Contrôle n° 4

Exercice 1. Soit $f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$

1. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$ et leur nature (minima/maxima locaux, points selle, etc).
2. Tracer les courbes d'équation $y = 1 - x^2$ et $y = x^2 - 1$ puis dessiner D.
3. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur D.
4. Déterminer le maximum et le minimum de f sur ∂D.
5. En déduire le maximum et le minimum de f sur D.

Solution :

1. On a les calculs suivants

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(1-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(1-y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

Ainsi les points critiques (x,y) sont solutions du système suivant

$$\begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

donc sont $(0,0)$, $(\sqrt{2},1)$, $(-\sqrt{2},1)$. Calculons la Hessienne en ces points :

$$Hess\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Hess\, f\left(\sqrt{2},1\right) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}, Hess\, f\left(-\sqrt{2},1\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

$Hess\, f(0,0)$ est clairement définie positive donc f admet un minimum local strict en $(0,0)$ et comme on a les déterminants :

$$\det\left(Hess\, f\left(\sqrt{2},1\right)\right) = -8 \text{ et } \det\left(Hess\, f\left(-\sqrt{2},1\right)\right) = -8$$

les matrices Hessiennes sont non dégénérées avec valeurs propres de signes distincts : les points $\left(\pm\sqrt{2},1\right)$ sont des points selle.

3. On a

$$D = f_1^{-1}([0,+\infty[) \cap f_2^{-1}([0,+\infty[)$$

où $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont définies par $f_1(x,y) = y + 1 - x^2$ et $f_2(x,y) = 1 - x^2 - y$ sont des applications continues et $[0,+\infty[$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Ainsi, D est fermé. Maintenant, si $(x,y) \in D$, on a $-1 \leq x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2 \leq 1$ donc $y \in [-1,1]$. On déduit que $x^2 \leq 1 + y \leq 2$ donc que $|x| \leq \sqrt{2}$. Ainsi $x^2 + y^2 \leq 3$, ce qui montre que D est borné. Comme D est fermé et borné dans l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathbb{R}^2$, il est compact. Par le théorème des bornes atteintes, l'application continue f est bornée et atteint ses bornes.

4. On sait que

$$\begin{aligned} \partial D &= \left\{(x,y) \in D; y = x^2 - 1 \text{ ou } y = 1 - x^2\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2 - 1 \text{ et } -1 \leq x \leq 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = 1 - x^2 \text{ et } -1 \leq x \leq 1\right\} \end{aligned}$$

On résout la question si on trouve les minima et maxima de $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ et $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ où

$$g(x) = f(x, x^2 - 1) = (x^2-1)^2 - x^2(x^2-1) + x^2 = 1$$

et

$$h(x) = f(x, 1 - x^2) = (1-x^2)^2 - x^2(1-x^2) + x^2 = 2x^4 - 2x^2 + 1 = 2\left(\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right).$$

Ainsi, le maximum et le minimum de g est 1. Le minimum de h est $\frac{1}{2}$ atteint en $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et le maximum de h est 1 atteint en 0 et ± 1. Ainsi le minimum de f sur ∂D est $\frac{1}{2}$ et le maximum de f sur ∂D est 1.

5. Comme f est différentiable, si un extremum de f est atteint à l'intérieur de D, c'est un point critique. D'après la question 1, le seul point critique dans l'intérieur de D est $(0,0)$ qui est un minimum local. Le maximum ne peut donc pas être atteint à l'intérieur de D donc le maximum est atteint sur le bord, c'est 1 par la question 4. D'après la question 1, le seul candidat possible à être un minimum atteint à l'intérieur de D est $f(0,0) = 0$. Comme le minimum sur ∂D est $\frac{1}{4}$, 0 est bien le minimum sur D.

Exercice 2. On pose $f(x, y) = x\sin(x+2y) - 2xy\cos y - x^2\exp(x-y)$

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 de f en 0.
2. Déterminer en fonction des valeurs de $0 < a \leq 3$ si la limite de $\frac{f(x,y)}{(x^2+y^2)^{\frac{a}{2}}}$ lorsque $(x, y) \to (0,0)$ existe, et si oui calculer la limite.

