Contrôle n° 4, session de substitution

Exercice 1. Soit $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x,y,z) = \frac{x(y^3+z^3)}{x^2+y^2+z^4} \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \text{ et } F(0,0,0)=0.$$

1. Soit $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ définie par $\phi(t)=(t^2,0,t)$. Calculer $g(t)=F\circ\phi(t)$. La fonction g est-elle différentiable en 0 ?
2. Montrer que F admet des dérivées partielles $\partial_x F$, $\partial_y F$, et $\partial_z F$ en $(0,0,0)$ et les calculer.
3. Montrer que F n'est pas différentiable en $(0,0,0)$.
4. Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=F(x,y,0)$ est différentiable en 0.

Solution

1. On a pour $t\in\mathbb{R}$, $g(t)=\frac{t}{2}$. g est bien sûr différentiable en 0, puisque dérivable en 0.

2. On a pour $t\in\mathbb{R}$, $F(t,0,0)=F(0,t,0)=F(0,0,t)=0$ donc $\partial_x F(0,0,0)=\partial_y F(0,0,0)=\partial_z F(0,0,0)=0$.

3. Supposons par contradiction que F est différentiable en $(0,0,0)$. Comme toutes les dérivées partielles sont nulles, on a $DF(0,0,0)=0$. On a aussi par composition

$$g'(t) = 2t\partial_x F(t^2,0,t)+\partial_z F(t^2,0,t)$$

ce qui donne $g'(0)=\partial_z F(0,0,0)=0$. C'est en contradiction avec le fait que $g'(0)=\frac{1}{2}$.

4. On a pour $(x,y)\in\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\frac{xy^3}{x^2+y^2}.$$

Or $\left|xy^3\right| \leq \left\|(x,y)\right\|_2 \left\|(x,y)\right\|_2^3 = (x^2+y^2)^2$, donc $\left|f(x,y)-f(0,0)\right| \leq x^2+y^2 = o\left(\left\|(x,y)\right\|_2\right)$. On obtient donc que f est différentiable en $(0,0)$ et que $Df(0,0)=0$.

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la fonction définie pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z)=(x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$$

On pourra utiliser sans démonstration le fait que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Soit $m=(x_0,y_0,z_0)$ un point critique de f, montrer que $-1\leq x_0+z_0^2<0$ et $x_0(x_0+z_0^2)>0$.
3. Montrer que $m=(-1,0,0)$ est un point critique de f, puis montrer que c'est l'unique point critique de f.
4. Montrer que m est un minimum local de f.

Solution

1. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\partial_x f(x,y,z) = (1+(x+z^2)(y^2+z^2+1))e^{x(y^2+z^2+1)}$$
$$\partial_y f(x,y,z) = 2xy(x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$$
$$\partial_z f(x,y,z) = (2z+2zx(x+z^2))e^{x(y^2+z^2+1)}$$

2. On a $\partial_x f(m)=\partial_y f(m)=\partial_z f(m)=0$ donc par ce qui précède et le fait que l'exponentielle ne s'annule jamais, on obtient le système

$$\begin{cases} 1+(x_0+z_0^2)(y_0^2+z_0^2+1)=0 \\ 2x_0y_0(x_0+z_0^2)=0 \\ 2z_0(1+x_0(x_0+z_0^2))=0 \end{cases}$$

On déduit de la première équation que

$$x_0+z_0^2=\frac{-1}{1+y_0^2+z_0^2}\in[-1,0[$$

Comme, $x_0 < z_0^2$, on obtient $x_0 < 0$ et comme $x_0 + z_0^2 < 0$, par produit, on a $x_0(x_0 + z_0^2) > 0$.

3. $(-1,0,0)$ est solution du système précédent, donc c'est bien un point critique de f. Si $m = (x_0, y_0, z_0)$ est un point critique, alors on déduit de $x_0(x_0 + z_0^2) > 0$ et de la deuxième équation, $y_0 = 0$. De plus, comme $x_0(x_0 + z_0^2) > 0$, on obtient que $1 + x_0(x_0 + z_0^2) \neq 0$ donc par la troisième équation, $z_0 = 0$. Enfin, avec la première équation et le fait que $y_0 = z_0 = 0$, on déduit $x_0 = -1$.

