

## CC1 - lundi 14 février 2022

Durée : 1 heure.

L'usage d'aides électroniques ou de documents n'est pas autorisé. Une attention particulière sera apportée à la qualité de la rédaction. Les deux exercices sont indépendants.

### Exercice 1.

On considère le polynôme

$$P(X) = 7X^5 + 3X^4 + 6X^3 + 11X^2 + 2X + 5.$$

1. Rappeler la définition du contenu d'un élément de  $\mathbb{Z}[X]$ . Que vaut le contenu de  $P$  ?
2. Démontrer que  $P$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{Q}$ . En déduire que  $P$  n'a pas de facteur irréductible de degré 1 dans  $\mathbb{Z}[X]$ .
3. Factoriser  $P$  en produit d'irréductibles dans  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ , puis démontrer que  $P$  n'a pas de facteur irréductible de degré 2 dans  $\mathbb{Z}[X]$ .
4. En déduire que  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{Z}[X]$ , puis qu'il est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .
5. Les idéaux  $(P)$  et  $(2, P)$  de  $\mathbb{Z}[X]$  sont-ils premiers ? Sont-ils maximaux ?

### Exercice 2.

On considère le polynôme  $Q(X) = X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 2$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

1. Factoriser  $Q$  en produit d'irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Déterminer les décompositions en éléments simples de  $\frac{X^4}{Q}$  dans  $\mathbb{C}(X)$  et  $\mathbb{R}(X)$ .