# PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE.

# PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

## PHILOSOPHIE NATURELLE,

*Par feue Madame la Marquise* DU CHASTELLET.

TOME SECOND.



A PARIS,

Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais,
LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté
de la Comédie Françoise, au Parnasse.

M. D. CCLIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

# DU SYSTÊME DU MONDE.

## LIVRE TROISIÈME.

J'AI donné dans les Livres précédens les principes de la Philosophie naturelle, & je les ai traités plutôt en Mathématicien qu'en Physicien, car les vérités mathématiques peuvent servir de base à plusieurs recherches philosophiques, telles que les loix du mouvement & des forces motrices. Et afin de rendre les matieres plus interessantes, j'y ai joint quelques scholies dans lesquels j'ai traité de la densité des corps & de leur résistance, du vuide, du mouvement du son & de celui de la lumiere; qui sont, à proprement parler, des recherches plus physiques. Il me reste à expliquer par les mêmes principes mathématiques le systême général du monde.

J'avois d'abord traité l'objet de ce troisiéme Livre par une Méthode moins mathématique, afin qu'il pût être à la portée de plus de personnes. Mais de crainte de donner lieu aux chicanes de ceux qui ne voudroient pas quitter leurs anciens préjugés, parce qu'ils ne sentiroient pas la force des conséquences que je tire de mes principes, faute d'avoir assez médité les Propositions que j'ai données dans les Livres précedens, j'ai rédigé ce Livre en plusieurs Propositions, selon la méthode des Mathématiciens, pour ceux qui auront lu les deux premiers Livres, car c'est pour eux que ce troisiéme Livre est destiné; & comme il y a dans les deux premiers Livres plusieurs Propositions qui pourroient arrêter long-temps, même les Mathématiciens, je ne prétends pas exiger qu'ils lisent ces deux premiers Livres entiers; il leur suffira d'avoir lu attentivement les Définitions, les Loix du Mouvement, & les trois premieres Sections du premier Livre, & ils pourront passer ensuite à ce troisiéme Livre, qui traite du Systême du Monde, & avoir soin seulement de consulter les autres Propositions des deux premiers Livres lorsqu'ils les trouveront citées & qu'ils en auront besoin.

## *REGLES QU'IL FAUT SUIVRE DANS L'ETUDE DE LA PHYSIQUE.*

### REGLE PREMIERE.

*Il ne faut admettre de causes, que celles qui sont nécessaires pour expliquer les Phénomenes.*

La nature ne fait rien en vain, & ce seroit faire des choses inutiles que d'opérer par un plus grand nombre de causes ce qui peut se faire par un plus petit.

### REGLE II.

*Les effets du même genre doivent toujours être attribués, autant qu'il est possible, à la même cause.*

Ainsi la respiration de l'homme & celle des bêtes; la chute d'une pierre en Europe & en Amérique; la lumiere du feu d'ici-bas

& celle du Soleil ; la réflexion de la lumiere sur la terre & dans les Planettes, doivent être attribuées respectivement aux mêmes causes.

## REGLE III.

*Les qualités des corps qui ne sont susceptibles ni d'augmentation ni de diminution, & qui appartiennent à tous les corps sur lesquels on peut faire des expériences, doivent être regardées comme appartenantes à tous les corps en général.*

On ne peut connoître les qualités des corps que par l'expérience, ainsi on doit regarder comme des qualités générales celles qui se trouvent dans tous les corps, & qui ne peuvent souffrir de diminution, car il est impossible de dépouiller les corps des qualités qu'on ne peut diminuer. On ne peut pas opposer des rêveries aux expériences, & on ne doit point abandonner l'analogie de la nature qui est toujours simple & semblable à elle-même.

L'étendue des corps ne se connoît que par les sens, & elle ne se fait pas sentir dans tous les corps : mais comme l'étendue appartient à tous ceux qui tombent sous nos sens, nous affirmons qu'elle appartient à tous les corps en général.

Nous éprouvons que plusieurs corps sont durs : or la dureté du tout vient de la dureté des parties, ainsi nous admettons cette qualité non seulement dans les corps dans lesquels nos sens nous la font éprouver, mais nous en inférons, avec raison, que les particules indivisées de tous les corps doivent être dures.

Nous concluons de la même maniere, que tous les corps sont impénétrables. Car tous ceux que nous touchons étant impénétrables, nous regardons l'impénétrabilité comme une propriété qui appartient à tous les corps.

Tous les corps que nous connoissons étant mobiles, & doués d'une certaine force (que nous appellons force d'inertie) par laquelle ils perséverent dans le mouvement ou dans le repos, nous concluons que tous les corps en général ont ces propriétés. L'extension, la dureté, l'impénétrabilité, la mobilité, & l'inertie du tout vient donc de l'extenſion, de la dureté, de l'impénétrabilité, de la mobilité, & de l'inertie des parties : d'où nous concluons que toutes les petites parties de tous les corps ſont étendues, dures, impénétrables, mobiles, & douées de la force d'inertie. Et c'eſt-là le fondement de toute la Phyſique.

De plus, nous ſçavons encore par les phénomenes, que les parties contigues des corps peuvent ſe ſéparer, & les Mathématiques font voir que les parties indiviſées les plus petites peuvent être diſtinguées l'une de l'autre par l'eſprit. On ignore encore ſi ces parties diſtinctes, & non diviſées, pourroient être ſéparées par les forces de la nature ; mais s'il étoit certain, par une ſeule expérience, qu'une des parties, qu'on regarde comme indiviſibles, eût ſouffert quelque diviſion en ſéparant ou briſant un corps dur quelconque : nous conclurions par cette regle, que non ſeulement les parties diviſées ſont ſéparables, mais que celles qui ſont indiviſées peuvent ſe diviſer à l'infini.

Enfin, puiſqu'il eſt conſtant par les expériences & par les obſervations aſtronomiques, que tous les corps qui ſont près de la ſurface de la terre péſent ſur la terre, ſelon la quantité de leur matiere ; que la lune péſe ſur la terre à raiſon de ſa quantité de matiere, que notre mer péſe à ſon tour ſur la lune, que toutes les planettes péſent mutuellement les unes ſur les autres, & que les cométes péſent auſſi ſur le ſoleil, on peut conclure, ſuivant cette troiſiéme regle que tous les corps gravitent mutuellement les uns vers les autres. Et ce raiſonnement en faveur de la gravité univerſelle des corps, tiré des phénomenes, ſera plus fort que celui par lequel on conclut leur impénétrabilité : car nous n'avons aucune expérience ni aucune obſervation qui nous aſſure que les corps céleſtes ſont impénétrables. Cependant je n'affirme point que la gravité ſoit eſſentielle aux corps. Et je n'entends par la force qui réſide dans les corps, que la ſeule force d'inertie, laquelle eſt immuable ; au-lieu que la gravité diminue lorſqu'on s'éloigne de la terre.

## REGLE IV.

*Dans la Philosophie expérimentale, les propositions tirées par induction des phénomenes doivent être regardées malgré les hypothèses contraires, comme éxactement ou à peu près vraies, jusqu'à ce que quelques autres phénomenes les confirment entierement ou fassent voir qu'elles sont sujettes à des exceptions.*

Car une hypothèse ne peut affoiblir les raisonnemens fondés sur l'induction tirée de l'expérience.

# PHE'NOMENES.

## PHÉNOMENE PREMIER.

*Les satellites de Jupiter décrivent autour de cette Planette des aires proportionnelles aux temps, & leurs temps périodiques (en supposant que les étoiles fixes soient en repos) sont en raison sesquiplée de leurs distances au centre de cette Planette.*

C'est ce qui est constaté par les observations astronomiques. Car les orbes de ces planettes sont à peu près des cercles concentriques à Jupiter, & leurs mouvemens dans ces cercles paroissent uniformes. A l'égard de leurs temps périodiques tous les Astronomes conviennent qu'ils sont en raison sesquiplée des demi diamétres de leurs orbes; & c'est ce qu'on va voir par la table suivante.

*Temps périodiques des satellites de Jupiter.*

$1^j\ 18^h\ 27'\ 34''$. $3^j\ 13^h\ 13'\ 42''$. $7^j\ 3^h\ 42'\ 36''$. $16^j\ 16^h\ 32'\ 9''$.

*Distances des satellites au centre de Jupiter.*

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Par les observations* de Borelli. | $5\frac{2}{3}$ | $8\frac{2}{3}$ | 14 | $24\frac{2}{3}$ | demi diamétre de Jupiter. |
| de Townley, par le Micrométre. | 5,52 | 8,78 | 13,47 | 24,72 | |
| de Cassini, par le Télescope. | 5 | 8 | 13 | 23 | |
| de Cassini, par les éclipses des satellites. | $5\frac{2}{3}$ | 9 | $14\frac{23}{60}$ | $25\frac{3}{10}$ | |
| *Par les temps périodiques.* | 5,667 | 9,017 | 14,384 | 25,299 | |

Les élongations des satellites de Jupiter & son diamétre ont été déterminées très-exactement par le Docteur *Pound* avec d'excellens micrométres de la maniere suivante.

La plus grande élongation héliocentrique du quatriéme satellite au centre de Jupiter fut prise avec un micrométre placé dans un tube de 15 pieds, & elle se trouva de 8' 16'' environ dans la moyenne distance de Jupiter à la terre.

Celle du troisiéme satellite fut prise avec un télescope de 123 pieds armé d'un micrométre, & elle se trouva à la même distance de Jupiter à la terre, de 4' 42''. Les plus grandes élongations des autres satellites, à la même distance de Jupiter à la terre, sont, par les temps périodiques, de 2' 56'' 47''', & de 1' 51'' 6'''.

Le diamétre de Jupiter fut pris souvent avec un micrométre placé dans un télescope de 123 pieds, & ce diamétre étant réduit à la moyenne distance de Jupiter au Soleil ou à la terre, il se trouva toujours avoir moins de 40'', mais jamais moins que 38'', & il en avoit souvent 39''. Avec des télescopes moins grands ce diamétre est de 40'' ou de 41''. Car la lumiere de Jupiter à cause de l'inégale refrangibilité des rayons, est un peu dilatée, & cette dilatation a une moindre raison au diamétre de Jupiter dans les grands télescopes qui sont faits avec exactitude, que dans ceux qui sont plus petits ou moins parfaits.

Dans les observations des passages du premier & du troisiéme satellite sur le disque de Jupiter, par lesquelles on détermina les temps écoulés depuis le commencement de l'entrée sur le disque jusqu'au commencement de la sortie, & depuis l'entrée totale jusqu'à la sortie totale, on employa un telescope de la même longueur. Et le diamétre de Jupiter dans sa moyenne distance à la terre se trouva, par le passage du premier satellite, de $37\frac{1}{8}''$, & par le passage du troisiéme, de $37\frac{3}{8}''$. Mais le temps que l'ombre du premier satellite employa à traverser le disque de Jupiter ayant été observé, il donna le diamétre de Jupiter de 37'' environ, dans la moyenne distance de Jupiter à la terre. Prenant donc environ $37\frac{1}{4}''$ pour ce diamétre, les plus grandes élongations du premier, du second, du troisiéme, & du quatriéme satellite mesurées en demi diamétres de Jupiter sont de 5,965. 9,494. 15,141. & 26,63. respectivement.

## PHÉNOMENE II.

*Les satellites de Saturne décrivent autour de cette Planette des aires proportionnelles aux temps ; & leurs temps périodiques, ( les étoiles fixes étant supposées en repos ) sont en raison sesquiplée de leurs distances au centre de Saturne.*

Les observations de Cassini donnent les distances de ces planettes au centre de Saturne, & leurs temps périodiques, tels qu'ils sont marqués dans la table suivante.

*Temps périodiques des satellites de Saturne.*

$1^{j}\ 21^{h}\ 18'\ 27''$. $2^{j}\ 17^{h}\ 41'\ 22''$. $4^{j}\ 12^{h}\ 25'\ 12''$. $15^{j}\ 22^{h}\ 41'\ 14''$. $79^{j}\ 7^{h}\ 48'\ 00''$.

*Distances des satellites au centre de Saturne en demi diamétres de son anneau.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Par les observations.* | $1\frac{19}{20}$. | $2\frac{1}{2}$. | $3\frac{1}{2}$. | 8. | 24. |
| *Par les temps périodiques.* | 1,93. | 2,47. | 3,45. | 8. | 23,35. |

Les observations donnent ordinairement pour la plus grande élongation du quatriéme satellite au centre de Saturne environ huit demi diamétres. Mais cette plus grande élongation prise avec un excellent micrométre adapté à un télescope d'*Hughens* de 123 pieds, a été trouvée de huit demi diamétres & $\frac{7}{10}$. Par cette observation & par les temps périodiques, les distances des satellites au centre de Saturne sont en demi diamétres de son anneau de 2, 1. 2, 69. 3, 75. 8, 7. & 25, 35.

Le diamétre de Saturne, par le même télescope, étoit au diamétre de son anneau, comme 3 à 7, & le diamétre de l'anneau les 28 & 29 May de l'année 1719. fut trouvé de 43″, ce qui donne 42″ pour le diamétre de l'anneau dans la moyenne distance de Saturne à la terre, & 18″ pour le diamétre de Saturne. C'est ainsi qu'on les trouve avec les meilleurs & les plus grands télescopes, car dans les grands télescopes, les grandeurs apparentes des corps céléstes ont une plus grande proportion à la dilatation de la lumiere vers les bords de leurs disques, que dans les petits. Si on ôte toute la lumiere erratique, le diamétre de Saturne sera à peine de 16″.

## PHÉNOMENE III.

*Les cinq principales planettes, Mercure, Venus, Mars, Jupiter & Saturne enferment le Soleil dans leurs orbes.*

Il est prouvé par les phases de Mercure & de Venus que ces planettes tournent autour du Soleil. Lorsque tout leur disque est éclairé elles sont au-delà du Soleil; quand leur disque est à moitié obscurci elles sont en quadrature avec le Soleil; & quand elles paroissent en croissant elles sont entre le Soleil & nous; & quelquefois elles passent sur son disque sur lequel elles paroissent alors comme des espéces de taches. On est certain que Mars enferme le Soleil dans son orbe, parce que son disque est entierement éclairé lorsqu'il est prêt d'être en conjonction avec le Soleil, & qu'il est gibbeux dans ses quadratures. La même chose est prouvée pour Saturne & pour Jupiter parce qu'ils nous paroissent toujours entierement éclairés: & la projection des ombres de leurs satellites sur leur globe prouve que ces planettes empruntent leur lumiere du Soleil.

## PHÉNOMENE IV.

*Les temps périodiques des cinq principales planettes autour du Soleil, & celui de la terre autour du Soleil, ou du Soleil autour de la terre, (en supposant les étoiles fixes en repos) sont en raison sesquiplée de leur moyenne distance au Soleil.*

Tout le monde sçait que cette Proportion a été découverte par

par *Kepler*. Les temps périodiques & les dimenſions des orbites ſont les mêmes, ſoit que le Soleil tourne autour de la terre, ſoit que la terre tourne autour du Soleil. Tous les Aſtronomes conviennent de la raiſon dans laquelle ſont les temps périodiques. Mais pour les grandeurs des orbites, *Kepler* & *Bouillaut* ſont ceux qui les ont déterminées avec le plus de ſoin d'après les obſervations : & les diſtances moyennes, qui répondent aux temps périodiques, ne diffèrent pas ſenſiblement des diſtances qu'ils ont trouvées, & elles ſont pour la plûpart moyennes entre ce que donnent leurs obſervations ; comme on le peut voir dans la table ſuivante.

*Temps périodiques de la terre & des planettes autour du Soleil par rapport aux fixes, en jours & en parties décimales de jour.*

| ♄ | ♃ | ♂ | ♁ | ♀ | ☿ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10759,275. | 4332,514. | 686,9785. | 365,2565. | 224,6176. | 87,9692. |

*Diſtances moyennes des planettes & de la terre au Soleil.*

| | ♄ | ♃ | ♂ | ♁ | ♀ | ☿ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Selon *Kepler*. | 951000. | 519650. | 152350. | 100000. | 72400. | 38806. |
| Selon *Bouillaut*. | 954198. | 522520. | 152350. | 100000. | 72398. | 38585. |
| Selon les temps périodiques. | 954006. | 520096. | 152369. | 100000. | 72333. | 38710. |

Il n'y a point de diſputes ſur les diſtances de Venus & de Mercure au Soleil, car elles ſont déterminées par leurs élongations au Soleil. Et les éclipſes des ſatellites de Jupiter ôtent toute eſpéce de doute ſur les diſtances au Soleil des planettes ſupérieures. Car par ces éclipſes on détermine la poſition de l'ombre que Jupiter projette, & par-là on a la longitude héliocentrique de Jupiter. Et les longitudes héliocentriques & géocentriques comparées entre elles déterminent la diſtance de Jupiter.

## PHÉNOMENE V.

*Si on prend la terre pour centre des révolutions des planettes principales, les aires qu'elles décrivent ne seront point proportionnelles aux temps; mais si on regarde le Soleil comme le centre de leurs mouvemens, on trouvera alors leurs aires proportionnelles aux temps.*

Dans la premiere de ces suppositions on trouveroit que les planettes avancent quelquefois, que quelquefois elles sont stationnaires, & que d'autres fois elles sont rétrogrades : mais dans la seconde elles avancent toujours, & cela d'un mouvement à peu près uniforme, qui est cependant un peu plus prompt dans leurs périhélies, & plus lent dans leurs aphélies, ensorte que les aires sont toujours égales en temps égaux. Cette Proposition est très-connue des Astronomes, & elle est démontrée surtout avec une grande évidence pour la planette de Jupiter par les éclipses de ses satellites, lesquelles, comme nous avons déja dit, déterminent les longitudes héliocentriques de cette planette & ses distances au Soleil.

## PHÉNOMENE VI.

*La Lune décrit autour de la terre des aires proportionnelles aux temps.*

Cela se prouve par le mouvement angulaire de la Lune, & par son diamétre apparent. Les mouvemens de la Lune sont à la vérité un peu troublés par la force du Soleil, mais je néglige dans ces Phénomenes ces petites erreurs insensibles.

# PROPOSITIONS.

## PROPOSITION I. THÉORÉME I.

*Les forces par lesquelles les satellites de Jupiter sont retirés perpétuellement du mouvement rectiligne & retenus dans leurs orbites, tendent au centre de Jupiter & sont en raison réciproque des quarrés de leurs distances à ce centre.*

La premiere partie de cette Proposition est prouvée par le Phénomene 1. & par la seconde & la troisiéme Proposition du premier Livre : & la derniere l'est par le premier Phénomene, & par le Cor. 6. de la Prop. 4. du même Livre.

Il en est de même des satellites de Saturne par le Phénomene 2.

## PROPOSITION II. THÉORÉME II.

*Les forces par lesquelles les planettes principales sont perpétuellement retirées du mouvement rectiligne, & retenues dans leurs orbites, tendent au Soleil, & sont réciproquement comme le quarré de leurs distances à son centre.*

La premiere partie de cette Proposition se prouve par le Phénomene 5. & par la seconde Proposition du Livre 1. l'autre partie se prouve par le Phénomene 4. & la Prop. 4. du même Livre. Cette seconde partie de la Proposition se démontreroit encore très-rigoureusement par la fixité des aphélies. Car pour peu que les planettes s'écartassent de cette loi le mouvement des apsides seroit remarquable à chaque révolution, (par le Cor. 1. de la Prop. 45. Liv. 1.) & deviendroit très-considérable au bout de plusieurs révolutions.

## PROPOSITION III. THÉORÉME III.

*La force qui retient la Lune dans son orbite, tend vers la terre, &*

*est en raison réciproque du quarré de la distance des lieux de la Lune au centre de la terre.*

La premiere partie de cette Proposition se prouve par le Phénomene 6. & par les Propositions 2. & 3. du premier Livre, & la derniere par le mouvement très-lent de l'apogée lunaire. Car ce mouvement, qui à chaque révolution n'est que de trois dégrés & de trois minutes en conséquence, peut être négligé. Or il est clair (par le Cor. 1. de la Prop. 45. Liv. 1.) que si on prend le rapport de $D$ à 1. pour exprimer celui de la distance de la Lune du centre de la terre au demi diamétre de la terre; la force qui produit ce mouvement, sera réciproquement comme $D^{2\frac{4}{243}}$, c'est-à dire, en une raison un peu plus grande que la raison doublée inverse de la distance, mais qui approche plus de $59\frac{3}{4}$ parties de la doublée que de la triplée; & comme la différence de cette force à celle qui seroit exactement en raison inverse du quarré, vient de l'action du Soleil, (comme je l'expliquerai dans la suite) on peut la négliger ici. L'action du Soleil en tant qu'il détourne la Lune de la terre, est à peu près comme la distance de la Lune à la terre; donc (par ce qui a été dit dans le Cor. 2. de la Prop. 45. du Liv. 1.) elle est à la force centripéte de la Lune comme 2 à 357,45 à peu près, ou comme 1 à $178\frac{29}{40}$. Et en négligeant cette petite action du Soleil, la force restante par laquelle la Lune est retenue dans son orbite, sera réciproquement comme $D^2$, ce qui paroîtra clairement en comparant cette force avec la force de la gravité, comme dans la Proposition suivante.

*Cor.* Si la force centripéte médiocre par laquelle la Lune est retenue dans son orbite est premiérement augmentée dans la raison de $177\frac{29}{40}$, à $178\frac{29}{40}$, & ensuite en raison doublée du demi diamétre de la terre à la moyenne distance du centre de la Lune au centre de la terre: on aura la force centripéte de la Lune près de la surface de la terre, en supposant que cette force, en descendant vers la surface de la terre, augmente continuellement en raison doublée inverse de la hauteur.

## PROPOSITION IV. THÉORÉME IV.

*La Lune gravite vers la terre, & par la force de la gravité elle est continuellement retirée du mouvement rectiligne & retenue dans son orbite.*

La moyenne distance de la Lune à la terre dans les syzygies est, suivant *Ptolomée* & plusieurs Astronomes, de 59 demi diamétres de la terre, *Vendelinus* & *Hughens* la font de 60, *Copernic* de $60\frac{1}{3}$, *Street* de $60\frac{2}{5}$ & *Ticho* de $56\frac{1}{2}$. Mais *Ticho* & tous ceux qui suivent ses tables de réfraction, supposent que les réfractions du Soleil & de la Lune sont plus grandes que celles des étoiles fixes, de 4 ou 5 minutes environ, (ce qui est entierement contraire à ce qu'on connoît de la lumiere) & par-là ils ont augmenté la parallaxe de la Lune d'autant de minutes, c'est-à-dire, presque de la douziéme ou de la quinziéme partie de toute sa parallaxe.

En corrigeant cette erreur, on trouvera cette distance déterminée par *Ticho* de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres de la terre environ, c'est-à-dire, telle à peu près que les autres Astronomes l'avoient trouvée.

Prenons 60 demi diamétres de la terre pour la distance moyenne dans les syzygies; & supposons que la révolution de la Lune autour de la terre, par rapport aux étoiles fixes, s'acheve en 27 jours 7 heures 43 minutes, comme les Astronomes l'ont déterminé : enfin prenons 123249600 pieds de Paris pour la circonférence de la terre, suivant les mesures prises en France : on aura $15\frac{1}{12}$ pieds de Paris pour l'espace que la Lune parcoureroit en une minute, si elle étoit privée de tout autre mouvement & qu'elle descendit vers la terre par la seule force qui la retient (selon le Cor. de la Prop. 3.) dans son orbite : ce qui est aisé à tirer, par le calcul, soit de la Prop. 36. du Liv. 1. ou (ce qui revient au même) du Cor. 9. de la quatriéme Proposition du même Livre. Car le sinus verse de l'arc que la

Lune parcourt en une minute, dans son mouvement moyen, à la distance de 60 demi diamétres de la terre, est de $15\frac{1}{12}$ pieds de Paris environ, ou plus exactement de 15 pieds un pouce & $1\frac{4}{9}$ lignes. Or, comme cette force doit augmenter en approchant de la terre en raison doublée inverse de la distance, & que par conséquent elle doit être $60 \times 60$ fois plus grande à la surface de la terre qu'à la distance où est la Lune; un corps qui tomberoit avec cette force, devroit parcourir ici-bas dans une minute $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$ pieds de Paris, & dans une seconde $15\frac{1}{12}$ pieds de Paris, ou plus exactement 15 pieds 1 pouce & $1\frac{4}{9}$ lignes. Et c'est en effet l'espace que les corps décrivent dans une seconde en tombant vers la terre. Car la longueur du pendule qui bat les secondes dans la latitude de Paris, est de 3 pieds de Paris & 8 lignes & demie, selon que *M. Hughens* l'a déterminé; & la hauteur qu'un corps grave parcourt en tombant pendant une seconde, est à la demi longueur de ce pendule en raison doublée de la circonférence du cercle à son diamétre (comme *M. Hughens* l'a aussi déterminé) c'est-à-dire, que cette hauteur est de 15 pieds de Paris 1 pouce & $1\frac{7}{9}$ lignes. Donc la force par laquelle la Lune est retenue dans son orbite, seroit égale à la force de la gravité ici-bas, si la Lune étoit près de la surface de la terre, donc (selon les Regles 1 & 2.) c'est cette même force que nous appellons *gravité*. Car si cette force étoit autre que la gravité, les corps en s'approchant de la terre par ces deux forces réunies descendroient deux fois plus vîte, & ils parcoureroient en tombant pendant une seconde un espace de $30\frac{1}{6}$ pieds de Paris : ce qui est entierement contraire à l'expérience.

Ce calcul est fondé sur l'hypotése que la terre est en repos, car si la terre & la Lune se meuvent autour du Soleil, & qu'elles tournent en même temps autour de leur commun centre de gravité: la distance respective des centres de la Lune & de la terre sera de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres de la terre environ, la loi de la gravité demeurant la même; c'est ce qu'on verra clairement si on en veut faire le calcul, lequel ne demande que la Prop. 60. du Livre 1.

## *SCHOLIE.*

On peut rendre la démonſtration de cette Propoſition plus ſenſible, par le raiſonnement ſuivant. Si pluſieurs Lunes faiſoient leurs révolutions autour de la terre, ainſi que dans le ſyſtême de Jupiter ou de Saturne, leurs temps périodiques, par l'induction, ſuivroient la loi découverte par *Kepler*, & par conſéquent leurs forces centripétes ( Prop. 1. de ce Livre ) ſeroient réciproquement comme les quarrés de leurs diſtances au centre de la terre. Et ſi celle de ces Lunes qui ſeroit la plus proche de la terre étoit petite, & qu'elle touchât preſque le ſommet des plus hautes montagnes : la force centripéte, par laquelle cette Lune ſeroit retenue dans ſon orbite, ſeroit, ſuivant le calcul précédent, à peu près égale à celle des corps graves placés ſur le ſommet de ces montagnes. Enſorte que ſi cette même petite Lune étoit privée de tout le mouvement par lequel elle avance dans ſon orbe, & qu'elle n'eût plus par conſéquent de force centrifuge, elle deſcendroit vers la terre avec la même vîteſſe que les corps graves placés au ſommet de ces montagnes tombent vers la terre, & cela à cauſe de l'égalité qui ſeroit entre la gravité & la force qui agiroit alors ſur cette petite Lune. Or ſi la force par laquelle cette petite Lune deſcend étoit autre que la gravité, & que cependant elle peſât ſur la terre comme les corps graves placés au ſommet de ces montagnes, cette petite Lune devroit par ces deux forces réunies deſcendre deux fois plus vîte. Donc, puiſque ces deux forces, c'eſt-à-dire, celles des corps graves & celles de ces petites Lunes, ſont dirigées vers le centre de la terre, & qu'elles ſont égales & ſemblables entr'elles, ces forces ſont les mêmes & par conſéquent elles doivent avoir ( Regles 1 & 2. ) une même cauſe. Donc la force, qui retient la Lune dans ſon orbite, eſt celle-là même que nous appellons gravité : puiſque ſans cela cette petite Lune n'auroit point de gravité au ſommet de cette montagne, ou bien elle tomberoit deux fois plus vîte que les graves.

## PROPOSITION V. THÉORÉME V.

*Les satellites de Jupiter gravitent vers Jupiter, ceux de Saturne vers Saturne, & les planettes principales vers le Soleil, & c'est par la force de leur gravité que ces corps révolvans sont retirés à tout moment de la ligne droite & qu'ils sont retenus dans des orbites curvilignes.*

Car les révolutions des satellites de Jupiter autour de Jupiter, celles des satellites de Saturne autour de Saturne, & celles de Mercure, de Venus & des autres planettes principales autour du Soleil, sont des Phénomenes du même genre que celui de la révolution de la Lune autour de la terre; & par conséquent, par la seconde Regle, ils doivent dépendre de causes du même genre: surtout puisqu'il est démontré, que les forces dont dépendent ces révolutions tendent au centre de Jupiter, de Saturne & du Soleil, & qu'en s'éloignant de Jupiter, de Saturne & du Soleil, ces forces décroissent dans la même raison, dans laquelle la force de la gravité décroît en s'éloignant de la terre.

*Cor.* 1. Toutes les planettes sont donc pesantes. Car personne ne doute que Venus, Mercure & toutes les autres planettes ne soient des corps du même genre que Jupiter & Saturne. Et comme toute attraction est mutuelle par la troisiéme loi du mouvement, Jupiter doit graviter vers tous ses satellites, Saturne vers tous les siens, la terre vers la Lune, & le Soleil vers toutes les planettes principales.

*Cor.* 2. La gravité vers chaque planette est réciproquement comme le quarré de la distance à son centre.

*Cor.* 3. Par les Cor. 1. & 2. toutes les planettes gravitent les unes vers les autres, ainsi Jupiter & Saturne en s'attirant mutuellement, troublent sensiblement leurs mouvemens vers leur conjonction, le Soleil trouble ceux de la Lune, & le Soleil & la Lune ceux de notre mer, comme je l'expliquerai dans la suite

*SCHOLIE.*

## *SCHOLIE.*

Nous avons appellé jusqu'ici la force qui retient les corps célestes dans leur orbite *force centripéte*. On a prouvé que cette force est la même que la gravité, ainsi dans la suite nous l'appellerons *gravité*. Car la cause de cette force centripéte, qui retient la Lune dans son orbite, doit s'étendre à toutes les planettes par les Regles 1. 2 & 4.

## PROPOSITION VI. THÉORÉME VI.

*Tous les corps gravitent vers chaque planette, & sur la même planette quelconque leurs poids, à égale distance du centre, sont proportionnels à la quantité de matiere que chacun d'eux contient.*

Tous les corps descendent vers la terre dans des temps égaux (en faisant abstraction de l'inégale rétardation causée par la petite résistance de l'air) c'est ce que plusieurs Philosophes avoient déja observé, & ce qu'on peut connoître avec précision par l'égalité des temps dans lesquels se font les oscillations des pendules. J'en ai fait l'expérience avec des pendules d'or, d'argent, de plomb, de verre, de sable, de sel commun, de bois, d'eau, & de froment. Pour y réussir, je fis faire deux boëtes de bois rondes & égales, j'en emplis une de bois, & je mis un poids égal d'or dans l'autre, en le plaçant aussi exactement que je le pus dans le point qui répondoit au centre d'oscillation de la premiere boëte. Ces boëtes étoient suspendues à deux fils égaux de 11 pieds chacun, ainsi j'avois par-là deux pendules entierement pareils quant au poids, à la figure, & à la résistance de l'air. Ces pendules, dont les poids étoient placés à côté l'un de l'autre firent des oscillations qui se suivirent pendant un très-long-temps. Donc, la quantité de matiere de l'or, étoit à la quantité de matiere du bois (par les Cor. 1. & 6. de la Prop. 24. du Liv. 2.) comme l'action de la force motrice sur tout l'or à cette même action sur tout le bois, c'eſt-à-dire, comme le poids au poids. Il en fut de même dans les autres pendules. Dans ces expériences une différence d'un milliéme dans la matiere des corps de même poids étoit aiſée à appercevoir.

Il n'y a donc aucun doute que la nature de la gravité ne ſoit la même dans les planettes & ſur la terre. Car ſuppoſé que quelque corps terreſtre fut élevé juſqu'à l'orbe de la lune, & que la lune & ce corps, étant privés de tout mouvement, fuſſent abandonnés à leur gravité, & tombaſſent enſemble vers la terre; il eſt certain, par ce qu'on a déja dit, que ce corps & la lune parcoureroient des eſpaces égaux en temps égaux, & que par conſéquent ſon poids ſeroit à celui de la lune en même raiſon que leurs quantités de matiere.

De plus, comme les ſatellites de Jupiter font leurs révolutions autour de cette planette dans des temps qui ſont en raiſon ſeſquiplée de leurs diſtances à ſon centre, leurs gravités accellératrices vers Jupiter ſeront réciproquement comme le quarré de leurs diſtances à ſon centre; & par conſéquent, à égales diſtances de Jupiter, elles ſeront égales. Ainſi ils parcoureroient des eſpaces égaux en temps égaux en tombant vers Jupiter de hauteurs égales; comme il arrive aux graves ſur notre terre. Et par le même raiſonnement les planettes qui tournent autour du Soleil, étant abandonnées à la force qui les porte vers cet aſtre, parcoureroient en deſcendant vers lui des eſpaces égaux en temps égaux s'ils tomboient de hauteurs égales. Or les forces qui accellérent également des corps inégaux ſont comme ces corps; c'eſt-à-dire, que les poids des corps ſur les planettes ſont comme la quantité de matiere qu'ils contiennent.

De plus, les poids de Jupiter & de ſes ſatellites ſur le Soleil ſont proportionnels à leur quantité de matiere, c'eſt ce qui eſt prouvé (Cor. 3. Prop. 65. Liv. 1.) par le mouvement très-régulier des ſatellites de Jupiter; car ſi l'un de ces ſatellites étoit plus attiré que les autres vers le Soleil, parce qu'il contient plus de matiere, le mouvement des satellites (Cor. 2. Prop. 65. Liv. 1.) seroit dérangé par cette inégale attraction. Si, à distance égale du Soleil, un de ces satellites étoit plus pesant sur le Soleil à raison de sa quantité de matiere que Jupiter à raison de la sienne, dans une raison quelconque donnée, comme, par exemple, dans la raison de *d* à *e*, la distance entre le centre du Soleil & le centre de l'orbe de ce satellite seroit toujours plus grande que la distance entre le centre du Soleil & le centre de Jupiter à peu près en raison sousdoublée, comme je l'ai trouvé en faisant le calcul. Et si le satellite étoit moins pesant vers le Soleil dans cette raison de *d* à *e*, la distance du centre de l'orbe du satellite au centre du Soleil seroit moindre que la distance du centre de Jupiter au centre du Soleil dans cette même raison sousdoublée. Donc, si, à distances égales du Soleil, la gravité accélératrice d'un satellite quelconque vers le Soleil étoit plus grande ou plus petite que la gravitè accélératrice de Jupiter vers le Soleil, seulement de la milliéme partie de sa gravité totale; la distance du centre de l'orbe du satellite au Soleil seroit plus ou moins grande que la distance de Jupiter au Soleil de $\frac{1}{2000}$ partie de la distance totale, c'est-à-dire, de la cinquiéme partie de la distance du satellite le plus éloigné du centre de Jupiter, ce qui rendroit cet orbe très-sensiblement excentrique. Mais les orbes des satellites sont concentriques à Jupiter, ainsi les gravités accélératrices de Jupiter & de ses satellites vers le Soleil sont égales entr'elles. Par le même raisonnement, les poids de Saturne & de ses satellites sur le Soleil sont, à des distances égales du Soleil, comme la quantité de matiére que chacun d'eux contient: & la lune & la terre ou ne pésent point sur le Soleil, ou bien y pésent dans la proportion éxacte de leurs masses: or par les Cor. 1. & 3. de la Prop. 5. on voit qu'ils y doivent péser.

Ainsi les poids de chacune des parties d'une planette quelconque sur une autre planette sont entr'eux comme la quantité de matiére que chacune de ces parties contient. Car si quelques-unes de ces parties gravitoient plus & d'autres moins que selon leur quantité de matiére : la planette totale graviteroit dans une raison plus ou moins grande que celle de sa quantité de matiére, suivant la nature des parties dont elle contiendroit une plus grande quantité ; & il n'importe que ces parties fussent extérieures ou intérieures à la planette. Qu'on suppose, par exemple, que les corps d'ici-bas soient élevés jusqu'à l'orbe de la Lune, & qu'on les compare avec le corps de la Lune : si leurs poids étoient aux poids des parties externes de la Lune comme les quantités de matiére, & qu'ils fussent aux poids de ses parties internes dans une plus grande ou une moindre raison, ces mêmes corps seroient au poids de la Lune entiere dans une plus grande ou une moindre raison : ce qui seroit contraire à ce qu'on vient de prouver.

*Cor.* 1. Ainsi, les poids des corps ne dépendent point de leur forme & de leur texture. Car si ces poids varioient avec la forme, ils seroient tantôt plus grands, & tantôt moindres, selon les différentes formes, quoique la quantité de matiere fut la même : ce qui est entiérement contraire à l'expérience.

*Cor.* 2. Tous les corps qui sont autour de la terre pésent sur la terre, & leurs poids, lorsqu'ils sont également éloignés de son centre, sont comme la quantité de matiére que chacun d'eux contient. C'est ce que les expériences ont fait voir dans tous les corps sur lesquels on a pu en faire. Ainsi, par la troisiéme régle, on doit affirmer la même chose de tous les corps en général. Si l'Ether ou quelqu'autre corps étoit entiérement privé de gravité, ou qu'il gravitât dans une moindre raison que celle de sa quantité de matiére : comme cette espéce de corps ne seroit différente des autres, suivant Aristote, Descartes & d'autres, que par la forme de ses parties, il pourroit arriver, que ces corps, en changeant peu à peu de forme, se changeroient dans l'espéce des corps qui gravitent en raison de leur quantité de matiére ; & au contraire les corps graves pourroient perdre par la suite des temps leur gravité en prenant la même forme que les premiers. Ainsi les poids dépendroient des formes & pourroient varier avec elles, contre ce qui a été prouvé dans le Cor. précédent.

*Cor.* 3. Tous les eſpaces ne ſont pas également pleins. Car s'ils l'étoient, toute matiére ſeroit également denſe, ainſi la gravité ſpécifique du fluide qui rempliroit la région de l'air, ne céderoit point à la gravité ſpécifique du vif argent, de l'or, ou de quelqu'autre corps, quelque denſe qu'il fut; ainſi l'or ni aucun autre corps quelconque ne pourroit deſcendre dans l'air. Car les corps ne deſcendent dans les fluides que parce qu'ils ſont ſpécifiquement plus peſans. Or ſi la quantité de matiére peut diminuer par la raréfaction juſqu'à un certain point dans un eſpace donné, pourquoi ne pourra-t-elle pas diminuer à l'infini?

*Cor.* 4. Si les parties ſolides de tous les corps ſont de la même denſité, & qu'elles ne puiſſent ſe raréfier ſans pores, il y a du vuide. Je dis que les parties ont la même denſité lorſque leurs forces d'inertie ſont comme leur grandeur.

*Cor.* 5. La force de la gravité eſt d'un autre genre que la force magnétique. Car l'attraction magnétique n'eſt point comme la quantité de matiére attirée. Certains corps ſont plus attirés par l'aiman, d'autres moins: & pluſieurs ne le ſont point du tout. La force magnétique d'un même corps peut être augmentée ou diminuée, elle eſt quelquefois beaucoup plus grande par rapport à la quantité de matiére que la force de la gravité, elle ne decroît point en s'éloignant de l'aiman en raiſon doublée de la diſtance, mais preſque en raiſon triplée, autant que je l'ai pû déterminer par des expériences aſſez groſſiéres.

## PROPOSITION VII. THÉORÉME VII.

*La gravité appartient à tous les corps, & elle eſt proportionnelle à la quantité de matiére que chaque corps contient.*

On a prouvé ci-deſſus que toutes les planettes gravitent mutuellement les unes vers les autres: que la gravité vers une planette quelconque, conſidérée à part, eſt réciproquement comme le quarré de la distance au centre de cette planette : & que par conséquent (Prop. 69. Liv. 1. & ses Cor.) la gravité dans toutes les planettes est proportionnelle à leur quantité de matiére.

Mais comme toutes les parties d'une planette quelconque *A*, pesent sur une autre planette quelconque *B*, que la gravité d'une partie quelconque est à la gravité du tout, comme la matiere de la partie est à la matiere totale, & que, par la troisiéme loi du mouvement, l'action & la réaction sont toujours égales; la planette *B* gravitera à son tour vers toutes les parties de la planette *A*, & sa gravité vers une partie quelconque sera à sa gravité vers toute la planette, comme la matiére de cette partie à la matiere totale. . . *C. Q. F. D.*

*Cor.* 1. La gravité vers toute une planette, est donc composée de la gravité vers toutes ses parties. Nous en avons des exemples dans les attractions magnétiques & électriques. Car l'attraction vers le tout est composée des attractions vers chacune des parties. On verra qu'il en est de même dans la gravité, en supposant que plusieurs petites planettes s'unissent en un globe, & forment une grosse planette. Car on conçoit aisément par là que la force totale doit naître de la force des parties composantes. Si quelqu'un objecte que selon cette loi tous les corps d'ici bas devroient graviter les uns vers les autres, & que cependant cette gravité mutuelle n'est pas sensible : je répondrai, que cette gravité mutuelle des corps étant à leur gravité vers la terre, comme la masse de ces corps à la masse de la terre, elle n'est pas à beaucoup près assez forte pour pouvoir être apperçue.

*Cor.* 2. La gravité vers chaque particule égale d'un corps, est réciproquement comme le quarré des distances des lieux de ces particules. Ce qui est clair par le Cor. 3. de la Prop. 74. du premier Livre.