4. On calcule toutes les dérivées partielles secondes

$$\partial_{xx} f(x,y,z) = (2 + (x+z^2)(y^2+z^2+1))(y^2+z^2+1)$$

$$\partial_{yy} f(x,y,z) = 2(x+z^2)(1+2y^2x)$$

$$\partial_{zz} f(x,y,z) = 4z^2x + 2(1+2z^2x)(1+x(x+z^2))$$

$$\partial_{xy} f(x,y,z) = \partial_{yx} f(x,y,z) = 2y(x + (x+z^2)(xy^2+xz^2+x+1))$$

$$\partial_{xz} f(x,y,z) = \partial_{zx} f(x,y,z) = 2z(y^2+2z^2+1+x+y+y(x+z^2)(y^2+z^2+1))$$

$$\partial_{yz} f(x,y,z) = \partial_{zy} f(x,y,z) = 4zy(1+x(x+z^2))$$

La Hessienne de f en $m = (-1,0,0)$ est donc

$$e^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice symétrique (même diagonale) définie positive. Donc m est un minimum local.

Exercice 3.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ associée au produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'application définie par $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. Montrer que f est bijective et déterminer l'ensemble de ses points fixes.
3. Calculer la différentielle de f.

Solution

1. Chaque composante de f est une fraction rationnelle en les coordonnées de x, donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son ensemble de définition. Comme la norme est définie positive, f est définie en x si et seulement si $\|x\| \neq 0$ si et seulement si $x \neq 0$.

2. On a pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$f \circ f(x) = \frac{\frac{x}{\|x\|^2}}{\left\|\frac{x}{\|x\|^2}\right\|^2} = \frac{x}{\|x\|^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\|x\|}\right)^2} = x$$

donc f est bijective et $f^{-1} = f$. De plus, si $f(x) = x$, on obtient en prenant la norme $\frac{1}{\|x\|} = \|x\|$, soit $\|x\| = 1$. Réciproquement, si $\|x\| = 1$, on a clairement $f(x) = x$. L'ensemble des points fixes est donc la sphère unité $\{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 1\}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et soit $h \in B(0, \|x\|)$. On a

$$f(x+h) = \frac{x+h}{\|x+h\|^2} = \frac{x+h}{\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|h\|^2} = \left(\frac{x}{\|x\|^2} + \frac{h}{\|x\|^2}\right)\frac{1}{1 + \frac{2\langle x,h\rangle}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}}.$$

Par le développement limité

$$\left(1 + \frac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2}\right)^{-1} = 1 - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2} + o(\|h\|)$$

on obtient

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{\|x\|^2} - \frac{2\langle x, h\rangle}{\|x\|^2}\frac{x}{\|x\|^2} + o(\|h\|)$$

et on déduit la différentielle

$$Df(x).h = \frac{1}{\|x\|^2}\left(h - 2\left\langle \frac{x}{\|x\|}, h\right\rangle \frac{x}{\|x\|}\right).$$

On peut remarquer que le multiple de la différentielle $\|x\|^2 Df(x)$ n'est rien d'autre que la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à x.

Exercice 4.

Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels. On pose $\Phi(M) = M^3$

1. Montrer que Φ est différentiable et calculer sa différentielle en $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Dire pourquoi la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas précisée dans l'énoncé.
2. Montrer qu'il existe des voisinages ouverts U et V de la matrice I_n et une application $F : V \to U$ telle que $F(A)^3 = A$ pour toute matrice $A \in V$.

Solution

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\Phi(M+H) = M^3 + HM^2 + MHM + M^2H + H^2M + HMH + MH^2 + H^3$$

Or, en choisissant la norme $\|M\|_1 = \sum_{i,j} |M_{i,j}|$, on a pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\|AB\|_1 = \sum_{i,j} \left| \sum_k A_{i,k} B_{k,j} \right| \leq \sum_{i,j,k} |A_{i,k}| |B_{k,j}| \leq \sum_{i,j,k,l} |A_{i,k}| |B_{l,j}| = \|A\|_1 \|B\|_1$$

Donc on obtient

$$\frac{\left\|\Phi(M+H) - \Phi(M) - (HM^2 + MHM + M^2H)\right\|_1}{\|H\|_1} \leq \frac{3\|H\|_1^2 \|M\|_1 + \|H\|_1^3}{\|H\|_1} = 3\|H\|_1 \|M\|_1 + \|H\|_1^2 = o(1)$$

lorsque $\|H\|_1 \to 0$. On obtient que Φ est différentiable en M et que

$$D\Phi(M).H = HM^2 + MHM + M^2H.$$

On ne précisait pas la norme dans l'énoncé car la notion de différentiabilité et la valeur de la différentielle ne dépendent pas du choix de la norme en dimension finie. Cela vient du fait que les normes sont équivalentes en dimension finie. D'ailleurs, on n'a pas besoin de préciser non plus que l'application linéaire qui définit la différentielle est continue puisque c'est automatique en dimension finie.

