

Exercice 1 Un ensemble E d'opérateurs booléens est dit *complet* si tout opérateur booléen peut s'exprimer en fonction de ceux de E .

0. Rappeler comment montrer que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ est complet.
1. Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ sont complets.
2. Montrer que $\{\neg, \Rightarrow\}$ et $\{\oplus, \Rightarrow\}$ sont complets.
3. Montrer que $\{\uparrow\}$ et $\{\downarrow\}$ sont complets.
4. Expliquer pourquoi $\{\wedge, \vee\}$ n'est pas complet.

Exercice 2 Énumérer les mots binaires de longueur 3, puis ceux de longueur 4, selon un code de Gray.

Exercice 3 Écrire les tableaux de Karnaugh des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b}; \quad a + b; \quad \bar{a} + b; \quad a \Leftrightarrow b; \quad a \oplus b; \quad a(a + b); \quad a + ab; \\ \bar{a}\bar{b}\bar{d} + ac + \bar{a}b\bar{c}; \quad \bar{a} + bd + \bar{a}\bar{b}d; \quad \bar{a}\bar{b}c + \bar{d} + cd. \end{aligned}$$

Trouver si possible une expression plus simple grâce au tableau.

Exercice 4 Donner les expressions booléennes les plus simples possibles déduites des tableaux de Karnaugh donnés ci-dessous.

B_1		cd			
		00	01	11	10
ab	00	1	1	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	1	1	0
	10	0	1	1	0

B_2		cd			
		00	01	11	10
ab	00	1	0	0	1
	01	0	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

B_3		cd			
		00	01	11	10
ab	00	1	0	0	1
	01	1	1	1	1
	11	1	1	0	0
	10	0	0	0	0

B_4		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	1	1	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	1	1	0

Exercice 5 On souhaite construire des circuits permettant de comparer deux nombres.

1. On travaille tout d'abord sur deux nombres a et b sur **1** bit.
 - (a) Écrire les circuits testant $a < b$, $a \leq b$, $a = b$, $a > b$ et $a \geq b$.
 - (b) On suppose qu'on dispose (de plusieurs exemplaires) d'un circuit CMP_1 prenant a et b comme entrées et ayant deux sorties : $a < b$ et $a \leq b$.
Comment construire les trois autres fonctions $a = b$, $a > b$ et $a \geq b$?
2. On s'intéresse maintenant à des nombres sur **2** bits.
 - (a) Écrire le tableau de Karnaugh des fonctions $a < b$ et $a \leq b$.
 - (b) En déduire les circuits LT_2 et LE_2 correspondants, puis le circuit comparateur CMP_2 .
3. Comment cette construction pourrait se généraliser pour des nombres à n bits?