemblistes et la σ-additivité.

Proposition 1.1.2. *Soit μ une mesure positive sur $(E,\mathcal{T})$. On a les propriétés suivantes :*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\forall A, B \in \mathcal{T}$, $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B)$
3. $\forall A, B \in \mathcal{T}$, $\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B) + \mu(A \cap B^c)$
4. $\forall A, B \in \mathcal{T}$, *si* $A \subset B$ *alors* $\mu(A) \leq \mu(B) \Longrightarrow \mu$ *est une application croissante.*
5. *si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite croissante d'éléments de* $\mathcal{T}$ (i.e., $A_n \subset A_{n+1}$) *alors*
$$\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$
Cette propriété est équivalente à la σ-additivité, et elle est fondamentale pour les démonstrations.
6. *si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite décroissante d'éléments de* $\mathcal{T}$ (i.e., $A_{n+1} \subset A_n$) *telle que* $\mu(A_0) < +\infty$ *alors*
$$\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Définition 1.1.7 (Mesure bornée)**.** si μ est une mesure positive sur $(E,\mathcal{T})$ telle que $\mu(E) < +\infty$. On dit que μ est une **mesure bornée** et $(E,\mathcal{T},\mu)$ est un **espace mesuré fini**.

Remarque 1.1.4. Un espace probabilisé est par définition un espace mesuré fini $(E,\mathcal{T},P)$ tel que $P(E) = 1$

Définition 1.1.8 (Mesure σ-finie)**.** On dit qu'une mesure positive μ sur $(E,\mathcal{T})$ est **σ-finie** s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) < +\infty$ et $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Exemple.

1. **Mesure de Dirac**[1] : Soit E un ensemble non vide et $x \in E$, l'application

$$\delta_x : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}, A \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   est une mesure positive sur $(E,\mathcal{P}(E))$. δ_x s'appelle la **mesure de Dirac** de support $\{x\}$.

2. **Mesure discrète** : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un ensemble non vide de E et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\delta_{x_n}$ est une mesure positive sur $(E,\mathcal{P}(E))$, elle s'appelle une **mesure discrète** de support $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et définie par

$$\mu(A) = \sum_{\{n\in\mathbb{N}:\, x_n\in A\}} a_n.$$

   Une loi de probabilité discrète est un exemple de mesure discrète.

1.1.4 μ-négligeable et μ-presque-partout

Définition 1.1.9 (μ-négligeable)**.** Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré. Si $A \in \mathcal{T}$ et $\mu(A) = 0$, on dit que A est **μ-négligeable**.

Proposition 1.1.3. *Soit $A \in \mathcal{T}$ et A **μ-négligeable**. Alors toute partie mesurable contenue dans A est aussi **μ-négligeable**.*

Remarque 1.1.5. Cette proposition est plus générale mais ce cadre restreint suffit en pratique.

Définition 1.1.10 (μ presque partout)**.** Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré et $A \subset E$. On dit qu'une propriété (P) est **vraie** μ **presque partout** sur A, notée $\mu\, p.p$, s'il existe un sous-ensemble $B \subset A$ tel que (P) est vérifiée sur tout $A \setminus B$, (P) n'est pas vérifiée sur B avec $\mu(B) = 0$.

1. Au chapitre 4, nous verrons la "distribution de Dirac", qui donne un point de vue fonctionnel à cette mesure discrète.

Soit $(E,\mathcal{T},\mu)$ un espace mesuré.

1. Deux fonctions f et g définies sur E sont **égales** $\mu\, p.p$ si l'ensemble des points $B \subset E$ tels que $f(x) \neq g(x)$ pour $x \in B$ est μ-négligeable, et on écrit $f = g\ \mu\, p.p.$

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions et une fonction $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** $\mu\, p.p$ **sur** E vers f où f est la limite simple $\mu\, p.p$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[E]{CS\,\mu\,p.p} f$, s'il existe $B \subset E$ $\mu(B) = 0$ tel que $\forall x \in E \setminus B,\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

1.1.5 Mesure de Lebesgue

À partir de maintenant, nous ne travaillons que sur les ensembles réels $\mathbb{R}^n$ et $\overline{\mathbb{R}}^n$ avec $(n \geq 1)$ et leurs tribus de Borel. On admet que ces tribus vérifient les conditions suivantes :

1. sur $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, toute mesure positive μ est déterminée de manière unique par la donnée des $\mu([a,b]),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2. sur $(\overline{\mathbb{R}}^n, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)), n \geq 2$, toute mesure positive μ est déterminée de manière unique par la donnée des $\mu(\Pi_{i=1}^n[a_i,b_i]),\ \forall 1 \leq i \leq n, (a_i,b_i) \in \mathbb{R}^2$.

Définition 1.1.11 (Mesure de Lebesgue sur $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$)**.** On appelle mesure de Lebesgue sur $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ou sur $\overline{\mathbb{R}}$, la mesure notée λ et définie sur les intervalles $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ et $a \leq b$, par

$$\lambda([a,b]) = \lambda(]a,b]) = \lambda([a,b[) = \lambda(]a,b[) = b - a$$

et c'est la longueur de l'intervalle (a,b).

Théorème 1.1.4 (Propriétés fondamentales de λ)**.** *On démontre que*

1. $\forall A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}),\ \lambda(A) = \inf\limits_{\{[a_n,b_n]:\ A\subset \cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\}} \lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n])$
2. $\lambda(A) < +\infty$ *si et seulement si* A *est borné*
3. $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty = \lambda(\overline{\mathbb{R}})$ *et* $\forall a \in \mathbb{R}, \lambda(]-\infty, a]) = \lambda([a, +\infty[) = +\infty$
4. $\forall A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ *et* $x \in \mathbb{R}, \lambda(x + A) = \lambda(A)$ *(**invariance par translation de** λ)*
5. λ *est une mesure* σ*-finie*
6. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \lambda(\{x\}) = 0$ *donc toute partie dénombrable est* λ*-négligeable. La réciproque est fausse.*

Exemple. Les singletons $\{a\}$ ou union dénombrable de tels ensembles pour $a \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, sont λ-négligeables.

Définition 1.1.12 (Mesure de Lebesgue sur $(\overline{\mathbb{R}}^n, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n))$)**.** La mesure de Lebesgue sur $(\overline{\mathbb{R}}^n, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n))$ ou sur $\overline{\mathbb{R}}^n$ est par définition la mesure produit des mesures de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On la note aussi λ. Elle est caractérisée par

$$\lambda(\Pi_{k=1}^n [a_k, b_k]) = \Pi_{k=1}^n (b_k - a_k), \ (a_k, b_k) \in \overline{\mathbb{R}}^2, a_k \leq b_k$$

ou de manière équivalente par

$$\lambda(\Pi_{k=1}^n A_k) = \Pi_{k=1}^n \lambda(A_k), \ \forall k \in \{1, \ldots, n\}, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Par définition, $(\overline{\mathbb{R}}^n, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n), \lambda) = \otimes_{k=1}^n (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}), \lambda)$

Exemple. Les courbes de $\mathbb{R}^2$, les courbes et les surfaces de $\mathbb{R}^3$ sont des ensembles λ-négligeables.

Théorème 1.1.5 (propriétés fondamentales de λ sur $\overline{\mathbb{R}}^n$ $(n \geq 2)$)**.** *On démontre que*

1. *λ est σ-finie et invariante par translation.*
2. *Les parties dénombrables et les boréliens d'intérieurs vides sont des parties λ-négligeables.*
3. *Les courbes et surfaces régulières*[2] *de $\overline{\mathbb{R}}^n$ ($n = 2$ ou 3) sont des parties λ-négligeables. En particulier, pour une partie borélienne A dans $\overline{\mathbb{R}}^n$ dont la frontière ∂A est une réunion d'une suite de courbes ou de surfaces régulières, on a,*
$$\lambda(\partial A) = 0 \Longrightarrow \lambda(\mathring{A}) = \lambda(\bar{A}) = \lambda(A)$$
ou $\mathring{A}$ est l'ensemble des ***points intérieurs*** *à A et $\bar{A}$ est l'ensemble des* ***points adhérents*** *à A.*
Si $n \in \{2,3\}$, alors $\lambda(A)$ est égale à l'aire de A ou le volume de A.

Exemple.

1. Les fonctions $\frac{1}{x^2+y^2}$, $\frac{1}{xy}$ et $\frac{1}{x-y}$ sont des fonctions définies et continues λ $p.p$. Quel ensemble négligeable doit-on retirer à $\mathbb{R}^2$ pour s'en assurer ?
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ converge λ $p.p$ vers 0. En effet : $\forall x \neq \pm 1, \lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[\mathbb{R}]{CS\,\lambda\,p.p} 0$.

1.2 Fonctions mesurables sur $\overline{\mathbb{R}}^n$

Définition 1.2.1 (Fonction mesurable)**.** Soit $(\overline{\mathbb{R}}^n, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n))$ et $(\overline{\mathbb{R}}^m, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^m))$ deux espaces boréliennes et $f : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^m$. On dit que f est une **fonction mesurable** si l'image réciproque de tout borélien est un borélien, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^m), \ f^{-1}(A) \overset{déf}{=} \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n : \ f(x) \in A\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n).$$

Théorème 1.2.1. 1. *Une fonction $f : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si l'on a l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

i) $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}, \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n : f(x) \leq a\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ *(**admis**, les équivalences sont alors faciles à établir)*

ii) $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}, \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n : f(x) \geq a\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$

iii) $\forall a,b \in \overline{\mathbb{R}}, \{x \in \overline{\mathbb{R}}^n : a \leq f(x) \leq b\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$

iv) Pour toute partie ouverte ou fermée A de $\overline{\mathbb{R}}$, $\{x \in \overline{\mathbb{R}}^n : f(x) \in A\} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$.

2. *Une fonction $f = (f_1, \dots, f_m) : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^m, (m \geq 2)$ est mesurable si $f_1, \dots, f_m$ sont des fonctions mesurables.*

3. *Soit $f, g : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^m$, si $f = g\,\lambda\, p.p$, alors f est mesurable si et seulement si g est mesurable.*

Exemple.

- Toute fonction constante est mesurable.
- Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, la **fonction indicatrice** χ_A ($\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$, sinon) est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$.
- Toute fonction continue de $\overline{\mathbb{R}}^n$, ou d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}^n$, dans $\overline{\mathbb{R}}$ est mesurable. La réciproque est fausse.
- La combinaison linéaire de fonctions mesurables est une fonction mesurable.
- Le produit de fonctions mesurables est une fonction mesurable.
- La composée de fonctions mesurables est une fonction mesurable.
- Pour toute norme de $\overline{\mathbb{R}}^m$, les fonctions $\|f\|$ et $\|f\|^2$ sont des fonctions mesurables.
- Si $f_1, f_2, \dots, f_n$ sont des fonctions mesurables, les fonctions suivantes sont aussi mesurables :

  i) $\sum_{k=1}^n a_i f_i$ où les a_i sont réels,

  ii) $\prod_{k=1}^n (f_i)^{a_i}$ où chaque a_i est un entier relatif, non nul si f_i peut s'annuler,

  iii) $\min(f_1,f_2,\dots,f_n)$ et $\sup(f_1,f_2,\dots,f_n)$

Le résultat suivant montre que le concept de fonctions mesurables est plus flexible que celui de fonctions continues.

Théorème 1.2.2 (Théorème Limite)**.** *Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, f_k : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une suite de fonctions mesurables, alors*

1. $\inf_k(f_k)$ *et* $\sup_k f_k$ *sont des fonctions mesurables,*

2. *si* $f_k \xrightarrow[\overline{\mathbb{R}}^n]{CS\,\lambda\,p.p} f$ *alors* f *est mesurable, et l'ensemble* $\{x \in \overline{\mathbb{R}}^n \,/\, (f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ *converge*$\}$ *est un borélien.*

3. *si la série* $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *est convergente* $\lambda\,p.p$ *alors sa somme* $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ *est une fonction mesurable. Les* f_k *peuvent être à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

À partir de maintenant, on ne considère que des fonctions mesurables, ce qui est le cas de toutes les fonctions rencontrées en physique dès lors qu'elles sont explicitées.

1.3 Construction de l'integrale de Lebesgue pour les fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$

Nous ne nous intéressons ici qu'aux fonctions définies sur $\overline{\mathbb{R}}$ et à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. La construction de l'intégrale de Lebesgue d'une telle fonction se fait en trois étapes :

1. On définit l'intégrale des fonctions simples,
2. On définit l'intégrale des fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$, appelées fonctions positives ou nulles,
3. On définit l'intégrale des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ en écrivant une telle fonction comme différence de deux fonctions positives ou nulles.

1.3.1 Intégrale des fonctions simples

Définition 1.3.1 (Fonctions simples)**.** Une ***fonction simple*** est une application s telle que

a) s est définie sur $\overline{\mathbb{R}}$ et à valeurs dans $[0, +\infty]$

b) s est mesurable

c) s ne prend qu'un nombre **fini** de valeurs dans $[0, +\infty]$.

On notera $\mathbb{S}$ l'ensemble de ces fonctions simples.

Remarque 1.3.1.

1. L'ensemble des fonctions simples est stable par addition et par multiplication par un réel strictement positif. Si $s_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}$ et $s_2 = \sum_{i=1}^q \beta_i \chi_{B_i}$ sont des fonctions simples, on a :
$$\forall a \geq 0, as_1 + s_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{q}(a\alpha_i + \beta_j)\chi_{A_i \cap B_j}$$

2. Sur $\mathbb{R}$, une fonction en escalier $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \chi_{[a_i, a_{i+1}]}, \alpha_i \geq 0, a_1 < a_1 < \ldots < a_m$ est une fonction simple. Une fonction simple n'est pas toujours de ce type.

Définition 1.3.2 (Intégrale des fonctions simples)**.** Soit $s = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i} : \overline{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$, une fonction simple. On pose :
$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} s(x)\lambda(dx) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \lambda(A_i)$$

$\int_{\overline{\mathbb{R}}} s(x)\lambda(dx) \in [0, +\infty]$ est l'**intégrale de s au sens de λ, on dit aussi au sens de Lebesgue**. Cette valeur est finie ou infinie, mais elle existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

1.3.2 Intégrale des fonctions mesurables positives

Lemme 1.3.1. *Toute application mesurable f définie sur $\overline{\mathbb{R}}$ et à valeurs dans $[0, +\infty]$ est limite simple d'une suite croissante $(s_n)_{n\geq 1}$ de fonctions simples. Il suffit de prendre :*

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{si } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \text{ et } k = 0, 1, \dots, n2^n - 1 \\ n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

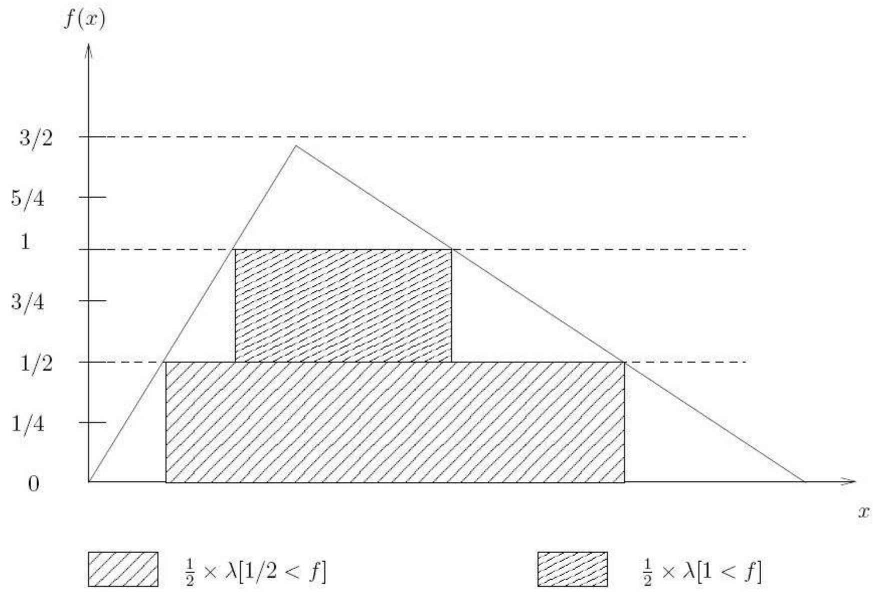

FIGURE 1.1 – *Principe de l'intégrale de Lebesgue, découpage de l'axe des ordonnées*

Définition 1.3.3. Soit une application f définie sur $\overline{\mathbb{R}}$ et à valeurs dans $[0,+\infty]$. Si f est mesurable, l'intégrale de Lebesgue de f par rapport à la mesure de Lebesgue λ est

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx) = \sup_{N\geq 1} \frac{1}{2^N} \sum_{n\geq 1} \lambda\Big[\frac{n}{2^N} < f\Big]$$

Remarque 1.3.2. Il est très important de noter que l'intégrale de Lebesgue de f est un élément de $[0, +\infty]$ et l'intégrale d'une application positive ou nulle existe toujours dans $[0, +\infty]$. On voit donc qu'en munissant $\overline{\mathbb{R}}$ de la tribu et de la mesure de Lebesgue, on sait intégrer toutes les applications mesurables positives ou nulles.

Théorème 1.3.2 (Théorème de Beppo-Levi)**.** *Soit $f : \overline{\mathbb{R}}^n \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive,*

1. *il existe une suite croissante $(f_k)_{k\geq 1}$ de fonctions simples telles que $f_k \xrightarrow[\overline{\mathbb{R}}^n]{CS\,\lambda p.p} f$. Si de plus f est une fonction bornée, il existe une suite croissante de fonctions simples qui converge uniformément vers f.*

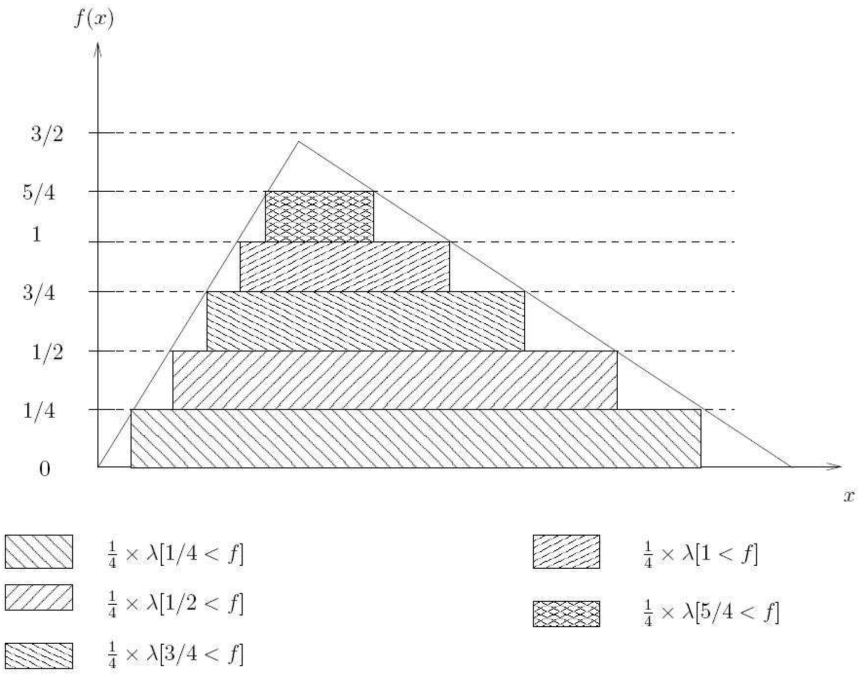

FIGURE 1.2 – *Principe de l'intégrale de Lebesgue, découpage de l'axe des ordonnées*

2. *Si* $(f_k)_{k\geq 1}$ *est une suite croissante de fonctions simples telles que* $f_k \xrightarrow[\overline{\mathbb{R}}^n]{CS\,\lambda\,p.p} f$ *alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\overline{\mathbb{R}}^n} f_k(x)\lambda(dx) = \sup_{s\in\xi_f^+} \int_{\overline{\mathbb{R}}^n} s(x)\lambda(dx) = \int_{\overline{\mathbb{R}}^n} f(x)d\lambda(dx)$$

où $\xi_f^+ = \{s : \overline{\mathbb{R}}^n \to [0, +\infty] \,/\, s \leq f, \text{ et } s \in \mathbb{S}\}$

Remarque 1.3.3. Dans les références usuelles sur l'intégrale de Lebesgue, le théorème de Beppo-Levi est utilisé comme définition de l'intégrale de Lebesgue d'une application définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Proposition 1.3.3. *Soit* $f, g : \overline{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ *des fonctions mesurables positives. On a les propriétés suivantes ;*

1. *Si* $0 \leq f \leq g$, *alors* $\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)\lambda(dx) \leq \int_{\overline{\mathbb{R}}} g(x)\lambda(dx)$.
2. $\forall a,b \geq 0$, $\int_{\overline{\mathbb{R}}}(af + bg)(x)\lambda(dx) = a\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)\lambda(dx) + b\int_{\overline{\mathbb{R}}} g(x)\lambda(dx)$
3. $\forall a > 0$,

$$\lambda(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a}\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)\lambda(dx) \text{ (inégalité de Markov)}$$

4. $\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)\lambda(dx) = 0 \iff f = 0 \;\lambda\, p.p$

1.3.3 Intégrales des fonctions mesurables à valeurs réelles

Soit $f : (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ une application mesurable. On donne les notations suivantes :

- Soit $f^+ = f\chi_{[f\geq 0]} = \sup\{f,0\}$ et
- Soit $f^- = -f\chi_{[f<0]} = \sup\{-f,0\} = -\inf\{f,0\}$.
- f^+ et f^- sont appelés respectivement la *partie positive* et la *partie négative* de f, **mais remarquons que**
- f^+ et f^- sont mesurables et à valeurs dans $[0, +\infty]$
- $f = f^+ - f^-$
- $|f| = f^+ + f^-$

Remarque 1.3.4. Puisque $\int f^+$ et $\int f^-$ existent mais peuvent être toutes les deux infinies, on peut obtenir l'écriture $\infty - \infty$ qui n'est pas d 'efinie.

Définition 1.3.4 (Intégrale de Lebesgue)**.** Soit $f : (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ une **application mesurable à valeurs réelles de signe quelconque. Son intégrale de Lebesgue n'existe pas toujours**. On dit que f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue ou **sommable**, si l'intégrale de $|f|$ est finie. Ceci équivaut à dire que les intégrales de f^+ et de f^- sont toutes les deux finies. L'intégrale de f est alors la quantité finie :

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)\lambda(dx) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f^+(x)\lambda(dx) - \int_{\overline{\mathbb{R}}} f^-(x)\lambda(dx). \tag{1.1}$$

L'ensemble des applications mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et sommables ($\int |f|$ finie) sera noté $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$.

Pour une fonction sommable f et avec les notations de la définition 1.3.4, on a :

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} |f(x)|\lambda(dx) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f^+(x)\lambda(dx) + \int_{\overline{\mathbb{R}}} f^-(x)\lambda(dx) < +\infty. \tag{1.2}$$

Remarque 1.3.5. Il faut donc vérifier l'équation (1.2) avant de calculer l'intégrale de Lebesgue d'une fonction réelle mesurable de signe quelconque.

Théorème 1.3.4 (Espace fonctionnel $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$)**.** *On énonce les résultats suivants :*

i) L'ensemble $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ est un espace vectoriel. C'est-à-dire que si f et $g \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$, alors pour tout a et b, réels, $\int_{\overline{\mathbb{R}}}(af+bg)(x)\lambda(dx) = a\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)\lambda(dx) + b\int_{\overline{\mathbb{R}}} g(x)\lambda(dx)$

ii) L'application $f \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}}) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx) \in \overline{\mathbb{R}}$ est une forme linéaire positive. Cela signifie que cette application est linéaire et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qu'elle est positive au sens où $f \geq 0$ implique que $\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)\lambda(dx) \geq 0$.

iii) Pour tout élément f de $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$, $\left|\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)\lambda(dx)\right| \leq \int_{\overline{\mathbb{R}}} |f(x)|\,\lambda(dx)$.

iv) Si $g \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ et si f est une application mesurable telle que $|f| \leq |g|$, alors $f \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$.

1.3.4 Intégration sur une partie mesurable

Définition 1.3.5. Soit $f : (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ une application mesurable. Soit B un borélien de $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\chi_B f$ est sommable, on pose alors :

$$\int_B f(x)\lambda(dx) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} \chi_B(x) f(x)\lambda(dx). \tag{1.3}$$

Remarque 1.3.6. Cette remarque entraîne que tous les résultats que nous avons énoncés — et tous ceux que nous énoncerons — en utilisant l'intégrale sur tout $\overline{\mathbb{R}}$ restent valables lorsqu'on remplace $\overline{\mathbb{R}}$ par un sous-ensemble mesurable de $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 1.3.5. *Soit $f, g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions mesurables. On a les propriétés suivantes ;*

1. *Soit $A, B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$: si $A \cap B$ $\lambda-$négligeable, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ on a*

$$\int_{A\cup B} f(x)\lambda(dx) = \int_A f(x)\lambda(dx) + \int_B f(x)\lambda(dx).$$

On en déduit que $A \subset B \Longrightarrow \int_A f(x)\lambda(dx) \leq \int_B f(x)\lambda(dx)$

2. *Si $f \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ et $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ est λ-négligeable alors $\int_A f(x)\lambda(dx) = 0$.*

1.4 Les espaces fonctionnels $L^1(\overline{\mathbb{R}})$ et $L^2(\overline{\mathbb{R}})$ de Lebesgue

1.4.1 L'espace $L^1(\overline{\mathbb{R}})$

Définition 1.4.1 (Semi-normes)**.** On rappelle qu'une semi-norme ℓ sur un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en pratique) est une application à valeurs réelles positives telle que :

- $\ell(0) = 0$

- Pour tout $x, y \in E$, $\ell(x+y) \leq \ell(x) + \ell(y)$
- Pour tout $a \in \mathbb{K}$, $\ell(ax) = |a|\ell(x)$

Remarque 1.4.1. Considérons l'application $\|\cdot\|_1$ qui à $f \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ associe le nombre réel $\|f\|_1 = \int_{\overline{\mathbb{R}}} |f(x)|\lambda(dx)$. C'est une application qui ne prend que des valeurs positives. L'application $\|\cdot\|_1$ n'est qu'une semi-norme. Pour que $\|\cdot\|_1$ soit une norme, il faudrait que l'implication $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$ soit vraie en tout point. Or cette implication n'est pas vraie en raison du théorème suivant qui montre qu'il suffit qu'une application mesurable soit nulle presque partout pour être sommable et d'intégrale nulle.

Théorème 1.4.1. *Avec les notations d'égalité presque partout,*

$$f \stackrel{p.p}{=} 0 \Leftrightarrow \int_{\overline{\mathbb{R}}} |f(x)|\, \lambda(dx) = 0.$$

Remarque 1.4.2. La relation notée $\stackrel{p.p}{=}$ ainsi définie sur $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ est une relation d'équivalence. On peut donc définir $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})/_{\stackrel{p.p}{=}}$, l'ensemble quotient de $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ par cette relation d'équivalence $\stackrel{p.p}{=}$. On rappelle que $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})/_{\stackrel{p.p}{=}}$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\stackrel{p.p}{=}$. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$, c'est l'ensemble des $g \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ telles que $f \stackrel{p.p}{=} g$.

Définition 1.4.2. On définit l'espace $L^1(\overline{\mathbb{R}})$ comme l'ensemble quotient $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})/_{\stackrel{p.p}{=}}$ de $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ quotienté par la relation d'équivalence "égalité presque partout" notée $\stackrel{p.p}{=}$.

Remarque 1.4.3. L'ensemble $L^1(\overline{\mathbb{R}})$ est donc, par définition d'un ensemble quotient, l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $\stackrel{p.p}{=}$. Un élément de $L^1(\overline{\mathbb{R}})$ est donc un ensemble d'applications sommables qui sont égales presque partout et qui ont donc des valeurs d'intégrales égales car elles ne diffèrent entre elles que sur des ensembles négligeables (de mesure est nulle) et qui ne comptent donc pas pour le calcul intégral. L'usage veut que l'on confonde une classe d'équivalence avec n'importe lequel de ses éléments ou représentants (pensez aux vecteurs). Pour toute application sommable f, on n'écrira plus $f \in \mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$ mais $f \in L^1(\overline{\mathbb{R}})$. C'est une écriture abusive, communément acceptée et qui confond donc f avec toute autre application sommable g égale presque partout à f et qui est donc telle que $\int_{\overline{\mathbb{R}}} |g(x) - f(x)|\lambda(dx) = 0$.

Définition 1.4.3 (Norme L^1)**.** Si $f \in L^1(\overline{\mathbb{R}})$, on note $\|f\|_1$ la valeur commune des $\|g\|_1 = \int_{\overline{\mathbb{R}}} |g(x)|\lambda(dx)$ lorsque g parcourt la classe d'équivalence de f. L'application $\|\cdot\|_1 : L^1(\overline{\mathbb{R}}) \longmapsto [0,\infty[$, qui à $f \in L^1(\overline{\mathbb{R}})$ associe le réel fini $\|f\|_1$, est maintenant une norme sur ce nouvel espace. L'application $\|\cdot\|_1$ est appelée norme L^1.

Définition 1.4.4 (Sommabilité)**.** Une application f est dite sommable si le module de f est une fonction intégrable au sens de Lebesgue, c'est-à-dire $\int_{\overline{\mathbb{R}}} |f(x)|\lambda(dx \leq +\infty)$

Remarque 1.4.4. L'ensemble $L^1(\overline{\mathbb{R}})$ est un espace vectoriel sur $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 1.4.2. *Avec les notations introduites précédemment, l'espace* $L^1(\overline{\mathbb{R}})$ *est complet pour la norme* $\|\cdot\|_1$.

Remarque 1.4.5. Le théorème précédent signifie que si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^1(\overline{\mathbb{R}})$ est de Cauchy, c'est-à-dire est telle que $\lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_1 = 0$, alors il existe un élément f de $L^1(\overline{\mathbb{R}})$ tel que $\lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$.

Du fait de la Définition 1.3.4, on remarquera que peu de fonctions sont des applications sommables. Dans la pratique, il n'est pas besoin de faire l'hypothèse que les fonctions admettent une intégrale de Lebesgue, et donc de considérer l'intégrale sur $\overline{\mathbb{R}}$. On introduit la définition suivante :

Définition 1.4.5 (Sommabilité locale)**.** Une application mesurable f est dite *localement sommable*, si elle est "intégrable au sens de Lebesgue" sur tout intervalle fermé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour tout fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{[a,b]} |f(x)|\lambda(dx)$ est finie.

Notation. L'ensemble des applications localement sommables est noté L^1_{loc}.

Exercice. Montrer que $L^1 \subset L^1_{\text{loc}}$.

1.4.2 L'espace $L^2(\overline{\mathbb{R}})$

Définition 1.4.6 (Fonction de carré sommable)**.** Une application f est dite *de carré sommable*, si le module de f au carré est sommable, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{\overline{\mathbb{R}}} |f(x)|^2\lambda(dx)$ est finie.

Remarque 1.4.6. On peut définir l'espace $\mathcal{L}^2(\overline{\mathbb{R}})$ comme l'ensemble des applications mesurables $f : (\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \to (\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ telles que $\int_{\overline{\mathbb{R}}} |f(x)|^2\lambda(dx) < \infty$. Comme $\mathcal{L}^1(\overline{\mathbb{R}})$, $\mathcal{L}^2(\overline{\mathbb{R}})$ est un espace vectoriel et l'application $\|\cdot\|_2 : f \in \mathcal{L}^2(\overline{\mathbb{R}}) \longmapsto \|f\|_2 = \sqrt{\int_{\overline{\mathbb{R}}} |f(x)|^2\lambda(dx)}$ n'est qu'une semi-norme. On procède alors comme précédemment en définissant l'espace quotient :

$$L^2(\overline{\mathbb{R}}) = \mathcal{L}^2(\overline{\mathbb{R}})/ \underset{=}{p.p}$$

de sorte que $f \in L^2(\overline{\mathbb{R}})$ signifie que f est un représentant d'une classe pour la relation d'équivalence $\overset{p.p}{=}$; cette classe d'équivalence est l'ensemble des fonctions g de $\mathcal{L}^2(\overline{\mathbb{R}})$ qui sont égales presque partout à f et telles que

$$\|f-g\|_2=\sqrt{\int_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|^2\lambda(dx)}=0.$$

L'application $\|\cdot\|_2 : f\in L^2(\overline{\mathbb{R}})\longmapsto \|f\|_2=\sqrt{\int_{\overline{\mathbb{R}}}|f(x)|^2\lambda(dx)}$ est alors une norme que l'on appelle la norme L^2.
Cette norme est une norme quadratique que l'on peut associer au produit scalaire défini, pour toute application à valeurs réelles f et g par :

$$\langle f,g\rangle=\int_{\overline{\mathbb{R}}}f(x)g(x)\lambda(dx).$$

et pour toute application à valeurs complexes f et g par :

$$\langle f,g\rangle=\int_{\overline{\mathbb{R}}}f(x)\overline{g(x)}\lambda(dx).$$

Théorème 1.4.3. *L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est dit préhilbertien, ce qui signifie que c'est un espace vectoriel muni d'une norme quadratique et d'un produit scalaire, définis ci-dessus. De plus, $L^2(\mathbb{R})$ est complet : pour toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^2(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|_2=0$, il existe un élément f de $L^2(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_2=0$. C'est un espace de Hilbert.*

Remarque 1.4.7. Ce dernier résultat signifie que l'on peut approcher f par f_n, dès que n est assez grand, avec une erreur d'estimation $f-f_n$ dont l'énergie, c'est-à-dire, la norme $\|f-f_n\|_2$ devient arbitrairement petite. Ce résultat est fondamental en traitement du signal.

Proposition 1.4.4 (Produit dans L^2)**.** *Attention, L^2 n'est pas stable par multiplication. Soient f et g appartenant à L^2, alors leur produit fg est sommable, c'est-à-dire appartient à L^1.*

PREUVE: A faire en exercice en écrivant que $(|f|-|g|)^2\geq 0$. ■

Remarque 1.4.8. Il n'y a aucune raison de s'arrêter en si bon chemin et on définit alors les espaces $L^p(\overline{\mathbb{R}})$ avec $1\leqslant p<\infty$: Soit f une application de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$; on dit que $f\in\mathcal{L}^p(\overline{\mathbb{R}})$ si f est mesurable et $\int_{\overline{\mathbb{R}}}|f(x)|^p\lambda(dx)<\infty$. On définit alors $L^p(\overline{\mathbb{R}})=\mathcal{L}^p(\overline{\mathbb{R}})/\underset{p.p}{=}$ et la norme L^p par $\|\cdot\|_p$ qui à tout $f\in L^p(\overline{\mathbb{R}})$ associe la valeur $\|f\|_p=\left(\int_{\overline{\mathbb{R}}}|f(x)|^p\lambda(dx)\right)^{1/p}$.

Remarque 1.4.9. Les espaces L^p $(1\leqslant p<\infty)$ sont des espaces vectoriels normés complets (Banach) pour la norme ci-dessus.
Parmi les espaces L^p, seul L^2 est un Hilbert. On dit que la norme L^2 est induite par son produit scalaire.

Remarque 1.4.10. La norme euclidienne de $\overline{\mathbb{R}}^n$ est une norme L^2, elle est induite par le produit scalaire de $\overline{\mathbb{R}}^n$. Ainsi dans $\overline{\mathbb{R}}^n$, on peut calculer des distances mais aussi des angles. Cela est primordial pour pouvoir définir la notion de projection orthogonale et donc de distance minimale.

De même que pour la sommabilité locale, on a :

Définition 1.4.7. Une application f est dite *de carré localement sommable*, si elle est de carré "intégrable au sens de Lebesgue" sur tout intervalle fermé $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour tout fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{[a,b]} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ est finie.

Remarquons que toute application de carré sommable est de carré localement sommable.

Notation. L'ensemble des applications de carré localement sommables est noté L^2_{loc}.

Exercice. Montrer que $L^2_{[a,b]} \subset L^1_{[a,b]}$, pour a et b réels finis.

1.5 Théorèmes de convergence

La puissance de l'intégrale de Lebesgue s'exprime par quelques théorèmes qui permettent de passer d'intégrales de limites à des limites d'intégrales (échange du signe somme et de la limite).

1.5.1 Convergence monotone et corollaires

Théorème 1.5.1 (Théorème de la convergence monotone)**.** *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'applications mesurables **positives**. Alors si $f_n(x) \xrightarrow[\overline{\mathbb{R}}]{CS\lambda p.p} f(x)$ pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\lambda(dx). \tag{1.4}$$

Corollaire 1.5.2.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives. On a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) \lambda(dx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\lambda(dx)$$

2. Soit $f : \overline{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive.

   (a) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de boréliens 2 à 2 disjoints (ou $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j$, λ-négligeable), on a

$$\int_{\cup_{n=0}^{+\infty} A_n} f(x)\lambda(dx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f(x)\lambda(dx)$$

   (b) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de boréliens, on a

$$\int_{\cup_{n=0}^{+\infty} A_n} f(x)\lambda(dx) = \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} f(x)\lambda(dx)$$

1.5.2 Convergence dominée et corollaires

Théorème 1.5.3 (Théorème de la convergence dominée). *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications mesurables $f_n : (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ définies presque partout. S'il existe une application mesurable $g \in L^1(\overline{\mathbb{R}})$ telle que $|f_n| \leq g\,\lambda - p.p.$ pour tout entier $n \geq 1$ et si la suite f_n converge simplement presque partout vers une limite f alors :*

i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\overline{\mathbb{R}}} |f_n(x) - f(x)|\lambda(dx) = 0,$

ii) $f \in L^1(\overline{\mathbb{R}}),$

iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\overline{\mathbb{R}}} f_n(x)\lambda(dx) = \int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x)\lambda(dx).$

Corollaire 1.5.4.

1. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications mesurables $f_n : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définies presque partout sur $\overline{\mathbb{R}}$ et telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\lambda(dx) < \infty.$$

   Alors la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

   converge pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\lambda(dx).$$

   Ce qui implique en particulier que f_n est sommable quel que soit n.

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de boréliens 2 à 2 disjoints (ou $\forall i \neq j, A_i \cap A_j$, λ-négligeable), on

$$\int_{\cup_{n=0}^{+\infty} A_n} f(x)\lambda(dx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f(x)\lambda(dx)$$

Corollaire 1.5.5. *Soit $(f_t, t \in \overline{\mathbb{R}})$ une famille d'éléments de $L^1(\overline{\mathbb{R}})$. Supposons qu'il existe $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et une application (nécessairement mesurable) $f : (\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ telle que $\lim_{t\to t_0} f_t = f$ presque partout. S'il existe une application $g \in L^1(\overline{\mathbb{R}})$ telle que pour tout $t \in \overline{\mathbb{R}}$, $|f_t| \leq g$ presque partout, alors*

i) $\lim\limits_{t\to t_0} \int_{\overline{\mathbb{R}}} |f_t(x) - f(x)|\lambda(dx) = 0,$

ii) $f \in L^1(\overline{\mathbb{R}}),$

iii) $\lim_{t \to t_0} \int_{\mathbb{R}} f_t(x)\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx).$

1.5.3 Continuité et dérivation sous le signe somme

On considère une application définie sur $\mathbb{R} \times I$ où I est un intervalle dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est intégrable et on note $F(t)$ son intégrale par rapport à la mesure λ :

$$F(t) = \int f(x,t)\lambda(dx).$$

Proposition 1.5.6. *Soit t_0 un point de $I \subset \mathbb{R}$. On suppose que la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue en t_0 pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'il existe un voisinage V de t_0 et une fonction positive et intégrable h tels que l'on ait $|f(x,t)| \leq h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in V$. Alors, F est continue au point t_0.*

Proposition 1.5.7. *Avec les notations de la proposition précédente, supposons que $I = \mathbb{R}$. On suppose que la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable pour tout $x \in E$ et qu'il existe un voisinage V de t_0 et une fonction positive et intégrable h tels que l'on ait $|\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)| \leq h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in V$; alors la fonction $x \longmapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)$ est intégrable, la fonction F est dérivable en t_0 et on a $F'(t_0) = \int \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)\lambda(dx)$.*

1.6 Intégration sur $\overline{\mathbb{R}}^2$

Le but de ce chapitre est essentiellement de présenter le théorème de Tonelli-Fubini. Ce théorème est essentiel pour intégrer des applications définies sur $\overline{\mathbb{R}}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.6.1 Tribu produit sur $\overline{\mathbb{R}}^n$

Définition 1.6.1. On appelle **rectangle ou pavé mesurable** tout sous-ensemble A de $\overline{\mathbb{R}}^n$ de la forme $A = A_1 \times A_2 \ldots \times A_n$, que nous noterons aussi $\prod_{k=1}^n A_k$ où, pour tout $k = 1, \ldots, n$, $A_k \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. On définit la **tribu de Borel** $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ sur $\overline{\mathbb{R}}^n$ comme étant la tribu engendrée par les pavés de $\overline{\mathbb{R}}^n$.

Remarque 1.6.1. Il est très important de noter que l'ensemble des rectangles ou pavés mesurables n'est pas forcément une tribu. D'où la nécessité de considérer la tribu engendrée par ces pavés.

Définition 1.6.2. Soit f une application de $\overline{\mathbb{R}}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. On dit que l'application f est mesurable si l'image réciproque de tout borélien de $\overline{\mathbb{R}}$ est un borélien de $\overline{\mathbb{R}}^n$, c'est-à-dire, un élément de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^n)$.

Dans la suite, pour simplifier la présentation, nous travaillerons en dimension 2 ($n = 2$). mais les résultats énoncés se généralisent à toute dimension.

1.6.2 Mesure de Lebesgue sur $\overline{\mathbb{R}}^2$

Théorème 1.6.1. *Soit $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)$.*

i) L'application marginale qui à tout $x \in \overline{\mathbb{R}}$ associe la valeur de l'intégrale $\int \chi_A(x,y)\lambda(dy)$ est mesurable.

ii) L'application marginale qui à tout $y \in \overline{\mathbb{R}}$ associe la valeur de l'intégrale $\int \chi_A(x,y)\lambda(dx)$ est elle aussi mesurable.

iii) On a $\displaystyle\int\left(\int \chi_A(x,y)\lambda(dy)\right)\lambda(dx) = \int\left(\int \chi_A(x,y)\lambda(dx)\right)\lambda(dy).$

Remarque 1.6.2. Ce théorème nous permet alors de définir la mesure produit. En effet, le fait que les applications $x \in \overline{\mathbb{R}}^2 \longmapsto \int \chi_A(x,y)\lambda(dy)$ et que $y \in \overline{\mathbb{R}}^2 \longmapsto \int \chi_A(x,y)\lambda(dx)$ soient mesurables et à valeurs dans $[0,\infty]$, entraîne que les applications

$$A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2) \longmapsto \int\left(\int \chi_A(x,y)\lambda(dy)\right)\lambda(dx)$$

et

$$A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2) \longmapsto \int\left(\int \chi_A(x,y)\lambda(dx)\right)\lambda(dy)$$

sont des mesures positives sur $\overline{\mathbb{R}}^2$. Ces mesures, en vertu de l'assertion (iii) du théorème précédent sont même égales. Elles définissent alors ce qu'on appelle la mesure produit $\lambda \otimes \lambda$. On pose la définition suivante.

Définition 1.6.3. Avec les notations du théorème précédent, on définit la mesure de Lebesgue $\lambda \otimes \lambda$ sur $\overline{\mathbb{R}}^2$ comme étant l'application $\lambda \otimes \lambda : \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2) \to [0,\infty]$ qui à tout $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)$ associe :

$$\begin{aligned}(\lambda \otimes \lambda)(A) &= \int\left(\int \chi_A(x,y)\lambda(dy)\right)\lambda(dx)\\ &= \int\left(\int \chi_A(x,y)\lambda(dx)\right)\lambda(dy).\end{aligned}$$

Théorème 1.6.2. *La mesure de Lebesgue sur $\overline{\mathbb{R}}^2$ est la seule mesure définie sur $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)$ qui vérifie*

$$(\lambda \otimes \lambda)(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

pour tout pavé $A =]a_1,b_1[\times]a_2,b_2[$.

Remarque 1.6.3. Le théorème suivant justifie, dirons-nous, l'appellation de mesure produit donnée à $\lambda \otimes \lambda$. Il généralise le résultat précédent.

Théorème 1.6.3. *Avec les notations précédentes, la mesure produit $\lambda \otimes \lambda$ est la seule mesure définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ telle que, pour tout $(A,B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2$ et*

$$(\lambda \otimes \lambda)(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B).$$

Définition 1.6.4. L'espace $L^1(\mathbb{R}^2)$ est l'ensemble des applications mesurables définies sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int |f(x,y)|(\lambda \otimes \lambda)(dx,dy) < \infty.$$

Remarque 1.6.4. Dans la définition précédente, nous faisons l'abus de language usuel qui consiste à confondre une classe d'équivalence donnée et formée par des applications égales presque partout avec un quelconque représentant de cette classe.

Théorème 1.6.4 (Théorème de Tonelli-Fubini)**.** *Soit* $f : (\overline{\mathbb{R}}^2, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)) \to [0, +\infty]$ *une application mesurable positive. Si les applications*

$$x \in \overline{\mathbb{R}} \longmapsto \int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x,y)\lambda(dy) \tag{1.5}$$

et

$$y \in \overline{\mathbb{R}} \longmapsto \int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x,y)\lambda(dx) \tag{1.6}$$

sont mesurables alors l'intégrale double de Lebesgue existe toujours et on a :

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathbb{R}}^2} f(x,y)(\lambda \otimes \lambda)(dx,dy) &= \int_{\overline{\mathbb{R}}} \left(\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x,y)\lambda(dy) \right) \lambda(dx) \\ &= \int_{\overline{\mathbb{R}}} \left(\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x,y)\lambda(dx) \right) \lambda(dy). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Remarque 1.6.5. Les trois quantités sont identiques et peuvent valoir $+\infty$ toutes les trois.

Théorème 1.6.5 (Théorème de Fubini-Lebesgue)**.** *Soit* $f : (\overline{\mathbb{R}}^2, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)) \to \overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$ *une application mesurable de signe quelconque.*
Si f *est à valeurs dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et si* $f(x,y)$ *est sommable sur* $\overline{\mathbb{R}}^2$*, c'est-à-dire*

$$\int_{\overline{\mathbb{R}}} \left(\int_{\overline{\mathbb{R}}} |f(x,y)|\lambda(dy) \right) \lambda(dx) < \infty, \tag{1.8}$$

on écrit $f \in L^1(\overline{\mathbb{R}}^2)$*, alors :*

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathbb{R}}^2} f(x,y)(\lambda \otimes \lambda)(dx,dy) &= \int_{\overline{\mathbb{R}}} \left(\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x,y)\lambda(dy) \right) \lambda(dx) \\ &= \int_{\overline{\mathbb{R}}} \left(\int_{\overline{\mathbb{R}}} f(x,y)\lambda(dx) \right) \lambda(dy). \end{aligned}$$

Remarque 1.6.6. Les trois quantités sont identiques et peuvent valoir $+\infty$ toutes les trois.

Remarque 1.6.7. Il est très important de garder en mémoire que la mesurabilité de f par rapport à la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}^2)$ est une hypothèse incontournable dans l'énoncé du théorème de Tonelli-Fubini. Sans cette hypothèse, on ne sait pas conclure. Cependant on admettra cette mesurabilité pour les fonctions rencontrées.

Remarque 1.6.8. Le théorème de Tonelli-Fubini permet alors d'intervertir l'ordre des intégrales et d'intégrer de manière séquentielle par rapport à chacune des variables, sous certaines conditions quand même ! ! Ainsi, même lorsque f est mesurable, il ne faut pas oublier, avant d'appliquer Fubini, de vérifier que f est de signe constant ou sommable. Si f n'est pas de signe constant ou n'est pas sommable, l'égalité (1.7) n'est pas forcément vraie.

Remarque 1.6.9. L'hypothèse que $f(x,y)$ soit sommable sur $\overline{\mathbb{R}}^2$ est très forte. Sans elle il se peut que seulement l'une des expressions ait un sens ou, si elles ont toutes deux un sens, que les valeurs soient distinctes.

Exemple. $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ sur $E = \{0 \leq x \leq 1\} \times \{0 \leq y \leq 1\}$. f est non sommable sur $\mathbb{R}^2$ et les expressions donnent $\pm\dfrac{\pi}{4}$ selon la variable d'intégration choisie en premier.
Indication : Pour intégrer, on pourra remarquer que

$$f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Remarque 1.6.10. Avec toujours les mêmes notations que précédemment, considérons deux applications f, g de $L^1(\overline{\mathbb{R}})$. On peut définir sur $\overline{\mathbb{R}}^2$ l'application $f \otimes g$ par $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$, appelée produit tensoriel. Cette application est mesurable d'après les résultats précédents. Le théorème de Fubini implique immédiatement que $f \otimes g \in L^1(\overline{\mathbb{R}}^2)$ et que

$$\int (f \otimes g)(\lambda \otimes \lambda)(dx,dy)) = \left(\int f(x)\lambda(dx)\right)\left(\int g(x)\lambda(dy)\right).$$

Remarque 1.6.11. Si nous résumons les remarques précédentes, il n'y a aucun problème pour une application positive ou nulle et si f est de signe quelconque, on commence par montrer que $|f|$ est intégrable par rapport à la mesure produit et ensuite, et seulement ensuite, on se permet d'intégrer comme on veut. En particulier, en probabilité, il arrive qu'on ait à considérer des densités de probabilité à n variables réelles $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et que ayons à intégrer cette fonction à n variables. Etant donné que f est positive (par définition d'une densité de probabilité), le théorème de Tonelli va pouvoir s'appliquer. On aura donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n = \\ \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\cdots\left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\right)\cdots\right)dx_{n-1}\right)dx_n$$

et l'ordre d'intégration des variables peut être changé arbitrairement.

Terminons ces notions d'intégration dans $\overline{\mathbb{R}}^2$, avec la formule de changement de variables.

Définition 1.6.5 (Difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$)**.** Soient Ω et Ω', des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}^2$, et $\varphi\,:\,\Omega' \to \Omega$, $(u,v) \mapsto \varphi(u,v)$, une fonction bijective dont la réciproque φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega = \varphi(\Omega')$. On dit alors que φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ ou un changement de variables de Ω' sur Ω.

La définition d'une matrice jacobienne (appelée aussi jacobienne) est valable pour toute application possédant des dérivées partielles. Selon les dimensions des espaces de départ et d'arrivée de l'application, la jacobienne est une matrice rectangulaire. Nous restreignons ici la définition de jacobienne à un changement de variables (difféomorphisme), elle est donc carrée, inversible et son déterminant existe et est non nul.

Définition 1.6.6 (Matrice jacobienne d'un difféomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}^2$)**.** Soit φ un difféomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$, tel que $\varphi(u,v) = (x(u,v),y(u,v)) = (x,y) \in \Omega$. On appelle matrice jacobienne, ou jacobienne de la fonction vectorielle φ, la matrice carrée 2×2 dont les colonnes sont formées par les dérivées partielles de premier ordre des coordonnées de $\varphi(u,v)$ par rapport à u (première colonne) puis v (deuxième colonne). On la note

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Définition 1.6.7 (Jacobien d'un difféomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}^2$)**.** On appelle jacobien de φ et on note $detJ_\varphi$, le déterminant de sa jacobienne. **Dans le changement de variable ci-dessous, c'est la valeur absolue du jacobien qui intervient.**

Théorème 1.6.6 (Théorème de changement de variables)**.** *Soient Ω et Ω', des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}^2$, et φ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω' sur $\Omega = \varphi(\Omega')$.*
Soit $f\,:\,\Omega \to \overline{\mathbb{R}}, (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application mesurable, pour la mesure de Lebesgue, on a :

1) Si f est une fonction **positive** *on a*

$$\int_\Omega f(x,y)(\lambda\otimes\lambda)(dx,dy) = \int_{\Omega'=\varphi^{-1}(\Omega)} f(\varphi(u,v))\,|detJ_\varphi(u,v)|(\lambda\otimes\lambda)(du,dv)$$

2) Si f est une fonction **non positive sommable** *sur Ω, on a*

i) $f \in \mathcal{L}^1(\Omega) \Longleftrightarrow f \in \mathcal{L}^1(\Omega')$

ii) $$\int_\Omega f(x,y)(\lambda\otimes\lambda)(dx,dy) = \int_{\Omega'=\varphi^{-1}(\Omega)} f(\varphi(u,v))\,|detJ_\varphi(u,v)|(\lambda\otimes\lambda)(du,dv)$$

Exemple. Voir exercices à la fin de ce chapitre.

Théorème 1.6.7. *φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\overline{\mathbb{R}}^2$ dans $\overline{\mathbb{R}}^2$ est un difféomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}^2$ si et seulement si elle est injective et son jacobien est non nul (donc sa jacobienne inversible).*

Remarque 1.6.12 (Invariance par translation de l'intégrale de Lebesgue). Si f est une application mesurable positive ou si f est sommable dans $\overline{\mathbb{R}}^2$, alors

$$\forall (a_1,a_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2,\ \int_{\overline{\mathbb{R}}^2} f(x-a_1,y-a_2)(\lambda\otimes\lambda)(dx,dy) = \int_{\overline{\mathbb{R}}^2} f(x,y)(\lambda\otimes\lambda)(dx,dy)$$

1.7 Comparaison des intégrales de Riemann et de Lebesgue

1.7.1 Intégrabilité de Riemann et de Lebesgue

Définition 1.7.1 (Intégrale de Riemann)**.** Une application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a \leq b < \infty$, est dite **intégrable au sens de Riemann** ou, plus simplement, **Riemann-intégrable** s'il existe deux suites de fonctions en escaliers $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$, respectivement croissante et décroissante, telles que $u_n \leq f \leq v_n$ et

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (v_n(x) - u_n(x))dx = 0.$$

L'intégrale de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ de l'application f sur l'intervalle $[a,b]$ est la valeur commune des limites des suites $\int_a^b u_n(x)dx$, $n = 1,2,\ldots$ et $\int_a^b u_n(x)dx$, $n = 1,2,\ldots$ lorsque n tend vers l'infini :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_a^b u_n(x)dx = \lim_n \int_a^b v_n(x)dx.$$

Proposition 1.7.1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a \leq b < \infty$, est une application mesurable et Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors f est sommable sur $\mathbb{R}$ et les deux intégrales sont égales :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{[a,b]}(x)\lambda(dx).$$

Remarque 1.7.1. Pour une application $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ est souvent utilisée pour désigner l'intégrale de Riemann de f lorsque celle-ci est Riemann-intégrable. Cependant, puisqu'une application mesurable et Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable (sommable) et que les deux intégrales sont égales, $\int_a^b f(x)dx$ sera utilisée aussi, dans la suite, pour désigner l'intégrale de Lebesgue d'une application $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et sommable.

Définition 1.7.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application mesurable.

i) On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ est absolument convergente si l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ est convergente, c'est-à -dire si

$$\lim_{a\downarrow -\infty, b\uparrow\infty} \int_a^b |f(x)|dx < \infty$$

et on note cette limite

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx.$$

ii) On dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ est semi-convergente si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\downarrow -\infty, b\uparrow\infty} \int_a^b f(x)dx < \infty$$

alors que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ diverge.

Remarque 1.7.2. Lorsque l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ existe, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ existe évidemment.

Proposition 1.7.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable.*

i) L'application f est sommable si et seulement si l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ est absolument convergente.

ii) Si f est sommable sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\lambda(dx) = \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx). \tag{1.9}$$

Remarque 1.7.3. En vertu du résultat précédent, nous utiliserons la notation $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ pour désigner l'intégrale de Lebesgue d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est mesurable et sommable.

Remarque 1.7.4. Les résultats présentés ci-dessus supposent, dès le départ, que l'application f est mesurable par rapport à la tribu des boréliens. C'est une hypothèse raisonnable compte-tenu des applications que l'on rencontre dans la pratique. Si on ne fait pas cette hypothèse, il faut alors prouver la mesurabilité de f. En travaillant avec la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue dite complète — parce qu'elle est une extension de la mesure de Lebesgue à la tribu de Lebesgue —, on montre que les fonctions Riemann-intégrables sont mesurables par rapport à la tribu de Lebesgue. On peut alors résumer la situation en disant que :

i) La classe des applications sommables (Lebesgue-intégrables) par rapport à la mesure de Lebesgue (complète) contient la classe de toutes les applications Riemann-intégrables. La classe des fonctions sommables (Lebesgue-intégrables) est même strictement plus grande que celle des applications Riemann-intégrables, puisque l'application $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui associe 1 à tout $x \in \mathbb{Q}$ et 0 à tout élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est intégrable au sens de Lebesgue (son intégrale vaut 0) mais non Riemann-intégrable.

ii) La classe des applications sommables (Lebesgue-intégrables) par rapport à la mesure de Lebesgue (complète) contient aussi la classe de toutes les applications admettant une intégrale impropre absolument convergente.

iii) La classe des applications sommables (Lebesgue-intégrables) par rapport à la mesure de Lebesgue (complète) **ne contient pas** la classe de toutes les applications admettant une intégrale impropre semi-convergente : il suffit de considérer l'application non sommable $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ dont l'intégrale impropre est semi-convergente et vaut $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$. Mais les intégrales semi-convergentes ne sont que des limites d'intégrales. *Ce ne sont pas vraiment des intégrales - aucun théorème de l'intégration ne s'applique à elles - [...] et il n'y a guère plus à en dire.* Voir Bony [2, page 18].

1.7.2 Intégrales indéfinies

Un des résultats les plus importants de la théorie de Riemann est le suivant.

Théorème 1.7.3. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, alors, pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable et a pour dérivée f.*

Evidemment, on peut espérer avoir un résultat analogue pour l'intégrale de Lebesgue, valable sur une classe plus large que celle pour laquelle la théorie de Riemann le démontre. Effectivement, on a les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.7.4. *Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ et si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt \tag{1.10}$$

alors f est continue (et même uniformément) et $f' = g \quad (p.p)$

Théorème 1.7.5. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a \leq b < \infty$, est différentiable en **tout point** de $[a,b]$ et si $f' \in L^1([a,b])$, alors*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt \tag{1.11}$$

Remarque 1.7.5. Les règles de calcul des intégrales usuelles avec l'intégrale de Riemann s'appliquent aux intégrales de Lebesgue. Notamment, l'intégration par parties.

1.7.3 Intégration par parties

Proposition 1.7.6. *Soient deux applications numériques mesurables f et g. Soit deux réels a et b tels $a < b$.*

- *Si f et g sont définies et dérivables sur $[a,b]$ et si $(fg)'$, $f'g$ et fg' sont localement sommables, alors :*

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)dx &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx. \end{aligned} \tag{1.12}$$

- *Si f et g sont définies et dérivables sur $]-\infty,a]$ et si $(fg)'$, $f'g$ et fg' sont sommables sur $]-\infty,a]$, alors $f(x)g(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$ et :*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a f'(x)g(x)dx &= [f(x)g(x)]_{-\infty}^a - \int_{-\infty}^a f(x)g'(x)dx \\ &= f(a)g(a) - (fg)(-\infty) - \int_{-\infty}^a f(x)g'(x)dx, \end{aligned} \tag{1.13}$$

où $(fg)(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f(x)g(x)$ *;*

- *Si f et g sont définies et dérivables sur $[a,\infty[$ et si $(fg)'$, $f'g$ et fg' sont sommables sur $[a,\infty[$, alors $f(x)g(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers ∞ et :*

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f'(x)g(x)dt &= [f(x)g(x)]_a^\infty - \int_a^\infty f(x)g'(x)dx \\ &= (fg)(\infty) - f(a)g(a) - \int_{-\infty}^a f(x)g'(x)dx, \end{aligned} \tag{1.14}$$

où $(fg)(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$ *;*

- *Si f et g sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et si $(fg)'$, $f'g$ et fg' sont sommables sur $\mathbb{R}$, alors $f(x)g(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers ∞, une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$ et :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f'(x)g(x)dx &= [f(x)g(x)]_{-\infty}^\infty - \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)dx \\ &= (fg)(\infty) - (fg)(-\infty) - \int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)dx, \end{aligned} \tag{1.15}$$

avec $(fg)(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x)g(x)$ *et* $(fg)(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f(x)g(x)$ *;*

Remarque 1.7.6. Il est important de souligner que dans l'énoncé précédent, on demande à ce que les produits $f'g$, fg' et la dérivée du produit fg soient sommables, sans exiger que les applications f, g et leurs dérivées soient toutes sommables. Pour voir que des hypothèses d'intégrabilité sur toutes les fonctions f, g, f' et g' ne sont pas forcément utiles, on pourra lire le livre de D. Pastor [5].

Nous terminons cette section par un résultat permettant de dériver les intégrales de certaines fonctions dépendant d'un paramètre. Ce résultat est très utile en pratique, notamment pour prouver les propriétés des transformées intégrales des chapitres 2 et 3. C'est une conséquence du théorème de la convergence dominée mais il ne sera pas prouvé ici.

Dans l'énoncé suivant, un voisinage du réel t_0 peut être compris comme un intervalle ouvert contenant t_0.

1.7.4 Dérivation sous le signe somme

Proposition 1.7.7. *Soient un intervalle ouvert quelconque T de $\mathbb{R}$, une application f de $\mathbb{R}\times T$ dans $\mathbb{R}$ et $t_0 \in T$. On suppose que pour tout $t \in T$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est sommable et on pose :*

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx$$

- *Si l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue en t_0 pour tout $x \in \mathbb{R}$ et il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $|f(x,t)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout t dans un voisinage de t_0, alors F est continue en t_0 ;*

- *Si l'application $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur T pour tout $x \in \mathbb{R}$ et il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout t dans un voisinage de t_0, alors l'application*

$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$ *est sommable,* F *est dérivable en* t_0 *avec :*

$$F'(t_0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)dx$$

Remarque 1.7.7. Là encore, la proposition précédente peut être étendue au cas où certaines hypothèses sont vraies seulement presque partout. Dans la suite et la plupart des problèmes pratiques où il est utile de dériver sous le signe somme, l'énoncé précédent suffit.

Exemple. Application de la dérivation sous le signe somme.

Soit l'application f définie pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,\infty[$ par $f(x,t) = \mathrm{e}^{-tx^2}$. Pour tout $t \in]0,\infty[$, on peut poser :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx^2} dx$$

et nous verrons plus tard que :

$$F(t) = \sqrt{\pi/t}. \tag{1.16}$$

Soit $\varepsilon \in]0,\infty[$ et $I =]\varepsilon,\infty[$. L'application h définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = x^2\mathrm{e}^{-\varepsilon x^2}$ est sommable. L'application qui à tout $t \in I$ associe la valeur $f(x,t)$ est dérivable en tout point $t \in I$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| = x^2\mathrm{e}^{-tx^2} \leqslant h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in I$. Pour tout $t \in I$, nous sommes donc dans les conditions de la proposition 1.7.7 dont on déduit que F est dérivable en t avec :

$$F'(t) = -\int_{\mathbb{R}} x^2\mathrm{e}^{-tx^2} dx \tag{1.17}$$

Comme $\varepsilon > 0$ a été choisi arbitrairement ainsi que $t \in I =]\varepsilon,\infty[$, $F(t)$ est en fait dérivable en tout $t \in]0,\infty[$. Il nous suffit maintenant de dériver l'équation (1.16) et de comparer le résultat obtenu à l'équation (1.17) pour conclure que pour tout $t \in]0,\infty[$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\mathrm{e}^{-tx^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t^{-3/2}$$

1.8 Exercices d'application du chapitre 1

Ces exercices sont à réaliser en autonomie lors de l'apprentissage du cours. Les énoncés des exercices de séances présentielles (Petites Classes ou TD) se trouvent dans le livret dédié.

Exercices préliminaires

S0-1 : Changement de variables avec le Jacobien

Calculer $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

S0-2 : Fonctions réelles multivariées : jacobienne

1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, et donner leur classe :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto \left(x^2\,y^3\,z^4,\ \frac{1}{1+x^2+z^2}\right)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \left(x^3,\ y-x^2\right)$$

2. Calculer la jacobienne de $g \circ f$ au point $a(1,2,0)$.

S0-3 : Elements de calcul différentiel (voir UE CSA - Partie Physique des transferts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y)$.
On pose $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Ecrire les dérivées partielles de F en fonction de celles de f.

2. Grâce à ce changement de variables, résoudre l'EDP : $\quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = -(x^2+y^2)$.

Exercices du chapitre 1

S1-1 : Espaces fonctionnels et normes

a) Donner la norme de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

b) Donner le produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, puis la norme associée.

c) Soient f et g, deux fonctions de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, que peut-on dire du produit fg ?

d) Soient f et g, deux fonctions localement sommables, le produit fg est-il localement sommable ?

e) Soit $A = [a,b] \subset \mathbb{R}$, montrer que $\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(A) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(A)$. On utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans L^2 :

$$|\langle f,g\rangle_{\mathrm{L}^2}| \leq \|f\|_{\mathrm{L}^2}\ \|g\|_{\mathrm{L}^2}$$

S1-2 : Sommabilité de fonctions mesurables

Soit Y la fonction de Heaviside[3], nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ et égale à 1 sur $\mathbb{R}_+$. Les fonctions suivantes sont-elles dans L^1, L^1_{loc}, L^2 :

a) e^{-t}, b) $Y(t)\,\mathrm{e}^{-t}$, c) e^{-x^2}, d) e^{t^2}, e) $\frac{\sin x}{x}$, f) $Y(t)$, g) $\cos(t)$,
h) $\frac{1}{\sqrt{x}}$, i) $\frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}$.

S1-3 : Fonction Gamma

1. Montrer que $e^{-x}x^{a-1}\,\chi_{]0,+\infty[}$ est sommable pour $a > 0$.
2. Montrer que $1 + x \leq e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$.
4. En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{a-1}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x = \Gamma(a)$ pour $a > 0$.

S1-4 : Intégrales paramétrées

Soit $(\alpha,\beta) \in]0, +\infty[^2$. En utilisant les formules de Fubini-Tonelli,

1. Démontrer que la fonction $\mathrm{e}^{-xy}\chi_{[0,+\infty[\times[\alpha,\beta]}$ est sommable sur $\overline{\mathbb{R}}^2$,
2. Calculer la valeur de l'intégrale double $\displaystyle\iint_{[0,+\infty[\times[\alpha,\beta]} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
3. En déduire que l'intégrale $F(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur.

S1-5 : Intégrales doubles

Etudier l'existence de chacune des intégrales doubles suivantes, puis calculer leur valeur quand c'est possible.

$$\text{i)} \iint_{D(0,1)} \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{ii)} \iint_{[0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{e}^{-xy}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

3. On peut aussi la noter H, mais on évitera car cela correspond à la fonction de transfert des systèmes en Traitement du Signal

S1-6 : Théorème de convergence dominée

Pour tout entier naturel $n = 1, 2, \ldots$, et tout réel x, on pose

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad \text{et} \quad I_n = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\mathrm{d}x$$

Les graphes des fonctions g_n sont représentés en Figure 1.3.

1. Justifier l'existence de I_n.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, g_n est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est-à-dire I_n est finie.
3. Montrer que la suite $g_n(x)$ converge sur $\mathbb{R}$ vers $e^{-\frac{x^2}{2}}$.
4. Déterminer la limite de la suite I_n.

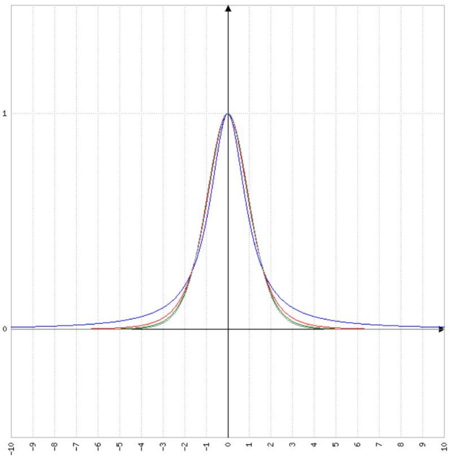

FIGURE 1.3 – *Graphes de la fonction* $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$ *pour* $n = 1,4,7,10$.

Solution des exercices du chapitre 1

Solution S1-1 :

a) $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, $\quad \|f\|_1 = \int |f(x)|dx$.

b) $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $\quad \langle f,g\rangle = \int f(x)\overline{g(x)}dx$, $\quad \|f\|_2 = \langle f,f\rangle = \int |f(x)|^2 dx$.

c) D'après l'inégalité de Hölder (voir Proposition 2.5.2), on a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\ \|g\|_2$ donc $fg \in$L^1.

d) L'ensemble L^1_{loc} n'est pas stable par multiplication. Contre-exemple $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[0,1]}$.

e) Pour $f \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(A)$, prendre $g(x) = \chi_A$. On a $\int_a^b |f| \leq \sqrt{b-a}\int_a^b |f|^2$. D'où l'inclusion si A est un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

Solution S1-2 :

a) L^1_{loc} b) Tous c) Tous d) L^1_{loc} e) L^1_{loc} et L^2 f) L^1_{loc} g) L^1_{loc}
h) L^1_{loc} i) L^1_{loc} et L^1.

Solution S1-3 :

1. Il faut faire l'étude au voisinage de 0 : la fonction est équivalente à x^{a-1}. Sur $[0,1]$, il y a convergence pour $a > 0$. Dans cette circonstance, l'intégrale converge aussi à l'infini car elle est un petit o de $1/x^2$. Donc la fonction $e^{-x}x^{a-1}\ \chi_{]0,+\infty[} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

2. Il suffit d'étudier les variations de $e^x - x - 1$ ou de la fonction u définie par $u(x) = \frac{1+x}{e^x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Calculer le développement limité de $n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$. D'après 2. on a $\ln(1-x) < -x$ et donc pour tout x, à partir d'un certain rang, on a $n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) < -x$.

4. Soit $g_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{a-1}\chi_{[0,+\infty[}$ et $g(x) = e^{-x}x^{a-1}\ \chi_{]0,+\infty[}$ fonction positive et sommable. On a $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) \overset{p.p}{=} g(x)$ et $|g_n(x)| \leq g(x)$ pour presque tout x et n fixé, d'après 3. On applique donc le théorème de convergence dominée pour échanger les signes $\lim$ et $\int_{\mathbb{R}}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-x}x^{a-1}\chi_{]0,+\infty[}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}\mathrm{d}x = \Gamma(a)$$

   pour $a > 0$.

Solution S1-4 :

1. La fonction $\mathrm{e}^{-xy}\chi_{[0,+\infty[\times[\alpha,\beta]}$ est à valeurs positives, c'est donc une fonction borélienne et son intégrale double existe au sens de Lebesgue. On peut donc intervertir les variables. La valeur peut être finie ou infinie.

2. En intégrant par rapport à x, puis à y, on trouve $\ln\frac{\beta}{\alpha}$ qui est finie, la fonction est donc sommable sur $\overline{\mathbb{R}}^2$.

3. En intégrant par rapport à y, puis x, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\, \mathrm{d}x = \ln \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \forall (\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$$

et $F(\alpha, \beta)$ est absolument convergente.

Chapitre 2

Transformations intégrales : Fourier, convolution

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux des trois transformations intégrales incontournables lorsque l'on étudie l'information ou les systèmes qui la transportent : La transformation de Fourier, et la convolution[1].
La transformation de Fourier (TF) est un outil mathématique très puissant qui permet d'analyser un signal, par exemple temporel ou spatial, dans le domaine fréquentiel. On verra que cette représentation est particulièrement bien adaptée aux signaux physiques dont une grande partie ont une nature sinusoïdale.
Dans ce chapitre, nous donnons les propriétés de la transformation de Fourier. On s'intéresse également aux ensembles de fonctions qui permettent de la définir. Le chapitre 5 étendra la notion de Transformation de Fourier à une classe d'objets plus généraux que la classe des fonctions sommables, les distributions, et en particulier celle de Dirac.
Dans le même chapitre, nous présentons la convolution des fonctions et ses relations avec la TF.

Le cas particulier important des fonctions périodiques et de leurs séries de Fourier est rappelé dans le paragraphe suivant. Certains élèves ont déjà abordé cette notion comme cas particulier de série de fonctions. Ce paragraphe n'est pas étudié en cours mais correspond à un cadre d'étude essentiel en traitement du signal. Nous le traiterons au chapitre 5 par la transformation de Fourier des distributions périodiques.

2.1 Fonctions périodiques et Série de Fourier

On dit qu'une fonction f a une période $T > 0$, ou que f est T-périodique, si pour tout x, $f(x + T) = f(x)$.

Définition 2.1.1. La plus petite valeur de T s'appelle la période de f.

Exemple. La fonction sinus a pour période 2π, 4π, $6\pi, \ldots$, mais 2π est <u>la</u> période de $\sin x$.

1. La transformation de Laplace fait l'objet du chapitre suivant

Développement en série de Fourier

Définition 2.1.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction de période T, définie sur $[-T/2, T/2]$, on définit la série de Fourier de f par l'expression

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right),$$

avec a_n et b_n les coefficients de Fourier définis par

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} \, \mathrm{d}x, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} \, \mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Remarque 2.1.1. Dans la série de Fourier, la valeur $\frac{a_0}{2}$ représente la moyenne de la fonction.

La série de Fourier est donc une série de fonctions. Si elle converge, on peut calculer sa somme, qui sera elle-même une fonction de x. Nous avons la définition suivante et le théorème de Dirichlet qui seront le cœur du traitement du signal (voir polycopié de Traitement du signal).

Définition 2.1.3. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique, continue par morceaux, est développable en série de Fourier, si f est la somme de sa série de Fourier.

Théorème 2.1.1 (de Dirichlet)**.** *Soit f une fonction, T-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (f dérivable par morceaux, de dérivée continue par morceaux) , alors*

- *la série de Fourier de f converge sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a*

$$\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T} \right)$$

- *si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, alors la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la fonction f.*

Remarque 2.1.2. Les conditions ci-dessus imposées à f sont suffisantes mais non nécessaires.

Propriétés

- $a_{-n} = a_n$ et $b_{-n} = -b_n$, pour $n = 1,2,\ldots$
- Si f est réelle alors les coefficients a_n et b_n sont réels.
- Si f est paire alors les coefficients b_n sont nuls et

$$a_n = \frac{4}{T} \int_{0}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} \, \mathrm{d}x, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

- Si f est impaire alors les coefficients a_n sont nuls (bien sûr la moyenne de la fonction est nulle) et

$$b_n = \frac{4}{T} \int_{0}^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} \, \mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Notation complexe

Relations d'Euler

Soit z, un nombre complexe de module 1 :

$$z = \mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad \frac{1}{z} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta,$$

et

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i},$$

où $i^2 = -1$.

Coefficients complexes de Fourier

Dans les expressions de a_n et b_n de la définition 2.1.2, on peut remplacer $\cos$ et $\sin$ par les exponentielles complexes ci-dessus. On obtient les relations suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad et \quad a_0 = 2c_0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}),$$

où les coefficients de Fourier complexes c_n sont définis par

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi nx/T}\,\mathrm{d}x$$

Si les conditions de Dirichlet sont vérifiées alors la fonction est développable en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{2i\pi nx/T}$$

Remarque 2.1.3. Il faut éventuellement remplacer $f(x)$ par $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$ aux points où f n'est pas continue.