Solution :

1. D'après les développements limités des fonctions usuelles cos, sin et exp,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x\left(x+2y-\frac{1}{6}(x+2y)^3+o\left((x+2y)^3\right)\right)-2xy\left(1-\frac{1}{2}y^2+o\left(y^2\right)\right)-x^2\left(1+(x-y)+\frac{1}{2}(x-y)^2+o\left((x-y)^2\right)\right) \\ &= x^2+2xy-2xy-x^2-x^3+yx^2+O\left(x\left(x+2y\right)^3\right)+O\left(xy^3\right)+O\left(x^2(x-y)^2\right) \\ &= -x^3+yx^2+o\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

où on a utilisé que pour tout polynôme homogène de degré 4, $P:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x,y) = o\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)$ lorsque $(x,y) \to (0,0)$.

2. Comme $-x^3 + yx^2$ est un polynôme homogène de degré 3,

$$-x^3+yx^2 = O\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

donc avec la question 1,

$$f(x,y) = O\left((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right).$$

On obtient donc

$$\frac{f(x,y)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{a}{2}}} = O\left((x^2+y^2)^{\frac{3-a}{2}}\right)$$

et en particulier si $a < 3$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{a}{2}}} = 0$$

Dans le cas où $a = 3$, on a plus précisément par la question 1

$$\frac{f(x,y)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{a}{2}}} = \frac{-x^3+yx}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} + o(1)$$

et cette fraction n'a pas de limite en $(0,0)$. En effet par exemple en $(x,0)$

$$\frac{f(x,0)}{\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x^3}{|x|^3} + o(1)$$

a une limite à gauche 1 et à droite -1 qui sont différentes lorsque $x \to 0$.

Exercice 3. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme

$$\|P\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| \text{ où } P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i.$$

Soit $c \in \mathbb{R}$. On définit l'application $\Phi_c : E \to \mathbb{R}$ par $\Phi_c(P) = P(c)$. On pose également

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} X^i \text{ et } Q_n(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i X^i.$$

1. Calculer $\Phi_c(P_n)$ et $\Phi_c(Q_n)$.
2. On suppose $|c| < 1$. Montrer que Φ_c est continue et calculer la norme d'opérateur de Φ_c en fonction de c.
3. On suppose maintenant $|c| \geq 1$. Φ_c est-elle continue ?

Solution :

1. Si on suppose $c \neq 1$,

$$\Phi_c(P_n) = \sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{1-c^{n+1}}{1-c}$$

et si on suppose $c \neq -1$,

$$\Phi_c(Q_n) = \sum_{i=0}^{n} (-c)^i = \frac{1-(-c)^{n+1}}{1+c}$$

Les autres cas sont donnés par :

$$\Phi_1(P_n) = \Phi_{-1}(Q_n) = n+1.$$

2. Comme Φ_c est linéaire, il s'agit de montrer que la norme de Φ_c est finie. On pose $P(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$, et on suppose que P est de degré d.

$$|\Phi_c(P)| = \left|\sum_{i=0}^{+\infty} a_i c^i\right| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |a_i||c|^i \leq \|P\|_\infty \sum_{i=0}^{d} |c|^i = \|P\|_\infty \frac{1-|c|^{d+1}}{1-|c|} \leq \frac{1}{1-|c|}\|P\|_\infty$$

donc Φ_c est continue et sa norme d'opérateur vérifie

$$\|\Phi_c\| \leq \frac{1}{1-|c|}$$

Si $0 \leq c < 1$, en sachant que $\|P_n\|_\infty = 1$ et en utilisant la question 1 :

$$\frac{\Phi_c(P_n)}{\|P_n\|_\infty} = \frac{1-c^{n+1}}{1-c} \to_{n\to+\infty} \frac{1}{1-c}$$

donc $\|\Phi_c\| = \frac{1}{1-|c|}$. Si $-1 < c \leq 0$, on utilise cette fois Q_n, qui satistait $\|Q_n\|_\infty = 1$, et on a par la question 1

$$\frac{\Phi_c(Q_n)}{\|Q_n\|_\infty} = \frac{1-(-c)^{n+1}}{1+c} \to_{n\to+\infty} \frac{1}{1-|c|}$$

donc $\|\Phi_c\| = \frac{1}{1-|c|}$.

