

## CC2 - lundi 21 mars 2022

Durée : 1 heure.

L'usage d'aides électroniques ou de documents n'est pas autorisé. Toute réponse doit être justifiée. Les deux exercices sont indépendants.

### Exercice 1.

1. Expliciter  $\mathbb{F}_{16}$  comme corps de rupture d'un polynôme sur  $\mathbb{F}_2$ .
2. Le corps  $\mathbb{F}_{16}$  contient-il  $\mathbb{F}_8$  ?
3. Soit  $K$  le plus petit corps fini contenant  $\mathbb{F}_{16}$  et  $\mathbb{F}_8$ . Déterminer le cardinal de  $K$  et l'expliciter comme corps de rupture d'un polynôme sur  $\mathbb{F}_{16}$ .

### Exercice 2.

On considère le polynôme  $P(X) = X^3 - X - 1$  dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

1. Démontrer que  $P(X)$  admet une unique racine réelle  $\alpha$  et que celle-ci est irrationnelle. En déduire que  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}$ .
2. Soit  $\beta$  une racine complexe de  $P(X)$ , distincte de  $\alpha$ . Calculer le polynôme minimal  $B(X)$  de  $\beta$  sur  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , ainsi que le discriminant  $\Delta \in \mathbb{Q}(\alpha)$  de  $B$ .
3. Démontrer que  $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{\Delta})$  est un corps de décomposition de  $P$  sur  $\mathbb{Q}$ , et donner son degré sur  $\mathbb{Q}$ .
4. Expliciter la division euclidienne de  $P'(X)^2(4 - 3X^2)$  par  $P(X)$ . En déduire que  $P'(\alpha)^2\Delta$  vaut  $-23$ .
5. À l'aide des questions 3 et 4, démontrer que  $\mathbb{Q}(\alpha, \sqrt{-23})$  est un corps de décomposition pour  $P$ . Quel est le polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$  ?