

CC2 - lundi 21 mars 2022

Durée : 1 heure.

L'usage d'aides électroniques ou de documents n'est pas autorisé. Toute réponse doit être justifiée. Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1.

1. Expliciter $\mathbb{F}_{27}$ comme corps de rupture d'un polynôme sur $\mathbb{F}_3$.
2. Le corps $\mathbb{F}_{27}$ contient-il $\mathbb{F}_9$?
3. Factoriser $X^9 - X$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{F}_3[X]$ et dans $\mathbb{F}_{27}[X]$.

Exercice 2.

On considère le nombre réel $\alpha = \sqrt{\sqrt{7}+1}$.

1. Démontrer que α est un nombre algébrique sur $\mathbb{Q}$, et que son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ divise le polynôme
$$P(X) = X^4 - 2X^2 - 6.$$
2. Démontrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, puis justifier que P est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.
3. Déterminer la valeur de $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ et expliciter une base de $\mathbb{Q}(\alpha)$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
4. Expliciter les racines de P, puis démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{-6}, \alpha)$ est un corps de décomposition de $P(X)$ sur $\mathbb{Q}$.
5. Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt{-6}, \alpha) : \mathbb{Q}(\alpha)]$ puis $[\mathbb{Q}(\sqrt{-6}, \alpha) : \mathbb{Q}]$ et $[\mathbb{Q}(\sqrt{-6}, \alpha) : \mathbb{Q}(\sqrt{-6})]$.
6. En déduire le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$.