Dans tous les cas

$$\|\Phi_c\| = \frac{1}{1-|c|}.$$

3. On a $\|P_n\|_\infty = \|Q_n\|_\infty = 1$ lorsque $c \geq 1$, $\Phi_c(P_n) \geq n$. De même, lorsque $c \leq -1$, $\Phi_c(Q_n) \geq n$. Dans tous les cas,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|\Phi_c\| \geq n$$

donc $\|\Phi_c\| = +\infty$ et Φ_c n'est pas continue.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ de norme associée $\|.\|$. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme symétrique de E, c'est à dire une application linéaire qui vérifie

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

1. Dire pourquoi u est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto \langle x, u(x)\rangle$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
3. On définit sur $E \setminus \{0\}$ l'application $\varphi : x \mapsto \frac{\langle x, u(x)\rangle}{\langle x, x\rangle}$. Montrer que φ est différentiable et calculer sa différentielle.
4. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $D\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.

Solution :

1. u est une application linéaire définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie donc elle est continue. Elle est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ car sa différentielle est constante donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2. On a pour $x, h \in E$ le calcul

$$\langle x+h, u(x+h)\rangle = \langle x, u(x)\rangle + \langle h, u(x)\rangle + \langle x, u(h)\rangle + \langle h, u(h)\rangle = \langle x, u(x)\rangle + 2\langle h, u(x)\rangle + O\left(\|h\|^2\right)$$

dont on tire que l'application en question est différentiable de différentielle en x : $h \mapsto 2\langle h, u(x)\rangle$

3. φ est le quotient de $B_u : x \mapsto \langle x, u(x)\rangle$ dont on sait qu'elle est différentiable par la question 2. par $B_{id_E} : x \mapsto \langle x, x\rangle$ dont on sait également qu'elle est différentiable par la question 2. avec $u = id_E$. Donc φ est différentiable et la différentielle vaut

$$D\varphi(x) = \frac{B_{id_E}.DB_u - B_u.DB_{id_E}}{B_{id_E}^2}$$

c'est à dire en l'appliquant en h

$$D\varphi(x).h = 2\frac{\langle x, x\rangle \langle h, u(x)\rangle - \langle x, h\rangle \langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle^2} = \frac{2}{\|x\|^2}\left\langle h, u(x) - \frac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}x\right\rangle = \frac{2}{\|x\|^2}\langle h, u(x) - \varphi(x)x\rangle$$

4. Si $D\varphi(a) = 0$, alors par la formule précédente,

$$\forall h \in E, \left\langle h, u(a) - \varphi(a)a\right\rangle = 0$$

ce qui implique $u(a) = \varphi(a)a$ et a est un vecteur propre de u. Réciproquement, si a est un vecteur propre de u, on a $u(a) = \lambda a$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\varphi(a) = \frac{\langle u(a), a\rangle}{\langle a, a\rangle} = \frac{\langle \lambda a, a\rangle}{\langle a, a\rangle} = \lambda$$

et en particulier

$$u(a) - \phi(a)a = 0.$$

Cela montre par le calcul de la question 3. que $D\varphi(a) = 0$.

Exercice 5. Soit $a < b$ deux réels distincts. On pose pour $\epsilon, x \in \mathbb{R}$

$$P_\epsilon(x) = (x-a)(x-b) + \epsilon x^3$$

1. Démontrer qu'il existe un voisinage I de 0 et deux applications de classe $\mathscr{C}^\infty$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) = b$, $g(0) = a$ et telles que pour tout $\epsilon \in I$, $f(\epsilon) > g(\epsilon)$ sont deux racines distinctes du polynôme P_ϵ. *indication : Poser $F(\epsilon, x) = P_\epsilon(x)$ et appliquer un théorème du cours.*
2. Calculer la dérivée de f et g en 0.
3. Soit $\epsilon \in I \cap \mathbb{R}_+^\star$. Démontrer qu'on peut définir un unique réel $h(\epsilon) \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$P_\epsilon(x) = \epsilon(x - f(\epsilon))(x - g(\epsilon))(x - h(\epsilon)).$$

   En considérant un coefficient de P_ϵ, montrer de plus que $h : I \cap \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
4. Calculer si elle existe la limite de $h(\epsilon)$ lorsque $\epsilon \to 0$ et $\epsilon > 0$.
5. *(Question Bonus)* Démontrer qu'il existe des coefficients $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

   $$h(\epsilon) = \frac{\alpha}{\epsilon} + \beta + \epsilon\gamma + o(\epsilon)$$

   lorsque $\epsilon \to 0$ et $\epsilon > 0$, et les calculer.