Remarque 2.1.4. L'ensemble des coefficients c_n détermine la représentation fréquentielle de la fonction périodique f. Cette représentation n'est pas une fonction continue mais discrète : on parle de spectre de raies. En traitement du signal, on parle aussi de fréquences (fondamentale et harmoniques) qui correspondent à des fonctions cosinus ou sinus, oscillant plus ou moins vite, présentes dans la série de Fourier du signal.

Avant d'étudier l'extension de la série de Fourier d'une fonction périodique à la transformée de Fourier d'une fonction non périodique, nous allons introduire la notion de support d'une fonction borélienne[2] et celle de fonction à support borné (compact).

2. Lebesgue-mesurables

2.2 Support d'une fonction

Définition 2.2.1 (Support d'une fonction)**.** Pour f, une fonction réelle de la variable $x \in \mathbb{R}^n, n = 1{,}2$, le *support* de f est le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ en dehors duquel f est nulle (presque partout).

On note $K = \text{Supp } f$.
Supp f est le complémentaire de la réunion de tous les ouverts sur lesquels f est nulle (presque partout).

Définition 2.2.2 (Fonction à support borné)**.** Si K est un borné de $\mathbb{R}^n, n = 1{,}2$, on dit que f est à *support borné* ou à *support compact* dans $\mathbb{R}^n$ (voir [Bony, p. 115]).

Exemple. Le support de la fonction de Heaviside, Y, est $[0, +\infty[$. Le support de la fonction porte, Π est $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, Π est à support borné. Le support de la fonction sinc est $\mathbb{R}$ (voir exemple 1 du paragraphe 2.3.3).

Proposition 2.2.1. *Les supports de deux fonctions f et g vérifient les propriétés suivantes*

1. *Supp* $\tau_a f \;=\; a + \textit{Supp } f = \{a + x \;/\; x \in \textit{Supp } f\}$*, où* $\tau_a f$ *est la translaté de* f *par* a
2. *Pour une fonction continue, Supp* f *est l'adhérence de l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}^n, / \, f(x) \neq 0\}$*, notée* $\overline{\{x \in \mathbb{R}^n, / \, f(x) \neq 0\}}$
3. *Supp* $(f + g) \;\subset\; \textit{Supp } f \cup \textit{Supp } g$
4. *Supp* $(fg) \;=\; \textit{Supp } f \cap \textit{Supp } g$

Notation (Classe $\mathcal{C}^k$). On rappelle que la notation $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ représente l'ensemble des fonctions k-fois dérivables dans $\mathbb{R}$ ou k-fois différentiables dans $\mathbb{R}^n$, de dérivée k-ième continue. Pour Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$$

Notation (Classe $\mathcal{C}^k$ à support compact). On note $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$, $k = 0, 1, \ldots, \infty$, le sous-ensemble des fonctions $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ à support borné (compact).

Remarque 2.2.1. On remarque que les fonctions f de $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ sont bornées (en module), elles atteignent leur maximum en $x_0 \in K$ compact de $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.2.3 (Topologie des espaces compacts)**.** Les espaces $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$, sont des espaces fonctionnels, c'est-à-dire des espaces vectoriels de fonctions munis d'une topologie qui permet de définir le mode de convergence de leurs suites.
On munit $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$ d'une topologie donnée par la norme $\|\cdot\|_\infty$, appelée norme de la convergence uniforme. On dit aussi norme "infini" ou norme sup.

Enfin dans les démonstrations, on utilisera un outil puissant de l'analyse fonctionnelle qui est la notion de "densité" d'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ d'un espace topologique[3] $\mathcal{B}$.

3. muni d'une topologie au sens d'une norme donnée

Définition 2.2.4 (Densité entre ensembles normés)**.** Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles tels que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. On dit que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{B}$ si tout élément de $\mathcal{B}$ est limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

La densité d'une partie permet d'étendre à l'espace qui l'englobe la démonstration d'une propriété ou la définition d'une application par continuité.

Exemple. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans l'espace métrique $\mathbb{R}$.
$\mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, et dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Autrement dit toute fonction sommable ou de carré sommable peut s'écrire comme limite d'une suite de fonctions continues à support borné.

Pour le reste du chapitre, on se place dans $\mathbb{R}$, $n = 1$.

2.3 Transformation de Fourier dans L^1

2.3.1 Définition et exemples dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition 2.3.1 (Transformée de Fourier)**.** Soit f une fonction complexe de la variable réelle x. Pour f **sommable**, on appelle *transformée de Fourier* (TF) de f, la fonction complexe de la variable réelle ν, notée $\widehat{f}$, et définie par :

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\, \mathrm{d}x$$

Définition 2.3.2 (Opérateur transformation de Fourier)**.** On appelle transformation de Fourier (TF) et on note $\mathcal{F}$, l'opérateur qui à toute fonction sommable f associe sa transformée de Fourier, $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_b^0$, l'espace des fonctions continues bornées muni de la norme infinie[4]. L^1 n'est pas stable par TF.

Remarque 2.3.1. On a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. $\widehat{f}$ existe et est bornée puisque f est sommable.

Par abus de langage, on nomme indifféremment TF, l'opérateur $\mathcal{F}$ ou le résultat de son application, $\widehat{f} = \mathcal{F}[f]$, à une fonction sommable. On note aussi :

$$\mathcal{F}[f(x)](\nu) = \widehat{f}(\nu)$$

4. c'est-à-dire au sens de la norme sup (convergence uniforme) notée $\|\cdot\|_\infty$

Proposition 2.3.1. *On a les propriétés suivantes*

1. *La transformation de Fourier est un* **opérateur linéaire***.*
2. *La transformation de Fourier est un* **opérateur continu** *: soit une suite (f_j) de fonctions sommables qui tend vers f dans L^1, alors $(\widehat{f}_j)$ converge uniformément vers $\widehat{f}$ dans $\mathcal{C}_b^0$*

$$\left(\|f_j - f\|_1 \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\right) \Longrightarrow \left(\|\widehat{f}_j - \widehat{f}\|_\infty \xrightarrow[j\to\infty]{} 0\right)$$

Dans tout ce paragraphe 2.3, on considère des fonctions sommables, ce qui est très restrictif.

Exemples

Exemple (1). Introduisons tout d'abord une fonction qui aura un rôle important en traitement de signal comme en physique.

Définition 2.3.3 (La fonction porte)**.** On appelle "fonction porte" centrée de largeur 1, et on note Π la fonction définie par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1/2 \\ 1 & \text{si } |x| < 1/2 \end{cases}$$

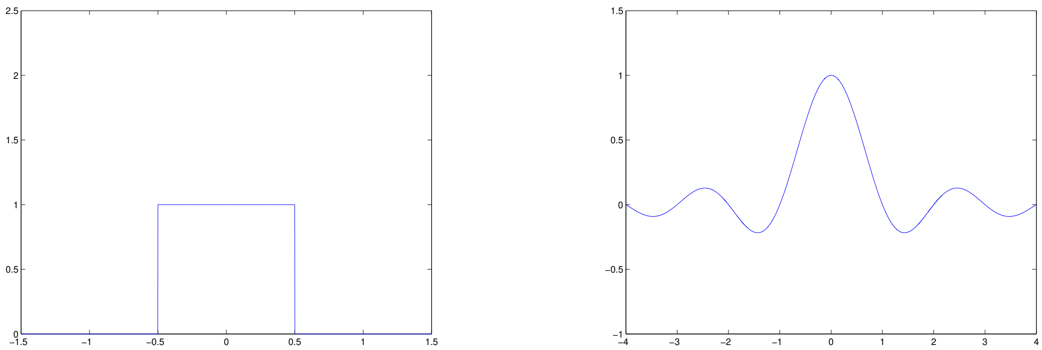

FIGURE 2.1 – *Graphe de la fonction porte de largeur 1 et de sa TF.*

Elle est sommable puisqu'à support borné

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \overset{déf}{=} \operatorname{sinc}(\pi\nu)$$

La fonction obtenue n'est pas sommable. On remarque cependant qu'elle appartient à L^2, tout comme la fonction porte.

Plus généralement, $\Pi_T(x)$ fonction porte de largeur T, centrée et de hauteur 1 :

$$\Pi_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{T}{2} \\ 1 & \text{si } |x| < \frac{T}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \hat{\Pi}_T(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu} = T \operatorname{sinc}(\pi\nu T)$$

Exemple (2). Soit $f(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, sommable si $a > 0$, sa transformée de Fourier est alors :

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-2i\pi\nu)x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a+2i\pi\nu)x}\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$$

On remarque que la TF est sommable.

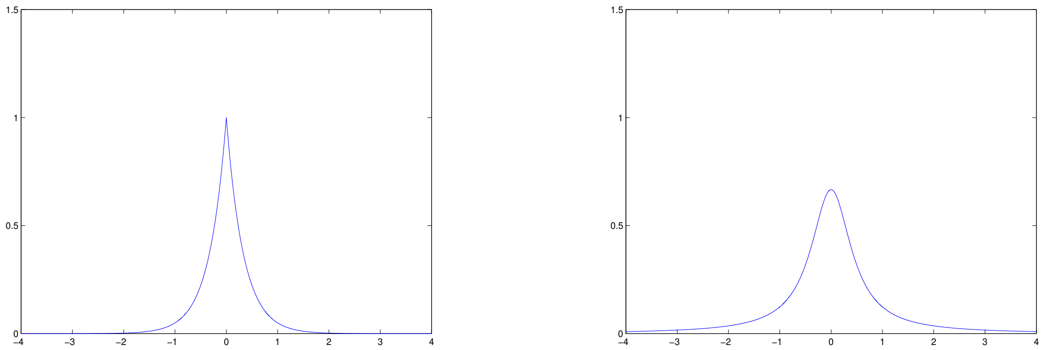

FIGURE 2.2 – *Graphe de la fonction* $\mathrm{e}^{-3|x|}$ *et de sa TF.*

Exemple (3). Soit la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$, sommable, on montre que sa transformée de Fourier est

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\pi(x^2+2i\nu x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi\nu^2}$$

La transformé de Fourier de cette gaussienne est un point fixe de l'opérateur TF.

Ces fonctions gaussiennes interviennent en particulier pour modéliser un faisceau gaussien ou une densité de probabilité gaussienne.

PREUVE: Voir exercice de Petites Classes. ■

Théorème 2.3.2 (Riemann-Lebesgue). *Si f est sommable,* $\widehat{f}$ **est une fonction continue qui tend vers 0 quand** ν **tend vers l'infini**

$$\lim_{\nu\to\infty} |\widehat{f}(\nu)| = 0$$

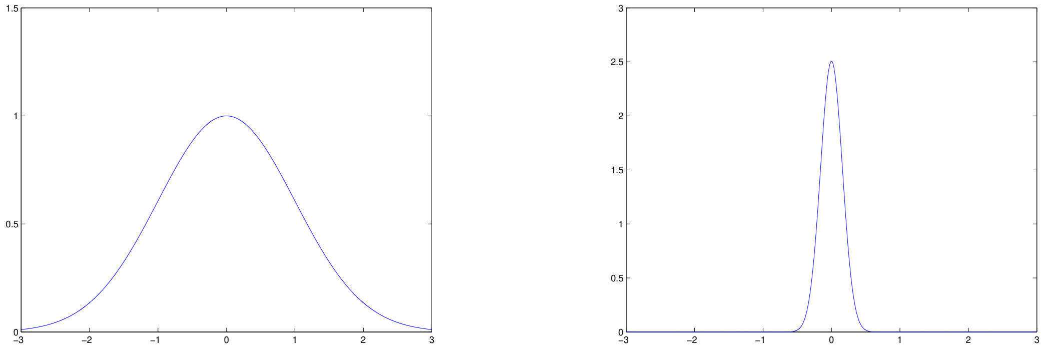

FIGURE 2.3 – *Graphe de la gaussienne* $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ *et de sa TF.*

PREUVE: On le montre pour f sommable et de dérivée continue ($\mathcal{C}^1$) en appliquant le théorème de Lebesgue pour les intégrales dépendant d'un paramètre, puis on conclut par densité des $\mathcal{C}^k$ dans L^1. ■

2.3.2 Propriétés pratiques de la transformation de Fourier

Les propriétés de la Transformation de Fourier sont largement utilisées en traitement du signal et filtrage (voir polycopié de Karine Amis [1]). En optique de Fourier, il est possible d'illustrer visuellement certaines de ces propriétés à l'aide d'un dispositif (montage 4f par exemple). Sous moodle, vous trouverez des ressources de B. Fracasso et K. Heggarty (Enseignants chercheurs à IMT Atlantique) pour des démonstrations et des applications industrielles ou grand public des éléments optiques diffractifs (EOD).

Les propriétés pratiques de la TF sont démontrées ici dans le cas des fonctions sommables. Elles seront étendues au sens des distributions dans le chapitre 5 et présentées dans le tableau du paragraphe 5.5.1 à connaître par cœur.

On note $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f c'est-à-dire : $\mathcal{F}[f(x)](\nu) = \widehat{f}(\nu)$.
Les propriétés suivantes expriment la TF de fonctions dépendant de f, en fonction de $\widehat{f}$.

Linéarité

La transformation de Fourier est linéaire c'est-à-dire que la transformée de Fourier d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des TF.

Symétrie

La transformation de Fourier conserve la parité.

$$\mathcal{F}[f(-x)](\nu) = \widehat{f}(-\nu)$$

PREUVE: $\mathcal{F}[f(-x)](\nu) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(-x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x = \mathcal{F}[(f(x)](-\nu) = \widehat{f}(-\nu)$

■

Si f est paire alors $f(-x) = f(x)$ et $\widehat{f}(-\nu) = \widehat{f}(\nu)$, c'est-à-dire $\widehat{f}$ est paire. De même, si f est impaire alors $\widehat{f}$ est impaire.

Translation

La transformation de Fourier transforme la translation en modulation.

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\nu) = \mathrm{e}^{-2i\pi\nu a}\,\widehat{f}(\nu)$$

PREUVE: $\mathcal{F}[f(x-a)](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2i\pi\nu a}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2i\pi\nu a}\,\widehat{f}(\nu)$

■

Modulation

La transformation de Fourier transforme la modulation en translation.

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{2i\pi\nu_0 x}\,f(x)](\nu) = \widehat{f}(\nu-\nu_0)$$

PREUVE: $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{2i\pi\nu_0 x}\,f(x)](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi(\nu-\nu_0)x}\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(\nu-\nu_0)$ ■

Changement d'échelle

$$\mathcal{F}[f(ax)](\nu) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{\nu}{a}),\, a \neq 0$$

PREUVE: $\mathcal{F}[f(ax)](\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\frac{\nu}{a}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\widehat{f}(\frac{\nu}{a}),\, a \neq 0$

Lors du changement de variable $y = ax$, si a négatif, il faut rajouter un signe moins devant l'intégrale afin d'avoir les bornes croissantes. Cela explique la valeur absolue sur a. ■

Conjugué complexe de f

$$\mathcal{F}\left[\overline{f(x)}\right](\nu) = \overline{\widehat{f}(-\nu)}$$

PREUVE: $\mathcal{F}\left[\overline{f(x)}\right](\nu) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)\,\mathrm{e}^{2i\pi\nu x}}\,\mathrm{d}x = \overline{\widehat{f}(-\nu)}$ ■

Transformée de Fourier de la dérivée $f'(x)$

Pour f sommable, continue et dérivable, avec f' sommable

$$\mathcal{F}[f'(x)](\nu) = 2i\pi\nu\widehat{f}(\nu)$$

PREUVE: En effet, on suppose f et $g = f'$ sommables donc

$$\widehat{g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x$$

En intégrant par parties , on trouve

$$\widehat{g}(\nu) = \left[f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} 2i\pi\nu f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x$$

Or $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(u)\,\mathrm{d}u$. f' étant sommable, f tend donc vers une limite finie quand x tend vers $\pm\infty$. Mais comme f est sommable cette limite ne peut être non nulle. Ainsi $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$. D'où le résultat, $\widehat{g}(\nu) = 2i\pi\nu\widehat{f}(\nu)$, avec $g = f'$. ■

La transformation de Fourier transforme l'opération de dérivation par rapport à x en une multiplication par $2i\pi\nu$. On verra comment résoudre des équations différentielles en utilisant cette propriété.

Remarque 2.3.2. On obtient une majoration intéressante :

$$|2\pi\nu\widehat{f}(\nu)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

Plus généralement, si f admet des dérivées sommables jusqu'à l'ordre m, alors :

$$\mathcal{F}[f^{(m)}(x)](\nu) = (2i\pi\nu)^m\widehat{f}(\nu),$$

et

$$|2\pi\nu|^m\,|\widehat{f}(\nu)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f^{(m)}(x)|\,\mathrm{d}x$$

Proposition 2.3.3. *Plus $f(x)$ est dérivable, avec des dérivées sommables, plus $\widehat{f}$ décroît rapidement à l'infini. Pour ν suffisamment grand, $|\widehat{f}(\nu)| \leq \dfrac{A}{|\nu|^m}$. Si f est $\mathcal{C}^\infty$, $\widehat{f}$ décroît plus vite que toute puissance de $\dfrac{1}{|\nu|}$ quand ν tend vers l'infini.*

Transformée de Fourier de $-2i\pi x f(x)$

Si xf sommable, alors $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\mathcal{F}[-2i\pi x f(x)](\nu) = \frac{\mathrm{d}\widehat{f}(\nu)}{\mathrm{d}\nu}$$

PREUVE: Soit l'expression de la TF : $\widehat{f}(\nu) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x$

Il est possible de dériver sous le signe somme si l'intégrale obtenue est uniformément convergente par rapport à ν (Proposition 1.7.7). Cela est le cas puisque $x \mapsto x f(x)$ est sommable et on a

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{f}(\nu)}{\mathrm{d}\nu} = \int_{\mathbb{R}} -\, 2i\pi x f(x)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\, \mathrm{d}x$$

■

Remarque 2.3.3. Plus généralement, si $x^m f(x)$ sont sommables, pour $m = 1, \ldots n$, alors $\widehat{f}(\nu)$ est n-fois dérivable :

$$\mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)](\nu) = \frac{\mathrm{d}^m \widehat{f}(\nu)}{\mathrm{d}\nu^m},$$

et

$$|\widehat{f}^{(m)}(\nu)| \leq \int_{\mathbb{R}} |2\pi x|^m\, |f(x)|\, \mathrm{d}x$$

Proposition 2.3.4. *Plus $f(x)$ décroît rapidement quand $|x|$ tend vers l'infini, plus $\widehat{f}$ est dérivable (avec des dérivées bornées). Si f décroît plus vite que toute puissance de $\dfrac{1}{|x|}$ quand x tend vers l'infini alors $\widehat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$.*

2.3.3 Théorème de transfert

Théorème 2.3.5 (de transfert)**.** *Soient f, $g \in L^1$, on a $\widehat{f}.g \in L^1$, $f.\widehat{g} \in L^1$ et*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\, g = \int_{\mathbb{R}} f\, \widehat{g}$$

PREUVE: Si f et g sont dans L^1, alors $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont bornées (Proposition 2.3.1) et les produits $\widehat{f}g$ et $f\widehat{g}$ sont sommables, les intégrales sont donc définies et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-2i\pi t x} \mathrm{d}x \right) g(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(t)\, \mathrm{e}^{-2i\pi t x} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \widehat{g}(x)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

par application du théorème de Fubini. ■

2.3.4 Transformation de Fourier inverse dans L^1

Définition 2.3.4. Pour toute fonction g sommable, on peut définir la transformation de Fourier inverse, notée $\mathcal{F}^{-1}[g]$, définie par

$$\mathcal{F}^{-1}\left[g(\nu)\right](x) = \int_{\mathbb{R}} g(\nu)\, \mathrm{e}^{2i\pi\nu x}\, \mathrm{d}\nu$$

On peut trouver la notation $\overline{\mathcal{F}}$ au lieu de $\mathcal{F}^{-1}$, à ne pas confondre avec un conjugué complexe.

Remarque 2.3.4. La transformation de Fourier inverse a les mêmes propriétés que la TF directe, le signe $+$ ou $-$ dans l'exponentielle étant une convention.

Théorème 2.3.6. *Si f et $\widehat{f}$ sont dans L^1, ce qui est très restrictif, on a*

$$f \overset{p.p}{=} \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{f}\right]$$

Remarque 2.3.5. L'égalité est vraie en tout point de continuité de f. Ce résultat est utile pour résoudre des équations intégro-différentielles (voir exercices de PC).

2.3.5 Transformation en cosinus et sinus

Soit $f(t) = f_{\mathrm{p}} + f_{\mathrm{i}}$ la décomposition de f en partie paire et impaire

$$f_{\mathrm{p}}(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \qquad \text{et} \qquad f_{\mathrm{i}}(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

Si la TF existe, elle est linéaire et on a

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\nu) &= 2\int_0^{+\infty} f_{\mathrm{p}}(t)\cos(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t - 2i\int_0^{+\infty} f_{\mathrm{i}}(t)\sin(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{F}_{\cos}[f_{\mathrm{p}}(t)](\nu) - i\mathcal{F}_{\sin}[f_{\mathrm{i}}(t)](\nu) \end{aligned}$$

Définition 2.3.5. On appelle transformations en cosinus ou en sinus d'une fonction f, les intégrales suivantes

$$\mathcal{F}_{\cos}[f(t)](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{F}_{\sin}[f(t)](\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(2\pi\nu t)\,\mathrm{d}t$$

On en déduit la remarque suivante.

Remarque 2.3.6. Soit $\widehat{f}$ la TF d'une fonction f

- Si f est paire alors $f_{\mathrm{i}} = 0$ et $\widehat{f}$ est paire,
- Si f est impaire alors $f_{\mathrm{p}} = 0$ et $\widehat{f}$ est impaire,
- Si f est réelle et paire alors $\widehat{f}$ est réelle et paire,
- Si f est réelle et impaire alors $\widehat{f}$ est imaginaire et impaire,
- Si f est réelle, les parties réelles et imaginaires de $\widehat{f}$ peuvent être calculées séparément.

2.3.6 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^3)$

En optique, en électromagnétisme, les phénomènes sont décrits dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Ainsi la transformation de Fourier s'étend aux fonctions de plusieurs variables.

Définition 2.3.6. Soit $x = (x_1,x_2,x_3)$ et $\nu = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ deux points de $\mathbb{R}^3$. Pour une fonction $f(x)$ sommable dans $\mathbb{R}^3$, on définit la transformée de Fourier de f notée, $\widehat{f}(\nu)$ par

$$\widehat{f}(\nu) = \iiint f(x_1,x_2,x_3)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\langle\nu,x\rangle}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3$$

avec $\langle\nu,x\rangle = \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3$.

Les propriétés sont du même type que celles qui correspondent au cas d'une variable.

Exercice. Démontrer les propriétés 2.3.2 pour $n = 3$.

Remarque 2.3.7. En particulier, si $f(x_1,x_2,x_3) = f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)$, on a

$$\widehat{f}(\nu) = \widehat{f}_1(\nu_1)\widehat{f}_2(\nu_2)\widehat{f}_3(\nu_3)$$

puisque $\mathrm{e}^{-2i\pi\langle\nu,x\rangle} = \prod_{i=1}^{3} \mathrm{e}^{-2i\pi\nu_i x_i}$

2.4 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

Nous avons vu que la TF est bien définie pour les fonctions sommables. Cependant L^1 n'est pas stable par TF ce qui pose un problème pour définir la transformation inverse. Dans le paragraphe suivant, nous allons considérer un sous-espace de L^1, stable par TF, qui regroupe toutes les propriétés énoncées précédemment. C'est Laurent M. Schwartz (1915-2002) qui introduit un tel espace, appelé espace de Schwartz. De plus cet espace est dense dans $L^1 \cap L^2$. Ainsi nous pourrons étendre la notion de Transformée de Fourier à des fonctions de carré sommable (dites aussi d'énergie finie) qui jouent un rôle important en physique.

2.4.1 L'espace de Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition 2.4.1. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions de la variable réelle, *indéfiniment dérivables* à *décroissance rapide*, c'est-à-dire que $\varphi \in \mathcal{S}$ si

i) $\varphi^{(m)}(x)$ existe pour tout entier $m > 0$,

ii) $x^p\varphi^{(m)}(x)$ est bornée pour tout entier m et p :

$$\forall (p,m) \in \mathbb{N}^2,\ \exists M > 0 \ /\ |x^p\varphi^{(m)}(x)| < M, \text{ pour } x \text{ assez grand}$$

On dit aussi que φ et chaque dérivée de φ décroissent plus vite que toute puissance de $1/|x|$ quand $|x|$ tend vers l'infini.

Exemple. Toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

- Les fonctions gaussiennes (en particulier $\mathrm{e}^{-\pi x^2}$), la fonction $1/\mathrm{ch}x$, appartiennent à $\mathcal{S}$.
- $\mathrm{e}^{|x|}$ n'appartient pas à $\mathcal{S}$ car elle n'est pas $\mathcal{C}^\infty$.
- $\dfrac{1}{x^2+1}$, e^{-x}, n'appartiennent pas à $\mathcal{S}$ car elles ne sont pas à décroissance rapide.

Convergence dans $\mathcal{S}$

$\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de fonctions que l'on munit d'une topologie c'est-à-dire d'un mode de convergence pour ses suites de fonctions.

Définition 2.4.2. Une suite $(\varphi_k) \in \mathcal{S}$ converge vers φ dans $\mathcal{S}$, si

$$\forall p, m \in \mathbb{N}, \quad x^p \varphi_k^{(m)}(x) \xrightarrow{C.U.} x^p \varphi^{(m)}(x)$$

c'est-à-dire

$$\forall p, m \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon,p,m), \quad k \geq N \Rightarrow |x^p \varphi_k^{(m)}(x) - x^p \varphi^{(m)}(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x$$

Proposition 2.4.1 (Propriétés des fonctions de $\mathcal{S}$).

$$\varphi \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$$

PREUVE: Procédons en 4 étapes

1. Si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $\varphi' \in \mathcal{S}$ par définition.
2. Si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $\forall p, m \in \mathbb{N}, x^p \varphi^{(m)}(x)$ est sommable. En effet, il n'y a pas de problème sur $[-B,B]$, $B > 0$. Pour $x \in [B, +\infty[$, comme $x^{p+2}\varphi^{(m)}(x)$ est bornée, il existe un réel $A > 0$ tel que $|x^p \varphi^{(m)}(x)| < \dfrac{A}{x^2}$, fonction sommable sur $[B, +\infty[$.
3. Si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $(x^p \varphi(x))^{(m)}$ est sommable. Il suffit d'appliquer la formule de Leibniz pour trouver une somme de fonctions vérifiant 2).
4. Si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ existe et $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$. En effet, $\widehat{\varphi}$ existe puisque φ est sommable d'après 2). De plus, $\widehat{\varphi}$ est indéfiniment dérivable puisque φ est à décroissance rapide
$$|\widehat{\varphi}^{(m)}(\nu)| \leq \int |2\pi x|^m |\varphi(x)| \, \mathrm{d}x$$
On a de même, $\widehat{\varphi}$ est à décroissance rapide puisque φ est indéfiniment dérivable
$$|(2\pi\nu)^m \widehat{\varphi}(\nu)| \leq \int |\varphi^{(m)}(x)| \, \mathrm{d}x$$
Ce qui montre que $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

■

2.4.2 Inversion dans $\mathcal{S}$

Théorème 2.4.2. *Soit* $\varphi \in \mathcal{S}$*, on a*

$$\mathcal{F}^{-1}[\widehat{\varphi}(\nu)](x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\nu)\, \mathrm{e}^{2i\pi\nu x}\, \mathrm{d}\nu = \varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

PREUVE: $\varphi \in \mathcal{S}$ donc, d'après la proposition 2.4.1, $\widehat{\varphi}$ existe et est dans $\mathcal{S}$. Le théorème de Fubini permet de retrouver φ pour presque tout x puisque les intégrales sont au sens de Lebesgue. Mais puisque les fonctions de $\mathcal{S}$ sont continues, on a bien une égalité pour tout réel x. ■

Précision sur l'inversion

Remarque 2.4.1. Ainsi, le théorème d'inversion n'est exact en tout point que si f et $\widehat{f}$ existent et sont continues. On a vu que c'était le cas si φ et $\widehat{\varphi}$ étaient toutes les deux des fonctions de Schwartz, ce qui est très restrictif. Dans le chapitre 5, nous utiliserons cet espace fonctionnel $\mathcal{S}$ pour étendre la transformation de Fourier aux distributions.

Interprétation physique

Lorsqu'on écrit

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\, \mathrm{e}^{2i\pi\nu t}\, \mathrm{d}\nu,$$

où t est le temps , $f(t)$ est la superposition d'une infinité de signaux sinusoïdaux. Les dimensions de ν sont inverses de celles de t. Si t est le temps en secondes, ν est une fréquence temporelle en Hertz (nombre d'oscillations par seconde). En optique, on parle de fréquence spatiale qui caractérise une structure qui se reproduit identiquement à des positions régulièrement espacées. Si t est une longueur en millimètres, ν est alors une fréquence spatiale exprimée en cycle par mm. Ce sont ces fréquences que l'on observe lorsque l'on calcule la TF (2D) d'une image ce qui permet de la caractériser par son contenu fréquentiel.

Compte-tenu de ce qui précède, on énonce :

Théorème 2.4.3. *La transformation de Fourier est une application linéaire et continue de* $\mathcal{S}_x$ *dans* $\mathcal{S}_\nu$*. Elle établit une correspondance bijective entre les éléments de* $\mathcal{S}_x$ *et ceux de* $\mathcal{S}_\nu$*.*

PREUVE: Soit φ_n une suite de $\mathcal{S}$ qui converge vers 0 quand n tend vers l'infini, alors la suite $\widehat{\varphi}_n$ des transformées de Fourier de chaque φ_n tend aussi vers 0 quand n tend vers l'infini. En effet, en combinant les deux inégalités de 4) de la preuve de la proposition 2.4.1, on obtient

$$|(2\pi\nu)^m \widehat{\varphi}_n^{(l)}(\nu)| \leq \|[(2i\pi x)^l \varphi_n(x)]^{(m)}\|_{\mathrm{L}^1}$$

le deuxième membre étant une suite de nombres qui tend vers 0, ce qui montre que $\mathcal{F}$ est un opérateur continu.

Soient φ et $\widehat{\varphi}$ dans $\mathcal{S}$, elles sont sommables et continues, et la formule d'inversion s'applique. On note $\mathcal{F}$ la TF directe et $\mathcal{F}^{-1}$ la TF inverse :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\varphi\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}\varphi\right] = \varphi$$

Cette égalité est vraie pour presque tout x. Elle a lieu partout si φ est continue, ce qui est le cas pour $\varphi \in \mathcal{S}$. ■

On admet que

- $\mathcal{S}$ est dense dans $L1 \cap L^2$,
- On peut prolonger l'opérateur de Fourier $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ sur L^2 par continuité.

Cela permet d'étendre rigoureusement la Transformée de Fourier pour des fonctions de carré sommable.

2.4.3 Propriété de la Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

On rappelle (Définition 1.4.6) que L^2 est l'espace des fonctions d'une variable réelle à valeurs complexes de carré sommable, muni de la norme L^2 définie par

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

En théorie du signal, une fonction de L^2 est dite d'énergie finie.

Remarque 2.4.2. En fait l'application qui au couple (f,g) de $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ associe $\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$ définit une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire qui induit la norme de $L^2(\mathbb{R})$. Cet espace est donc un espace de Hilbert.

Relation de Parseval-Plancherel

Théorème 2.4.4 (de Parseval-Plancherel). *Soient f et g, deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$, alors $fg \in L^1$ et on a la relation suivante entre les domaines temporel et fréquentiel :*

- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\overline{\widehat{g}(\nu)}\,\mathrm{d}\nu$
- *L'opérateur $\mathcal{F}$ est une isométrie dans L^2. On dit qu'il y a conservation de l'énergie*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\nu)|^2 \,\mathrm{d}\nu$$

PREUVE: D'après la proposition 1.4.4, le produit de deux fonctions de carré sommable est sommable, ainsi $\int f\bar{g}$ existe. On utilise la proposition 2.5.8 et les propriétés 2.3.2 pour écrire :

$$\begin{aligned}
\int f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x &= [\mathcal{F}(f\bar{g})(\nu)]_{\nu=0} \\
&= \left[\mathcal{F}[f](\nu) * \overline{\mathcal{F}(g)(-\nu)}\right]_{\nu=0} \\
&= \left[\int \mathcal{F}(f)(t)\overline{\mathcal{F}(g)(t-\nu)}\,\mathrm{d}t\right]_{\nu=0} \\
&= \int \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}(t)}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

■

Propriétés

Proposition 2.4.5. *Si une fonction f est dans L^2 alors sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est dans L^2.* **Les propriétés 2.3.2 montrées pour le cas des fonctions sommables sont encore valables dans L^2.**

PREUVE: On reviendra sur cette proposition lorsqu'on aura vu la transformation de Fourier des distributions tempérées. ■

Proposition 2.4.6. *La transformation de Fourier est un opérateur linéaire et continu de L^2 dans L^2. On a*

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}f\right] \overset{p.p}{=} \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}f\right] \overset{p.p}{=} f$$

Remarque 2.4.3. En effet, si f est une fonction continue de L^2 admettant une transformée de Fourier, cette dernière n'est pas nécessairement continue sur $\mathbb{R}$ (prendre l'exemple du sinus cardinal et la fonction Porte, sa TF).

Calcul pratique de transformée de Fourier

On rappelle qu'il n'y a pas d'inclusion de $L^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ ou vice versa[5]. Ils ont une intersection non vide.
Lorsque l'on travaille au sens des fonctions, on se place souvent dans l'espace $L^1 \cap L^2$. Ainsi on peut utiliser la définition 2.3.1 pour calculer la TF de f sommable et l'on s'assure que $\widehat{f}$ reste dans L^2. L'ensemble $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2 et

5. Par contre, pour les espaces locaux, on a l'inclusion $L^2_{loc}([a,b]) \subset L^1_{loc}([a,b])$

$$\mathcal{F}\left(L^1 \cap L^2\right) \subset L^2$$

A moins de se trouver dans $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$, $\widehat{f}$ n'est en général pas sommable, et la définition intégrale de la TF (2.3.1) ne permet plus de calculer $\mathcal{F}[\widehat{f}\,]$. Si on connait l'originale f de $\widehat{f}$, la propriété 2.4.6 permet d'écrire[6] :

$$\mathcal{F}[\widehat{f}\,] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] \stackrel{p.p}{=} \check{f}$$

Le chapitre 5 permettra de donner le cadre rigoureux de définition et calcul de la TF de fonctions non sommables et même d'objets qui ne sont pas des fonctions comme la distribution de Dirac.

2.4.4 Transformation de Fourier dans $L^2_{loc}([a,b])$

Cet espace est utilisé pour étudier les fonctions périodiques de période $T = b - a$ mais aussi les fonctions de carré localement sommable. Le produit scalaire de f et g dans $L^2_{loc}([a,b])$ est défini par

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

On définit aussi une norme associée à ce produit scalaire par

$$\|f\|_{\mathrm{L}^2_{loc}([a,b])} = \left(\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

On montre que les fonctions exponentielles $e_n(x) = \mathrm{e}^{2i\pi xn/T}$ forment une base orthonormale de $\mathrm{L}^2_{loc}([a,b])$, c'est-à-dire qu'elles vérifient

$$\langle e_n,e_m\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Ainsi, pour un “vecteur” f de l'espace vectoriel $\mathrm{L}^2_{loc}([a,b])$, on peut trouver ses “coordonnées” f_n (dans cette base d'exponentielles complexes) :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\, e_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\, \mathrm{e}^{2i\pi xn/T}$$

Définition 2.4.3. Les coordonnées f_n de f dans la base orthonormale des fonctions exponentielles complexes ne sont autres que les coefficients de Fourier complexes de f, notés aussi c_n (voir paragraphe 3.1.3) :

$$f_n = \langle f,e_n\rangle = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{e}^{-2i\pi xn/T}\,\mathrm{d}x = c_n$$

On a aussi $\sum |f_n|^2 = \langle f,f\rangle = \|f\|^2$ (Bessel-Parseval).

6. On remarquera que $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}^{-1}\left[\check{f}\,\right]$ où $\check{f}(x) = f(-x)$

2.5 Convolution des fonctions

Dans ce paragraphe, nous présentons les éléments essentiels à retenir sur la convolution. Les aspects plus théoriques font l'objet d'un document plus complet "La convolution des fonctions" [13] dont nous conseillons la lecture. Il est disponible dans l'espace de cours ATSA sous Moodle.

2.5.1 Définition de la convolution

Définition 2.5.1. Soient f et g deux fonctions boréliennes[7] définies sur $\mathbb{R}$. On appelle *produit de convolution* de f et g et on note $f * g$ la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par l'intégrale paramétrée

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, g(x - t)\, \mathrm{d}t$$

Par abus d'écriture on note $f(x) * g(x)$ lorsque les fonctions sont explicitées.