2. On a $D\Phi(I_n) = 3Id_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ d'après ce qui précède. La différentielle en I_n est donc inversible. Il existe donc des voisinages U de I_n et V de $I_n = \Phi(I_n)$ telle que $\Phi : U \to V$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. L'application F définie comme l'inverse de Φ vérifie bien $F(A)^3 = A$ pour toute matrice $A \in V$.

Exercice 5.

Soit $k \in]0,1[$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq k.$$

On note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

1. Déterminer la matrice Jacobienne de φ au point (x,y). Est-elle inversible ?
2. Montrer qu'au voisinage de tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.
3. Enoncer le théorème des accroissements finis pour l'application f. En déduire que φ est injective.
4. Montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est ouverte, puis que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.
5. Soit $v \in \mathbb{R}$. On définit $g_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g_v(x) = x + f(v - f(x))$. Exprimer la dérivée de g_v en fonction de celle de f. En déduire que g_v est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. Déduire de la question précédente que si $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, alors il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(u,v) = \varphi(x,y)$. Conclure.

Solution

1. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$J\varphi(x,y)=\begin{pmatrix}1 & f'(y)\\ f'(x) & 1\end{pmatrix}$$

On a $\det\left(J\varphi(x,y)\right)=1-f'(x)f'(y)\geq 1-\left|f'(x)\right|\left|f'(y)\right|\geq 1-k^2>0$ donc la jacobienne est bien inversible en tout point.

2. φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa jacobienne est inversible en tout point. Par le théorème d'inversion locale, on déduit que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme au voisinage de tout point.

3. On énonce le théorème des accroissements finis pour la fonction dérivable f : pour tous $a<b\in\mathbb{R}$, il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

En particulier, on a toujours

$$\left|f(b)-f(a)\right|\leq k|b-a|.$$

Soient (x,y) et (x',y') deux points tels que $\varphi(x,y)=\varphi(x',y')$. On obtient

$$x+f(y)=x'+f(y')\text{ et }y+f(x)=y'+f(x')$$

Ainsi

$$\left|x-x'\right|=\left|f(y')-f(y)\right|\leq k\left|y'-y\right|=k\left|f(x)-f(x')\right|\leq k^2\left|x-x'\right|.$$

Comme $k<1$, ceci n'est possible que si $\left|x-x'\right|=0$, soit $x=x'$. Puis déduit directement $y=y'$. φ est donc injective.

4. Par le théorème d'inversion locale appliqué en tout point de $\mathbb{R}^2$, φ est une application ouverte sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi $\varphi(\mathbb{R}^2)$ est ouverte. De plus $\varphi:\mathbb{R}^2\to\varphi\left(\mathbb{R}^2\right)$ est une application injective par ce qui précède et surjective par définition donc bijective. Par le théorème d'inversion locale encore, sa réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$. On obtient bien le résultat voulu.

5. On a pour $x\in\mathbb{R}$

$$g_v'(x)=1-f'(x)f'(v-f(x))$$

Ainsi, $g_v'(x)\geq 1-\left|f'(x)\right|\left|f'(v-f(x))\right|\geq 1-k^2>0$. On déduit que g_v est strictement croissante. En particulier, g_v est injective. De plus on a après intégration

$$g_v(x)\geq g_v(0)+\left(1-k^2\right)x\to_{x\to+\infty}+\infty$$

De même on a

$$g_v'(x)-1=-f'(x)f'(v-f(x))\leq\left|f'(x)\right|\left|f'(v-f(x))\right|\leq k^2$$

ce qui donne après intégration

$$g_v(x)\leq g_v(0)+(1+k^2)x\to_{x\to-\infty}-\infty.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on a $g_v(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ donc g_v est surjective. On obtient que g_v est bijective.

6. Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Comme g_v est bijective, soit x l'unique solution de $g_v(x)=u$. On obtient $x+f(v-f(x))=u$. On pose $y=v-f(x)$. On obtient $\varphi(x,y)=(u,v)$. Ainsi $\varphi(\mathbb{R}^2)=\mathbb{R}^2$ et la question 4 permet de conclure que $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.