Contrôle continu 1

Durée : 45 minutes (plus 15 minutes pour m'envoyer par mail

Exercice 1. Un *segment initial* d'un ensemble totalement ordonné $(E, <)$ est un sous-ensemble I de E tel que

$$\forall x \in I\, \forall y \in E\, (y < x \to y \in I).$$

Un *segment initial propre* de $(E, <)$ est un segment initial distinct de E.

1. Donner un exemple d'ensemble totalement ordonné isomorphe à un de ses segments initiaux propres.
2. Trouver un exemple de deux ensembles totalement ordonnés non isomorphes mais tels que chacun est isomorphe à un segment initial propre de l'autre.

Solution. **(6)**

1. Par exemple $\mathbb{R}$, qui est isomorphe à $(-\infty, 0)$.
2. Par exemple $[0, 1)$ et $[0, 1]$. Notons que $[0, 1]$ est isomorphe à $[0, \frac{1}{2}]$ qui est un segment initial propre de $[0, 1)$.

Exercice 2. Soit $<$ un ordre sur un ensemble A. On définit $<^*$ sur A par : $x <^* y$ si et seulement si $y < x$. Supposons maintenant que $<$ est un bon ordre sur A. Montrer que A est fini si et seulement si $<^*$ est aussi un bon ordre sur A.

Solution. **(6)**
Notons que $<^*$ est un ordre total : pour tous les x, y, $x < y$ ou $x = y$ ou $y < x$; alors $y <^* x$ ou $y = x$ ou $x <^* y$. Maintenant, si A est fini, alors $(A, <^*)$ est un fini ordre total, donc un bon ordre.

Pour l'autre direction, si A est infini, alors on a une extension $(\mathbb{N}, <) \longrightarrow (A, <)$, et donc $(\mathbb{N}, <^*) \longrightarrow (A, <^*)$. Mais $(\mathbb{N}, <^*)$ n'est pas bien ordonné.

Exercice 3. On rappelle qu'un réel α est *algébrique* s'il existe un polynôme $P(X)$ à coefficients entiers tel que $P(\alpha) = 0$.

1. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
2. En déduire qu'il existe un réel α qui n'est pas algébrique.

Solution. **(8)**

1. Tout d'abord, on note que l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{Z}$ est dénombrable, parce que Pour chaque $P \in \mathbb{Z}[X]$ on peut associer la suite $(c_0, \ldots, c_n)$ des entiers tel que $P = \sum_{i \leq n} c_i X^i$. Deuxièmement, pour chaque P, il existe un ensemble fini $Z(P)$ de racines de P. Alors, on obtient une fonction injectif $\{\alpha \mid \alpha \text{ est algébrique}\} \longrightarrow \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}} Z(P)$. Ce dernier ensemble est dénombrable.
2. Puisque l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, on a que $\mathbb{R} \setminus \{\alpha \mid \alpha \text{ est algébrique}\}$ n'est pas vide.