Exemple.

$$h(x) = \mathrm{e}^{-x} * \chi_{[0,1]}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t}\, \chi_{[0,1]}(x-t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t}\, \chi_{[x-1,x]}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{x-1}^{x} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t = (e-1)\mathrm{e}^{-x}$$

2.5.2 Interprétation physique

Le produit de convolution peut être décomposé schématiquement par la suite d'opérations suivantes :

1. retournement de $g(t)$ donnant $g(-t)$
2. translation de $g(-t)$ par x fixé, donnant $g(x - t)$
3. multiplication par $f(t)$
4. pour tout x fixé, intégration de $f(t)\, g(x - t)$ au sens de Lebesgue

Le produit de convolution n'est pas toujours défini. Lorsque la fonction $t \longmapsto f(t)g(x - t)$ est sommable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction $h = f * g$ est définie presque partout. Dans ce cas, on dira que les fonctions f et g sont convolables et que leur produit de convolution existe. En général, deux fonctions quelconques ne sont pas convolables. Les conditions d'existence du produit de convolution dépendent de la configuration des supports des deux fonctions f et g (voir la définition 2.2.1).

Exercice. Calculer le produit de convolution $\Pi(x/T) * \Pi(x/T)$, où $\Pi(y)$ est la fonction porte de largeur 1 (Exemple 1 du paragraphe 2.3.3). On conseille de tracer les graphes de $f(t)$ et $g(x - t)$ pour visualiser les bornes d'intégration selon les valeurs de x (quatre cas sont à étudier).

On trouve la fonction triangle de hauteur T et de largeur $2T$ (Exemple du paragraphe 2.5.8).

$$\Pi_T * \Pi_T(t) = \wedge_T(t) = T \cdot \wedge_1\left(\frac{|t|}{T}\right) = \begin{cases} T - |t| \text{ si } |t| \leq T \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Le produit de convolution de f et g a donc un support plus large que celui des fonctions convoluées.

2.5.3 Propriétés de la convolution

Proposition 2.5.1. *Pour trois fonctions boréliennes f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f*g$ et $f*h$ existent, alors*

1. *$g * f$ existe et $f * g = g * f$*
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha(f * g) = (\alpha f) * g = f * (\alpha g)$
3. *$f * (g + h)$ existe et $f * (g + h) = f * g + f * h$*
4. *$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \tau_a(f * g) = (\tau_a f) * g = f * (\tau_a g)$, où $\tau_a f$ est la translaté de f par a (voir définition 4.2.1)*
5. *Si $f * g$ est définie, Supp $(f * g) \subset \overline{\text{Supp}\, f + \text{Supp}\, g}$*

où l'addition des supports correspond à $\cup_{x \in \text{Supp}\, f}\{x + y \ / \ y \in \text{Supp}\, g\}$ et on prend son adhérence.

Remarque 2.5.1. Le nom de produit est bien choisi, puisque le produit de convolution est commutatif (on pose $\theta = x - t$) et distributif par rapport à l'addition de deux fonctions. Pensez à utiliser la commutativité pour évaluer plus facilement l'intégrale (voir exemple de la définition 2.5.1).

Les remarques suivantes sont contre-intuitives (voir [13]).

Remarque 2.5.2. Le produit de convolution n'est pas associatif en général c'est-à-dire $f * (g * h) \neq (f * g) * h$. Dans aucun des deux membres on ne calcule $f * h$ qui peut ne pas exister.

Remarque 2.5.3. Un produit de convolution peut donner la fonction nulle sans que ni f ni g soit identiquement nulle. Calculer $f * g$ avec $f = \chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]}$ et $g \equiv 1$.

Notre but est de connaître les espaces fonctionnels usuels entre lesquels la convolution définit un opérateur bilinéaire, continue, et ceux où la convolution est une opération interne et associative, c'est ce que l'on appelle des algèbres de convolution.
La convolution est un outil fondamental de l'analyse mathématique, car c'est par ce moyen que l'on établit les théorèmes de densité entre espaces de fonctions[8], qui seront utilisés dans la séquence "théorie des distributions".

8. voir "La convolution des fonctions" [13]

2.5.4 Convolution dans les espaces fonctionnels

On admet l'inégalité suivante qui généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux espaces vectoriels normés L^p, $p \geq 1$

Proposition 2.5.2 (Inégalité de Hölder)**.** *Soient p et q entiers positifs ($+\infty$ est permis) vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Pour $f \in L^p(\mathbb{R}),\ g \in L^q(\mathbb{R})$, on a*

1. *le produit fg est sommable et*
2. $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$

PREUVE:

- Pour $p = q = 2$, on écrit $(|f| - |g|)^2 \geq 0$, c'est-à-dire $|fg| \leq 1/2(|f|^2 + |g|^2)$. f et g étant dans L^2, on passe aux intégrales et $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2$ qui est un nombre fini donc fg est sommable. On a $\|fg\|_1 = \langle |f|, |g| \rangle_2$ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la norme L^2 induite par son produit scalaire (voir paragraphe 2.4.3).
- Pour $p = 1$, $q = \infty$, on écrit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |fg| \leq (\sup |g|) \int_{\mathbb{R}} |f|$ c'est-à-dire $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$ qui est un nombre fini donc fg est sommable.
- Le résultat est admis dans les autres cas. Nous n'avons d'ailleurs pas évoqué les espaces L^p pour p différent de 1, 2 ou ∞.

■

Indépendamment des conditions sur les supports de f et g, $f * g$ peut exister. Voici une proposition qui correspond à des cas pratiques d'utilisation.

Proposition 2.5.3. *$f * g$ le produit de convolution de f et g :*

1. *pour $f \in L^2(\mathbb{R}),\ g \in L^2(\mathbb{R})$, $f * g$ a un sens. C'est une fonction continue bornée :*
$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2$$
2. *pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g bornée, $f * g$ a un sens. C'est une fonction continue bornée :*
$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$$

PREUVE: Soit le produit de convolution $f * g$, en appliquant l'inégalité de Hölder, on a la majoration suivante déclinée pour $p, q \in \{1,2,+\infty\}$ et $1/p + 1/q = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f * g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x - t) \mathrm{d}t \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \, |\tau_x g(-t)| \mathrm{d}t \leq \|f\|_p \, \|\tau_x g\|_q \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

■

2.5.5 Algèbre de convolution des fonctions sommables

Ce paragraphe rassemble les résultats essentiels de la convolution entre fonctions sommables.

Proposition 2.5.4. *L'espace L^1 est une algèbre de convolution. On a*

1. $\forall f,\, g \in L^1(\mathbb{R}), \quad f * g \in L^1(\mathbb{R}) \quad et \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$
2. $\forall f, g, h \in L^1(\mathbb{R}), \quad f * (g * h) = (f * g) * h$
3. *L'application $L^1 \times L^1 \longrightarrow L^1$, $(f,g) \longmapsto f * g$ est bilinéaire et continue, c'est-à-dire que si (f_j) (respectivement (g_j)) est une suite de fonctions sommables de limite sommable f (respectivement g), alors $(f_j * g_j)$ est une suite de fonctions sommables, de limite sommable $f * g$.*[9]

PREUVE: Voir [13]. ■

Autrement dit, dans L^1, tous les produits de convolution existent deux à deux et sont sommables. $\left(L^1(\mathbb{R}), +\,, \cdot\,, *\right)$ est une algèbre commutative et associative.
L^1 **est une algèbre de convolution**.

Convolution par une constante

La convolution d'une fonction sommable et d'une fonction constante est toujours définie. Soient f et g deux fonctions sommables, les produits de convolution $1 * f$ et $1 * g$ existent et sont égaux à $(1 * f)(t) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ et $(1 * g)(t) = \displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x$ respectivement, qui sont des fonctions constantes.
Puisque $f * g$ existe et est sommable, alors $1 * f * g$ existe et est associatif, on a

$$1 * [f * g] = \int (f * g)(x)\,\mathrm{d}x \qquad [1 * f] * g = \int f(x)\,\mathrm{d}x \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$

ainsi

$$\int (f * g)(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Régularisation des fonctions sommables

La fonction obtenue par convolution de deux fonctions f et g sommables est sommable (proposition 2.5.4). Si de plus, l'une des fonctions est $\mathcal{C}^1$ de dérivée sommable ($g' \in L^1$) alors

$$f * g \in L^1 \cap \mathcal{C}^1 \quad et \quad (f * g)' = f * g'$$

La fonction obtenue par convolution a des fluctuations moins rapides que les fonctions mises en jeu. On dit que la convolution a un effet de régularisation au sens où elle augmente l'ordre de dérivabilité (voir exercice 10 des PC).

9. $f_j \to f$ au sens de la topologie de L^1 quand $j \to \infty$, veut dire que $\lim_{j\to\infty} \|f_j - f\|_1 = 0$

La sous-algèbre $\mathcal{D}_k(\mathbb{R})$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, on a, pour $k < q$,

$$\mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C}^q \subset \mathcal{C}^k \subset \mathcal{C}^0 \subset L^1_{loc}$$

Les fonctions de $\mathcal{D}_k(\mathbb{R})$ étant k-fois dérivables sur $\mathbb{R}$ ($\mathcal{D}_k \subset \mathcal{C}^k$) et à support borné, elles sont continues et bornées. Elles sont donc L^1_{loc} et même L^1 et L^2. On a, pour $k < q$,

$$\mathcal{D}_q \subset \mathcal{D}_k \subset \mathcal{D}_0 \subset L^p,\ p = 1{,}2$$

On rappelle que l'on munit $\mathcal{D}_k$ de la norme "infini" (2.2.3).

Proposition 2.5.5. *L'espace $\mathcal{D}_k$ est une algèbre de convolution. On a*

1. $\forall f, g \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}), \quad f * g \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}) \quad$ *et* $\quad \|f * g\|_\infty \leq A\,\|f\|_\infty\,\|g\|_\infty,\ A > 0$ constante

2. $\forall \alpha \leq k$, $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g)$

Autrement dit tous les produits de convolution sont définis deux à deux et sont bornés. Comme les fonctions de $\mathcal{D}_k$ sont sommables, la proposition 2.5.4 est valable et $(\mathcal{D}_k(\mathbb{R}), +\,, \cdot\,, *)$ est une algèbre commutative et associative.
$\mathcal{D}_k$ est une sous-algèbre de convolution de L^1.

2.5.6 Algèbre de convolution des fonctions L^1_{loc} causales

On dit qu'une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ est *à support limité à gauche* si son support est contenu dans un intervalle du type $[a, +\infty[$. Sans perte de généralité, on peut prendre $a = 0$, en considérant la fonction translatée $\tau_a f$ dont le support est dans $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. La fonction de Heaviside, Y, est à support dans $\mathbb{R}_+$.

Définition 2.5.2 (Fonctions L^1_{loc} causales)**.** $L^1_{loc}([0, +\infty[)$ est l'espace des fonctions localement sommables de support contenu dans $\mathbb{R}_+$. Ces fonctions s'appellent des fonctions causales. Une fonction causale s'écrit donc $f\,\chi_{[0,+\infty[}$ ou $Y f$ avec f localement sommable.

Les fonctions causales jouent un rôle important en traitement du signal et des systèmes. En particulier la Transformée de Laplace sera définie pour les fonctions causales. Nous avons le résultat important suivant, qu'il convient de connaître par cœur.

Proposition 2.5.6 (Fonctions causales). *Soient f et g deux fonctions localement sommables à support dans $\mathbb{R}_+$, alors*

1. *La fonction $h = f * g$ a un sens. Elle est définie par*

$$h(x) = (f * g)(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, \mathrm{d}t & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. *Supp $(f * g) \subset [0, +\infty[$ et $h \in L^1_{loc}([0, +\infty[)$*

PREUVE: Voir [13] et l'exercice 10 de PC. ■

Autrement dit, dans $L^1_{loc}([0, +\infty[)$, tous les produits de convolution existent deux à deux et sont causaux. $\left(L^1_{loc}([0, +\infty[), +, \cdot, *\right)$ est une algèbre commutative et associative.
$L^1_{loc}([0, +\infty[)$ **est une algèbre de convolution**.

2.5.7 Transformation de Fourier dans L^1 et convolution

Proposition 2.5.7. *Soient f et g dans L^1, d'après la proposition 2.5.4, $f * g$ a toujours un sens et est sommable. Ainsi :*

1. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$
2. $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$

PREUVE: f et g sont dans L^1 et on a :

$$|\mathcal{F}(f * g)(\nu)| \leq \int |(f * g)(t)|\, \mathrm{d}t = \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$$

$f * g$ est sommable, on applique donc Fubini

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g) &= \int \left(\int f(x) g(t-x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{-2i\pi\nu t}\, \mathrm{d}t, \\ &= \int f(x) \int g(t-x)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu t}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

on change $t - x$ en y

$$\begin{aligned} &= \int f(x)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\, \mathrm{d}x \int g(y)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu y}\, \mathrm{d}y \\ &= \widehat{f}(\nu) \cdot \widehat{g}(\nu) \end{aligned}$$

■

2.5.8 Transformation de Fourier dans L^2 et convolution

Proposition 2.5.8. *Soient f et g dans L^2, d'après la proposition 2.5.3, $f * g$ a toujours un sens, c'est une fonction continue et bornée, donc localement sommable. Ainsi :*

1. $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2$
2. $f * g = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f} \cdot \widehat{g}]$ *et* $\mathcal{F}[f \cdot g] = \widehat{f} * \widehat{g}$

Exemple. On rappelle que la convolution d'une fonction porte Π_T de largeur T et hauteur 1, par elle-même, donne la fonction triangle de hauteur T et de largeur $2T$:

$$\Pi_T * \Pi_T(t) = \wedge_T(t) = T \wedge_1 \left(\frac{|t|}{T}\right) = \begin{cases} T - |t| \text{ si } |t| \leq T \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En appliquant la proposition précédente, la TF de $\wedge_T$ est

$$\mathcal{F}[\wedge_T](\nu) = (\mathcal{F}[\Pi_T](\nu))^2 = \left(\frac{\sin(\pi T \nu)}{\pi \nu}\right)^2,$$

évitant ainsi le calcul direct.

2.6 Exercices d'application du chapitre 2

Ces exercices sont à réaliser en autonomie lors de l'apprentissage du cours. Les énoncés des exercices de séances présentielles (Petites Classes ou TD) se trouvent dans le livret dédié.

S2-1 : Série de Fourier d'une fonction périodique

On lira le complément sur les séries de Fourier si l'on souhaite approfondir cette notion. Cependant les formules du polycopié suffisent à réaliser cet exercice et le suivant.

On note f la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0,2\pi[, \qquad f(x) = x^2.$$

a. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

b. Développer f en série de Fourier.

c. Déduire du résultat la valeur de la somme $S = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

S2-2 : Série de Fourier d'une fonction périodique

On note f la fonction paire 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [0,\pi[, \qquad f(x) = \pi - x.$$

a. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}$.

b. Développer f en série de Fourier.

c. Déduire du résultat la valeur de la somme $S = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

S2-3 : Propriétés de la transformée de Fourier de fonctions sommables

Soit $f \in \mathrm{L}^1$, définie par $f(x)$, on appelle $\check{f}$ la fonction définie par $f(-x)$. On note $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f.

1. Montrer que $\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}^{-1}\left[\check{f}\,\right]$
2. Montrer que $\mathcal{F}^{-1}[f(x)](\nu) = \widehat{f}(-\nu)$
3. Montrer que $\check{\widehat{f}} = \widehat{\check{f}}$, pour tout f sommable
4. En déduire que la TF conserve la parité

S2-4 : Convolution de fonctions causales

Soit Y, la fonction de Heaviside (indicatrice de $[0, +\infty[$), appelée aussi échelon unité.
On appelle fonction causale, une fonction localement sommable à support dans $[0, +\infty[$. L'espace de ces fonctions est noté $\mathrm{L}^1_{loc}([0, +\infty[)$. Un élément de $\mathrm{L}^1_{loc}([0, +\infty[)$ est défini sous la forme Yf où f est une fonction localement sommable. On rappelle que $\mathrm{L}^1_{loc}([0, +\infty[, +, ., *)$ est une algèbre associative et commutative. Calculer le produit de convolution des fonctions fY et gY avec :

a) $f(x) = (1 - x)$, et $g(x) = \mathrm{e}^x$.

b) $f = g$, la fonction porte centrée de largeur 1 (voir définition dans le polycopié de cours).

S2-5 : Convolution de fonctions causales

Calculer $Yf * Yf * \cdots * Yf$, avec n facteurs et $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$.

Chapitre 3

Transformation intégrale : Laplace

Dans ce chapitre nous présentons la troisième Transformation intégrale : la Transformation de Laplace (TL). Cet opérateur intégral est très utilisé dans l'étude des systèmes linéaires et leur comportement. Ainsi la TL **sera traitée et utilisée dans la partie Automatique** de l'UE ATSA.
Au contraire de la TF qui donne une fonction de la variable réelle $\nu \in \mathbb{R}$, la TL donne une fonction de la variable complexe $p \in \mathbb{C}$. Ainsi, avant de présenter cette transformation (paragraphe 3.2) en donnant sa définition et ses propriétés, une partie préliminaire est nécessaire afin de compléter les notions de continuité et de dérivation pour une fonction d'une variable complexe. Certain(e)s d'entre-vous ont déjà manipulé la TL et les tables de transformées (voir 3.2.3) pour résoudre des EDO, sans avoir pourtant les outils mathématiques nécessaires pour la définir rigoureusement, la dériver, l'intégrer, etc, en tant que fonction d'une variable complexe. Le paragraphe 3.1 introduit les éléments principaux permettant de définir la notion d'holomorphie, c'est-à-dire de dérivation dans le plan complexe. Tous les élèves doivent étudier la partie 3.2 en autonomie piste verte, notion revue et appliquée en Traitement du Signal et en Automatique.

3.1 Fonctions d'une variable complexe

Dans ce cours nous manipulons essentiellement des fonctions de la variable réelle mais nous sommes aussi appelé à considérer des fonctions de la variable complexe z. Dans cette section nous donnons les définitions relatives à la continuité et la dérivabilité des fonctions d'une variable complexe et, sans démonstration, certains résultats utiles dans le cadre de ce cours.
Cependant, nous ne parlerons pas de l'intégration des fonctions d'une variable complexe. Les lecteurs intéressés pourront trouver l'information nécessaire dans les ouvrages de B. Petit [6] et de M. R. Spiegel [10]. Néanmoins, pour plus de confort de lecture, nous reportons ici des extraits du polycopié de B. Petit, quand les notions sont directement utilisées dans ce cours.

3.1.1 Topologie de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes qu'on munit de la distance définie par $d(z,z') = |z - z'|$. Très souvent, et conformément à l'usage, nous identifierons l'espace normé ainsi défini avec $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Etant donnés $a \in \mathbb{C}$ et r réel strictement positif, on appelle *disque ouvert* (respectivement *disque fermé*) de centre a et de rayon r, l'ensemble $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$ (respectivement $\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$) ; on notera $C(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$ le *cercle* de centre a et de rayon r. On dit qu'un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ est un *ouvert* si, ou bien $U = \emptyset$, ou bien :

$$\forall\, a \in U, \quad \exists\, r_a > 0, \quad \text{tel que} \quad D(a,r_a) \subset U.$$

Par exemple, tout disque ouvert est un ouvert. Un sous-ensemble F de $\mathbb{C}$ est dit *fermé* si $\mathbb{C} \setminus F$ est un ouvert. Par exemple, tout disque fermé est un fermé.

3.1.2 Séries entières et fonctions analytiques

Soit $\{a_n\}_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$; on sait qu'il existe un réel positif R, appelé *rayon de convergence* de la série, vérifiant :

1. Si $R > 0$, pour tout $r \in]0,R[$, la série converge normalement (donc uniformément) sur $\overline{D}(0,r)$. Attention : ceci n'implique pas la convergence uniforme sur $D(0,R)$!

2. Si $R < \infty$, la série diverge pour $|z| > R$ (en fait $a_n z^n$ ne tend pas vers 0).

3. On ne peut rien dire, a priori, pour $|z| = R$ (i.e. tous les cas de figure sont possibles ainsi qu'en témoignent des exemples élémentaires).

On rappelle également que les séries entières obtenues par dérivation et intégration, c'est-à-dire les séries $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, ont le même rayon de convergence.

Définition 3.1.1. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur l'ouvert non vide U. On dit que f est *analytique* sur U si :

$$\forall\, a \in U, \exists\, r > 0, \exists\, \{\alpha_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}, \text{ tels que}$$

$$\overline{D}(a,r) \subset U \text{ et } \forall\, z \in \overline{D}(a,r),\ f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n (z-a)^n.$$

Autrement dit, la fonction $f(z)$ est développable en série entière en tout point de U. Dans cette définition, il est important de noter que les coefficients α_n dépendent de a. Ainsi a-t-on, pour la fonction $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$, qui est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$:

- Pour $a = 0$, $f(z) = -\sum_{n\geq 0} z^n$ pour $z \in D(0,1)$.
- Pour $a = 2$, $f(z) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (z-2)^n$ pour $z \in D(2,1)$.

Nous rappelons, sans démonstration, les propriétés classiques suivantes :

Proposition 3.1.1 (Analyticité de la somme d'une série entière)**.** *Soit $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ la suite des coefficients d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n (z-a)^n$ pour $z \in D(a,R)$. Alors f est analytique sur $D(a,R)$.*

(Plus précisément, si $b \in D(a,R)$ et si $\beta_k = \sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)(b-a)^{n-k}$, la série entière de coefficients $\beta_k/k!$ a un rayon de convergence $\geq R - |b-a|$ et, sur $D(b,R-|b-a|)$, on a $f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{\beta_k}{k!}(z-b)^k$.)

Proposition 3.1.2 (Principe des zéros isolés)**.** *Soient f une fonction analytique sur l'ouvert connexe Ω et $Z_f = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$. Alors, ou bien $Z_f = \Omega$ (i.e. f est identiquement nulle) ou bien Z_f n'admet aucun point d'accumulation dans Ω ; dans ce dernier cas, pour chaque $a \in Z_f$, il existe un entier positif α et une fonction g analytique sur Ω tels que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = (z-a)^\alpha g(z)$.*

(Le fait que Z_f n'admette pas de point d'accumulation dans Ω, i.e. le principe des zéros isolés, se traduit par : $\forall\, a \in Z_f,\ \exists\, r > 0,\ \text{tel que}\ D(a,r) \subset \Omega\ \text{ et }\ D(a,r) \cap Z_f = \{a\}$.)

3.1.3 Fonctions holomorphes

Une fonction *holomorphe* n'est pas autre chose qu'une fonction dérivable au sens de $\mathbb{C}$:

Définition 3.1.2. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ (où U est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$). On dit que f est holomorphe sur U si :

$$\forall\, z \in U, \exists\, f'(z) \in \mathbb{C}, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tels que}$$
$$u \in D(z,\delta) \cap U \Longrightarrow |f(u) - f(z) - (u-z)f'(z)| \leq \varepsilon |u - z|.$$

Exemples

1. Pour tout entier positif n, $f : z \mapsto z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $f'(z) = nz^{n-1}$.

2. Les fonctions $z \mapsto \Re e\, z$ et $z \mapsto \Im m\, z$ ne sont holomorphes en aucun point.

3. On montre aisément que, si $\mathcal{H}(U)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert U, $\mathcal{H}(U)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$ dont les éléments inversibles sont les fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur U ; les formules habituelles de dérivation sont valables dans le cadre présent et il est laissé au lecteur le soin de s'en convaincre.

Nous achèverons ces exemples par une propriété fondamentale :

Proposition 3.1.3. *Toute fonction analytique est holomorphe. Réciproquement, toute fonction holomorphe est analytique.*

Remarque 3.1.1. L'implication découle des propriétés de convergence uniforme des séries entières dans le disque ouvert de convergence. La réciproque utilise un résultat dépassant le cadre de ce cours (voir B. Petit [6]).

Nous allons maintenant donner une caractérisation différentielle de l'holomorphie. C'est celle-ci qu'il faut retenir et utiliser d'un point de vue pratique.

Proposition 3.1.4 (Conditions de Cauchy)**.** *Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$. Si on note $P(x,y) = \Re e\, f(z)$ et $Q(x,y) = \Im m\, f(z)$, où $z = x + iy$, f est holomorphe sur U si, et seulement si, P et Q sont différentiables sur U et*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = A \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -B.$$

La dérivée de f dans $\mathbb{C}$ est alors $f'(z) = A + iB$.

3.2 Transformation de Laplace des fonctions

Définition 3.2.1. Soit $f(t)$ une fonction de la variable réelle t, localement sommable pour $t \geq 0$ (nulle pour $t < 0$). On appelle transformée de Laplace (TL) de $f(t)$, la fonction $L[f](p)$, de la variable complexe p, définie par

$$F(p) = L[f](p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t.$$

Remarquons que $L[.]$ est un opérateur linéaire. L'intégrale ci-dessus est appelée *intégrale de Laplace unilatérale* et $f(t)$, *l'originale*. On note

$$f(t) \sqsupset F(p)$$

Remarque 3.2.1. Deux fonctions égales presque partout pour $t \geq 0$ et différentes pour $t < 0$, ont la même TL.
On considère toujours que f est nulle pour $t < 0$. Cela revient à multiplier f par la fonction Heaviside Y définie par

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Nous verrons que pour l'étude des filtres linéaires, cette condition (de causalité) n'est pas restrictive.

3.2.1 Abscisse de sommabilité

Remarque 3.2.2. Le module de $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est $|f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t}$, avec $p = \sigma + i\omega$. Ainsi, la sommabilité de l'intégrale de Laplace ne dépend que de la partie réelle de p.

Proposition 3.2.1. *S'il existe $p_0 = \sigma_0 + i\omega_0$ tel que $f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}$ soit sommable, il en est de même pour tout $p = \sigma + i\omega$ tel que $\sigma \geq \sigma_0$.*

PREUVE: En effet, pour $\sigma \geq \sigma_0$, $|f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t} \leq |f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma_0 t}$. ■

Corollaire 3.2.2. *Il existe un réel a, de signe quelconque, tel que pour $\sigma > a$ l'intégrale de Laplace existe et que pour $\sigma < a$, elle n'existe pas. Pour $\sigma = a$, on ne peut rien dire.*

PREUVE: Pour une fonction $f(t)$ donnée, on considère E, l'ensemble des valeurs de $\sigma = \Re e\,(p)$ pour lesquelles $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est sommable. Soit a, la borne inférieure de E.
Si $\sigma > a$, d'après la définition de a, il existe σ_0 compris entre a et σ, tel que $f(t)\mathrm{e}^{-p_0 t}$ est sommable. Ainsi $a < \sigma_0 < \sigma$ et la proposition 3.2.1 impliquent $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ sommable.
Si $\sigma < a$, soit σ_1, tel que $\sigma < \sigma_1 < a$, alors $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est non sommable, sans quoi $f(t)\mathrm{e}^{-p_1 t}$ le serait aussi d'après la proposition 3.2.1, ce qui contredirait la définition de a. ■

Définition 3.2.2. On appelle abscisse de sommabilité (ou de convergence absolue) de $f(t)$, le réel a, borne inférieure de E. L'ouvert $\Re e\,(p) > a$ est le domaine de sommabilité de l'intégrale de Laplace.

Exemple. Pour $f(t) = Y(t)\mathrm{e}^{-t^2}$, L[f](p) existe pour tout p donc $a = -\infty$.
Pour $f(t) = Y(t)\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$, L[f](p) existe pour tout p tel que $\Re e\,(p) > 0$ donc $a = 0$.
Pour $f(t) = Y(t)\mathrm{e}^{t^2}$, L[f](p) n'existe jamais donc $a = +\infty$.

En résumé, la droite verticale $x = a$ coupe le plan en deux demi-plans : l'un où $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est sommable, l'autre où elle ne l'est pas.

Définition 3.2.3. Soit une fonction $f(t)$ localement sommable (f nulle pour $t < 0$) et vérifiant, pour $t \geq t_0 \geq 0$, la majoration

$$|f(t)| \leq M\mathrm{e}^{kt} \qquad M > 0,\ k \in \mathbb{R},$$

on dit que f est d'ordre exponentiel k quand t tend vers $+\infty$.

Proposition 3.2.3. *Si f, localement sommable, (f nulle pour $t < 0$), est d'ordre exponentiel k, alors l'abscisse de sommabilité $a \leq k$.*

PREUVE: On doit montrer que pour tout $\sigma > k$, $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est sommable.

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{t_0} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $0 < t < t_0$, $f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est sommable car f est localement sommable.
Pour $t > t_0$, on a $|f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t} \leq M\mathrm{e}^{(k-\sigma)t}$ qui est sommable sur $[t_0, +\infty[$ dès que $k - \sigma < 0$.
$f(t)\mathrm{e}^{-pt}$ est donc sommable sur $[0, +\infty[$ pour tout p tel que $\sigma > k$, c'est-à-dire $a \leq k$. ■

Remarque 3.2.3. On peut donner deux conséquences pour une fonction f d'ordre exponentiel k.
Si f est à croissance polynômiale (ou bornée), l'abscisse de sommabilité est négative ou nulle. En effet, pour t suffisamment grand, tout réel k positif même très petit permet la majoration.
Si f est à support compact, tout réel k convient et $a = -\infty$.

3.2.2 Holomorphie de la transformée de Laplace

Théorème 3.2.4. *Dans son domaine de sommabilité, la transformée de Laplace est une fonction de p, continue, et qui tend vers 0 lorsque $\Re e\,(p)$ tend vers $+\infty$.*

Remarque 3.2.4. L'opérateur $L[f]$ est linéaire pour les fonctions localement sommables.

PREUVE: La continuité provient du théorème de Lebesgue : la fonction $f_t(p) = f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}$ est continue en p_0 pour presque tout t.
Soit p_0 dans le domaine de sommabilité ($\Re e\,(p_0) > a$). Il existe un voisinage de p_0, $V(p_0)$, et un réel σ_1 tel que pour tout $p \in V(p_0)$, on ait $\Re e\,(p) > \sigma_1 > a$, c'est-à-dire $|f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}| < |f(t)|\,\mathrm{e}^{-\sigma_1 t} = g(t)$ sommable car a est l'abscisse de sommabilité. Ainsi la transformée de Laplace est continue en tout p_0 appartenant au domaine de sommabilité.
De plus : soit $p = \sigma + i\omega$, on a

$$\begin{aligned}|L[f](p)| &\le \int_0^{t_0} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t + M\int_{t_0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\sigma-k)t}\,\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^{\xi} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-\sigma\xi}\int_{\xi}^{t_0} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{M}{\sigma-k}\,\mathrm{e}^{-(\sigma-k)t_0}\end{aligned}$$

On choisit ξ pour que le premier terme soit négligeable, les autres termes tendant vers 0 lorsque σ tend vers $+\infty$. ■

Théorème 3.2.5. *La transformée de Laplace d'une fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ et d'abscisse de sommabilité a est holomorphe dans tout le demi-plan complexe $\Re e\,(p) > a$ et on a*

$$Y(t)\,(-t)^m\,f(t) \sqsupset \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}p^m} L[f](p)$$

PREUVE: Montrons d'abord que les intégrales de Laplace de $f(t)$ et $(-t)^m\,f(t)$ ont les mêmes abscisses de sommabilité.
Soit a, l'abscisse de sommabilité pour $L[f(t)]$ et a', celle de $L[(-t)^m\,f(t)]$, on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = I_1 + I_2$$

I_1 existe car $f(t)$ est localement sommable, reste à étudier I_2.
Pour $t \ge 1$, on a $t^m \ge 1$ et

$$|I_2| < \int_1^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t \le \int_1^{+\infty} |f(t)|\,|t|^m\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\,\mathrm{d}t$$

et la sommabilité de $(-t)^m\,f(t)\,e^{-\sigma t}$ entraîne celle de $f(t)\,e^{-\sigma t}$, donc a' est au moins égale à a ($a' \ge a$).
D'autre part : $\forall\varepsilon > 0$, on a $t^n < \mathrm{e}^{\varepsilon t}$ pour t assez grand, donc

$$\exists t_0 \;/\; t > t_0 \;\Rightarrow\; |(-t)^m\,f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}| \le |f(t)|\,\mathrm{e}^{-(\sigma-\varepsilon)t}$$

donc pour $\sigma - \varepsilon > a$ ou $\sigma > a + \varepsilon$, cette expression est sommable et l'abscisse de sommabilité relative à $(-t)^m\,f(t)\,e^{-\sigma t}$ est inférieure ou égale à $a + \varepsilon$. Comme c'est vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, on a $a' \le a$.
Les deux inégalités ne sont compatibles que si $a = a'$. La première partie se déduit alors facilement. On peut dériver l'intégrale de Laplace de $f(t)$ sous le signe somme si l'intégrale ainsi dérivée est uniformément sommable. Cela est le cas dès que $\sigma > a$. D'où le résultat. La fonction $L[f](p)$ étant dérivable par rapport à la variable complexe p pour $\sigma > a$, elle est holomorphe dans ce domaine. ■

Exemple. $L[1](p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}$, pour tout $\Re e\,(p) > 0$. Ainsi $\dfrac{1}{p^2}$ est la transformée de Laplace de t et $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ est la transformée de Laplace de t^n.

3.2.3 Tables de transformées de Laplace de fonctions

La transformée de Laplace d'une fonction de $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ se calcule à l'aide de l'intégrale donnée par la définition 3.2.1. Cependant, de nombreuses fonctions utilisées de manière intensive en physique ont été répertoriées dans des *tables de transformées de Laplace remarquables* dont on donne ici un extrait. Soit une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, et σ_0 l'abscisse de sommabilité pour sa transformée :

Originale		Transformée	Abscisse de som.
$Y(t)\,f(t)$	$\sqsupset$	$F[Yf](p)$	σ_0
$Y(t)$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p}$	0
$Y(t)\,t$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p^2}$	0
$Y(t)\,\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!},\ n \in \mathbb{N}^*$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p^n}$	0
$Y(t)\,\mathrm{e}^{at},\ a \in \mathbb{C}$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p-a}$	$\Re e\,(a)$
$Y(t)\,\mathrm{e}^{at}t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\sqsupset$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\Re e\,(a)$
$Y(t)\,\mathrm{e}^{iat},\ a \in \mathbb{C}$	$\sqsupset$	$\dfrac{1}{p-ia}$	$-\Im m\,(a)$
$Y(t)\sin(at),\ a \in \mathbb{C}$	$\sqsupset$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$\lvert\Im m\,(a)\rvert$
$Y(t)\cos(at),\ a \in \mathbb{C}$	$\sqsupset$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\lvert\Im m\,(a)\rvert$
$Y(t)\sinh(at),\ a \in \mathbb{C}$	$\sqsupset$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\lvert\Re e\,(a)\rvert$
$Y(t)\cosh(at),\ a \in \mathbb{C}$	$\sqsupset$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\lvert\Re e\,(a)\rvert$
$Y(t)\,t^a,\ \Re e\,(a) > -1$	$\sqsupset$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	0

où $\Gamma(a+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^a\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$, pour $\Re e\,(a) > -1$.

3.2.4 Transformée de Laplace d'une fonction dérivée

Soit une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, d'ordre exponentiel k, dérivable pour $t > 0$, de dérivée continue (éventuellement par morceaux) et localement sommable. Calculons la transformée de Laplace de f' pour $p = \sigma + i\omega$. Pour $\Re e\,(p) > a'$, abscisse de sommabilité de $L[f'](p)$

Intégrons par parties

$$\begin{aligned} L[f'](p) &= \int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \Re e\,(p) > a' \\ &= \left[f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

f étant d'ordre exponentiel k, pour $\sigma > k \geq a$, on a $|f(t)|\mathrm{e}^{-\sigma t} \leq M\mathrm{e}^{-(\sigma-k)t}$ qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.
Pour $\sigma > k$ et $\sigma > a'$, c'est-à-dire $\sigma > \sigma_0 = \max(k,a')$, on a

$$L[f'](p) = pL[f](p) - \lim_{t\to 0^+}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\right),$$

ainsi, on énonce la proposition suivante

Proposition 3.2.6. *Pour $\sigma > \sigma_0$, $L[f'](p)$ existe si et seulement si $\lim_{t\to 0^+} f(t)$, notée $f(0^+)$, existe. On a alors*

$$L[f'](p) = pL[f](p) - f(0^+).$$

Remarque 3.2.5. Par hypothèse $f(0^-) = 0$. Ainsi, pour une fonction continue en 0, on a $L[f'](p) = pL[f](p)$. On verra que c'est toujours le cas pour les distributions car les discontinuitées sont prises en compte dans la dérivation (voir paragraphe 5.7.3).

Remarque 3.2.6. Si la fonction f admet un point de discontinuité en x_0 alors, en notant $\sigma_f(x_0) = f(x_0^+) - f(x_0^-)$, le saut de la discontinuité, on a

$$L[f'](p) = pL[f](p) - f(0^+) - \sigma_f(x_0)\,\mathrm{e}^{-px_0}.$$

On admettra les deux théorèmes suivants, très utiles pour la résolution d'équations différentielles avec conditions aux limites.

Théorème 3.2.7 (de la valeur initiale)**.** *Si $L[f](p)$ et $f(0^+)$ existent alors*

$$\lim_{p\to +\infty} pL[f](p) = f(0^+).$$

Théorème 3.2.8 (de la valeur finale)**.** *Si $L[f](p)$ existe et si $f(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$ existe et est finie alors*

$$\lim_{p\to 0} pL[f](p) = f(+\infty).$$

Exercice. A l'aide de la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle

$$tf'''(t) - f''(t) + tf'(t) - f(t) = 0 \qquad \forall t > 0$$

avec $f(0+) = 0$, $f'(0+) = 0$, $f''(0+) = 0$, et $f'''(0+) = 1$.