Solution :

1. Remarquons que a et b sont des racines de P_0. On pose $F(\epsilon, x) = P_\epsilon(x)$, qui est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. En particulier $F(0, a) = F(0, b) = 0$. On a de plus

$$\partial_x F(\epsilon, x) = 3\epsilon x^2 + 2x - a - b$$

et donc

$$\partial_x F(0,a) = a - b \neq 0 \text{ et } \partial_x F(0,b) = b - a \neq 0.$$

En appliquant deux fois le théorème des fonctions implicites, pour $i \in \{1,2\}$ il existe des voisinages $I_i \times J_i$ de $(0,a)$ pour $i = 1$ et $(0,b)$ pour $i = 2$, où I_i et J_i sont des intervalles et des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ $g : I_1 \to J_1$, $h : I_2 \to J_2$ qui satisfont $g(0) = a$ et $f(0) = b$ ainsi que

$$\forall(\epsilon, x) \in I_1 \times J_1, F(\epsilon, x) = 0 \Leftrightarrow x = g(\epsilon)$$

et

$$\forall(\epsilon, x) \in I_2 \times J_2, F(\epsilon, x) = 0 \Leftrightarrow x = f(\epsilon)$$

En posant $I = I_1 \cap I_2$, on répond à la question.

2. On a pour tout $\epsilon \in I$, $F(\epsilon, g(\epsilon)) = 0$ donc en dérivant cette expression,

$$f'(\epsilon) = -\frac{\partial_\epsilon F(\epsilon, f(\epsilon))}{\partial_x F(\epsilon, f(\epsilon))}$$

En l'évaluant en 0,

$$f'(0) = -\frac{\partial_\epsilon F(0,b)}{\partial_x F(0,b)}$$

On a

$$\partial_\epsilon F(\epsilon, x) = x^3$$

donc

$$\partial_x F(0,b) = b - a \text{ et } \partial_\epsilon F(0,b) = b^3$$

et

$$f'(0) = -\frac{b^3}{b-a}$$

Par un calcul similaire, on a aussi

$$g'(0) = \frac{a^3}{b-a}$$

3. Le polynôme $P_\epsilon(X) \in \mathbb{R}[X]$ est de degré 3 et admet deux racines réelles distinctes d'après la conséquence du théorème des fonctions implicites montrée en question 1. Ainsi, P_ϵ admet une troisième racine réelle notée $h(\epsilon)$ et on a la factorisation attendue. En développant,

$$P_\epsilon(X) = \epsilon X^3 - \epsilon(f(\epsilon) + g(\epsilon) + h(\epsilon))X^2 + \epsilon\big(f(\epsilon)g(\epsilon) + g(\epsilon)h(\epsilon) + h(\epsilon)f(\epsilon)\big) - \epsilon f(\epsilon)g(\epsilon)h(\epsilon)$$

et en identifiant le terme de degré 2, on obtient

$$-\epsilon(f(\epsilon) + g(\epsilon) + h(\epsilon)) = 1$$

en particulier

$$h(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} - f(\epsilon) - g(\epsilon)$$

et h est bien de classe $\mathscr{C}^\infty$.

4. On a $h(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} - f(0) - g(0) + o(1) \to -\infty$ lorsque $\epsilon \to 0$ et $\epsilon > 0$

5. On sait que

$$f(\epsilon) = f(0) + f'(0)\epsilon + o(\epsilon) = b - \frac{b^3}{b-a}\epsilon + o(\epsilon)$$

lorsque $\epsilon \to 0$ et $\epsilon > 0$ et

$$g(\epsilon) = g(0) + g'(0)\epsilon + o(\epsilon) = a + \frac{a^3}{b-a}\epsilon + o(\epsilon)$$

Ainsi, par la formule donnée en question 3,

$$h(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} - (a+b) - \frac{a^3 - b^3}{b-a}\epsilon + o(\epsilon)$$

qui se simplifie par

$$h(\epsilon) = -\frac{1}{\epsilon} - (a+b) + \big(a^2 + ab + b^2\big)\epsilon + o(\epsilon)$$

et on obtient les calculs des coefficients $\alpha = -1$, $\beta = -(a+b)$ et $\gamma = a^2 + ab + b^2$.