Chapitre 6

Arbres.

1 Définitions.

1.1 Généralité sur les arbres

Définition 1 :

On appelle **arbre général** un ensemble non vide et fini d'objets appelés nœuds et liés par une "relation de parenté" notée $\mathcal{F}$ définie par :

$$\begin{aligned} x\mathcal{F}y &\Leftrightarrow x \text{ est un fils de } y \\ &\Leftrightarrow y \text{ est le père de } x \end{aligned}$$

et une relation étendue notée $\mathcal{F}^*$:

$$\begin{aligned} x\mathcal{F}^*y &\Leftrightarrow x \text{ est un descendant de } y \\ &\Leftrightarrow y \text{ est un ascendant } x \\ &\Leftrightarrow x = y \text{ ou il existe un chemin : } (x_0 = x)\,\mathcal{F}x_1\mathcal{F}\ldots\mathcal{F}\,(x_n = y) \end{aligned}$$

Et vérifiant les propriétés suivantes :

- Il existe un unique élément n'ayant pas de père, appelé racine de l'arbre.
- Tout élément à part la racine a un et un seul père.
- Tout élément est un descendant de la racine.

Définition 2 :

Autres définitions

- Un nœud n'ayant pas de fils est appelé **feuille** ou **nœud terminal** et un nœud ayant au moins un fils est appelé **nœud interne** ou **nœud intérieur**.
- Les fils d'un même père sont appelés **frères**.
- Le **degré** d'un nœud est son nombre de fils, le **degré maximal** de l'arbre est le plus grand des degrés des nœuds.
- La **profondeur** d'un nœud est le nombre d'ascendant strict de ce nœud, la **hauteur** d'un arbre est la profondeur maximale de ses nœuds.
- Le nombre de nœuds dans un arbre est la **taille** de l'arbre.
- L'ensemble des descendants d'un nœud x forme un **sous-arbre** de racine x.
- Une **forêt** est un ensemble fini d'arbre sans nœuds communs ; l'ensemble des descendants stricts d'un nœud x forme une forêt, vide si le nœud est terminal. Les arbres de cette forêt sont appelés branches issues de x.
- Un arbre **ordonné** est un arbre pour lequel l'ensemble des branches issues d'un nœud est totalement ordonné.
- Un arbre est **étiqueté** lorsqu'à chaque nœud est associée une information appelé **étiquette** du nœud. Des nœuds distincts peuvent porter la même étiquette.

1.2 Arbre binaire

Définition 3 :

Un **arbre binaire** est un ensemble fini, éventuellement vide, de nœuds liés par une relation de parenté orientée notée $\mathcal{F}_d$ et $\mathcal{F}_g$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} x\mathcal{F}_d y & \Leftrightarrow & x \text{ est le fils droit de } y \\ & \Rightarrow & y \text{ est le père de } x \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} x'\mathcal{F}_g y & \Leftrightarrow & x' \text{ est le fils gauche de } y \\ & \Rightarrow & y \text{ est le père de } x' \end{array}$$

Et vérifiant les propriétés suivantes :

- Si l'arbre est non vide alors il existe un unique élément n'ayant pas de père appelé racine de l'arbre.
- Tout élément, à part la racine, a un et un seul père.
- Tout élément a au plus un fils droit et au plus un fils gauche.
- Tout élément est descendant de la racine.

Remarque : un arbre binaire est :

- soit vide
- soit composé d'un élément, d'un arbre fils gauche et d'un arbre fils droit, chacun des deux fils pouvant éventuellement être un arbre vide.

On note Arbre $=$ vide $+$ élément $\times$ Arbre $\times$ Arbre

Ainsi, l'implantation en Caml d'un arbre binaire peut se faire par la construction du type :

```
type 'a arbre_bin =
  | Arbre_vide
  | Noeud of ('a arbre_bin)* 'a* ('a arbre_bin)
;;
```

Ou, en incluant la notion de feuilles :

```
type 'a arbre_bin =
  | Arbre_vide
  | Feuille of 'a
  | Noeud of ('a arbre_bin)* 'a* ('a arbre_bin)
;;
```

2 Propriétés des arbres binaires

Propriété 1 :

- Un arbre binaire à n nœuds possède $n+1$ branches vides.
- Dans un arbre binaire à n nœuds, le nombre de nœuds sans fils est inférieur ou égal à $\dfrac{n+1}{2}$. Il y a égalité si et seulement si tous les nœuds ont zéro ou deux fils.
- Pour h la hauteur d'un arbre binaire non vide à n nœuds, on a la relation :

$$\lfloor \log(n) \rfloor \leqslant h \leqslant n-1$$

Preuve :