3.2.5 Transformée de Laplace des primitives d'une fonction

Cherchons l'image de $g(t) = \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s$ où $a > 0$. En dérivant on obtient $g'(t) = f(t)$, et $g(0) = -\int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s$. Ainsi la transformée de Laplace de g', qui est unique (voir proposition 3.2.9), est, d'après la proposition 3.2.6 :

$$L[g'(t)](p) = pL[g(t)](p) + \int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s &\sqsupset \frac{1}{p}\,L[f(t)](p) - \frac{1}{p}\int_0^a f(s)\,\mathrm{d}s \\ \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s &\sqsupset \frac{1}{p}\,L[f(t)](p) \end{aligned}$$

3.2.6 Transformée de Laplace et translation

Soit a l'abscisse de sommabilité de f. Pour $\Re e\,(p-\lambda) > a$ ou $\sigma > a + \Re e\,(\lambda)$, on a :

$$L[f(t)](p-\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-(p-\lambda)t}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{e}^{\lambda t} f(t) \sqsupset L[f(t)](p-\lambda)$$

Inversement,

$$e^{-\lambda p} L[f(t)](p) = \int_0^{+\infty} f(s)\,\mathrm{e}^{-p(s+\lambda)}\,\mathrm{d}s = \int_\lambda^{+\infty} f(t-\lambda)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$Y(t-\lambda)\,f(t-\lambda) \sqsupset e^{-\lambda p}\,L[f(t)](p), \qquad \lambda > 0$$

Exercice. Calculer la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ périodique de période T, nulle pour $t < 0$, et montrer

$$Y(t)\,f(t) \sqsupset \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}} \int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t, \qquad \Re e\,(p) > 0.$$

3.2.7 Transformation de Laplace et convolution

Soient $f(t) \sqsupset F(p)$ et $g(t) \sqsupset G(p)$, cherchons l'original du produit ordinaire FG

$$F(p)G(p) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(t)g(s)\,\mathrm{e}^{-p(t+s)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$

Par changement de variable, $t = x - y$ et $s = y$, de Jacobien égal à 1, on obtient

$$F(p)G(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-px}\left(\int_0^x f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

or avec nos hypothèses $f(t) = g(t) = 0$ pour $t < 0$, on reconnaît $\int_0^x f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$ comme le produit de convolution de deux fonctions causales, $(f * g)(x)$. Ainsi

$$f \sqsupset F, \quad g \sqsupset G \quad \Longrightarrow f * g \sqsupset FG$$

Remarque 3.2.7. Comme la transformée de Fourier, la transformée de Laplace change le produit de convolution en produit simple.

3.2.8 Lien entre les transformées de Fourier et de Laplace

Soit une fonction $f(t)$, et un complexe $p = \sigma + i\omega$, sa transformée de Laplace est donnée par

$$F(\sigma + i\omega) = \int_0^{+\infty} \left(f(t)\,\mathrm{e}^{-\sigma t}\right)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

Ainsi, pour σ fixé, $F(\sigma + i\omega)$, considérée comme fonction de la variable ω, est la transformée de Fourier de $Y(t)\,f(t)\,\mathrm{e}^{-\sigma t}$. Une transformée de Laplace équivaut donc à une famille de Fourier, la famille des transformées de Fourier des fonctions $Y(t)\,f(t)\,\mathrm{e}^{-\sigma t}$, pour $\sigma > a$.

Proposition 3.2.9. *Si la transformée de Laplace de $f(t)$ est identiquement nulle pour $\sigma > a$, alors $f(t)$ est presque partout nulle.*

PREUVE: En effet $f(t)\,\mathrm{e}^{-\sigma t}$ a alors une transformée de Fourier nulle, elle est donc partout nulle (en tant que fonction holomorphe), et par suite $f(t)$ aussi. Donc une fonction holomorphe n'a jamais plus d'un original. ■

Formule d'inversion de la transformée de Laplace

De la formule d'inversion de Fourier, on déduit la formule d'inversion de Laplace :

$$Y(t)\,f(t)\,\mathrm{e}^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Ces différentes formules, correspondant aux diverses valeurs de $\sigma > a$, doivent donner la même fonction $Y(t)\,f(t)$. D'ailleurs on peut écrire

$$Y(t)\,f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma + i\omega)\,\mathrm{e}^{(\sigma+i\omega)t}\,\mathrm{d}\omega$$

ou

$$Y(t)\,f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

Exercice. Montrer que l'expression ci-dessus est indépendante de σ en intégrant la fonction holomorphe $F(p)\,\mathrm{e}^{pt}$ sur le bord du domaine rectangulaire
$\{z = x + iy \in \mathbb{C} \,/\, |y| \leq \omega, \sigma_1 \leq x \leq \sigma_2\}$ (voir Schwartz [9, page 250]).

3.3 Exercices d'application du chapitre 3

La transformée de Laplace est une fonction de la variable complexe qu'il convient de traiter comme telle avec les outils adaptés. En particulier la dérivation de cette fonction de la variable complexe nécessite de définir la notion d'holomorphie. Cette notion est réservée aux élèves à l'aise en Mathématiques et souhaitant approfondir l'étude de la transformée de Laplace abordée dans les classes précédentes.
Lecture : Chapitre 3, paragraphes 3.1.
Exercices : S2-6 à S2-9.

En Traitement du signal et en Automatique, la transformée de Laplace sera utilisée comme un outil pour caractériser les filtres. Tous les élèves sont concernés par cette partie.
Lecture : Chapitre 3, paragraphe 3.2.
Exercices : S2-10 à S2-13.

Ces exercices sont à réaliser en autonomie lors de l'apprentissage du cours. Les énoncés des exercices de séances présentielles (Petites Classes ou TD) se trouvent dans le livret dédié.

Holomorphie et conditions de Cauchy

Exercice S2-6 : Petite étude de la fonction exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Montrer que :

a) cette fonction est définie sur tout $\mathbb{C}$.

b) si $z = x + iy$, avec $x,y \in \mathbb{R}$, alors on a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$ et $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$.

c) cette fonction est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. On dit alors qu'elle est entière.

d) $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

e) $\mathrm{e}^0 = 1$, $\mathrm{e}^z \neq 0$, $\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$, $\mathrm{e}^{\overline{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$ et si $x \in \mathbb{R}$ alors $|\mathrm{e}^{ix}| = 1$.

Exercice S2-7

$P(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ est-elle harmonique[1] ? Si oui, trouver toutes les fonctions holomorphes $f(z)$ telles que $P(x,y) = \mathcal{R}e[f(z)]$, c'est-à-dire soit la partie réelle de la fonction complexe f. Exprimer ces fonctions en fonction de la variable complexe z et calculer leur dérivée.

Exercice S2-8

1. Soit P une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, deux fois différentiable. On dit que la fonction est harmonique si son Laplacien $\Delta P = \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$

a) Enoncer les conditions de Cauchy pour une fonction $f(z) = P(x,y)+iQ(x,y)$, avec $z = x+iy$, x et y réels.

b) Ecrire les conditions de Cauchy en coordonnées polaires.
On pourra se rapporter au polycopié d'éléments de calcul différentiel pour utiliser le Jacobien.

Développement en série entière

Exercice S2-9

a) Développer la formule du binôme $(1 + x)^p$, avec p entier et x réel,

b) Pour $z \in \mathbb{C}$, en déduire le développement en série entière des fractions suivantes en précisant le rayon de convergence :

$$\frac{1}{1+z}, \qquad \frac{1}{1-z}.$$

c) En déduire le développement en série entière de

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}.$$

Transformée de Laplace

Exercice S2-10

a) Calculer la transformée de Laplace de $Y(t)$, $Y(t)\cos(at)$ et $Y(t)\sin(at)$, où $a \in \mathbb{C}$, en précisant l'abscisse de sommabilité.

b) Vérifier que les trois fonctions de la variable complexe p, sont holomorphes dans leur domaine de sommabilité[2].

Exercice S2-11

Calculer la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ périodique de période $T > 0$, nulle pour $t < 0$, et montrer que

$$\mathrm{Y}(t)\, f(t) \sqsupset \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-pT}} \int_0^T f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t, \qquad \Re e\,(p) > 0.$$

Equations intégro-différentielles

Exercice S2-12

En utilisant la TL, trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solutions des équations suivantes :

$$3g(t) + g'(t) + 2\int_0^t g(s)\, ds = Y(t) - Y(t-1), \quad \text{et } g(0) = 0$$

2. On pourra utiliser les conditions de Cauchy

où Y est la fonction de Heaviside.

$$f'(x) - \int_0^{+\infty} f(x-t)\cos t\,\mathrm{d}t = x\sin x, \quad \text{et } f(0) = 0$$

Pour chacune de ces équations, on précisera l'espace dans lequel on se place pour résoudre et on vérifiera que les solutions obtenues sont bien dans l'espace identifié.

Filtres linéaires

Exercice S2-13

On considère le circuit RC schématisé sur la figure 3.1.

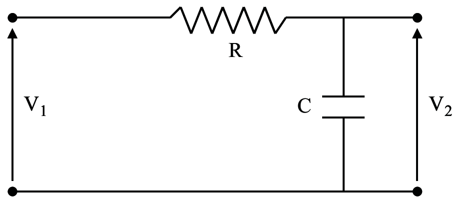

FIGURE 3.1 – *Circuit RC.*

Les tensions $V_1(t)$ et $V_2(t)$, respectivement à l'entrée et à la sortie, sont des fonctions que l'on supposera nulles pour $t < 0$.
a) Donner l'équation différentielle (E) liant $V_1(t)$, tension imposée à l'entrée et $V_2(t)$, tension lue en sortie. On posera $\tau = RC$.

b) Par transformée de Fourier des deux membres de (E), montrer que les TF de V_1 et V_2 sont liées par la relation :

$$\widehat{V}_2(\nu) = \mathcal{H}(\nu)\,\widehat{V}_1(\nu),$$

et en déduire $\mathcal{H}(\nu)$, la réponse fréquentielle du système.

c) Par transformée de Laplace des deux membres de (E), expliciter la fonction de transfert H du filtre.

d) En déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$ de ce système à partir de b) ou c). Comparer et justifier avec l'appartenance de la solution à des ensembles fonctionnels connus.

Chapitre 4

Théorie élémentaire des distributions

4.1 Définition des distributions

4.1.1 Un exemple en électrostatique

Les fonctions mathématiques sont largement utilisées pour décrire et modéliser des phénomènes physiques. Cependant si on considère des phénomènes de durée très courte (par exemple des impulsions), il est difficile de trouver une fonction qui modélise bien ce phénomène. Donnons un exemple concret qui montre les limites de la notion de fonctions.

Exemple (en électrostatique). Reprenons la fonction Porte Π (voir définition 2.3.3) et définissons une densité de charge ρ_k qui modélise une barre métallique chargée de longueur $1/k$. Elle est définie par

$$\rho_k(x) = k\Pi(kx) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq \frac{1}{2k} \\ k & \text{si } |x| < \frac{1}{2k} \end{cases}$$

La charge totale d'un support linéaire est donnée par l'intégrale de ρ_k sur ce support, c'est-à-dire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_k(x)\,\mathrm{d}x = 1$, donc indépendante de la longueur $1/k$. Le graphe de ρ_k est représenté par la figure 4.1.

Diminuons maintenant la longueur du support et essayons de modéliser une charge totale concentrée à l'origine. Cela revient à faire tendre k vers l'infini et à considérer la limite simple de la suite de fonctions (ρ_k). Le phénomène est alors modélisé par une fonction presque partout nulle. Sur l'ensemble négligeable représenté par le point origine, cette fonction a une valeur infinie. En physique, on appelle ce type de fonction, une fonction piquée (ici à l'origine), que l'on peut noter *delta* et définie par

$$\mathit{delta}(x) = \lim_{k\to+\infty} \rho_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Du point de vue de l'intégrale de Lebesgue on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathit{delta}(x)\,\mathrm{d}x = 0$ car l'intégrale d'une fonction presque partout nulle est nulle. Ainsi, l'objet *delta* ne modélise pas du tout une concentration de charge à l'origine.

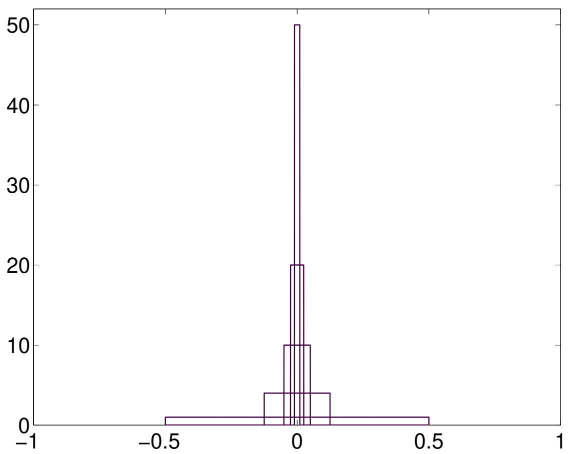

FIGURE 4.1 – *Fonctions ρ_k pour $k = 1, 4, 10, 20$ et 50.*

Vers un nouveau cadre théorique

Cet objet *delta*, manipulé en tant que fonction donne des résultats absurdes, ce qui nous amène à dire que si *delta* modélise le phénomène ci-dessus, il ne peut pas être une fonction. C'est Paul Dirac qui introduit cet objet en 1935, ce qui lui permet de modéliser des phénomènes ponctuels auxquels sont confrontés les physiciens. Ils savent qu'un objet tel que *delta* correspond à une réalité physique, mais le cadre théorique des fonctions réelles n'est pas satisfaisant et son utilisation implique des écritures erronées du point de vue de l'analyse en mathématiques.
Pendant dix ans les physiciens travailleront sans modélisation mathématique correcte et en 1945, Laurent Schwartz, grand mathématicien français[1] qui étudie alors, entre autres choses, certains espaces vectoriels topologiques, introduit la notion de *distributions*. Il s'agit de changer de point de vue et de passer d'un point de vue ponctuel à un point de vue fonctionnel. Le cadre théorique est construit peu à peu, les abus d'écriture disparaissent et l'objet *delta*, maintenant noté δ (prononcez distribution de Dirac), a alors une définition rigoureuse et une place centrale en tant que "distribution". La dérivation et l'intégration deviennent aussi plus simples.
Finalement, ce cadre théorique, plus complexe que celui des fonctions réelles, permet de "manipuler" beaucoup plus simplement et élégamment les outils classiques de traitement du signal et de la physique en général.

Etant donnée la complexité de la théorie générale des distributions qui commence par l'étude des fonctionnelles sur des espaces vectoriels topologiques, nous nous restreindrons à une présentation simplifiée qui implique l'admission de certains résultats. Cependant, nous espérons ne pas tomber dans le piège de la présentation catalogue des seules formules utiles pour les cours de traitement du signal et d'électromagnétisme. Entre les deux extrêmes, il y a place pour plusieurs cheminements. Voici celui qui a été choisi.

4.1.2 $\mathcal{D}$, espace des fonctions test

On rappelle que $\mathcal{D}_k(\mathbb{R}^n)$, $k = 0{,}1,\ldots,\infty$, est l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ à support borné (compact) (voir 2.2.3).

<u>*Notation*</u> (Classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact). On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\infty$, le sous-ensemble des fonctions indéfiniment dérivables (différentiables) à support borné (compact).

Notion de fonctionnelle

Une fonction est définie par le résultat de son application à tout un ensemble de valeurs de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$.

Définition 4.1.1. Une fonctionnelle est définie par le résultat de son application à tout un ensemble de fonctions appelées *fonctions test* ou *fonctions d'essai*. Si ce résultat est un scalaire pour tout l'ensemble de fonctions test, on dit que la fonctionnelle est une *forme*.

Autrement dit, une fonctionnelle est une fonction de fonctions (test). On peut faire en sorte de choisir un ensemble de fonctions test afin d'obtenir le maximum de fonctionnelles ayant une propriété donnée (par exemple la continuité). Dans ce cas, plus les fonctions test obéiront à des conditions sévères de régularité, plus les fonctionnelles, définies sur elles, seront générales.

Les fonctions test

Définition 4.1.2. Dans la théorie des distributions, l'ensemble des fonctions test est $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, c'est l'ensemble des fonctions φ de la variable x réelle (ou $x \in \mathbb{R}^n$) à valeurs réelles ou complexes, indéfiniment dérivables (différentiables) et à support borné.

Remarque 4.1.1. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbb{R}^n$.
Pour une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, le plus petit fermé borné K de $\mathbb{R}^n$ en dehors duquel φ est nulle est appelé le support de φ (voir définition 2.2.1). Cet ensemble K existe et est différent pour chaque fonction φ.

Exemple. Si $n = 1$, la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1 \\ \exp\left(\dfrac{-1}{1-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. C'est la fonction exhibée par L. Schwartz pour montrer que $\mathcal{D}$ n'est pas vide.

Remarque 4.1.2. Afin de simplifier les formules, on se place dans $\mathbb{R}$ ($n = 1$). Si $x \in \mathbb{R}^n$, il faut considérer des intégrales multiples, des dérivées partielles et les ensembles bornés K sont des bornés de $\mathbb{R}^n$. A la fin du chapitre, nous travaillerons dans $\mathbb{R}^3$, ce qui permettra d'illustrer ces notions par des exemples concrets de la physique.

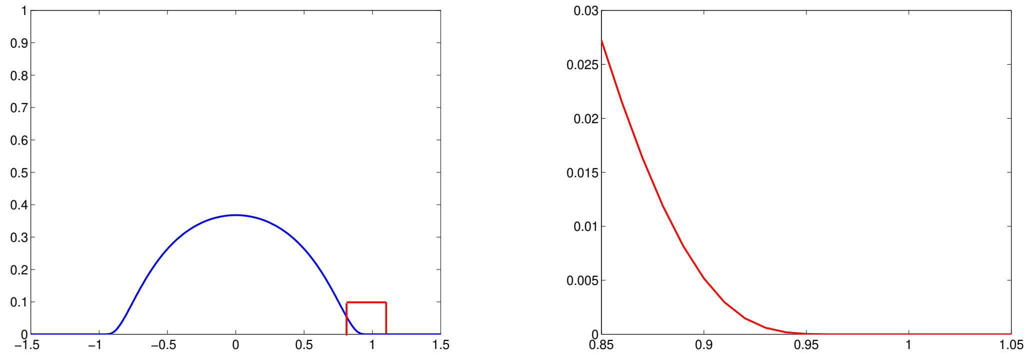

FIGURE 4.2 – *Exemple de fonction test et zoom au point* $x = 1$.

Propriétés de $\mathcal{D}$

Nous énonçons :

- $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel de dimension infinie.
- Si φ appartient à $\mathcal{D}$, alors toutes ses dérivées appartiennent à $\mathcal{D}$.
- Si φ appartient à $\mathcal{D}$ et si α est indéfiniment dérivable (on note $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$ et on dit que α est de classe $\mathcal{C}^\infty$), alors le produit $\alpha\varphi$ appartient à $\mathcal{D}$.

Notion de convergence sur $\mathcal{D}$: topologie

Définition 4.1.3. Soit φ_j une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{D}$. On dit qu'elle *converge vers une fonction* φ *au sens de la topologie* de $\mathcal{D}$, lorsque $j \to \infty$ si

i) les supports des φ_j sont tous contenus dans un même ensemble borné K indépendant de j,

ii) les dérivées de chaque ordre des φ_j **convergent uniformément** vers les dérivées correspondantes de φ.

On a muni $\mathcal{D}$ de la topologie donnée par la norme sup. Il s'agit là d'une convergence très forte.

Notation. On note cette notion de convergence dans $\mathcal{D}$ par $\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi$.

4.1.3 $\mathcal{D}'$, espace des distributions

Définition 4.1.4. On appelle distribution T, toute fonctionnelle qui est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$. Cela signifie qu'à toute fonction φ de $\mathcal{D}$, T associe le nombre complexe fini $\mathrm{T}(\varphi)$, noté aussi $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle$ avec les propriétés de linéarité et de continuité sur $\mathcal{D}$

- **Forme.** $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle$ est un nombre fini,
- **Linéarité.** $\langle \mathrm{T}, \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \rangle = \langle \mathrm{T}, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle \mathrm{T}, \varphi_2 \rangle$, λ étant une constante complexe,
- **Continuité.** Si φ_j converge vers φ lorsque $j \to \infty$ au sens de la convergence dans $\mathcal{D}$, la suite de nombres complexes $\langle \mathrm{T}, \varphi_j \rangle$ converge vers le nombre complexe $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle$ lorsque $j \to \infty$. On note

$$\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{D}} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \lim_{j\to\infty} |\langle \mathrm{T}, \varphi_j - \varphi \rangle| = 0.$$

Ainsi toute fonctionnelle T définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{T} : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \mathrm{T}(\varphi) = \langle \mathrm{T}, \varphi \rangle \end{array}$$

qui est une forme linéaire et continue sur $\mathcal{D}$, est une distribution de $\mathcal{D}'$. On note T$\in \mathcal{D}'$.

Remarque 4.1.3. On peut toujours considérer une suite de fonctions φ_j convergeant vers 0 au sens de la topologie de $\mathcal{D}$ (définition 4.1.3).

Notation. Les distributions forment un espace vectoriel noté $\mathcal{D}'$. C'est une partie de l'espace dual[2] de $\mathcal{D}$, ensemble de toutes les fonctionnelles linéaires sur $\mathcal{D}$, continues ou non.

Remarque 4.1.4. En pratique, pour montrer qu'une fonctionnelle T sur $\mathcal{D}$ est une distribution, on peut se contenter de montrer que T est linéaire. En effet, on n'a jamais explicité de fonctionnelles linéaires non continues sur $\mathcal{D}$. On démontre seulement théoriquement qu'elles existent.

La notion de distributions définit un nouvel objet mathématique. Celui-ci a été introduit afin de résoudre certains problèmes pour lesquels la notion de fonction était insuffisante. Ainsi, les distributions ne “remplacent” pas les fonctions mais étendent plutôt leurs possibilités tout en conservant l'acquis mathématique les concernant. Elles sont en quelque sorte une généralisation des fonctions. Nous allons voir qu'il existe deux grands types de distributions : celles qui sont très liées à la notion de fonctions (elles les étendent), nous les appellerons **distributions régulières**, puis d'autres qui sont des objets complètement nouveaux, appelés **distributions singulières** dont la distribution de Dirac, le peigne de Dirac, la distribution vp .

2. noté $\mathcal{D}^*$

Les distributions régulières

Définition 4.1.5 (Distributions régulières)**.** A toute fonction f *localement sommable*, on associe la distribution régulière notée T_f, définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \mathrm{T}_f, \varphi \rangle \overset{déf}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

Cette intégrale a bien un sens puisque l'on intègre sur K, le support de φ, la fonction localement sommable $f\varphi$. L'intégrale définit bien une fonctionnelle linéaire par rapport à φ.

Exercice. Montrer que cette fonctionnelle est bien continue sur $\mathcal{D}$.

Proposition 4.1.1. *Deux fonctions localement sommables f et g, définissent la même fonctionnelle $\mathrm{T}_f = \mathrm{T}_g$ si et seulement si elles sont presque partout égales.*

PREUVE: Si $f \overset{p.p}{=} g$, alors on a $\mathrm{T}_f = \mathrm{T}_g$ d'après la définition et les propriétés de l'intégrale de Lebesgue. Pour la réciproque, voir Schwartz [9, page 80]. ■

Notation. Cela revient à ne parler que de classes de fonctions presque partout égales et la distribution T_f est alors associée à la classe des fonctions localement sommables presque partout égales à f. On dit que **c'est une distribution régulière**.

Notation. Pour alléger l'écriture, on confond souvent f avec T_f et on écrit

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \mathrm{T}_f, \varphi \rangle = \langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

Ainsi jusqu'à présent $f(x)$ pouvait signifier

- la valeur (réelle ou complexe) que prend la fonction f en x,
- la fonction f de la variable x,

sans aucune confusion pour les esprits. Maintenant $f(x)$ écrit dans un crochet de dualité, signifie la distribution T_f associée à la fonction f, x étant là pour rappeler que c'est la variable des fonctions sous l'intégrale. x est une variable "muette" puisque la quantité $\langle f(x), \varphi(x) \rangle$ est un scalaire.

Exemple. Considérons la fonction cosinus. Elle est continue, non sommable mais localement sommable. On peut lui associer une distribution régulière $\mathrm{T}_{\cos}$ que nous notons $\cos$ pour simplifier, et définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \mathrm{T}_{\cos}, \varphi \rangle = \langle \cos(x), \varphi(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \cos(x)\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x$$

A l'intérieur des crochets, $\cos$ est la distribution régulière $\mathrm{T}_{\cos}$. Sous l'intégrale, il s'agit de la fonction trigonométrique cosinus représentant la classe des fonctions presque partout égales à $\cos$.

Remarque 4.1.5. L'existence des distributions régulières montrent que le concept de distribution généralise la notion de classe de fonctions localement sommables égales p.p.

Les distributions singulières

Une distribution T qui n'est pas associée à une fonction localement sommable, est une distribution singulière. Comme leur nom l'indique, les **distributions singulières** n'ont pas de définition générale mais une définition particulière qui leur est propre et qui respecte la définition 4.1.4 d'une distribution. Dans le cadre de ce cours et pour les applications en physique, traitement du signal, automatique, nous en utiliserons seulement quelques-unes. En voici trois exemples.

La distribution singulière Dirac

Définition 4.1.6. La *distribution de Dirac* au point a, est notée δ_a et est définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle \stackrel{déf}{=} \varphi(a)$$

Au point origine on note δ

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

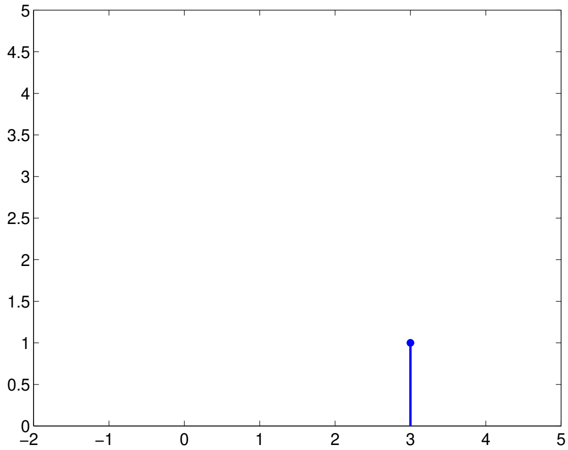

FIGURE 4.3 – *Représentation d'un Dirac en* $a = 3$.

Remarque 4.1.6. Pour que δ_a soit une fonctionnelle linéaire et continue, il suffit de considérer l'ensemble des fonctions test φ continues en "a". Ainsi l'ensemble $\mathcal{D}$ des fonctions test est l'ensemble commun à toutes les distributions mais certaines d'entre elles ont aussi un sens lorsqu'on les applique à un ensemble de fonctions test plus large (fonctions tests moins restrictives).

Exercice. Montrer qu'il n'existe aucune fonction sommable associée à δ, c'est une distribution singulière.

La distribution singulière Peigne de Dirac

Toute combinaison linéaire de distributions de Dirac est aussi une distribution. On peut citer en particulier la distribution “peigne de Dirac”, notée Ш, définie par $Ш = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$, avec n entier. Cette distribution est très utilisée en traitement de signal, notamment pour échantillonner un signal.

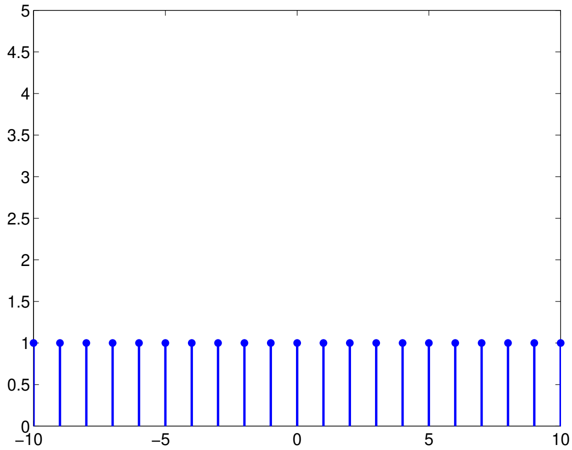

FIGURE 4.4 – *Représentation d'un Peigne de Dirac.*

La distribution singulière vp

Valeur principale de Cauchy

Soit f une fonction définie pour $a \leq x \leq b$ et sommable dans $[a,c-\varepsilon]$ et dans $[c+\varepsilon, b]$ quel que soit $\varepsilon > 0$. On considère habituellement que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a un sens si chacune des intégrales

$$\int_a^{c^-} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{c^+}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

a un sens. Cela revient à dire que

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

a une limite lorsque ε_1 et ε_2 tendent vers zéro indépendamment l'un de l'autre. Il peut arriver que cette limite n'existe pas mais existe si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$. On dit alors que l'intégrale est *convergente en valeur principale de Cauchy* et on note

$$vp \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{déf}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Pour simplifier, on se place en $c = 0$ (toujours possible par changement de variable). On sait que toute fonction f est la somme d'une fonction impaire f_1 et d'une fonction paire f_2. Dans un intervalle symétrique, l'intégrale de f_1 sera nulle. Donc, si on choisit α tel que $a \leq -\alpha < 0 < \alpha \leq b$, la convergence au sens de la valeur principale dans (a,b), ou ce qui est la même chose dans $(-\alpha, \alpha)$

est la même pour f et pour f_2. L'intégrale de f existe en vp si et seulement si $\displaystyle\int_{+\varepsilon}^{+\alpha} f_2(x)\,\mathrm{d}x$ a une limite lorsque $\varepsilon \to 0$ (voir Schwartz [9, page 46]).

La distribution vp

La fonction $\dfrac{1}{x}$ ne définit pas une distribution car elle n'est pas sommable au voisinage de $x = 0$. Considérons l'intégrale au sens de la valeur principale de Cauchy

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \overset{déf}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

a un sens pour $\varphi \in \mathcal{D}$. On définit ainsi une forme linéaire et continue sur $\mathcal{D}$.

Définition 4.1.7. La distribution $vp\,\dfrac{1}{x}$ (prononcez “valeur principale 1 sur x”) est définie par

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle vp\,\frac{1}{x}\ , \varphi(x)\rangle \overset{déf}{=} vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Par changement de variable ou introduction de $\varphi(0)$, on obtient les deux expressions suivantes

$$\langle vp\,\frac{1}{x}\ , \varphi(x)\rangle = \int_{0}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x$$

qui, grâce aux propriétés de φ montrent que cette expression définit bien une fonctionnelle sur $\mathcal{D}$. La linéarité est évidente et le lecteur pourra vérifier la continuité.

Comme la distribution de Dirac, $vp\,\dfrac{1}{x}$ est donc une distribution singulière et est très utilisée en traitement du signal et en physique.

Support d'une distribution

On ne peut pas évaluer une distribution en un point ou dire que deux distributions T_1 et T_2 sont égales en un point. Pour deux distributions régulières, on a vu qu'il suffisait que les fonctions localement sommables associées soient dans la même classe pour la relation d'équivalence “égal presque partout”. On peut aussi définir l'égalité de deux distributions quelconques.

Définition 4.1.8. On dit que deux distributions, T_1 et T_2, sont identiques si

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \mathrm{T}_1, \varphi\rangle = \langle \mathrm{T}_2, \varphi\rangle$$

Définition 4.1.9. Soit Ω un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que deux distributions, T_1 et T_2, sont identiques sur Ω, si

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}\,\text{ayant son support dans } \Omega, \quad \langle \mathrm{T}_1, \varphi\rangle = \langle \mathrm{T}_2,\varphi\rangle$$

Considérons tous les ouverts pour lesquels T est nulle, c'est-à-dire $\langle \mathrm{T}, \varphi\rangle = 0$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ ayant son support dans l'un de ces ouverts. La réunion de tous ces ouverts est un ouvert sur lequel on peut montrer que T est nulle (principe du recollement des morceaux). De plus, c'est le plus grand ouvert sur lequel T est nulle.

Définition 4.1.10. Son complémentaire, qui est fermé, est appelé *support de la distribution* T. C'est le plus petit ensemble fermé en dehors duquel T est nulle.

Remarque 4.1.7. Si le support de T et le support de φ sont sans point commun alors $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle = 0$.

Exemple. Si T est une fonction continue, son support en tant que distribution coïncide avec son support en tant que fonction.
Pour la distribution de Dirac, on a $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$ pour toute fonction φ dont le support ne contient pas l'origine. La réunion de ces supports est l'ouvert $\mathbb{R}^*$, donc le support de δ est le singleton $\{0\}$.

4.2 Opérations sur les distributions

Les opérations que l'on cherche à définir doivent avoir un sens dans le cas où T est une fonction. Ainsi, on définit les opérations sur les distributions à partir des résultats obtenus sur les fonctions localement sommables, c'est-à-dire les distributions régulières.

Rappelons que $\mathcal{D}'$ est un espace vectoriel. Pour λ_1 et λ_2 dans $\mathbb{C}$, et deux distributions T_1, T_2 alors la distribution, $\lambda_1\mathrm{T}_1 + \lambda_2\mathrm{T}_2$, combinaison linéaire de T_1 et T_2 est définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \lambda_1\mathrm{T}_1 + \lambda_2\mathrm{T}_2, \varphi \rangle = \lambda_1 \langle \mathrm{T}_1, \varphi \rangle + \lambda_2 \langle \mathrm{T}_2,\varphi \rangle$$

Définition 4.2.1. Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x, la fonction $f(x-a)$ s'appelle *translatée* de f et est notée $\tau_a f(x)$.

Pour une fonction $f(x)$ localement sommable, on peut écrire

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x+a)\,\mathrm{d}x \\ \langle \tau_a f(x), \varphi(x) \rangle &= \langle f(x), \varphi(x+a) \rangle \end{aligned}$$

Ainsi

Définition 4.2.2 (Translation)**.** La translaté $\tau_a\mathrm{T}$ d'une distribution $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$ est donnée par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \tau_a\mathrm{T}, \varphi \rangle \overset{déf}{=} \langle \mathrm{T}, \tau_{-a}\varphi \rangle$$

Exemple. Pour δ on a, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, $\langle \tau_a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{-a}\varphi \rangle = \varphi(a)$ c'est-à-dire $\tau_a\delta = \delta_a$.

Comme pour les fonctions, on définit la notion de périodicité pour les distributions, ainsi que la notion de parité. Comme précédemment, on se place dans le cas d'une fonction localement sommable, f.
Si f est périodique de période a, on a

$$\langle f(x), \varphi(x+a) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle f(x), \varphi(x) \rangle$$

Soit la fonction f, considérons la fonction $f(-x)$, on a

$$\langle f(-x), \varphi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(-x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(-x)\,\mathrm{d}x = \langle f(x), \varphi(-x)\rangle$$

Ainsi, si f est paire on a

$$\langle f(x), \varphi(-x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(-x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \langle f(x), \varphi(x)\rangle$$

Si f est impaire, on a

$$\langle f(x), \varphi(-x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(-x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\langle f(x), \varphi(x)\rangle$$

Ce qui permet de donner les définitions suivantes

Définition 4.2.3 (Périodicité)**.** T est dite *périodique* de période a si $\tau_a \mathrm{T} = \mathrm{T}$ c'est-à-dire si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \mathrm{T}(x), \varphi(x+a) - \varphi(x)\rangle \overset{déf}{=} 0$$

Définition 4.2.4 (Parité d'une distribution)**.** Une distribution T est dite *paire* si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \mathrm{T}(x), \varphi(x) - \varphi(-x)\rangle \overset{déf}{=} 0$$

Une distribution T est dite *impaire* si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \mathrm{T}(x), \varphi(x) + \varphi(-x)\rangle \overset{déf}{=} 0$$

Exercice. Pour quelles valeurs de a, δ_a est paire, δ'_a est impaire ?

Définition 4.2.5 (Changement d'échelle)**.** Pour une fonction f localement sommable, on a

$$\langle f\left(\frac{x}{a}\right), \varphi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{a}\right)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = |a| \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(ax)\,\mathrm{d}x$$

Ce qui conduit à

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \mathrm{T}\left(\frac{x}{a}\right), \varphi(x)\rangle \overset{déf}{=} |a|\,\langle \mathrm{T}(x), \varphi(ax)\rangle$$

4.2.1 Dérivation

On veut définir la dérivée T' d'une distribution T, de manière que, si T est une fonction f continue à dérivées continues, on retrouve la dérivée usuelle f'.

Fonctions continues

Soit f une fonction continuement dérivable

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathcal{D},\quad \langle f'(x),\varphi(x)\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [f\varphi]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\langle f(x),\varphi'(x)\rangle\end{aligned}$$

en intégrant par partie et en remarquant que le terme tout intégré est nul car φ est à support borné. Cela conduit à la définition suivante

Définition 4.2.6. La dérivée d'une distribution $\mathrm{T}\in\mathcal{D}'$ est notée T' et définie par

$$\forall\varphi\in\mathcal{D},\quad \langle \mathrm{T}',\varphi\rangle \overset{déf}{=} -\langle \mathrm{T},\varphi'\rangle$$

On remarque que c'est bien une distribution. En effet $\varphi\in\mathcal{D}$ donc φ' aussi, les expressions sont donc des fonctionnelles. Si (φ_n) converge vers φ dans $\mathcal{D}$ alors (φ_n') converge vers φ' dans $\mathcal{D}$, donc comme T continue, T' aussi. Dérivons une seconde fois

$$\forall\varphi\in\mathcal{D},\quad \langle \mathrm{T}'',\varphi\rangle = -\langle \mathrm{T}',\varphi'\rangle = +\langle \mathrm{T},\varphi''\rangle$$

On obtient le résultat fondamental suivant

Proposition 4.2.1. *Toute distribution est indéfiniment dérivable, et on a*

$$\forall\varphi\in\mathcal{D},\quad \langle \mathrm{T}^{(m)},\varphi\rangle = (-1)^m\langle \mathrm{T},\varphi^{(m)}\rangle$$

Remarque 4.2.1. En particulier, toute fonction continue ou même localement sommable f a des dérivées successives de tous ordres, qui ne sont pas en général des fonctions, mais des distributions. Si f est continuement dérivable, sa dérivée distribution coïncide avec sa dérivée usuelle.

