

CC1 - lundi 14 février 2022

Durée : 1 heure.

L'usage d'aides électroniques ou de documents n'est pas autorisé. Une attention particulière sera apportée à la qualité de la rédaction. Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1.

On considère l'élément

$$P(X) = 6X^6 + 24X^4 + 24X^3 + 12X$$

dans $\mathbb{Z}[X]$. On note B l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(P)$.

1. Énoncer le critère d'Eisenstein dans $\mathbb{Z}[X]$, et en rappeler la démonstration.
2. Factoriser P en produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$. L'anneau quotient $B = \mathbb{Z}[X]/(P)$ est-il intègre ?
3. Soit x la classe de X dans le quotient B . Les idéaux (7) , (x) et $(7, x)$ de B sont-ils premiers ? Sont-ils maximaux ?

Exercice 2.

On considère le polynôme $Q(X) = X^4 - X^3 - X + 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

1. Pour $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , factoriser Q en produit d'irréductibles dans $K[X]$.
2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{X^5}{Q}$ dans $K(X)$ pour $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .