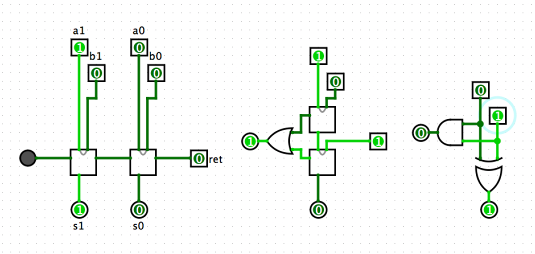
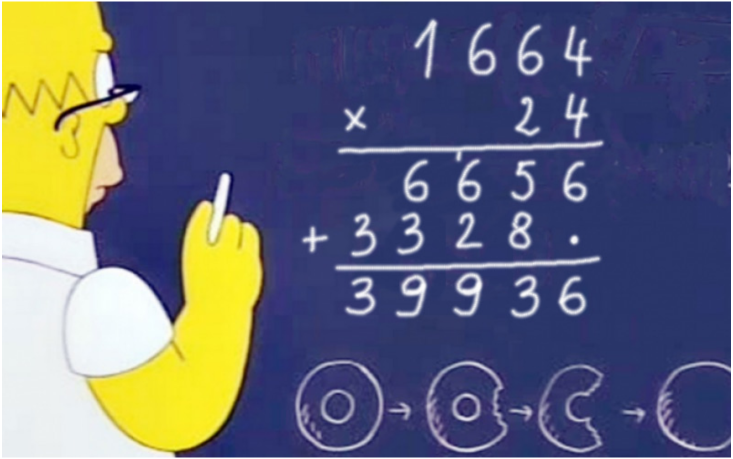
Principes de fonctionnement des machines binaires

2020–2021

Matthieu Picantin

- numération et arithmétique
- numération et arithmétique en machine
- numérisation et codage (texte, images)
- compression, cryptographie, contrôle derreur
- logique et calcul propositionnel
- circuits numériques




1664
× 24
6656
+ 3328 .
39936

Addition posée

- on s'appuie sur la *table d'addition* en base b
- on dispose les nombres en colonnes: chiffres des unités, chiffres des b-aines, chiffres des b^2-aines, etc
- on effectue la somme des chiffres de la colonne la plus à droite:
  on *pose* son chiffre des unités
  on *reporte* la retenue sur la ou les colonnes à gauche
- on recommence sur la colonne immédiatement à gauche, etc

Multiplication posée

- on s'appuie sur les *tables d'addition et de multiplication* en base b
- on dispose les deux nombres $(a_p \cdots a_0)_b$ et $(c_q \cdots c_0)_b$ en colonnes: chiffres des unités, chiffres des b-aines, chiffres des b^2-aines, etc
- on effectue le produit de $(a_p \cdots a_0)_b$ par le nombre $c_k b^k$ pour $0 \leq k \leq q$
- on conclut avec l'addition posée de ces $q + 1$ produits intermédiaires

Addition posée

- on s'appuie sur la *table d'addition* en base b
- on dispose les nombres en colonnes: chiffres des unités, chiffres des b-aines, chiffres des b^2-aines, etc
- on effectue la somme des chiffres de la colonne la plus à droite:
  on *pose* son chiffre des unités
  on *reporte* la retenue sur la ou les colonnes à gauche
- on recommence sur la colonne immédiatement à gauche, etc

Multiplication posée

- on s'appuie sur les *tables d'addition et de multiplication* en base b
- on dispose les deux nombres $(a_p \cdots a_0)_b$ et $(c_q \cdots c_0)_b$ en colonnes: chiffres des unités, chiffres des b-aines, chiffres des b^2-aines, etc
- on effectue le produit de $(a_p \cdots a_0)_b$ par le nombre $c_k b^k$ pour $0 \leq k \leq q$
- on conclut avec l'addition posée de ces $q + 1$ produits intermédiaires

La "preuve" par 9

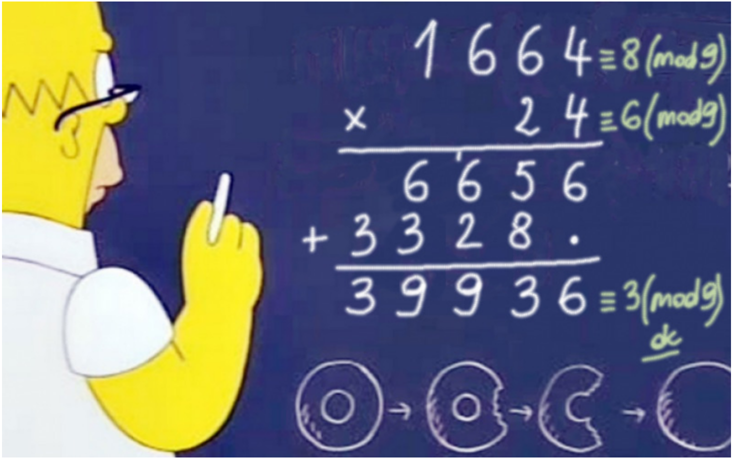
- n'est pas une *preuve* de correction, mais un moyen simple de vérification (avec un certain indice de confiance)
- utilise les propriétés de l'arithmétique modulaire
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* 9 (obtenus en faisant la somme de leurs chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k \pmod 9$$

La "preuve" par 9 pour un calcul en base 10

- n'est pas une *preuve* de correction, mais un moyen simple de vérification (avec un certain indice de confiance)
- utilise les propriétés de l'arithmétique modulaire
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* 9 (obtenus en faisant la somme de leurs chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k \pmod 9$$


1 6 6 4 ≡ 8 (mod 9)
× 2 4 ≡ 6 (mod 9)
6 6 5 6
+ 3 3 2 8 .
3 9 9 3 6 ≡ 3 (mod 9)
ok

La "preuve" par 11 pour un calcul en base 10

- est un moyen simple de vérification (avec certain indice de confiance)
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* 11 (obtenus en faisant la somme alternée de leurs chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k \pmod{11}$$

La "preuve" par 99 pour un calcul en base 10

- est un moyen simple de vérification (avec meilleur indice de confiance)
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* 99 (obtenus en faisant la somme des blocs de deux chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p/2} a_{2k+1} a_{2k} \pmod{99}$$

La "preuve" par 11 pour un calcul en base 10

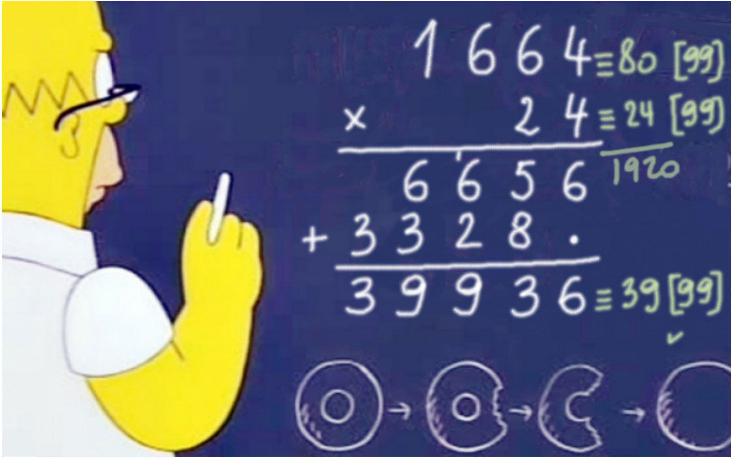
- est un moyen simple de vérification (avec certain indice de confiance)
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* 11 (obtenus en faisant la somme alternée de leurs chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k \pmod{11}$$

La "preuve" par 99 pour un calcul en base 10

- est un moyen simple de vérification (avec meilleur indice de confiance)
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* 99 (obtenus en faisant la somme des blocs de deux chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p/2} a_{2k+1} a_{2k} \pmod{99}$$


1 6 6 4 ≡ 80 [99]
× 2 4 ≡ 24 [99]
1920
6 6 5 6
+ 3 3 2 8 .
3 9 9 3 6 ≡ 39 [99]

La "preuve" par $b-1$ pour un calcul en base b

- n'est pas une *preuve* de correction, mais un moyen simple de vérification (avec un certain indice de confiance)
- utilise les propriétés de l'arithmétique modulaire
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* $b-1$ (obtenus en faisant la somme de leurs chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k b^k \equiv \sum_{k=0}^{p} a_k \pmod{b-1}$$

La "preuve" par $b+1$ pour un calcul en base b

- est un moyen simple de vérification (avec certain indice de confiance)
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* $b+1$ (obtenus en faisant la somme alternée de leurs chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k b^k \equiv \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k \pmod{b+1}$$

La "preuve" par b^2-1 pour un calcul en base b

- est un moyen simple de vérification (avec meilleur indice de confiance)
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* b^2-1 (obtenus en faisant la somme des blocs de deux chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k b^k \equiv \sum_{k=0}^{p/2} a_{2k+1}a_{2k} \pmod{b^2-1}$$

La "preuve" par $b+1$ pour un calcul en base b

- est un moyen simple de vérification (avec certain indice de confiance)
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* $b+1$ (obtenus en faisant la somme alternée de leurs chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k b^k \equiv \sum_{k=0}^{p} (-1)^k a_k \pmod{b+1}$$

La "preuve" par b^2-1 pour un calcul en base b

- est un moyen simple de vérification (avec meilleur indice de confiance)
- consiste à "refaire" le calcul mais en considérant les nombres *modulo* b^2-1 (obtenus en faisant la somme des blocs de deux chiffres, etc)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k b^k \equiv \sum_{k=0}^{p/2} a_{2k+1} a_{2k} \pmod{b^2-1}$$

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

Divisibilité par 2, 4, 5 ou 8, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 2 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 4 ssi $(a_1 a_0)_{10}$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 5 ssi a_0 l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 8 ssi $(a_2 a_1 a_0)_{10}$ l'est

Divisibilité par 3, 6, 9 ou 11, en base 10

- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 3 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 6 ssi $a_p + \cdots + a_0$ est divisible par 3 et a_0 par 2
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 9 ssi $a_p + \cdots + a_0$ l'est
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 11 ssi $(-1)^p a_p + \cdots + a_2 - a_1 + a_0$ l'est

Divisibilité par 7, en base 10

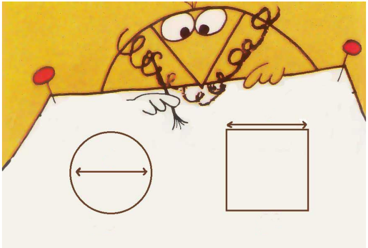
- $(a_p \cdots a_0)_{10}$ est divisible par 7 ssi $(a_p \cdots a_1)_{10} + 5a_0$ l'est

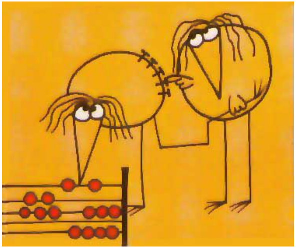
Et dans une base b quelconque?

Numération positionnelle en base $b > 1$

- exactement b chiffres, disons $\{0, 1, \cdots, b-1\}$
- $(a_p \cdots a_0{,}a_{-1}a_{-2} \cdots a_{-q})_b$ représente le nombre réel $\sum_{k=-q}^{p} a_k b^k$, soit

$$a_p \times b^p + \cdots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0 + a_{-1} \times \frac{1}{b} + a_{-2} \times \frac{1}{b^2} + \cdots + a_{-q} \times \frac{1}{b^q}$$

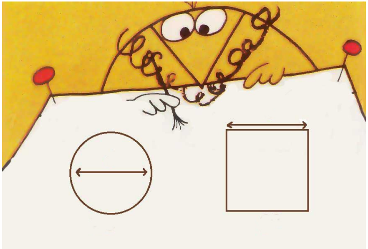


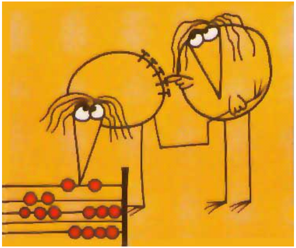


Numération positionnelle en base $b > 1$

- exactement b chiffres, disons $\{0, 1, \cdots, b-1\}$
- $(a_p \cdots a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-q})_b$ représente le nombre réel $\sum_{k=-q}^{p} a_k b^k$, soit

$$a_p \times b^p + \cdots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0 + a_{-1} \times \frac{1}{b} + a_{-2} \times \frac{1}{b^2} + \cdots + a_{-q} \times \frac{1}{b^q}$$

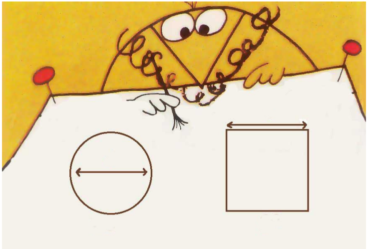


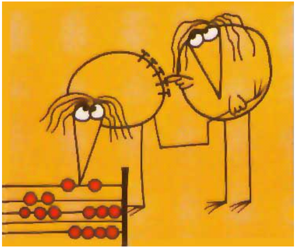


Numération positionnelle en base $b > 1$

- exactement b chiffres, disons $\{0, 1, \cdots, b-1\}$
- $(a_p \cdots a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-q})_b$ représente le nombre réel $\sum_{k=-q}^{p} a_k b^k$, soit

$$a_p \times b^p + \cdots + a_2 \times b^2 + a_1 \times b + a_0 + a_{-1} \times \frac{1}{b} + a_{-2} \times \frac{1}{b^2} + \cdots + a_{-q} \times \frac{1}{b^q}$$





Comment convertir une écriture en base b $\quad (a_p \cdots a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots)_b$

vers une écriture en base d? $\quad (c_q \cdots c_0, c_{-1} c_{-2} \cdots)_d$

Méthode (par divisions successives) pour la partie entière

- on convertit la partie entière $(a_p \cdots a_0)_b = (c_q \cdots c_0)_d$

Méthode par multiplications successives pour la partie fractionnaire

- on multiplie $(0,a_{-1} \cdots a_{-t})_b$ par d (calcul en base b toujours)
- on collecte la partie entière c_{-1} de ce produit
- on recommence avec sa partie fractionnaire
- on s'arrête quand

  le produit est nul: on renvoie la suite finie des chiffres collectés

  ou déjà obtenu: on renvoie la suite ultimement périodique

Comment convertir une écriture en base b $\quad (a_p \cdots a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots)_b$

vers une écriture en base d? $\quad (c_q \cdots c_0, c_{-1} c_{-2} \cdots)_d$

Méthode (par divisions successives) pour la partie entière

- on convertit la partie entière $(a_p \cdots a_0)_b = (c_q \cdots c_0)_d$

Méthode par multiplications successives pour la partie fractionnaire

- on multiplie $(0,a_{-1} \cdots a_{-t})_b$ par d (calcul en base b toujours)
- on collecte la partie entière c_{-1} de ce produit
- on recommence avec sa partie fractionnaire
- on s'arrête quand
  le produit est nul: on renvoie la suite finie des chiffres collectés
  ou déjà obtenu: on renvoie la suite ultimement périodique

Comment convertir une écriture en base b $\qquad (a_p \cdots a_0{,}a_{-1}a_{-2}\cdots)_b$

vers une écriture en base d? $\qquad (c_q \cdots c_0{,}c_{-1}c_{-2}\cdots)_d$

Méthode (par divisions successives) pour la partie entière

- on convertit la partie entière $(a_p \cdots a_0)_b = (c_q \cdots c_0)_d$

Méthode par multiplications successives pour la partie fractionnaire

- on multiplie $(0{,}a_{-1} \cdots a_{-t})_b$ par d (calcul en base b toujours)
- on collecte la partie entière c_{-1} de ce produit
- on recommence avec sa partie fractionnaire
- on s'arrête quand
  le produit est nul: on renvoie la suite finie des chiffres collectés
  ou déjà obtenu: on renvoie la suite ultimement périodique

Comment convertir une écriture en base b $\quad (a_p \cdots a_0,a_{-1}a_{-2}\cdots)_b$

vers une écriture en base d? $\quad (c_q \cdots c_0,c_{-1}c_{-2}\cdots)_d$

Méthode (par divisions successives) pour la partie entière

- on convertit la partie entière $(a_p \cdots a_0)_b = (c_q \cdots c_0)_d$

Méthode par multiplications successives pour la partie fractionnaire

- on multiplie $(0,a_{-1}\cdots a_{-t})_b$ par d (calcul en base b toujours)
- on collecte la partie entière c_{-1} de ce produit
- on recommence avec sa partie fractionnaire
- on s'arrête quand $\quad (0,c_{-1}\cdots c_{-r})_d$

  le produit est nul: on renvoie la suite finie des chiffres collectés

  ou déjà obtenu: on renvoie la suite ultimement périodique

Comment convertir une écriture en base b $(a_p \cdots a_0{,}a_{-1}a_{-2}\cdots)_b$

vers une écriture en base d? $(c_q \cdots c_0{,}c_{-1}c_{-2}\cdots)_d$

Méthode (par divisions successives) pour la partie entière

- on convertit la partie entière $(a_p \cdots a_0)_b = (c_q \cdots c_0)_d$

Méthode par multiplications successives pour la partie fractionnaire

- on multiplie $(0{,}a_{-1}\cdots a_{-t})_b$ par d (calcul en base b toujours)
- on collecte la partie entière c_{-1} de ce produit
- on recommence avec sa partie fractionnaire
- on s'arrête quand $(0{,}c_{-1}\cdots c_{-r})_d$
  le produit est nul: on renvoie la suite finie des chiffres collectés
  ou déjà obtenu: on renvoie la suite ultimement périodique
  $(0{,}\underbrace{c_{-1}\cdots c_{-r}}_{\text{prépériode}}(\underbrace{c_{-r-1}\cdots c_{-r-s}}_{\text{période}})^{\omega})_d$