Exemple. Les dérivées successives de la distribution de Dirac sont, pour tout $\varphi\in\mathcal{D}$

$$\begin{aligned}\langle\delta_a',\varphi\rangle &= -\langle\delta_a,\varphi'\rangle = -\varphi'(a)\\ \langle\delta_a'',\varphi\rangle &= +\langle\delta_a,\varphi''\rangle = +\varphi''(a)\end{aligned}$$

et en généralisant

$$\langle\delta_a^{(m)},\varphi\rangle = (-1)^m\varphi^{(m)}(a)$$

Fonctions discontinues et formule des sauts

Considérons la fonction de Heaviside $\mathrm{Y}(x)$

$$Y(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1/2 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

Cette fonction est aussi appelée *échelon unité* et est très utilisée dans le calcul symbolique. Cette fonction est localement sommable et définit une distribution régulière, notée Y.

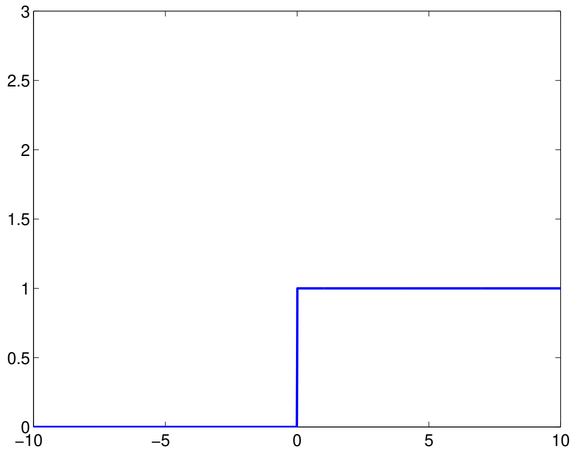

FIGURE 4.5 – *Fonction Heaviside.*

Dérivons-la au sens des distributions.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Y}', \varphi\rangle = \langle Y'(x), \varphi(x)\rangle &= -\langle Y(x), \varphi'(x)\rangle = -\int_{\mathbb{R}} Y(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi\rangle\end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Y}' = \delta$ dans $\mathcal{D}'$. Ainsi, la discontinuité de la fonction Y apparaît dans sa dérivée sous forme d'une masse ponctuelle située à l'origine (δ_0) et pondérée par 1.

Pour généraliser, considérons une fonction continue et dérivable (au sens usuel des fonctions) pour $x < a$ et $x > a$. Supposons que f admette pour chacune des dérivées, une limite à gauche, $f^{(m)}(a^-)$, et à droite, $f^{(m)}(a^+)$, de a.

On note $\sigma_m(a) = f^{(m)}(a^+) - f^{(m)}(a^-)$, le saut en $x = a$ pour la dérivée m-ième de f.
Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, on écrit

$$\langle \mathrm{T}_f', \varphi\rangle = -\langle \mathrm{T}_f, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} f\,\varphi' = -\int_{-\infty}^{a^-} f\,\varphi' - \int_{a^+}^{+\infty} f\,\varphi'$$

On a

$$-\int_{-\infty}^{a^-} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{a^-} + \int_{-\infty}^{a^-} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

et

$$-\int_{a^+}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -[f(x)\varphi(x)]_{a^+}^{+\infty} + \int_{a^+}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

et en ajoutant, φ étant continue en a, on obtient

$$\langle \mathrm{T}'_f, \varphi \rangle = \sigma_0(a)\varphi(a) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire dans $\mathcal{D}'$

$$\mathrm{T}'_f = \mathrm{T}_{f'} + \sigma_0(a)\delta_a$$

On fait encore apparaître la discontinuité de f sous forme d'une masse ponctuelle en a et comme le montre le calcul, le signe du saut est très important.

Proposition 4.2.2 (Formule des sauts)**.** *Soit f une fonction continue par morceaux et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. On note $\sigma_0(a) = f(a^+) - f(a^-)$ le saut signé de f en a. La dérivée T'_f, de la distribution régulière T_f dans $\mathcal{D}'$, est égale à la somme, de la distribution $\mathrm{T}_{f'}$, associée à la dérivée usuelle de f (notée $\{f'\}$), et de δ_a (distribution Dirac en "a"), pondérée par la valeur signée du saut. Elle est donnée par*

$$\mathrm{T}'_f = \mathrm{T}_{f'} + \sigma_0(a)\delta_a.$$

En dérivant successivement, cette formule devient en général compliquée mais **dans le cas où on suppose que les dérivées successives de f ont toutes une seule discontinuité située en** a, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}''_f &= \mathrm{T}_{f''} + \sigma_0(a)\delta'_a + \sigma_1(a)\delta_a \\ \mathrm{T}'''_f &= \mathrm{T}_{f'''} + \sigma_0(a)\delta''_a + \sigma_1(a)\delta'_a + \sigma_2(a)\delta_a \end{aligned}$$

et en généralisant

$$\mathrm{T}^{(m)}_f = \mathrm{T}_{f^{(m)}} + \sigma_0(a)\delta^{(m-1)}_a + \cdots + \sigma_{m-1}(a)\delta_a$$

Exemple (1). La fonction de Heaviside a une dérivée nulle (p.p.) au sens des fonctions. Elle a une discontinuité en $x = 0$ de saut égal à 1. Sa dérivée au sens des distributions est (figure 4.6)

$$\mathrm{Y}' = \{\mathrm{Y}'\} + 1\delta = \delta$$

Exemple (2). La fonction $\mathrm{Y}(x)\cos x$ est égale à $\cos x$ pour $x > 0$ et est nulle pour $x < 0$. Elle a une discontinuité en $x = 0$. Sa dérivée au sens des distributions est

$$(\mathrm{Y}\cos)' = -\mathrm{Y}\sin + \delta$$

c'est-à-dire la distribution régulière associée à la fonction égale à $\sin x$ pour $x > 0$ et nulle pour $x < 0$, augmentée de δ .

Exemple (3). La fonction porte Π à une dérivée nulle au sens des fonctions. Elle a deux discontinuités : une en $x = -1/2$ de saut égal à 1, une autre en $x = 1/2$ de saut égal à -1. Sa dérivée au sens des distributions est (figure 4.7)

$$\Pi' = \{\Pi'\} + 1\delta_{-1/2} - 1\delta_{1/2} = \delta_{-1/2} - \delta_{1/2}$$

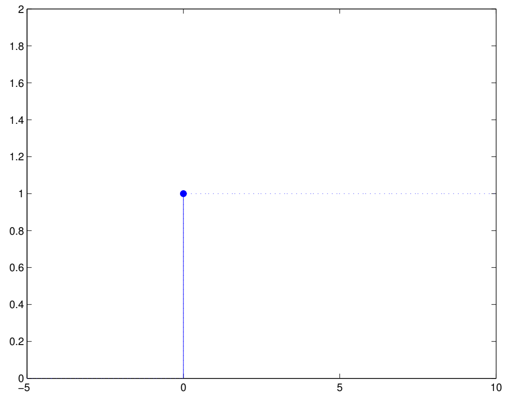

FIGURE 4.6 – *Heaviside et sa dérivée, δ, au sens des distributions.*

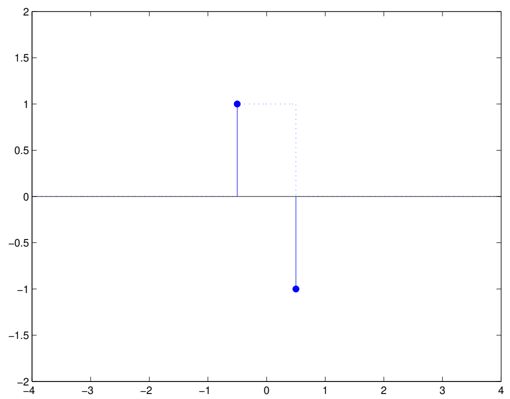

FIGURE 4.7 – *La fonction $\Pi(x)$ et sa dérivée au sens des distributions.*

Exemple (4). La fonction $Y(x)\cos x$ est égale à $\cos x$ pour $x > 0$ et est nulle pour $x < 0$. Elle a une discontinuité en $x = 0$. Sa dérivée au sens des distributions est

$$(\mathrm{Y}\cos)' = -\mathrm{Y}\sin + \delta$$

c'est-à-dire la distribution régulière associée à la fonction localement sommable égale à $\sin x$ pour $x > 0$ et nulle pour $x < 0$, augmentée de δ.

Exercice. Calculer la dérivée seconde de la distribution régulière $|x|$.

4.2.2 Multiplication

La multiplication de deux distributions quelconques n'est pas possible. Si on considère deux fonctions localement sommables, leur produit ne l'est pas forcément. Par exemple la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\chi_{[0,+\infty[}$ est localement sommable alors que f^2 ne l'est pas. On considère la multiplication de deux distributions dans le cas où une des distributions est une fonction indéfiniment dérivable.

Proposition 4.2.3. *Soit* $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$ *et* α *une fonction indéfiniment dérivable, alors le produit* $\alpha\mathrm{T}$ *est une distribution définie par*

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \alpha\mathrm{T}, \varphi\rangle \overset{déf}{=} \langle \mathrm{T}, \alpha\varphi\rangle$$

Remarque 4.2.2. $\alpha\mathrm{T}$ est bien une nouvelle distribution. En effet, $\alpha\varphi$ est une fonction indéfiniment dérivable (formule de Leibnitz pour le produit), de support inclus dans celui de φ et qui dépend linéairement de φ. Si une suite de fonctions φ_j converge vers 0 au sens de $\mathcal{D}$, il en est de même de $\alpha\varphi_j$ et T étant continue, il en est de même pour $\alpha\mathrm{T}$. En effet le support K indépendant de j contenant tous les supports des φ_j, contient aussi tous les supports des $\alpha\varphi_j$, et la convergence uniforme des dérivées de tous ordres φ_j vers 0 entraine celles des dérivées de tous ordres $\alpha\varphi_j$ en vertu de la formule de Liebnitz.
Pour une fonction f localement sommable, αf est le produit usuel.

Le choix d'une fonction indéfiniment dérivable, donc très "régulière" permet de définir un produit avec une distribution qui est "irrégulière". Pour certaines distributions, on peut relâcher les contraintes sur α. En effet pour δ, on peut choisir une fonction continue au voisinage de l'origine :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \alpha\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \alpha\varphi\rangle = \alpha(0)\varphi(0) = \langle \alpha(0)\delta, \varphi\rangle$$

On en déduit deux formules très souvent utilisées :

$$\alpha\delta = \alpha(0)\delta \qquad \text{et} \qquad \alpha\delta_a = \alpha(a)\delta_a$$

Exercice. Montrer que $x\delta = 0$, $x\delta' = -\delta$, et plus généralement $x\delta^{(m)} = -m\delta^{(m-1)}$.

Proposition 4.2.4. *Si* $\alpha\mathrm{T}$ *existe, la dérivée est obtenue par la formule*

$$(\alpha\mathrm{T})' = \alpha'\mathrm{T} + \alpha\mathrm{T}'$$

Exemple. Soit la distribution de Heaviside Y et les fonctions indéfiniment dérivables $\cos$ et $\sin$, on a

$$\begin{aligned}
(\sin(x)\mathrm{Y})' &= \cos(x)\mathrm{Y} + \sin(x)\mathrm{Y}' = \cos(x)\mathrm{Y} + \sin(0)\delta = \cos(x)\mathrm{Y} \\
(\sin(x)\mathrm{Y})'' &= (\cos(x)\mathrm{Y})' = -\sin(x)\mathrm{Y} + \cos(x)\mathrm{Y}' = \delta - \sin(x)\mathrm{Y}
\end{aligned}$$

Le support de ces distributions est dans $[0, +\infty[$, on dit qu'elles sont *causales*.

Problème de la division

Considérons l'équation $\alpha\mathrm{T} = 0$, c'est-à-dire $\forall\varphi \in \mathcal{D}$, $\langle \alpha\mathrm{T}, \varphi\rangle = 0$, où α est une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Le produit peut être nul sans que ni T ni α ne soit nul. C'est le cas du produit $x\delta$.

On énonce

Proposition 4.2.5.

$$x\mathrm{T} = 0 \iff \mathrm{T} = A\delta$$

où A est une constante arbitraire.

PREUVE: La condition est suffisante, $x\delta = 0$. Il faut montrer qu'elle est nécessaire. Soit T telle que $x\mathrm{T} = 0$ alors $\langle \mathrm{T}, x\varphi\rangle = 0$, c'est-à-dire que T est nulle sur toute fonction $\chi = x\varphi \in \mathcal{D}$. Pour qu'une telle fonction $\chi \in \mathcal{D}$ soit de cette forme, il faut et il suffit que $\chi(0) = 0$. En effet si $\chi(0) = 0$, alors la fonction $\varphi(x) = \dfrac{\chi(x)}{x}$ est indéfiniment dérivable partout (pour x=0, on utilise le développement de Taylor de χ). Ainsi, considérons θ fixée $\in \mathcal{D}$ telle que $\theta(0) = 1$, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$, il existe une fonction $\chi \in \mathcal{D}$, telle que :

$$\psi(x) = \lambda\,\theta(x) + \chi(x) \qquad \text{avec} \quad \lambda = \psi(0) \text{ et } \chi(0) = 0$$

$\langle \mathrm{T}, \chi\rangle = 0 \implies \langle \mathrm{T}, \psi\rangle = \lambda\ \langle \mathrm{T}, \theta\rangle = C\ \psi(0) = C\ \langle \delta, \psi\rangle$ c'est-à-dire $\mathrm{T} = C\delta$ où C est la constante $\langle \mathrm{T}, \theta\rangle$. ■

Plus généralement, si $\alpha(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable telle que l'équation $\alpha(x) = 0$ n'ait que des racines réelles simples a_i, toute solution de $\alpha\mathrm{T} = 0$ est de la forme $\mathrm{T} = \sum_{i\in I} A_i\ \delta_{a_i}$, où les A_i sont des constantes arbitraires et I un ensemble d'indices fini ou infini dénombrable.

Pour résoudre $\alpha\mathrm{T} = \mathrm{S}$ où S est une distribution connue, on cherche T_0 une solution particulière $\alpha\mathrm{T}_0 = \mathrm{S}$. On a alors $\alpha(\mathrm{T} - \mathrm{T}_0) = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0 + \sum_{i\in I} A_i\ \delta_{a_i}$, où a_i sont les racines réelles simples de la fonction $\alpha(x)$ et les A_i des constantes arbitraires.

Exemple. Pour résoudre $x\mathrm{T} = \delta$. On remarque que $x\delta = 0$ donc par dérivation $-x\delta' = \delta$. La solution particulière cherchée est donc $\mathrm{T} = -\delta'$, et la solution générale est $\mathrm{T} = -\delta' + A\delta$.

4.3 Topologie dans l'espace des distributions

4.3.1 Convergence dans $\mathcal{D}'$

Définition 4.3.1. Une suite de distributions T_k converge vers la distribution T lorsque $k \to \infty$ si, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}$, la suite de nombres complexes $\langle \mathrm{T}_k, \varphi \rangle$ converge (au sens ordinaire) vers le nombre $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle$ lorsque $k \to \infty$.

Remarque 4.3.1. T étant une fonctionnelle sur $\mathcal{D}$, on définit ainsi une convergence faible.

Si $\langle \mathrm{T}_k, \varphi \rangle$ a une limite $\langle \mathrm{T}, \varphi \rangle$ lorsque $k \to \infty$ alors T est une fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{D}$. Si on prouve sa continuité, T sera une distribution de $\mathcal{D}'$. Or il n'est pas commun qu'une limite simple de fonctionnelles continues soit continue. Nous admettons la proposition suivante

Proposition 4.3.1. *Si une suite de distributions* T_k *converge vers une fonctionnelle* T*, alors* T *est linéaire et continue sur* $\mathcal{D}$*. C'est une distribution de* $\mathcal{D}'$*.*

Cela tient à la linéarité de T et à des propriétés particulières de l'espace $\mathcal{D}$.

Proposition 4.3.2. *Si des fonctions localement sommables* f_k *convergent simplement presque partout (s.p.p.) vers la fonction localement sommable* f *lorsque* $k \to \infty$*, et si les fonctions* f_k *sont toutes majorées en module par une même fonction* $g \geq 0$ *localement sommable, alors les distributions régulières* f_k *convergent dans* $\mathcal{D}'$ *vers la distribution* f*.*

PREUVE: On applique le théorème de Lebesgue à la suite de fonctions sommables $f_k\varphi$, toutes majorées par la fonction sommable $g\varphi$ et convergeant s.p.p. vers la fonction $f\varphi$. On en déduit que $f\varphi$ est sommable et

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

φ étant continue à support borné, f est localement sommable et définit une distribution. ∎

Proposition 4.3.3. *La dérivation est une opération linéaire et continue dans* $\mathcal{D}'$*. Si des distributions* T_k *convergent dans* $\mathcal{D}'$ *vers la distribution* T *lorsque* $k \to \infty$*, les dérivées* T'_k *convergent dans* $\mathcal{D}'$ *vers la distribution* T'*.*

PREUVE: Supposons que T_k converge vers T et montrons que T'_k converge vers T'. On a $\langle \mathrm{T}'_k, \varphi \rangle = -\langle \mathrm{T}_k, \varphi' \rangle$ qui tend vers $-\langle \mathrm{T}, \varphi' \rangle$ donc $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \mathrm{T}'_k, \varphi \rangle = -\langle \mathrm{T}, \varphi' \rangle = \langle \mathrm{T}', \varphi \rangle$ c'est-à-dire T'_k converge vers T'. ∎

Remarque 4.3.2. On voit ainsi, comme on l'avait annoncé, que la notion de distributions simplifie énormément les problèmes liés à l'étude des propriétés des limites des suites de fonctions.

Proposition 4.3.4 (Convergence vers δ)**.** *On énonce*

i) si f_k *est une fonction* ≥ 0 *pour* $|x| \leq n$*,* $n > 0$ *fixé,*

ii) si f_k *converge vers 0 pour* $k \to \infty$*, uniformément dans tout ensemble*

$$0 < a \leq |x| \leq \frac{1}{a} < \infty,$$

iii) si $\lim_{k\to\infty} \int_{|x|\leq a} f_k(x)\,\mathrm{d}x = 1,\ \forall a > 0$

alors f_k *converge vers* δ *pour* $k \to \infty$.

PREUVE: Voir Schwartz [9, page 104]. ■

Exemple. La suite de distributions régulières T_n associées aux fonctions localement sommables $\cos nx$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. De même $\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0$. Comme on l'a vu dans l'introduction, la suite de distributions régulières $k\Pi(kx)$ tend vers δ quand $k \to \infty$.

Exercice. En décomposant $\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{x} = \pi\delta.$$

4.3.2 Sur-ensembles de $\mathcal{D}$

Fonctions test de $\mathcal{S}$

Définition 4.3.2. On définit l'espace de Schwartz, et on note $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions réelles ou complexes de la variable réelle, indéfiniment dérivables, décroissant à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées, plus vite que toutes puissances de $\dfrac{1}{|x|}$.

La notion de convergence sur $\mathcal{S}$ est la suivante :

Définition 4.3.3. On dit qu'une suite φ_j converge vers φ au sens de $\mathcal{S}$, si la suite $(x^p\varphi_j^{(m)})$ converge vers $x^p\varphi^{(m)}$ **uniformément** sur $\mathbb{R}$, quels que soient l'ordre $m \geq 0$ de dérivation et la puissance $p \geq 0$ de x. On note

$$\varphi_j \xrightarrow[j\to\infty]{\mathcal{S}} \varphi.$$

Remarque 4.3.3. On aura remarqué que $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$. Toute fonction de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{S}$ et la convergence dans $\mathcal{D}$ est un cas particulier de la convergence dans $\mathcal{S}$.

Nous reviendrons sur cet espace de fonctions test dans le chapitre 5.

Exemple. La fonction gaussienne définie par e^{-x^2} est dans $\mathcal{S}$ car elle est indéfiniment dérivable et décroît plus vite que toute puissance de $1/x$ à l'infini.

Fonctions test de $\mathcal{E}$

On peut encore relâcher les contraintes sur les fonctions tests,

Définition 4.3.4. On définit et on note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions réelles ou complexes de la variable réelle, indéfiniment dérivables à support quelconque.

La notion de convergence sur $\mathcal{E}$ est la suivante :

Définition 4.3.5. On dit qu'une suite φ_j converge vers φ au sens de $\mathcal{E}$, si elle converge vers φ **uniformément** sur tout compact, ainsi que chacune de ses dérivées.

Remarque 4.3.4. $\mathcal{E}$ contient les fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ces espaces contiennent l'espace $\mathcal{D}$. On a $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$.

4.3.3 Sous-ensembles de $\mathcal{D}'$

$\mathcal{S}'$, espace des distributions tempérées

Définition 4.3.6. Une distribution de $\mathcal{S}'$ (tempérée) est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{S}$ au sens de la définition 4.3.3

On travaillera avec cet espace de distributions lorsqu'on définira la transformation de Fourier.

$\mathcal{E}'$, espace des distributions à support borné

Définition 4.3.7. Une distribution de $\mathcal{E}'$ (à support borné) est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{E}$ au sens de la définition 4.3.5. Réciproquement, on montre qu'une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{E}$ est une distribution à support borné (voir Schwartz [9, page 108]).

Lorsqu'on définit des fonctionnelles sur des ensembles de fonctions test moins restreints que $\mathcal{D}$ on obtient des sous-ensembles de $\mathcal{D}'$. On a $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

4.4 Les distributions à plusieurs dimensions

Ce paragraphe est largement inspiré des livres de Roddier [8] et de Schwartz [9] auxquels le lecteur pourra se référer pour plus de détails.

4.4.1 Définitions et exemples

Soit $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, un n-uplet et sa longueur, définie et notée par $|k| = k_1+k_2+\cdots+k_n$. On définit et on note D^k, l'opérateur différentiel d'ordre global $|k|$ par :

$$D^k = \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Pour considérer des distributions à plusieurs dimensions, il faut travailler avec des fonctions test φ, de la variable $\mathbf{x} = (x_1,x_2, \ldots ,x_n)$, indéfiniment dérivables et à support borné dans $\mathbb{R}^n$. Donc toutes les dérivées

$$D^k\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}} \varphi(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$$

existent quel que soit l'ordre global de dérivation $|k|$.

L'exemple donné pour illustrer la définition 4.1.2 se généralise par

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\mathbf{x}| \geq 1 \\ \exp\left(\dfrac{-1}{1-|\mathbf{x}|^2}\right) & \text{si} \quad |\mathbf{x}| < 1 \end{cases}$$

avec $|\mathbf{x}|$ la norme de $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 4.4.1. La convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ s'énonce de la même façon, et la définition d'une distribution reste la même : c'est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Distributions régulières sur $\mathbb{R}^3$

Définition 4.4.1. Les fonctions localement sommables f de la variable $\mathbf{x}$ (f sommables sur tout parallélépipède borné K de $\mathbb{R}^3$) définissent des distributions régulières de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ par :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \quad \langle \mathrm{T}_f, \varphi\rangle \overset{déf}{=} \iiint_K f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

$\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$.

Remarque 4.4.2. Deux fonctions localement sommables dans $\mathbb{R}^3$ définissent la même distribution si, et seulement si, elles sont presque partout égales.

Distributions singulières sur $\mathbb{R}^3$

Les exemples les plus fréquents de distributions singulières sont ceux liés à la distribution de Dirac.

Exemple (Distribution ponctuelle de Dirac en $\mathbf{a}$). Pour un point $\mathbf{a}$ de $\mathbb{R}^3$, elle se note $\delta_{\mathbf{a}}$ et se définit par :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta_{\mathbf{a}}, \varphi\rangle \overset{déf}{=} \varphi(\mathbf{a})$$

Exemple (Distribution superficielle de Dirac dans $\mathbb{R}^3$). Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$, elle se note δ_S et se définit par :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta_S, \varphi\rangle \overset{déf}{=} \iint_S \varphi\,\mathrm{d}S$$

Exemple (Distribution linéaire de Dirac dans $\mathbb{R}^3$). Soit l une courbe dans $\mathbb{R}^3$, elle se note δ_l et se définit par :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta_l, \varphi\rangle \overset{déf}{=} \int_l \varphi\,\mathrm{d}l$$

Remarque 4.4.3. Application physique :

- une charge ponctuelle q au point $\mathbf{a}$ sera représentée par la distribution $q\,\delta_{\mathbf{a}}$,
- une densité superficielle σ sur la surface S sera représentée par la distribution $\sigma\,\delta_S$.

4.4.2 Dérivation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

Les différentes opérations sur les distributions vues plus haut se transposent aux distributions à plusieurs dimensions. Le lecteur pourra s'en convaincre en démontrant les relations données pour $n = 3$. En particulier, pour un changement d'échelle $\alpha \in \mathbb{R}$, on trouve la relation

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad \left\langle \mathrm{T}\left(\frac{\mathbf{x}}{\alpha}\right), \varphi(\mathbf{x})\right\rangle \overset{déf}{=} |\alpha|^3\,\langle \mathrm{T}(\mathbf{x}), \varphi(\alpha\mathbf{x})\rangle$$

Les distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sont indéfiniment dérivables et la définition donnée pour $n = 1$ se généralise.

Définition 4.4.2. Soit D^k, l'opérateur différentiel d'ordre global $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ défini au paragraphe 4.4.1. Toute distribution T a des dérivées successives de tous ordres, et on peut intervertir l'ordre des dérivations. On a :

$$\forall\varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle D^k\mathrm{T}, \varphi\rangle = (-1)^{|k|}\langle \mathrm{T}, D^k\varphi\rangle.$$

Remarque 4.4.4. On obtient cette formule comme pour le cas $n = 1$, en cherchant la dérivée $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1}$ d'une distribution T sur $\mathbb{R}^n$ par rapport à la variable x_1, de façon que, si T est une fonction continue à dérivées continues, on retrouve $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ au sens usuel des fonctions. On peut appliquer le théorème de Fubini puisque les fonctions sont continues et l'ensemble d'intégration borné.

Nous allons maintenant détailler la dérivation de deux distributions de $\mathbb{R}^3$ ayant des applications importantes en physique.

Dérivation de la distribution de Dirac

Appliquons la définition 4.4.2 à la distribution de Dirac dans $\mathbb{R}^3$. On peut noter, δ'_{x_1}, δ'_{x_2} et δ'_{x_3}, les trois dérivées partielles d'ordre 1 dans les trois directions, définies par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta'_{x_1}, \varphi \rangle = -\langle \delta, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0{,}0{,}0)$$

Nous avons vu au début du chapitre que δ est la limite dans $\mathcal{D}'$ de la suite de fonctions $\rho_k(x) = k\Pi(kx)$ quand k tend vers l'infini. En dérivant au sens des distributions

$$[k\Pi(kx)]' = k\left[\delta_{-\frac{1}{2k}} - \delta_{\frac{1}{2k}}\right],$$

et on peut donc considérer δ' comme la limite dans $\mathcal{D}'$ de la distribution ci-dessus quand k tend vers l'infini. En électrostatique, cette distribution représente une charge $+k$ et une charge $-k$ espacées de $\frac{1}{k}$ et lorsque k tend vers l'infini, on obtient un doublet de moment dipolaire -1.
Ainsi, les dérivées δ'_{x_1}, δ'_{x_2} et δ'_{x_3} sont les représentations mathématiques correctes de doublets de moment dipolaire -1 suivant les axes $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ et $\vec{x_3}$.

Dérivation d'une fonction discontinue au passage d'une surface S de $\mathbb{R}^3$

Soit une fonction indéfiniment dérivable dans le complémentaire d'une surface régulière S, telle que chaque dérivée partielle ait une limite de part et d'autre de S, en chaque point de S. La différence entre ces limites sera le saut de la dérivée partielle correspondante, qui n'est défini que pour un sens déterminé de traversée de la surface S. Ce saut est une fonction définie sur S. On note Df une dérivée de f au sens des distributions, et $\{Df\}$ la distribution associée à la fonction dérivée usuelle qui est, définie pour $x \notin S$ et, non définie pour $x \in S$ (ensemble de mesure nulle dans $\mathbb{R}^3$), on a

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi \rangle = & -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \rangle = -\iiint_{\mathbb{R}^3} f\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \\ = & \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \left(-\int_{\mathbb{R}} f\, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) \mathrm{d}x_1 \end{aligned}$$

En utilisant la formule des sauts (proposition 4.2.2), on trouve

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \left[\sigma_0 \varphi + \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, \mathrm{d}x_1 \right]$$

avec σ_0 le saut de la fonction f lorsqu'on traverse la surface S dans le sens de l'axe des $\vec{x_1}$. Ce saut est calculé au point d'intersection P de S avec la parallèle à l'axe des $\vec{x_1}$ passant par le point de coordonnées $(0,x_2,x_3)$: φ est à calculer au même point P. Le premier terme s'écrit :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sigma_0(P)\,\varphi(P)\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

On note $\vec{n}$, le vecteur normal à S orienté dans le même sens de traversée que pour le calcul du saut (ici $\vec{x_1}$ croissant), et $\cos\theta_1 = \vec{n}.\vec{x_1}$.
En remarquant que $\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$ est la projection de l'élément différentiel de surface $\mathrm{d}S$ sur le plan x_2x_3 et en introduisant θ_1, on obtient l'intégrale de surface :

$$\iint_S \sigma_0\,\varphi\cos\theta_1\,\mathrm{d}S = \sigma_0\cos\theta_1 \iint_S \varphi\,\mathrm{d}S = \langle\sigma_0\cos\theta_1\;\delta_S,\varphi\rangle$$

avec δ_S une distribution de Dirac superficielle sur la surface S. Finalement, on obtient :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D},\quad \langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\varphi\rangle = \langle\sigma_0\cos\theta_1\;\delta_S,\varphi\rangle + \iiint_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

On énonce

Proposition 4.4.1. *Les dérivées partielles, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans $\mathcal{D}'$ d'une distribution régulière associée à une fonction f localement sommable dans $\mathbb{R}^3$ et discontinue au passage d'une surface S, sont données par la distribution associée aux dérivées partielles de la fonction f, notées $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$, auxquelles il faut rajouter une densité superficielle de Dirac pondérée par la discontinuité de la fonction f au passage de S dans la direction normale :*

$$\text{Pour } i\in\{1,2,3\},\quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sigma_0\cos\theta_i\;\delta_S + \left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$$

où σ_0 est le saut $f_{ext}(P) - f_{int}(P)$ en chaque point P de S dans la direction de la normale extérieure $\vec{n}$ ($\cos\theta_i = \vec{n}.\vec{x_i}$).

4.4.3 Application

Soit une fonction f localement sommable dans $\mathbb{R}^3$ et discontinue au passage d'une surface S de normale $\vec{n}$. Au sens des fonctions, on définit le vecteur gradient de f, noté $\{\mathbf{grad}\,f\}$ ou $\left\{\vec{\nabla}f\right\}$, par le vecteur colonne

$$\left\{\vec{\nabla}f\right\} = \left(\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_3}\right\}\right)^T$$

Ainsi **au sens des distributions**, on a

$$\vec{\nabla}f = \left\{\vec{\nabla}f\right\} + \sigma_0\vec{n}\,\delta_S$$

Formule d'Ostrogradsky

Soit une fonction f définie et dérivable à l'intérieur d'un volume V délimité par une surface fermée S, et nulle en dehors. Le saut σ_0 est égal à $-f$. Pour une fonction test φ, on obtient l'équation vectorielle suivante :

$$\langle\vec{\nabla}f,\varphi\rangle = \left\langle\left\{\vec{\nabla}f\right\},\varphi\right\rangle - \langle f\vec{n}\,\delta_S,\varphi\rangle = -\langle f,\vec{\nabla}\varphi\rangle$$

L'ensemble $\mathcal{D}$ des fonctions test est l'ensemble commun à toutes les distributions mais certaines d'entre elles ont aussi un sens lorsqu'on les applique à un ensemble de fonctions test plus large (fonctions tests moins restrictives). Ainsi, dans ce cas où la distribution régulière est associée à une fonction nulle en dehors d'un volume V, on peut prendre $\varphi = 1$ sur $\mathbb{R}^3$, puisque les intégrales auront un sens. Ainsi :

$$\iiint_V \vec{\nabla} f \, \mathrm{d}V = \iint_S f \, \vec{n} \, \mathrm{d}S$$

Soit maintenant un champs de vecteurs $\vec{f} = \sum_{i=1}^{3} f_i \mathbf{x}_i$, représenté par trois fonctions f_1, f_2, f_3. Comme précédemment les sauts respectifs valent $-f_1$, $-f_2$, $-f_3$.

En appliquant la formule de la proposition 4.4.1 à la fonction $\varphi = 1$ pour chaque f_i et en additionnant les trois expressions, on obtient :

$$\iiint_V \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, \mathrm{d}V = \iint_S \sum_{i=1}^{3} f_i \, \cos\theta_i \, \mathrm{d}S$$

que l'on écrit

$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{f} \, \mathrm{d}V = \iint_S (\vec{f}.\vec{n}) \, \mathrm{d}S$$

4.5 Exercices d'application du chapitre 4

Ces exercices sont à réaliser en autonomie lors de l'apprentissage du cours. Les énoncés des exercices de séances présentielles (Petites Classes ou TD) se trouvent dans le livret dédié.

On définit et on note $\mathcal{D}$, l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, définies sur $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables et à support borné, et $\mathcal{D}'$ l'ensemble des fonctionnelles linéaires et continues sur $\mathcal{D}$.

S3-1 : Les fonctions test

Donner les propriétés d'une fonction test de $\mathcal{D}$ et un exemple.

S3-2 : Définition des distributions

Il y a deux types de distributions, dire lesquelles et donner deux exemples pour chaque type.

S3-3 : Parité des distributions

a) Donner la définition d'une distribution paire, puis impaire.

b) Donner la définition de δ et δ'.

c) δ et δ' sont-elles des distributions paires, impaires ? Le montrer.

S3-4 : Valeur principale d'intégrale et distribution singulière $vp\,\frac{1}{x}$.

a) Calculer $vp \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x}$ avec $a < 0 < b$.

b) Calculer $vp \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x}$.

c) Pour $\varphi \in \mathcal{D}$, donner les trois expressions $\langle vp\,\frac{1}{x}\ , \varphi\rangle$ qui définissent la distribution $vp\,\frac{1}{x}$.

S3-5 : Dérivées des distributions

Dériver au sens des distributions

a) l'échelon unité

$$\mathrm{Y}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1/2 & \text{pour } x = 0 \\ 1 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Dans $\mathcal{D}'$, $\mathrm{Y}' =$

b) la fonction porte

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leq 1/2 \\ 0 & \text{pour } |x| > 1/2 \end{cases}$$

Dans $\mathcal{D}'$, $\Pi' =$
c) la fonction signe

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x >= 0 \end{cases}$$

Dans $\mathcal{D}'$, $\operatorname{sgn}' =$

S3-6 : Dirac, une distribution singulière

Soit $\varepsilon > 0$, et φ_ε la fonction définie par

$$\varphi_\varepsilon(x) \;=\; \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right) & \text{si } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{si } |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

On admet que $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. En utilisant la famille $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, montrer que la distribution de Dirac ne peut être régulière. La distribution de Dirac notée, δ, est un exemple de *distribution singulière*.

S3-7 : Distribution Peigne de Dirac Considérons la fonction en escalier $E(x)$ dont le graphe est en figure 4.8.

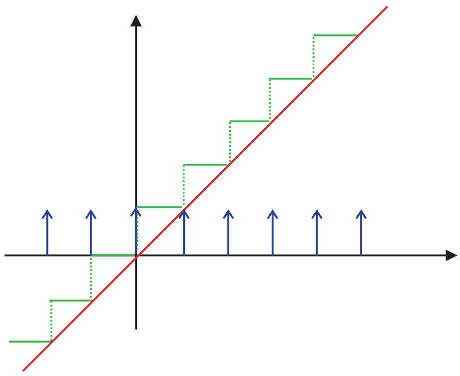

FIGURE 4.8 – *Fonction en escalier* $E(x)$.

a) E est-elle une distribution ?

b) Calculer sa dérivée.

c) En déduire que $\text{Ш} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n, n \in \mathbb{Z}$, est bien une distribution de $\mathcal{D}'$.

d) Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, calculer $\langle \text{Ш}, \varphi \rangle$.

S3-8 : Notion de suite de distributions

Calculer la limite de la suite de distributions T_n associées aux fonctions $\cos nx$ puis $\sin nx$ quand n tend vers $+\infty$.

Chapitre 5

Transformation de Fourier des distributions

5.1 Introduction

Remarque 5.1.1 (préliminaire). Si $\varphi \in \mathcal{D}$, elle admet une transformée de Fourier. Si une fonction f, supposée sommable a une transformée de Fourier $\widehat{f}$, f définit une distribution régulière et on a

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{f}(\nu), \varphi(\nu)\rangle &= \int \varphi(\nu) \int f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\nu \\
&\text{on applique Fubini} \\
&= \int f(x) \int \varphi(\nu)\,\mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}x \\
&= \langle f(x), \widehat{\varphi}(x)\rangle
\end{aligned}$$

D'après la remarque précédente, on est tenté de généraliser à une distribution quelconque la définition obtenue pour une distribution régulière f.

Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$ et $\widehat{\mathrm{T}}$, sa transformée de Fourier, de manière formelle, nous avons obtenu

$$\langle \widehat{\mathrm{T}}, \varphi\rangle \overset{déf}{=} \langle \mathrm{T}, \widehat{\varphi}\rangle.$$

Or cette définition n'est pas acceptable pour n'importe quelle distribution de $\mathcal{D}'$. En effet, elle impose que $\widehat{\varphi}$ soit dans $\mathcal{D}$, or si $\varphi \in \mathcal{D}_x$, $\widehat{\varphi}$ n'a aucune raison d'appartenir à $\mathcal{D}_\nu$. On verra même le résultat suivant : la transformée de Fourier d'une fonction à support borné n'est jamais à support borné.
Cette définition conviendrait pour définir la TF de fonctionnelles linéaires et continues sur un espace fonctionnel ayant la propriété de contenir la TF (au sens des fonctions) de tous ces éléments. Au chapitre 2, on a montré qu'un tel espace existe. Il s'agit de l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions de la variable réelle qui sont indéfiniment dérivables et à décroissance rapide (voir paragraphe 2.4.1).

Les distributions agissant sur cet espace seront les distributions dites *tempérées*. Ce sont les distributions de $\mathcal{D}'$ qui admettent une TF.

5.2 L'espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées

5.2.1 Définition

Définition 5.2.1. On appelle *distribution tempérée* une distribution (forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$) prolongeable par une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$.

> Si une distribution T est tempérée, $\langle \mathrm{T}, \varphi\rangle$ a un sens si $\varphi \in \mathcal{D}$ mais aussi si $\varphi \in \mathcal{S}$. Si pour $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$, le prolongement existe, alors il est unique (admis). Les distributions tempérées forment un sous-espace de $\mathcal{D}'$, noté $\mathcal{S}'$.

5.2.2 Exemples de distributions tempérées

Fonction sommable

Proposition 5.2.1. *A toute fonction f sommable, on peut associer une distribution régulière tempérée. On dit aussi que c'est une fonction tempérée.*

PREUVE: En effet, si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors il existe $M > 0$ tel que $|\varphi(x)| < M$ et

$$\left| \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq M\|f\|_{\mathrm{L}^1}$$

■

Fonction localement sommable à croissance lente

Définition 5.2.2. On dit que f est une fonction à croissance lente si pour x suffisament grand, il existe un réel positif A et un entier k tel que $|f(x)| \leq A|x|^k$. Autrement dit, $f(x)$ peut devenir infiniment grand quand $|x|$ tend vers l'infini, mais "à la manière" d'un polynôme.

Proposition 5.2.2. *Une fonction localement sommable à croissance lente définit une distribution régulière tempérée.*

PREUVE: $\varphi \in \mathcal{S}$, donc il existe un réel positif B tel que $|\varphi(x)| \leq \dfrac{B}{|x|^{k+2}}$.

Pour x suffisament grand, on a donc $|f(x)\varphi(x)| \leq \dfrac{AB}{|x|^2}$ qui est sommable sur tout intervalle $[c, +\infty]$, $c > 0$. ■

Fonction de carré sommable

Proposition 5.2.3. *Toute fonction de L^2 (carré sommable) définit une distribution tempérée de $\mathcal{S}'$.*

PREUVE: Soit $f(x) \in \mathrm{L}^2$, on écrit $f(x) = \dfrac{f(x)}{x+i}(x+i)$, $x \in \mathbb{R}$.

$g(x) = \dfrac{1}{x+i}$ est dans L^2, il suffit d'écrire

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = g(x)g^*(x)$$

donc $gg^* \in \mathrm{L}^1$, c'est-à-dire $g \in \mathrm{L}^2$. D'après la proposition 1.4.4, comme f est aussi dans L^2, on a $\dfrac{f(x)}{x+i} \in \mathrm{L}^1$ c'est-à-dire est tempérée. Comme $(x+i)$ est un polynôme, alors f est tempérée. ■

Distribution à support borné

Proposition 5.2.4. *Une distribution à support borné est une distribution tempérée.*

PREUVE: Une telle distribution est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{E}$, ensemble des fonctions indéfiniment dérivables, donc en particulier sur $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. ■

Dérivée d'une distribution tempérée

Proposition 5.2.5. *La dérivée d'une distribution tempérée est tempérée.*

PREUVE: En effet, d'après la définition de la dérivée d'une distribution

$$\langle \mathrm{T}', \varphi \rangle = -\langle \mathrm{T}, \varphi' \rangle$$

on peut prolonger T' sur $\mathcal{S}$ car $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{S}$ et si T est tempérée alors $\langle \mathrm{T}, \varphi' \rangle$ a un sens. ■

Produit d'une distribution tempérée par un polynôme

Proposition 5.2.6. *Si* T *est une distribution tempérée alors $P(x)$*T *où $P(x)$ est un polynôme, est aussi une distribution tempérée.*

PREUVE: Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{S}'$ et P un polynôme (fonction indéfiniment dérivable). On a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle P\mathrm{T}, \varphi \rangle = \langle \mathrm{T}, P\varphi \rangle$$

et on peut prolonger $P\mathrm{T}$ sur $\mathcal{S}$ car si $\varphi \in \mathcal{S}$ alors $P\varphi$ aussi et $\langle \mathrm{T}, P\varphi \rangle$ a un sens puisque $\mathrm{T} \in \mathcal{S}'$. ■

Remarque 5.2.1. La plupart des fonctions rencontrées en physique sont tempérées. Tous les polynômes sont des distributions régulières tempérées, la distribution de Dirac et ses dérivées sont tempérées car à support borné.

Exemple. Comme exemple de distributions non tempérées, on peut donner e^x, $\mathrm{Y}(x)\mathrm{e}^x$, e^{x^2}, ...

5.3 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'$

5.3.1 Définition

D'après la structure de $\mathcal{S}$ (voir 4. de la proposition 2.4.1), on a $\varphi \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$.

Définition 5.3.1. Si $\mathrm{T} \in \mathcal{S}'$, sa *transformée de Fourier existe. C'est la distribution* de $\mathcal{S}'$ notée $\mathcal{F}\mathrm{T}$, ou encore $\widehat{\mathrm{T}}$ et définie par "transfert du chapeau" :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \widehat{\mathrm{T}}, \varphi \rangle \overset{déf}{=} \langle \mathrm{T}, \widehat{\varphi} \rangle$$

Remarque 5.3.1. $\langle \mathrm{T}, \widehat{\varphi} \rangle$ existe car $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, de plus $\widehat{\mathrm{T}}$ est linéaire. Si φ_n est une suite de fonctions tendant vers 0 au sens de $\mathcal{S}$, alors $\widehat{\varphi}_n$ est aussi une suite de fonctions tendant vers 0 au sens de $\mathcal{S}$ (voir le théorème 2.4.3), donc $\widehat{\mathrm{T}}$ est continue.

Proposition 5.3.1. *La transformée de Fourier d'une distribution tempérée est une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathcal{S}$, c'est une distribution tempérée. La transformation de Fourier est une application linéaire continue de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$.*

PREUVE: La linéarité est évidente. Pour la continuité, on veut montrer que si une suite T_n de distributions tempérées convergent vers la distribution T alors la suite $\widehat{\mathrm{T}}_n$ converge vers $\widehat{\mathrm{T}}$, transformée de Fourier de T.

$$\langle \widehat{\mathrm{T}}_n, \varphi \rangle = \langle \mathrm{T}_n, \widehat{\varphi} \rangle$$

or T_n est continue dans $\mathcal{S}'$ donc

$$\forall \psi \in \mathcal{S}, \quad \lim_{n \to +\infty} \langle \mathrm{T}_n, \psi \rangle = \langle \mathrm{T}, \psi \rangle$$

On prend $\psi = \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ et on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \widehat{\mathrm{T}}_n, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle \mathrm{T}_n, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \mathrm{T}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{\mathrm{T}}, \varphi \rangle$$

■

5.3.2 Inversion dans $\mathcal{S}'$

Définition 5.3.2. Pour toute distribution tempérée T, on définit l'opérateur $\mathcal{F}^{-1}$ de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \mathcal{F}^{-1}\mathrm{T}, \varphi \rangle \overset{déf}{=} \langle \mathrm{T}, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$$

où $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ est la transformée de Fourier inverse de φ dans .

Proposition 5.3.2. *Dans $\mathcal{S}'$, les transformations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-1}$ sont toujours des transformations inverses. On a*

$$\forall \mathrm{T} \in \mathcal{S}', \qquad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\mathrm{T} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\mathrm{T} = \mathrm{T}$$

PREUVE: D'après le théorème 2.4.3, on a vu que l'on avait

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi = \varphi \quad (1)$$

Pour tout $\mathrm{T} \in \mathcal{S}'$, et tout $\varphi \in \mathcal{S}$, on a

$$\langle \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\mathrm{T}, \varphi\rangle = \langle \mathrm{T}, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathrm{T}, \varphi\rangle$$

d'après (1), on a aussi

$$\langle \mathrm{T}, \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathrm{T}, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\mathrm{T}, \varphi\rangle$$

■

Remarque 5.3.2. Si on connaît $\widehat{\mathrm{T}}$, on a $\mathrm{T} = \mathcal{F}^{-1}\widehat{\mathrm{T}}$, on dit que T est *l'original de* $\widehat{\mathrm{T}}$.

Corollaire 5.3.3. $(\widehat{\mathrm{T}} = 0) \implies (\mathrm{T} = 0)$.

PREUVE: En effet $\mathcal{F}^{-1}\widehat{\mathrm{T}} = \mathrm{T}$ et $\mathcal{F}^{-1}\widehat{\mathrm{T}} = \mathcal{F}^{-1}(0) = 0$. Si $\widehat{\mathrm{T}}$ est une fonction, on a une égalité presque partout. ■

5.4 Transformation de Fourier dans $\mathcal{E}'$

5.4.1 Définition

Rappellons que $\mathcal{E}'$ est l'ensemble des distributions à support borné qui contient en particulier δ_a ainsi que ses dérivées successives et les distributions régulières associées à une fonction localement sommable à support borné. Soit d'une part une distribution $\mathrm{T}_x \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$. Soit d'autre part, $\mathrm{e}^{-2i\pi x\nu}$ qui est une fonction indéfiniment dérivable en x et ν, soit une fonction de $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$. Pour ν fixé, on peut donc calculer

$$V(\nu) = \langle \mathrm{T}_x, \mathrm{e}^{-2i\pi x\nu}\rangle$$

qui donne une fonction de la variable ν, indéfiniment dérivable (voir proposition 2.3.4). Si ν est complexe fixé, on a encore $\mathrm{e}^{-2i\pi x\nu} \in \mathcal{E}_x$; $V(\nu)$ existe donc pour ν complexe et est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe. Montrons que $V(\nu)$, considérée pour ν réel, est bien la transformée de Fourier de T_x.

$$\begin{aligned} \text{Pour } \varphi,\ \widehat{\varphi} \in \mathcal{S},\ \langle \widehat{\mathrm{T}}, \varphi\rangle &= \langle \mathrm{T}, \widehat{\varphi}\rangle \\ &= \langle \mathrm{T}_x, \langle \varphi_\nu, \mathrm{e}^{-2i\pi x\nu}\rangle\rangle \end{aligned}$$

par symétrie et associativité des crochets (voir paragraphe 6.1.1)

$$\begin{aligned} &= \langle \varphi_\nu, \langle \mathrm{T}_x, \mathrm{e}^{-2i\pi x\nu}\rangle\rangle \\ &= \langle \varphi(\nu), V(\nu)\rangle \\ &= \langle V, \varphi\rangle \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, on obtient la définition et le théorème suivant.

Définition 5.4.1. Si $\mathrm{T} \in \mathcal{E}'$, sa *transformée de Fourier est la distribution* notée $\widehat{\mathrm{T}}$ définie par

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathrm{T}}(\nu) = \langle \mathrm{T}_x, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\rangle$$

Théorème 5.4.1. *La transformée de Fourier d'une distribution* T *à support borné est une fonction* $\widehat{\mathrm{T}}(\nu)$ *indéfiniment dérivable et prolongeable pour les valeurs complexes de* ν *en une fonction* $V(\nu)$ *holomorphe dans tout le plan complexe :*

$$\forall \mathrm{T} \in \mathcal{E}', \quad V(\nu) = \widehat{\mathrm{T}}(\nu) = \langle \mathrm{T}_x, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x} \rangle$$

Dans le cas particulier très important où f est une fonction, on a le résultat suivant

Corollaire 5.4.2. *Soit* φ *une fonction de* $\mathcal{D}$*, alors sa transformée de Fourier n'est pas à support borné* ($\notin \mathcal{D}$)*. Cependant,* φ *et* $\widehat{\varphi}$ *sont dans* $\mathcal{S}$*.*

PREUVE: Si φ est à support borné et $\mathcal{C}^\infty$ alors sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ est la restriction à la droite réelle d'une fonction holomorphe entière. Supposons que $\widehat{\varphi}$ soit à support borné il existe alors un intervalle sur lequel $\widehat{\varphi}$ s'annule, c'est-à-dire que l'ensemble des points z tels que $\widehat{\varphi}(z) = 0$ admet au moins un point d'accumulation. Comme $\widehat{\varphi}$ est une fonction analytique, le principe des zéros isolés (proposition 3.1.2) implique que $\widehat{\varphi}(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On a vu qu'alors $\varphi \overset{p.p}{=} 0$. Ainsi, $(\varphi \in \mathcal{D}_x$ et $\varphi \neq 0) \Longrightarrow \widehat{\varphi} \notin \mathcal{D}_\nu$. ■

5.4.2 Transformée de Fourier de Dirac

Exemple. La distribution de Dirac est à support borné, sa TF existe et est une fonction indéfiniment dérivable, prolongeable pour les valeurs complexes de ν en une fonction holomorphe entière définie par

$$\mathcal{F}\delta(\nu) = \langle \delta(x), \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x} \rangle = 1(\nu).$$

La TF de δ est la fonction constante égale à 1.

5.5 Recherche des transformées de Fourier

5.5.1 Propriétés

Les propriétés données pour les fonctions sommables se transposent aux distributions tempérées. En utilisant des notations abusives qui permettent de faire apparaître la variable, si $\widehat{\mathrm{T}}(\nu)$ est la transformée de Fourier de $\mathrm{T}(x)$, c'est-à-dire $\mathcal{F}[\mathrm{T}(x)] = \widehat{\mathrm{T}}(\nu)$, on a

$$\begin{array}{lrcll}
0) & \mathrm{T}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \widehat{\mathrm{T}}(\nu) & \\
1) & \mathrm{T}(-x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \widehat{\mathrm{T}}(-\nu) & \\
2) & \mathrm{T}(x-a) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathrm{e}^{-2i\pi\nu a}\widehat{\mathrm{T}}(\nu) & \\
3) & \mathrm{T}(x)\mathrm{e}^{2i\pi\nu_0 x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \widehat{\mathrm{T}}(\nu-\nu_0) & \\
4) & \mathrm{T}(ax) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{|a|}\widehat{\mathrm{T}}(\frac{\nu}{a}) & a \neq 0 \\
5) & \mathrm{T}^{(n)}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & (2i\pi\nu)^n\,\widehat{\mathrm{T}}(\nu) & \\
6) & (-2i\pi x)^n\,\mathrm{T}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \widehat{\mathrm{T}}^{(n)}(\nu) &
\end{array}$$

Par exemple pour la propriété 6), il faut comprendre : $\mathcal{F}\left[(-2i\pi x)^n \,\mathrm{T}(x)\right](\nu) = \widehat{\mathrm{T}}^{(n)}(\nu)$.

Exercice. Faire la démonstration des résultats précédents en utilisant une fonction φ de $\mathcal{S}$, le "transfert du chapeau" (définition 5.3.1) et les propriétés 2.4.1.

Remarque 5.5.1. La transformée de Fourier d'une fonction (prise au sens des distributions) coïncide avec la transformée de Fourier des fonctions, si elle existe.

5.5.2 Exemples de transformées de Fourier usuelles

Transformée de la fonction constante égale à 1

Soit la fonction $f(x) = 1$, c'est une distribution tempérée car localement sommable à croissance lente. Considérons la TF de sa dérivée.

$$\mathcal{F}(f')(\nu) = 2i\pi\nu\mathcal{F}(f)(\nu) = \mathcal{F}(0) = 0$$

On obtient $2i\pi\nu\widehat{f} = 0 \Rightarrow \widehat{f} = A\delta(\nu)$, avec A une constante à déterminer.

$$\forall\varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle\widehat{f}, \varphi\rangle = \langle A\delta, \varphi\rangle = A\varphi(0) = \langle f, \widehat{\varphi}\rangle$$

En particulier pour $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}$, $\widehat{\varphi}(\nu) = \mathrm{e}^{-\pi\nu^2}$, on a

$$A = \langle f(x), \mathrm{e}^{-\pi x^2}\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Ainsi la transformée de Fourier de la fonction constante égale à 1 n'existe pas au sens des fonctions. C'est la distribution singulière δ. Le théorème d'inversion est vérifié.

Transformée de δ

A partir de $\mathcal{F}(\delta) = 1$, $\mathcal{F}(1) = \delta$, et en utilisant les propriétés des transformées de Fourier des distributions on a les résultats suivants :

$$\begin{array}{rcl}
1(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \delta(\nu) \\
\mathrm{e}^{2i\pi\nu_0 x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \delta_{\nu_0} \\
\cos(2\pi\nu_0 x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{2}\left(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0}\right) \\
\sin(2\pi\nu_0 x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{2i}\left(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0}\right) \\
\delta(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 1(\nu) \\
\delta_{x_0} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x_0} \\
\delta'(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2i\pi\nu \\
\delta^{(n)}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & (2i\pi\nu)^n
\end{array}$$

Transformées usuelles de distributions de $\mathcal{S}'$

Voici une liste de transformées de Fourier de distributions tempérées les plus utilisées. Nous démontrerons la plupart d'entre elles en séances d'exercices.

$$\begin{array}{rcll}
x^k & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{(-2i\pi)^k}\delta^{(k)} & k \geq 0 \\
\mathrm{Y}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{2}\delta + \dfrac{1}{2i\pi} vp\, \dfrac{1}{\nu} & \\
\mathrm{sign}(x) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{i\pi} vp\, \dfrac{1}{\nu} & \\
vp\, \dfrac{1}{x} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -i\pi \mathrm{sign}(\nu) & \\
|x| & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{-1}{2\pi^2}\, pf\, \dfrac{1}{\nu^2} & \\
pf\, \dfrac{1}{\nu^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & -2\pi^2|\nu| & \\
\mathrm{e}^{-\pi x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathrm{e}^{-\pi\nu^2} & \\
\mathrm{e}^{i\pi x^2} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-i\pi\nu^2} & \\
\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{\frac{n}{T}} &
\end{array}$$

5.6 Transformée de Fourier de distributions périodiques

Dans ce paragraphe, on va définir la transformée de Fourier d'un Peigne de Dirac, qui est une distribution périodique et qui est à la base de l'échantillonnage et du signal numérique.

5.6.1 Peigne de Dirac de période 1

Définition 5.6.1. On appelle Peigne de Dirac, la distribution, notée Ш et définie par

$$Ш(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n \qquad n \in \mathbb{Z}$$

c'est-à-dire

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle Ш, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n).$$

Remarque 5.6.1. Le support de φ est borné donc la somme est finie. On montre aussi que Ш est linéaire et continue sur $\mathcal{D}$. Donc Ш $\in \mathcal{D}'$.

Proposition 5.6.1. *Le Peigne de Dirac est une distribution tempérée,* Ш $\in \mathcal{S}'$.

PREUVE: Considérons la fonction en escalier $E(x)$.

$E \in \mathcal{S}'$, en effet $\forall x \in \mathbb{R},\ E(x) < x + 1$, c'est-à-dire que E est à croissance lente, et elle est localement sommable car continue par morceaux. De plus $E' =$ Ш donc, Ш est une distribution tempérée en tant que dérivée d'une distribution tempérée. ■

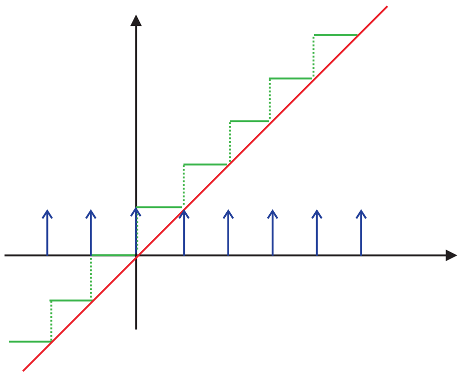

FIGURE 5.1 – $E(x)$ *et sa dérivée Peigne de Dirac.*

Proposition 5.6.2. *La transformée de Fourier de* Ш *est aussi un peigne de Dirac de période 1.*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$$

PREUVE: La preuve se base sur la périodicité de cette distribution. Elle est assez longue et s'effectue en sept étapes. Les voici.

1. Ш est périodique de période 1.

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}, \qquad \langle Ш(x), \varphi(x)\rangle &= \langle \sum_n \delta_n, \varphi(x)\rangle \\ &= \sum_n \varphi(n) \\ &= \sum_n \varphi(n+1) \\ &= \langle \sum_n \delta_n, \varphi(x+1)\rangle \\ &= \langle Ш(x), \varphi(x+1)\rangle \end{aligned}$$

2. La distribution Ш est tempérée donc, puisque $\mathcal{S}'$ est stable par transformée de Fourier, on sait que $\widehat{Ш}$ est aussi tempérée. $\widehat{Ш} \in \mathcal{S}'$ et on a

$$\widehat{Ш}(\nu) = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n\right](\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2i\pi n\nu}$$

3. $\widehat{Ш}$ est périodique de période 1.

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathcal{D},\qquad \langle\widehat{Ш}(\nu),\varphi(\nu)\rangle &= \langle\sum_n \mathrm{e}^{-2i\pi n\nu},\varphi(\nu)\rangle\\ &= \langle\sum_n \mathrm{e}^{-2i\pi n(\nu+1)},\varphi(\nu+1)\rangle\\ &= \langle\sum_n \mathrm{e}^{-2i\pi n\nu},\varphi(\nu+1)\rangle\\ &= \langle\widehat{Ш}(\nu),\varphi(\nu+1)\rangle\end{aligned}$$

4. Calculons $\mathrm{e}^{2i\pi\nu}\,\widehat{Ш}(\nu)$. On a

$$\mathrm{e}^{2i\pi\nu}\,\widehat{Ш}(\nu)=\mathrm{e}^{2i\pi\nu}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2i\pi n\nu}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2i\pi\nu(n-1)}=\widehat{Ш}(\nu).$$

5. Ainsi $\widehat{Ш}$ vérifie l'équation dans $\mathcal{D}'$

$$(\mathrm{e}^{2i\pi\nu}-1)\,\widehat{Ш}(\nu)=0$$

Or les racines de $\mathrm{e}^{2i\pi\nu}=1$ sont les entiers relatifs $\nu=n\in\mathbb{Z}$, donc d'après la proposition 4.2.5, on a

$$\widehat{Ш}(\nu)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\delta_n.$$

6. Comme $\widehat{Ш}$ est périodique de période 1, on a

$$\begin{aligned}\forall\varphi\in\mathcal{D},\qquad \langle\widehat{Ш}(\nu),\varphi(\nu)\rangle &= \langle\widehat{Ш}(\nu),\varphi(\nu+1)\rangle\\ \sum_n a_n\,\varphi(n) &= \sum_n a_n\,\varphi(n+1)\\ \sum_n a_n\,\varphi(n) &= \sum_n a_{n-1}\,\varphi(n)\end{aligned}$$

Pour une fonction φ ne contenant que l'entier n, on obtient donc $a_n=a_{n-1}=a$, c'est-à-dire

$$\widehat{Ш}(\nu)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a\delta_n.$$

7. Pour trouver a, utilisons la définition de la transformée de Fourier des distributions

$$\forall\varphi\in\mathcal{S},\qquad\langle\widehat{Ш}(\nu),\varphi(\nu)\rangle=\langle Ш(x),\widehat{\varphi}(x)\rangle$$

avec $\varphi(\nu)=\mathrm{e}^{-\pi\nu^2},\ \widehat{\varphi}(x)=\mathrm{e}^{-\pi x^2}$

$$a\left\langle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta_n,\mathrm{e}^{-\pi\nu^2}\right\rangle=\left\langle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta_n,\mathrm{e}^{-\pi x^2}\right\rangle$$

c'est-à-dire $a = 1$ et

$$\widehat{\text{Ш}}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

Ainsi s'achève cette longue preuve. ■

5.6.2 Peigne de Dirac de période T

Définition 5.6.2. On appelle Peigne de Dirac de période T, la distribution, notée $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}$ et définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT}, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(nT).$$

Par changement d'échelle, on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{nT} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{\frac{n}{T}}$$

Proposition 5.6.3. *Un peigne de Dirac de période T a pour transformée de Fourier un peigne de Dirac de période $\frac{1}{T}$ et de "hauteur" de dent $\frac{1}{T}$.*

Ce résultat est très important et sera souvent utilisé en Traitement du signal.

5.7 Transformation de Laplace de distributions

Remarque 5.7.1. La transformée de Laplace étant définie à l'aide de l'intégrale de Lebesgue, $\mathrm{L}[f](p)$ est en réalité attachée à la classe des fonctions presque partout égales à f, c'est-à-dire la distribution associée à la fonction localement sommable f.
De manière plus générale, définissons la transformation de Laplace pour une distribution de $\mathcal{D}'_+$.

5.7.1 Définition

Définition 5.7.1. Soit T une distribution de $\mathcal{D}'_+$, supposons qu'il existe un réel a, tel que pour $\sigma > a$, on ait $\mathrm{e}^{-\sigma t}\mathrm{T} \in \mathcal{S}'$ (ensemble des distributions tempérées), alors la distribution T admet une transformée de Laplace

$$\mathrm{L}[\mathrm{T}](p) = \langle \mathrm{T}, \mathrm{e}^{-pt} \rangle$$

définie pour $\sigma > a$ où $p = \sigma + i\omega$.

En effet, soit $\alpha(t)$ une fonction indéfiniment dérivable à support limité à gauche et égale à 1 sur un voisinage du support de T. Pour $\sigma > a$, il existe σ_1 tel que $\sigma > \sigma_1 > a$. D'après les hypothèses sur T, on a $\mathrm{e}^{-\sigma_1 t}\,\mathrm{T} \in \mathcal{S}'$. De plus, $\alpha(t)\mathrm{e}^{-(p-\sigma_1)t} \in \mathcal{S}$ donc la quantité $\langle \mathrm{e}^{-\sigma_1 t}\,\mathrm{T}, \alpha(t)\mathrm{e}^{-(p-\sigma_1)t} \rangle$ existe et est indépendante de σ_1. C'est ce que nous avons défini comme étant la transformée de Laplace de T.

Remarque 5.7.2. Il faut faire des restrictions sur T car e^{-pt} est indéfiniment dérivable mais pas à support borné et l'expression $\langle \mathrm{T}, \mathrm{e}^{-pt} \rangle$ peut ne pas avoir de sens pour une distribution quelconque de $\mathcal{D}'$.

5.7.2 Exemples

Toutes les transformées de Laplace des fonctions du paragraphe 3.2.3 peuvent être vues comme celles des distributions associées. Pour la distribution Dirac, on a

$$\begin{array}{rcl} \text{Originale} & \sqsupset & \text{Transformée} \\ \delta & \sqsupset & 1 \\ \delta_a & \sqsupset & \mathrm{e}^{-ap} \\ \delta^{(m)} & \sqsupset & p^m \end{array}$$

5.7.3 Propriétés de la TL au sens des distributions

Transformée de Laplace et dérivée

Comme pour les fonctions causales, on montre que $\mathrm{L}[\mathrm{T}](p)$ est une fonction holomorphe de la variable complexe $p = \sigma + i\omega$, pour $\sigma > a$ et que le théorème 3.2.5. est encore valable dans le cas des distributions, à savoir

$$\mathrm{L}[(-t)^m \mathrm{T}](p) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}p^m} \mathrm{L}[\mathrm{T}](p), \qquad \sigma > a$$

En ce qui concerne la Transformée de Laplace d'une distribution dérivée, la proposition 3.2.6 se simplifie en

$$\mathrm{L}[\mathrm{T}'](p) = p\mathrm{L}[T](p).$$

PREUVE: En effet, considérons la fonction localement sommable, f, définissant une distribution T_f et dérivons-la au sens des distributions $f' = \{f'\} + f(0^+)\delta_0$.
La Transformée de Laplace étant linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{L}[f'](p) &= \mathrm{L}[\{f'\}](p) + f(0^+)\mathrm{L}[\delta_0](p) \\ &= p\mathrm{L}[f](p) - f(0^+) + f(0^+) \\ &= p\mathrm{L}[f](p) \end{aligned}$$

■

Autres propriétés

En règle générale, les propriétés des transformées de Laplace des distributions sont les mêmes que celles des fonctions sauf pour la transformée d'une dérivée comme on vient de le voir,

$$\begin{array}{rcl} \text{Originale} & \sqsupset & \text{Transformée} \\ (-t)^m\,\mathrm{T} & \sqsupset & \dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}p^m}\mathrm{L}[\mathrm{T}](p) \\ \mathrm{T}^{(m)} & \sqsupset & p^m\,\mathrm{L}[\mathrm{T}](p) \\ \mathrm{e}^{p_0 t}\,\mathrm{T} & \sqsupset & \mathrm{L}[\mathrm{T}](p-p_0) \\ \mathrm{T}(t-t_0) & \sqsupset & \mathrm{e}^{-t_0 p}\,\mathrm{L}[\mathrm{T}](p) \end{array}$$

Transformation de Laplace et convolution

Dans l'espace des distributions, la transformée de Laplace échange le produit de convolution en produit simple.

Remarque 5.7.3. On peut utiliser les transformées de Laplace de distributions pour calculer des transformées de Laplace de fonctions de manière élégante. Soit T, la distribution associée à la fonction $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}$, $f(t) = \mathrm{Y}(t)\sin(\omega t)$. Dérivons au sens des distributions $\mathrm{T}' = \omega\cos(\omega t)\mathrm{Y}$, puis

$$\mathrm{T}'' = \omega\delta - \omega^2\sin(\omega t)\mathrm{Y} = \omega\delta - \omega^2\mathrm{T}$$

En prenant la transformée de Laplace des deux membres on obtient

$$p^2\mathrm{L}[\mathrm{T}](p) = \omega - \omega^2\mathrm{L}[\mathrm{T}](p)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{T} \sqsupset \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

et de même pour la fonction f associée.

5.8 Exercices d'application du chapitre 5

Ces exercices sont à réaliser en autonomie lors de l'apprentissage du cours. Les énoncés des exercices de séances présentielles (Petites Classes ou TD) se trouvent dans le livret dédié.

On appelle $\mathcal{S}$, l'espace des fonctions (réelles ou complexes) de la variable réelle, indéfiniment dérivables, vérifiant :

$$\forall (l,m) \in \mathbb{N}^2,\ \exists M > 0 \ \text{ tel que } \ |x^l\, \varphi^{(m)}(x)| < M \qquad \text{pour } |x| \text{ suffisamment grand.}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on appelle *transformée de Fourier* de φ et on note $\mathcal{F}\varphi$ ou $\widehat{\varphi}$, la fonction de la variable réelle ν définie par :

$$\mathcal{F}\varphi(\nu) = \widehat{\varphi}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x} \mathrm{d}x$$

On appelle *transformée de Fourier inverse* de φ et on note $\mathcal{F}^{-1}\varphi$ la fonction définie par :

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{2i\pi\nu x} \mathrm{d}x = \widehat{\varphi}(-\nu)$$

On a pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\varphi) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\varphi) = \varphi$$

On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on définit la *transformée de Fourier* de T, notée $\mathcal{F}\mathrm{T}$ ou $\widehat{\mathrm{T}}$, par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathcal{F}\mathrm{T}, \varphi\rangle = \langle \mathrm{T}, \mathcal{F}\varphi\rangle.$$

S3-9 : Transformées de Fourier de distributions paires

On pose $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ et on rappelle qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'$ est dite paire, (resp. impaire) si $\langle T, \check{\varphi}\rangle = \langle T,\varphi\rangle$ (resp. $\langle T, \check{\varphi}\rangle = -\langle T,\varphi\rangle$) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$.

Montrer que si T est une distribution tempérée paire (resp. impaire) alors $\mathcal{F}^{-1}T = \mathcal{F}T$ (resp. $\mathcal{F}^{-1}T = -\mathcal{F}T$).

S3-10 : Transformée de Fourier de distribution polynomiale Soit la distribution $\mathrm{T} = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que T est une distribution de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

b) Calculer la transformée de Fourier de la distribution T.

c) En déduire la transformée de Fourier de la distribution régulière $\mathrm{T}_{(x+y)^n}$ $\big(\in \mathrm{S}'(\mathbb{R}^2)\big)$.

Chapitre 6

La convolution des distributions

Au chapitre 2 de ce polycopié et dans le document “La convolution des fonctions”, nous avons défini une “opération” entre deux fonctions sommables ou localement sommables. Il faut maintenant définir la convolution entre deux distributions, en particulier avec des Diracs, translatés ou dérivées de Dirac. Ceci permettra de modéliser ce qui se passe lorsqu'on utilise un appareil de mesure et de caractériser la relation entre l'entrée et la sortie d'un système physique (opérateur) qui possède certaines propriétés que l'on explicitera, à savoir : la linéarité, la continuité et la stationnarité (ou invariance dans le temps).

Exemple liminaire

Soit la suite de fonctions $g_a(x) = \dfrac{1}{a}\,\Pi\left(\dfrac{x}{a}\right)$, $a > 0$, et Π la fonction porte. Soit une fonction f sommable, calculons le produit de convolution dans L^1 de f par g_a :

$$h(x) = (f * g_a)(x) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\Pi\left(\frac{x-t}{a}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_{x-a/2}^{x+a/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

h représente donc la moyenne de f sur un voisinage de x dépendant de a. Si a est assez petit, alors $h(x)$ tend vers $f(x)$. D'autre part, si on fait tendre a vers 0, la proposition 4.3.4 montre que la suite de fonctions (g_a) tend vers la fonction nulle simplement au sens des fonctions et vers la distribution δ au sens de $\mathcal{D}'$. Ainsi par passage à la limite on peut écrire formellement $f = f * \delta$.

En conclusion, la distribution δ serait *l'élément neutre du produit de convolution*. Encore faut-il avoir défini rigoureusement, le produit de convolution de deux distributions, et savoir dans quels espaces cette définition est valide. C'est l'objectif de ce chapitre.

6.1 Convolution dans $\mathcal{D}'$

6.1.1 Produit tensoriel

Définition 6.1.1. Soit une fonction $h(x,y)$ de deux variables. S'il existe deux fonctions d'une variable $f(x)$ et $g(y)$ telles que $h(x,y) = f(x).g(y)$ définisse une fonction de deux variables, on dit que h est le *produit tensoriel* ou *produit direct* des fonctions f et g.

Cela permet de construire des fonctions de plusieurs variables à partir de fonctions d'une variable. Par exemple, pour décrire les points d'une surface, on peut travailler avec deux fonctions d'une variable réelle chacune qui parcourent la surface dans deux directions orthogonales.

Proposition 6.1.1. *De plus, si f et g sont deux fonctions localement sommables, x et y étant des variables indépendantes, la fonction $f(x).g(y)$ est une fonction localement sommable dans $\mathbb{R}^2$, et définit donc une distribution régulière. Pour toute fonction $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}_{x,y}$ indéfiniment dérivable à support borné dans $\mathbb{R}^2$, on a*

$$\langle h(x,y),\varphi(x,y)\rangle = \langle f(x),\langle g(y),\varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle g(y),\langle f(x),\varphi(x,y)\rangle\rangle.$$

PREUVE: Si $\varphi(x,y) = u(x).v(y)$, avec $u(x) \in \mathcal{D}_x$ et $v(y) \in \mathcal{D}_y$, alors

$$\langle h(x,y),\varphi(x,y)\rangle = \iint f(x)\, g(y)\, u(x)\, v(y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \langle f(x),u(x)\rangle\langle g(y),v(y)\rangle.$$

Si φ n'est plus de cette forme, $f(x).g(y)$ étant localement sommable dans $\mathbb{R}^2$, $f(x)g(y)\varphi(x,y)$ est sommable dans $\mathbb{R}^2$ et d'après le théorème de Fubini, l'intégrale existe et on peut intégrer dans l'ordre que l'on veut :

$$\langle h(x,y),\varphi(x,y)\rangle = \iint f(x)\, g(y)\, \varphi(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\int f(x) \int g(y)\, \varphi(x,y)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int g(y) \int f(x)\, \varphi(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

d'où le résultat. ■

Par généralisation, on montre que pour deux distributions $\mathrm{S}_x \in \mathcal{D}'_x$ et $\mathrm{T}_y \in \mathcal{D}'_y$, il existe une distribution $\mathrm{W}_{x,y} \in \mathcal{D}'_{x,y}$, bien déterminée et unique que l'on calcule de la façon suivante. On fixe x et $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}_{x,y}$ comme fonction de y seul est dans $\mathcal{D}_y$, on peut calculer $\theta(x) = \langle \mathrm{T}_y, \varphi(x,y)\rangle$. Ce nombre qui dépend de x, donne une fonction de $\mathcal{D}_x$, et on calcule $\langle \mathrm{S}_x, \theta(x)\rangle$:

$$\langle \mathrm{W}, \varphi\rangle = \langle \mathrm{S}, \theta\rangle = \langle \mathrm{S}_x, \langle \mathrm{T}_y, \varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle \mathrm{T}_y, \langle \mathrm{S}_x, \varphi(x,y)\rangle\rangle.$$

Le support de W est le produit des supports de S et T, c'est-à-dire l'ensemble des points (x,y) tels que $x \in \mathrm{supp(S)}$ et $y \in \mathrm{supp(T)}$ (voir Schwartz [9, page 121]).

Exemple. Considérons le produit tensoriel $\delta(x).1(y)$. Soit $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$

$$\langle \delta(x).1(y),\varphi(x,y)\rangle = \langle 1(y),\langle \delta(x),\varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle 1(y),\varphi(0,y)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(0,y)\, \mathrm{d}y$$

c'est-à-dire une distribution linéaire de Dirac sur l'axe $0y$.

De même $\langle \delta(x).\delta(y), \varphi(x,y)\rangle = \varphi(0,0)$, c'est-à-dire une distribution ponctuelle de Dirac au point origine du plan.

6.1.2 Convolution de distributions : définitions et propriétés

Définition 6.1.2. Soient deux distributions S et T. On appelle *produit de convolution* S∗T, une nouvelle distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \langle \mathrm{S} * \mathrm{T}, \varphi\rangle \overset{déf}{=} \langle \mathrm{S}_x.\mathrm{T}_y, \varphi(x+y)\rangle \begin{array}{l} = \langle \mathrm{S}_x, \langle \mathrm{T}_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle \\ = \langle \mathrm{T}_y, \langle \mathrm{S}_x, \varphi(x+y)\rangle\rangle \end{array}$$

avec $\mathrm{S}_x.\mathrm{T}_y$ le produit tensoriel et $\varphi(x+y)$, la valeur de $\varphi(X)$ pour $X = x+y$.

Le produit tensoriel $\mathrm{S}(x).\mathrm{T}(y)$ existe toujours. Son support est le produit $A \times B$ des supports de S et T, c'est-à-dire l'ensemble des points (x,y) tels que $x \in A$ et $y \in B$. Or, $\varphi(X)$ est à support borné dans $\mathbb{R}$, et non à support borné dans $\mathbb{R}^2$, comme supposé pour définir le produit tensoriel de deux distributions. En fait, si le support de φ est l'intervalle $[a,b]$ alors $\varphi(x+y)$ a un support E compris entre les deux droites d'équation $x+y=a$ et $x+y=b$, parallèles à la deuxième bissectrice. Ainsi *le produit de convolution de deux distributions n'est pas toujours défini*. On énonce

Proposition 6.1.2. *Le produit de convolution* S∗T *existe si l'intersection entre $A\times B$ et l'ensemble E est bornée. Alors* T∗S *existe aussi et les deux expressions sont égales. Lorsqu'il existe, le produit de convolution est commutatif.*

On énonce les conditions d'existence suffisantes suivantes :

- les distributions S et T sont toutes deux à support borné,
- une des deux distributions est à support borné,
- les deux distributions ont leur support borné du même côté.

Ces conditions ne sont pas nécessaires.

Remarque 6.1.1. On note $\mathcal{D}'_+$, l'ensemble des distributions à support borné à gauche (dites aussi causales). Dans $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{D}'_+$, la convolution a toujours un sens. Faire un parallèle avec les fonctions causales.

Voici les cas usuels d'existence de la convolution de distributions $\mathrm{S} * \mathrm{T} = \mathrm{T} * \mathrm{S}$

- $\mathrm{S} \in \mathcal{D}'_+$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'_+$
- $\mathrm{S} \in \mathcal{D}'$ et $\mathrm{T} \in \mathbb{E}'$
- $\mathrm{S} \in \mathcal{S}'$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{E}'$
- $\mathrm{S} \in \mathcal{E}'$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{E}'$

Exemple. La distribution de Dirac est à support borné. Le produit de convolution existe quelle que soit T$\in \mathcal{D}'$.

$$\begin{aligned} \forall\varphi \in \mathcal{D}, \qquad \langle \delta * \mathrm{T}, \varphi\rangle &= \langle \delta(x).\mathrm{T}(y), \varphi(x+y)\rangle \\ &= \langle \mathrm{T}(y), \langle \delta(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle \\ &= \langle \mathrm{T}(y), \varphi(y)\rangle \\ &= \langle \mathrm{T}, \varphi\rangle \end{aligned}$$

Ainsi pour toute distribution de D', on a $\mathrm{T} * \delta = \mathrm{T}$.

Proposition 6.1.3. *La distribution δ est l'élément neutre du produit de convolution.*

Propriétés de la convolution

Le produit de convolution est commutatif et distributif par rapport à l'addition de deux distributions. Il n'est pas associatif en général. Pour trois distributions R, S, et T, si les trois produits deux à deux existent, alors le produit

$$\mathrm{R} * \mathrm{S} * \mathrm{T} = (\mathrm{R} * \mathrm{S}) * \mathrm{T} = \mathrm{R} * (\mathrm{S} * \mathrm{T}).$$

Si A est le support de $\mathrm{S}(x)$ et B le support de $\mathrm{T}(y)$, on montre que le support de $\mathrm{S} * \mathrm{T}$ est contenu dans l'ensemble $A + B = \{X = x + y, x \in A \text{ et } y \in B\}$. Ainsi le produit de convolution de deux distributions de $\mathcal{D}'_+$ existe toujours et est une distribution de $\mathcal{D}'_+$.

Convolution de distributions régulières

Si f et g sont localement sommables, elles définissent deux distributions régulières S_f et T_g. Leur produit de convolution $\mathrm{S}_f * \mathrm{T}_g$, s'il existe, est la distribution régulière $\mathrm{W}_h = \mathrm{W}_{f*g}$ associée à la fonction localement sommable

$$h(x) = (f * g)(x) = \int f(t)\, g(x-t)\, \mathrm{d}t.$$

PREUVE: Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on écrit

$$\langle \mathrm{S}_f(x).\mathrm{T}_g(y), \varphi(x+y)\rangle = \iint f(x)g(y)\varphi(x+y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Si la fonction $(x,y) \mapsto f(x)g(y)\varphi(x+y)$ est sommable dans $\mathbb{R}^2$, alors l'intégrale double existe et est finie. On peut faire un changement de variable $u = x + y$ et $t = x$, dont le jacobien vaut 1. On obtient

$$\iint f(t)g(u-t)\varphi(u)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}u.$$

Le théorème de Fubini assure que $\int f(t)g(u-t)\varphi(u)\, \mathrm{d}t$ a un sens pour presque toutes les valeurs de u. Donc $\int f(t)g(u-t)\, \mathrm{d}t$ est une fonction $h(u)$ définie pour presque tout u tel que $\varphi(u) \neq 0$. Comme ceci est vrai pour toute $\varphi(u)$ à support borné, alors $h(u)$ est une fonction définie presque partout. Toujours d'après Fubini $h\varphi$ est une fonction sommable, donc h est une fonction localement sommable et définie par $f * g$ (définition 2.5.1). ■

Convolution par δ_a

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$, on écrit

$$\begin{aligned}\langle \delta_a * \mathrm{T}, \varphi \rangle &= \langle \delta(x-a).\mathrm{T}(y), \varphi(x+y) \rangle \\ &= \langle \mathrm{T}(y), \langle \delta(x-a), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle \mathrm{T}(y), \varphi(a+y) \rangle \\ &= \langle \mathrm{T}(y-a), \varphi(y) \rangle\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$, $\delta_a * \mathrm{T} = \tau_a \mathrm{T}$.

Convolution par δ'

Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$, on écrit

$$\begin{aligned}\langle \delta' * \mathrm{T}, \varphi \rangle &= \langle \delta'(x).\mathrm{T}(y), \varphi(x+y) \rangle \\ &= \langle \mathrm{T}(y), \langle \delta'(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &= \langle \mathrm{T}(y), -\varphi'(y) \rangle \\ &= \langle \mathrm{T}', \varphi \rangle\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$, $\delta' * \mathrm{T} = \mathrm{T}'$.

Translation d'un produit de convolution

Pour translater un produit de convolution, il suffit de translater une des distributions. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{R} * \mathrm{S}$, on a

$$\tau_a \mathrm{T} = \delta_a * (\mathrm{R} * \mathrm{S}) = \tau_a \mathrm{R} * \mathrm{S} = \mathrm{R} * \tau_a \mathrm{S}.$$

En effet, si T existe, le produit est associatif. Il est toujours commutatif.

Dérivation d'un produit de convolution

Pour dériver un produit de convolution, il suffit de dériver une des distributions. Soit $\mathrm{T} = \mathrm{R} * \mathrm{S}$, on a

$$\mathrm{T}' = \delta' * (\mathrm{R} * \mathrm{S}) = \mathrm{R}' * \mathrm{S} = \mathrm{R} * \mathrm{S}'.$$

6.1.3 Convolution et transformation de Fourier

La propriété fondamentale de la transformée de Fourier – transformer les produits de convolution en produits simples – reste valable pour les distributions tempérées.

Proposition 6.1.4. *Si* R *et* S *sont à support borné alors* $\mathrm{T} = \mathrm{R} * \mathrm{S}$ *existe et est à support borné.* T *admet une transformée de Fourier* $\mathcal{F}(\mathrm{R} * \mathrm{S}) = \mathcal{F}(\mathrm{R}).\mathcal{F}(\mathrm{S})$

PREUVE:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathrm{T})(\nu) &= \langle \mathrm{R} * \mathrm{S}, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\rangle \\ &= \langle \mathrm{R}_x.\mathrm{S}_y, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu(x+y)}\rangle \\ &= \langle \mathrm{R}_x, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu x}\rangle \cdot \langle \mathrm{S}_y, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu y}\rangle \\ &= \mathcal{F}(\mathrm{R})(\nu) \cdot \mathcal{F}(\mathrm{S})(\nu)\end{aligned}$$

■

Cela généralise le résultat obtenu pour les fonctions. Il reste vrai si $\mathrm{R} \in \mathcal{S}'$ et $\mathrm{S} \in \mathcal{E}'$, alors $\mathrm{R} * \mathrm{S} \in \mathcal{S}'$. $\mathcal{F}(\mathrm{R})$ est peut-être une distribution singulière mais comme $\mathcal{F}(\mathrm{S})$ est indéfiniment dérivable, le produit $\mathcal{F}(\mathrm{R}).\mathcal{F}(\mathrm{S})$ a bien un sens.

On a aussi, chaque fois que cela a un sens

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{R} * \mathrm{S}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{R}) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{S}) \\ &\mathcal{F}(\mathrm{R} \cdot \mathrm{S}) = \mathcal{F}(\mathrm{R}) * \mathcal{F}(\mathrm{S}) \\ &\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{R} \cdot \mathrm{S}) = \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{R}) * \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{S})\end{aligned}$$

en notant $\mathcal{F}^{-1}$, la transformée de Fourier inverse.

Remarque 6.1.2. On peut remarquer que δ et 1 sont les transformées inverses l'une de l'autre et que δ est l'élément neutre de la convolution tandis que 1 est celui de la multiplication.

6.2 Régularisation

Les fluctuations rapides d'une fonction sont atténuées par convolution avec une fonction suffisamment régulière.

Remarque 6.2.1 (Régularisation). D'une manière générale, les discontinuités s'estompent et le degré de dérivabilité augmente par convolution. Si f est p-fois dérivable et g, q-fois dérivable alors $f * g$ est $(p+q)$-fois dérivable. Le montrer en utilisant la transformée de Fourier et ses propriétés de majoration en lien avec la sommabilité de la dérivée.

On a le théorème dit de *régularisation* suivant

Théorème 6.2.1 (Régularisation)**.** *Soit* T *une distribution et* α *une fonction indéfiniment dérivable. Alors* $\mathrm{T} * \alpha$ *est une fonction indéfiniment dérivable définie par :*

$$(\mathrm{T} * \alpha)(x) = h(x) = \langle \mathrm{T}(t), \alpha(x-t)\rangle$$

sa dérivée m*-ième étant donnée par* $h^{(m)}(x) = \langle \mathrm{T}(t), \alpha^{(m)}(x-t)\rangle$.
On dit que la convolution avec α *est une régularisation de* T *par* α. *La fonction* α *est dite régularisante et* h *appelée régularisée de* T *par la fonction* α.

PREUVE: On remarque que pour x fixé, $\alpha(x-t)$ comme fonction de t seul est une fonction de $\mathcal{D}_t$. Pour obtenir h on lui applique la distribution T. Ainsi h est une fonction de x et est indéfiniment dérivable comme composée de deux objets indéfiniment dérivables. Il faut ensuite identifier h et $\mathrm{T} * \alpha$ dans $\mathcal{D}'$ (voir Schwartz [9, page 128]). ■

Remarque 6.2.2. Si T est une fonction f, on retrouve l'expression du produit de convolution de deux fonctions f et α : $(f * \alpha)(x) = \displaystyle\int f(t)\,\alpha(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 6.2.3. Dans l'énoncé du théorème 6.2.1, il n'est pas précisé les conditions d'existence de cette régularisée. Cette convolution n'est pas définie quelles que soient, la fonction $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$ et la distribution $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$. La régularisée est définie pour les combinaisons suivantes :

- si $\mathrm{T} \in \mathcal{D}'$, il faut prendre α dans $\mathcal{D}$
- si $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$, il faut prendre T dans $\mathcal{E}'$
- on peut aussi prendre $\mathrm{T} \in \mathcal{S}'$ et $\alpha \in \mathcal{S}$

6.2.1 Continuité de la convolution

On admet le résultat partiel suivant. Si $\mathrm{S} \in \mathcal{D}'$ fixée, et (T_α) est une famille de distributions de $\mathcal{D}'$ dépendant du paramètre α et ayant une limite T quand α tend vers α_0 ou $+\infty$, alors $\mathrm{T}_\alpha * \mathrm{S}$ tend vers $\mathrm{T} * \mathrm{S}$ dans chacun des cas suivants :

- les T_α ont leur support contenu dans un ensemble borné fixe,
- S est à support borné,
- les supports des T_α et de S sont tous contenus dans $\mathbb{R}_+$.

6.2.2 Notions de densité des ensembles

A l'aide des deux résultats précédents (régularisation et continuité), on démontre les deux résultats suivants

Proposition 6.2.2. *Toute distribution est limite dans $\mathcal{D}'$ de fonctions indéfiniment dérivables. On dit que $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{D}'$.*

Proposition 6.2.3. *Toute distribution est limite dans $\mathcal{D}'$ de fonctions indéfiniment dérivables à support borné. On dit que $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}'$.*

Ainsi une limite de fonctions tests peut être une distribution. Si on remarque qu'une fonction de $\mathcal{D}$ est une distribution en tant que fonction localement sommable, on comprend mieux ce résultat.

6.2.3 Transformée de Hilbert

Cette transformation intégrale est définie par une valeur principale de Cauchy dans sa définition au sens des fonctions et par régularisation de la distribution $vp\,\frac{1}{x}$ au sens des distributions. Elle est très utilisée en traitement du signal et en physique car elle permet d'étudier le contenu fréquentiel d'un signal physique "interprétable" c'est-à-dire sans fréquence négative (qui n'ont aucune réalité physique au contraire des fréquences généralisées obtenues avec la TF).

Définition 6.2.1 (Transformée de Hilbert)**.** Soit une fonction réelle f de $\mathrm{S}(\mathbb{R})$. On définit sa transformée de Hilbert notée $\mathcal{H}(f)$ pour tout x réel, par la convolution :

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi}\, vp\,\frac{1}{x} \;\; * f(x)$$

ou bien

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|t|>\epsilon}\frac{f(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{f(y)}{x-y}\,\mathrm{d}y$$

Inégalité de Riesz (1928) : Si $p\in]1,+\infty[$, $\mathcal{H} : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$ est une application linéaire et continue et il existe une constante $C_p > 0$ telle que $\|\mathcal{H}(f)\|_p \leq C_p\,\|f\|_p$.

L'existence de la transformée de Hilbert et ses propriétés seront étudiées en Petites Classes (Exercice 31).

6.3 Convolution en physique

On considère un système physique décrit par un opérateur $\mathcal{L}$ qui à tout signal d'entrée ou d'excitation S fait correspondre une réponse unique R. Les signaux d'entrée et sortie peuvent être des fonctions du temps, de l'espace, elle peuvent ne pas être de même nature.

6.3.1 Propriétés de l'opérateur

Linéarité

L'opérateur est dit *linéaire* si à l'entrée $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2$ correspond la sortie $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$, où R_i est la sortie correspondant à S_i

$$\mathcal{L}(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2) = \lambda_1\mathcal{L}(S_1) + \lambda_2\mathcal{L}(S_2) = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2.$$

Continuité

L'opérateur $\mathcal{L}$ est dit *continu* si des excitations peu différentes conduisent à des sorties peu différentes. Soit S_k une suite de signaux convergeant vers S et R_k les sorties correspondantes qui convergent vers R, l'opérateur est continu s'il commute avec la limite

$$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\lim_{k\to\infty} S_k) = \lim_{k\to\infty}\mathcal{L}(S_k) = \lim_{k\to\infty} R_k = R.$$

Invariance par translation

L'opérateur est dit *invariant par translation* s'il commute avec les translations, c'est-à-dire que la réponse ne dépend pas de l'instant où le signal a été envoyé

$$\mathcal{L}(\tau_a S) = \tau_a\mathcal{L}(S) = \tau_a R.$$

Définition 6.3.1. Un système physique décrit par un *opérateur linéaire, invariant par translation, et continu est appelé filtre.*

Exemple. On peut établir que la transformation de Hilbert $\mathcal{H} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$, $f \mapsto \mathcal{H}(f)$ est une application linéaire, continue dans $\mathcal{S}$ et invariante par translation. C'est un filtre linéaire qui permet "d'effacer" les fréquences négatives d'un signal brut.

6.3.2 Caractérisation des systèmes linéaires

Définition 6.3.2. Un système physique est décrit par un opérateur de convolution s'il existe une distribution U, caractéristique du système telle que la réponse R à un signal S quelconque soit donnée par $R = \mathrm{U} * S$.
La réponse à l'impulsion δ est alors $\mathrm{U}*\delta = \mathrm{U}$, on l'appelle la *réponse impulsionnelle du système.*

Théorème 6.3.1 (des filtres)**.** *Un système physique est décrit par un filtre si et seulement s'il est régi par un opérateur de convolution.*
Soit $\mathcal{L}$, une application de $\mathcal{D}'_+$ dans $\mathcal{D}'_+$, elle est linéaire, invariante par translation et continue si et seulement s'il existe une distribution fixée U *de $\mathcal{D}'_+$, telle que $\mathcal{L}(\mathrm{T}) = \mathrm{U} * \mathrm{T}$, avec $\mathrm{U} = \mathcal{L}(\delta)$.*

6.3.3 TF d'une distribution régulière périodique et échantillonnage

Considérons une fonction, $p(x)$, T-périodique et sommable sur la période $T > 0$. Elle définit une distribution régulière périodique. Grâce à l'opérateur de convolution, on peut l'écrire à partir de la fonction génératrice à support borné de largeur T, notée p_0, et de translatées de p_0 en tout point nT, $n \in \mathbb{Z}$ (les motifs, ne se superposent pas) :

$$p(x) = p_0(x) * \sum_n \delta_{nT}$$

avec

$$p_0(x) = \begin{cases} p(x) \text{ pour } a \leq x < a+T \\ \quad 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

et les graphes suivants

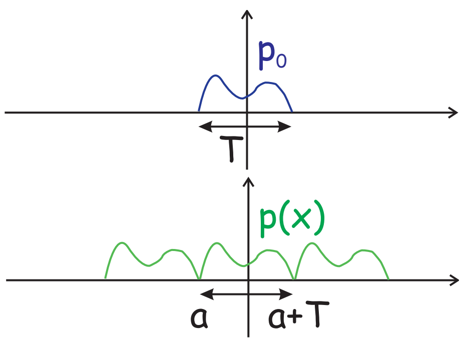

FIGURE 6.1 – *Fonction génératrice p_0 et fonction périodisée p.*

Calculons la transformée de Fourier de cette fonction périodique $p(x) = p_0(x) * \sum_n \delta_{nT}$.

$$\widehat{p}(\nu) = \widehat{p}_0(\nu) \cdot \frac{1}{T} \sum_n \delta_{\frac{n}{T}} = \frac{1}{T} \sum_n \widehat{p}_0\left(\frac{n}{T}\right) \delta_{\frac{n}{T}}$$

et la transformée de Fourier $\widehat{p_0}$ existe et est indéfiniment dérivable car $p_0(x)$ est à support borné.

Proposition 6.3.2. *La transformée de Fourier d'une fonction T-périodique $p(x)$, sommable sur une période T, est formée d'impulsions de Dirac situées aux points d'abscisses multiples de $\frac{1}{T}$. On parle de spectre de raies.*

On avait

$$\widehat{p}(\nu) = \frac{1}{T}\sum_n \widehat{p_0}\left(\frac{n}{T}\right)\,\delta_{\frac{n}{T}}$$

On travaille dans $\mathcal{S}'$, on peut donc prendre la transformée de Fourier inverse de cette relation. On obtient

$$p(x) = \frac{1}{T}\sum_n \widehat{p_0}\left(\frac{n}{T}\right)\,\mathrm{e}^{2i\pi\frac{n}{T}x} = \sum_n c_n\,\mathrm{e}^{2i\pi\frac{n}{T}x}$$

Ainsi, on retrouve la décomposition en série de Fourier de la fonction périodique $p(x)$ et les c_n sont les coefficients de cette série de Fourier.

En effet, la transformée de Fourier de p_0 donne une fonction continue et on a les graphes suivants :

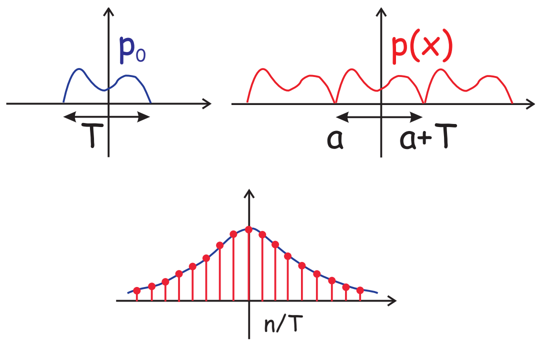

FIGURE 6.2 – *TF continue d'une fonction à support borné p_0 et spectre de raies de sa fonction périodisée p.*

De plus,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\widehat{p_0}\left(\frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} p_0(x)\mathrm{e}^{-2i\pi\frac{n}{T}x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{T}\int_a^{a+T} p(x)\mathrm{e}^{-2i\pi\frac{n}{T}x}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Les coefficients de Fourier c_n de la fonction périodique p sont donc des "échantillons" de la TF continue de p_0. C'est en raisonnant à l'inverse que l'on voit qu'il est possible d'échantillonner un signal sans perte d'information si l'on respecte certaines conditions appelées *conditions de Shannon*. La figure 6.2 ci-dessus correspond à la situation limite. Si l'on prend des échantillons plus rapprochés, les graphes des différentes périodes seront plus espacés. Si l'on prend des échantillons plus espacés alors les tracés des différentes périodes vont se superposer, il ne sera plus possible de retrouver la période p_0. En signal, on appelle ce phénomème le *repliement de spectres* (voir le polycopié de K. Amis [1, chapitre 3].

Remarque 6.3.1. Le développement en série de Fourier d'une fonction périodique converge toujours. C'est une convergence au sens des distributions.

Proposition 6.3.3. *Toute fonction périodique $p(x)$, sommable sur une période, admet un développement en série de Fourier. Ce développement converge toujours dans $\mathcal{S}'$ vers la distribution tempérée associée à $p(x)$.*

6.4 Algèbre de convolution

On vient de voir que de nombreux problèmes physiques sont régis par des équations de convolution. Il s'agit maintenant de savoir les résoudre.

Définition 6.4.1. Une algèbre de convolution $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de distributions de $\mathcal{D}'$ contenant δ (élément neutre) et sur lequel on peut définir le produit de convolution d'un nombre fini quelconque de distributions.

Exemple. L'ensemble des distributions à support borné, $\mathcal{E}'$, et l'ensemble des distributions à support contenu dans $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{D}'_+$, sont des algèbres de convolution.

6.4.1 Equation de convolution

Soit l'équation de convolution $A * X = B$, où A et B sont dans l'algèbre $\mathcal{A}$. Le problème est de trouver X et savoir s'il est unique.

Supposons qu'il existe dans l'algèbre $\mathcal{A}$ une distribution notée A^{*-1}, ou simplement A^{-1}, appelée inverse de convolution de A vérifiant $A * A^{-1} = \delta$.
Pour obtenir X il suffit alors de convoluer les deux membres de l'équation $A*X = B$ par l'inverse A^{-1}, c'est-à-dire $X = B * A^{-1}$.

Si X existe, il est unique. En effet, soit Y vérifiant $A * Y = B$ alors

$$X = A^{-1} * B = A^{-1} * A * Y = Y,$$

et en particulier A^{-1} est unique. Il est appelé *solution élémentaire de l'équation de convolution.*

Remarque 6.4.1. Si A^{-1} existe, il est unique. Mais il peut ne pas exister par exemple si A est une fonction de $\mathcal{D}$ à support dans $\mathbb{R}_+$. Alors pour toute distribution T de $\mathcal{D}'_+$, $T * A$ existe mais est une fonction indéfiniment dérivable qui ne sera jamais égale à δ (Théorème de régularisation 6.2.1).

Exemple. Soit une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_0 X(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} + \cdots + a_n \frac{\mathrm{d}^n X(t)}{\mathrm{d}t^n} = B(t).$$

On peut l'écrire

$$\left\{ a_0\delta(t) + a_1\delta'(t) + \cdots + a_n\delta^{(n)}(t) \right\} * X(t) = B(t)$$

et on peut noter $D\delta * X = B$, où D est l'opérateur différentiel à coefficients constants $a_0, \cdots, a_n$.
L'inverse cherché est alors $(D\delta)^{-1}$.

Proposition 6.4.1. *Si D est un opérateur différentiel d'ordre n à coefficients constants, de coefficient de plus grand ordre égal à 1, alors $D\delta$ est inversible dans $\mathcal{D}'_+$ et son inverse est le produit YZ de la distribution d'Heaviside Y par la fonction Z, solution de l'équation homogène $DZ = 0$ vérifiant les conditions initiales*

$$Z^{(n-1)}(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad Z^{(n-2)}(0) = \cdots = Z'(0) = Z(0) = 0.$$

PREUVE: On veut montrer que $(D\delta)^{-1} = YZ$. Or, YZ a des discontinuités à l'origine et Z étant n-fois dérivable, on dérive comme suit :

$$\begin{cases} (YZ)' &= YZ' + Z(0)\delta \\ (YZ)'' &= YZ'' + Z'(0)\delta + Z(0)\delta' \\ & \\ (YZ)^{(n-1)} &= YZ^{(n-1)} + Z^{(n-2)}(0)\delta + \cdots + Z(0)\delta^{(n-2)} \\ (YZ)^{(n)} &= YZ^{(n)} + Z^{(n-1)}(0)\delta + \cdots + Z(0)\delta^{(n-1)} \end{cases}$$

On en déduit $(YZ)^{(k)} = YZ^{(k)}$ pour $k \leq n-1$ et $(YZ)^{(n)} = YZ^{(n)} + \delta$.
Ainsi $(D\delta) * YZ = D(YZ) = Y(DZ) + \delta = \delta$ puisque $DZ = 0$. ■

Exemple. Soit $D = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. On cherche l'inverse de $D\delta = \delta' - \lambda\delta$. On résout l'équation homogène $g' - \lambda g = 0$ qui a pour solution générale

$$g(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x} \qquad \text{avec} \quad g(0) = C = 1.$$

Ainsi

$$(\delta' - \lambda\delta)^{-1} = Y(x)\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

La solution de $DX = B$, B distribution fixée, est alors $B * Y(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Proposition 6.4.2. *Si A_1 et A_2 sont inversibles dans l'algèbre $\mathcal{D}'_+$, $A_1 * A_2$ est inversible, et son inverse est $(A_1 * A_2)^{-1} = {A_1}^{-1} * {A_2}^{-1}$.*

PREUVE: $(A_1 * A_2) * ({A_1}^{-1} * {A_2}^{-1}) = (A_1 * {A_1}^{-1}) * (A_2 * {A_2}^{-1}) = \delta * \delta = \delta$. ■

6.4.2 Calcul symbolique

On peut faire une analogie entre le produit usuel et la convolution de la manière suivante. On identifie $D\delta$ à un polynôme symbolique en δ, où les dérivations correspondent à des puissances de r avec la convention $\delta^{(0)} = r^0 = 1$. En d'autres termes, on identifie

$$D\delta = \delta^{(n)} + a_{n-1}\delta^{(n-1)} + \cdots + a_1\delta' + a_0\delta$$

à l'expression

$$P(r) = r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

qui est un polynôme admettant n racines λ_i dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert). Ainsi, on peut factoriser ce polynôme en r, et par analogie écrire

$$D\delta = (\delta' - \lambda_n\delta) * (\delta' - \lambda_{n-1}\delta) * \cdots * (\delta' - \lambda_1\delta).$$

On a alors
$$(D\delta)^{-1} = (\delta' - \lambda_n\delta)^{-1} * (\delta' - \lambda_{n-1}\delta)^{-1} * \cdots * (\delta' - \lambda_1\delta)^{-1}$$
et d'après ce qu'on a vu précédemment
$$(D\delta)^{-1} = Y(x)\mathrm{e}^{\lambda_n x} * Y(x)\mathrm{e}^{\lambda_{n-1}x} * \cdots * Y(x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x}.$$

Exemple. On cherche à résoudre l'équation $X'' + \omega^2 X = B$ dans $\mathcal{D}'_+$. Le polynôme symbolique en δ est
$$\delta'' + \omega^2\delta = (\delta' + i\omega\delta) * (\delta' - i\omega\delta).$$
Il s'inverse dans $\mathcal{D}'_+$ par
$$(\delta'' + \omega^2\delta)^{-1} = Y(t)\mathrm{e}^{-i\omega t} * Y(t)\mathrm{e}^{i\omega t} = Y(t)\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$
et la solution cherchée est $X = B * Y(t)\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}$.

6.4.3 Application de la transformation de Laplace au calcul symbolique

La propriété de transformation du produit de convolution en produit simple de la transformée de Laplace et l'utilisation des tables dans un sens et dans l'autre, confère à cette transformation, une grande utilité dans de nombreux problèmes. L'ensemble de ces opérations porte le nom de *calcul symbolique*.

Soit à résoudre une équation de convolution dans $\mathcal{D}'_+$, $A * X = B$. Si A et B ont des transformées de Laplace, $L[A](p)$ et $L[B](p)$, s'il existe une solution dans $\mathcal{D}'_+$ et si elle admet une transformée de Laplace, $L[X](p)$ alors
$$L[X](p) = \frac{L[B](p)}{L[A](p)}.$$

Cette méthode ne donne pas toujours de résultat. En effet, si $L[A](p)$ et $L[B](p)$ existent et si $L[X](p)$ admet un original, alors X est une solution et c'est la seule car dans $\mathcal{D}'_+$, il n'y a pas plus d'une solution. En revanche, si $L[A](p)$ et $L[B](p)$ n'existent pas, la méthode ne s'applique pas. Dans le cas où le rapport $\dfrac{L[B](p)}{L[A](p)}$ n'est pas une transformée de Laplace, alors l'équation n'a pas de solution ayant une TL ; elle peut cependant avoir une solution dans un autre espace qu'il n'a pas été possible de trouver par cette méthode.

Exemple (Résolution d'équation différentielle). Résoudre dans $\mathcal{D}'_+$,
$$X'' - 3X' + 2X = \delta$$

Exemple (Résolution d'équation intégrale). Soit $f(t)$ nulle pour $t < 0$. Trouver f vérifiant
$$\int_0^t f(\theta)\,\sin(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta = t^2 \qquad \text{pour } t \geq 0$$

Remarque 6.4.2. Certaines fonctions ont une transformée de Laplace, mais pas de transformée de Fourier, comme $(Y\mathrm{e}^{kt}, k > 0)$, ainsi avant l'introduction des distributions et de l'espace S', la transformée de Laplace était très utilisée. Cependant en physique, les signaux rencontrés sont souvent associés à des fonctions causales et tempérées qui admettent une transformée de Fourier. Ainsi aujourd'hui, la transformée de Laplace est utilisée en traitement du signal pour étudier les systèmes plutôt que les signaux. En particulier, vous verrez dans le cours de signal, que la stabilité d'un système dépend de la position des pôles de la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle qui le caractérise. Cette transformée est appelée *fonction de transfert du système.*

Remarque 6.4.3. La résolution d'équations différentielles peut se faire au moyen des transformées de Fourier ou de Laplace. Considérons l'équation

$$-f'' + f = \delta$$

Par transformée de Laplace, on obtient $L[f](p) = -\dfrac{1}{p^2-1}$, c'est-à-dire

$$f(t) = -Y(t)\sinh(t).$$

Par transformée de Fourier, on obtient $\hat{f}(\nu) = \dfrac{1}{4\pi^2\nu^2+1}$, c'est-à-dire

$$f(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|t|}.$$

En dépit des apparences, les résultats sont cohérents car il s'agit de deux solutions particulières de l'équation avec second membre : une solution admettant une transformée de Laplace, l'autre solution étant dans S'.
La solution générale de l'équation différentielle est obtenue en additionnant la solution générale de l'équation sans second membre, c'est-à-dire $f = A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{t}$, A et B constantes, et une solution particulière de l'équation avec second membre. Ainsi, on peut trouver A et B telles que

$$-Y(t)\sinh(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|t|} + A\,\mathrm{e}^{-t} + B\,\mathrm{e}^{t}$$

$(A = 0$ et $B = -\dfrac{1}{2})$.

6.5 Exercices d'application du chapitre 6

Ces exercices sont à réaliser en autonomie lors de l'apprentissage du cours. Les énoncés des exercices de séances présentielles (Petites Classes ou TD) se trouvent dans le livret dédié.

S3-11 : Transformée de Fourier de distributions périodiques

Calculer la transformée de Fourier de la distribution tempérée régulière $\cos^2 2\pi\,\omega t$.
a) En linéarisant le cosinus.
b) En utilisant les propriétés de la TF vis à vis de la convolution. Pourquoi obtient-on un spectre de raies.
S3-12 : Dirac et convolution Soit T $\in \mathcal{D}'_+$, à l'aide d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, calculer les convolutions suivantes qui doivent être connues par cœur :

1. $\delta * \mathrm{T}\ =$
2. $\delta_a * \mathrm{T}\ =$
3. $\delta'' * \mathrm{T}\ =$
4. $\delta_a * \delta_b\ =$

S3-13 : Convolution et équation différentielle

Considérons l'algèbre de convolution $\mathcal{D}'_+$ des distributions à support borné à gauche.

Si $T \in \mathcal{D}'_+$ on notera, si elle existe, T^{-1} l'unique distribution $X \in \mathcal{D}'_+$ telle que $T * X = \delta$.

a) Calculer $(\delta' - \lambda\delta)^{-1}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Soit $Y \in \mathcal{D}'_+$ la distribution de Heaviside, résoudre dans $\mathcal{D}'_+$, l'équation différentielle :

$$X'' + \omega^2 X = Y \qquad \text{où } \omega \in \mathbb{R}$$

Bibliographie

[1] K. AMIS et F. X. SOCHELEAU. *Introduction au traitement du signal*. Polycopié IMT Atlantique, 2020.

[2] J. M. BONY. *Cours d'analyse, théorie des distributions et analyse de Fourier*. Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2001.

[3] B. FRACASSO et A. PEDEN. *Physique des communications*. Ellipse, 2015.

[4] D. GHORBANZADEH et al. *Eléments de mathématiques du signal - Exercices résolus*. Sciences Sup - Dunod, 2008.

[5] D. PASTOR et C. SINTES. *Probabilités pour l'ingénieur, des fondements aux calculs*. Hermès-Lavoisier, 2014.

[6] B. PETIT. *Introduction aux fonctions d'une variable complexe*. Polycopié IMT Atlantique, 2008.

[7] N. RAKOTO et M. YAGOUBI et F. CLAVEAU. *Introduction à l'automatique*. Polycopié IMT Atlantique, 2020.

[8] F. RODDIER. *Distributions et transformation de Fourier - A l'usage des physiciens et des ingénieurs*. McGraw Hill, 1993.

[9] L. SCHWARTZ. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, 1966.

[10] M. R. SPIEGEL. *Variable complexe - Cours et problèmes*. Série Schaum - McGraw-Hill, 1973.

[11] S. TABIOU. *Eléments de calcul différentiel : application à l'étude et au calcul d'intégrales multiples*. Polycopié IMT Atlantique, 2018.

[12] S. TABIOU. *Intégrales au sens de Lebesgue - Complément du chapitre 1 du polycopié Eléments d'Analyse pour l'Ingénieur*. Polycopié IMT Atlantique, 2020.

[13] S. TABIOU. *La convolution des fonctions*. Polycopié IMT Atlantique, 2020.

[14] K. VO KHAC. *Théorie de la mesure, exercices et problèmes corrigés*. Hermann, 1993.

[15] K. VO KHAC. *Intégration et espaces de Lebesgue, exercices et problèmes corrigés*. Hermann, 1994.

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

IMT Atlantique Bretagne-Pays de la Loire - www.imt-atlantique.fr

Campus de Brest
Technopôle Brest-Iroise
CS 83818
29238 Brest Cedex 03
T +33 (0)2 29 00 11 11
F +33 (0)2 29 00 10 00

Campus de Nantes
4, rue Alfred Kastler - La Chantrerie
CS 20722
44307 Nantes Cedex 3
T +33 (0)2 51 85 81 00
F +33 (0)2 51 85 81 99

Campus de Rennes
2, rue de la Châtaigneraie
CS 17607
35576 Cesson Sévigné Cedex
T +33 (0)2 99 12 70 00
F +33 (0)2 99 12 70 08