## PROPOSITION VIII. THÉORÉME VIII.

*Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est homogène à égales distances de leurs centres : le poids de l'un de ces globes vers l'autre sera réciproquement comme le quarré de la distance qui est entre leurs centres.*

Après avoir trouvé que la gravité d'une planette entiére est composée de celles de toutes ses parties ; & que la force de chaque partie est réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances : j'ai voulu sçavoir si cette proportion réciproque doublée étoit suivie exactement pour la force totale composée de toutes les forces partiales, ou si elle ne l'étoit qu'à peu près. Car on pourroit croire que cette proportion, qui est assez exactement suivie à de grandes distances, devroit souffrir beaucoup d'altération près de la superficie des planettes, à cause de l'inégalité des distances des parties & de leurs différentes positions. Les Prop. 75. & 76. du premier Livre & leurs Corollaires m'ont fait voir que cette proportion étoit encore exactement observée dans le cas dont il s'agit.

*Cor.* 1. Par-là on peut trouver les poids des corps sur diverses planettes & les comparer entr'eux. Car les poids des corps égaux qui font leurs révolutions dans des cercles autour des planettes sont, par le Cor. 2. de la Prop. 4. du Liv. 1. comme les diamétres de ces cercles directement, & le quarré des temps périodiques inversement ; & leurs poids, à la surface de ces planettes, ou à quelqu'autres distances quelconques de leur centre, sont, par cette présente Proposition, plus grands ou moindres dans la raison doublée inverse des distances. Ainsi, le temps périodique de Venus autour du Soleil étant de 224 jours & 16 heures $\frac{3}{4}$, celui du satellite le plus éloigné de Jupiter autour de cette planette de 16 jours & 16 heures $\frac{8}{15}$, le temps périodique du satellite d'*Hughens* autour de Saturne de 15 jours 22 heures $\frac{2}{3}$, & celui de la Lune autour de la terre de 27 jours 7 heures 43 minutes,

DU SYSTEME DU MONDE.

j'ay trouvé, en employant ces temps périodiques, & de plus la diſtance médiocre de Venus au Soleil, la plus grande élongation héliocentrique du ſatellite de Jupiter le plus éloigné de cette planette au centre de Jupiter qui eſt 8′ 16″, celle du ſatellite d'Hughens au centre de Saturne qui eſt de 3′ 4″ & celle de la Lune au centre de la terre qui eſt de 10′ 33″, qu'à égale diſtance, les poids des corps égaux vers les centres du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la terre, ſont comme 1 $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, & $\frac{1}{169282}$ reſpectivement; à des diſtances inégales ces poids varient en raiſon renverſée du quarré des diſtances: par exemple, les poids des corps égaux ſur le Soleil, Jupiter, Saturne & la terre aux diſtances 10000, 997, 791 & 109 de leurs centres, c'eſt-à-dire, à leurs ſuperficies, ſeront comme 10000, 943, 529 & 435 reſpectivement. On dira dans la ſuite ce que les corps péſent à la ſurface de la Lune.

*Cor.* 2. On connoîtra auſſi la quantité de matiére que contient chaque planette. Car les quantités de matiére dans les planettes ſont comme leurs forces attractives à égales diſtances de leurs centres, c'eſt-à-dire, que les quantités de matiére du Soleil, de Jupiter, de Saturne, & de la terre ſont comme 1, $\frac{1}{1067}$ $\frac{1}{3021}$ & $\frac{1}{169282}$ reſpectivement. Si on trouve la parallaxe du Soleil plus grande ou plus petite que 10″ 30‴, il faudra augmenter ou diminuer la quantité de matiére de la terre en raiſon triplée.

*Cor.* 3. On connoîtra auſſi les denſités des planettes. Car les poids des corps égaux & homogènes aux ſurfaces des ſphères homogènes étant comme leurs diamétres, par la Prop. 72. du Liv. 1. les denſités des ſpheres hétérogènes ſont comme ces poids diviſés par leurs diamétres. Or on a trouvé que les vrais diamétres du Soleil, de Jupiter, de Saturne, & de la terre, ſont l'un à l'autre comme 10000, 997, 791 & 109, & que les poids ſur ces planettes étoient comme 10000, 943, 529 & 435 reſpectivement. Donc leurs denſités ſont comme 100, 94$\frac{1}{2}$ 67, & 400.

La

La densité de la terre que ce calcul donne ne dépend point de la parallaxe du Soleil, mais elle est déterminée par la parallaxe de la Lune, ainsi elle l'est exactement.

Le Soleil est donc un peu plus dense que Jupiter, Jupiter l'est plus que Saturne, & la terre l'est quatre fois plus que le Soleil; ce qu'il faut attribuer à la grande chaleur du Soleil, laquelle raréfie sa matiere. La Lune est plus dense que la terre comme on le verra dans la suite.

*Cor.* 4. Les planettes sont donc d'autant plus denses, qu'elles sont plus petites, toutes choses égales. Ainsi la force de la gravité à leur surface, approche plus de l'égalité. Les planettes qui sont plus près du Soleil sont aussi plus denses, toutes choses égales, ainsi Jupiter l'est plus que Saturne, & la terre plus que Jupiter. Les planettes devoient donc être placées à différentes distances du Soleil, afin que chacune, à raison de sa densité, fut plus ou moins échauffée par le Soleil. Si la terre étoit placée à l'orbe de Saturne, notre eau seroit perpétuellement gelée, & si la terre étoit dans l'orbe de Mercure, toute l'eau s'évaporeroit dans l'instant. Car la lumiére du Soleil, à laquelle la chaleur est proportionnelle, est sept fois plus dense dans Mercure que sur la terre: & j'ai éprouvé par le Thermométre que lorsque la chaleur étoit sept fois plus forte que celle du Soleil dans notre Eté, elle faisoit bouillir l'eau dans l'instant. Il n'est pas douteux que la matiere de Mercure ne soit proportionnée à la chaleur qu'il éprouve, & que par conséquent elle ne soit plus dense que celle de la terre; car plus la matiére est dense, plus il faut de chaleur pour produire les mêmes effets.

## PROPOSITION IX. THÉORÉME IX.

*La gravité dans l'intérieur des planettes, décroît à peu près en raison des distances au centre.*

Si la matiere de la planette étoit d'une densité uniforme, cette Proposition seroit vraie exactement, par la Prop. 73. du Liv. 1.

Ainſi la loi de la peſanteur ne peut s'écarter de la proportion des diſtances que par l'inégalité de la denſité.

## PROPOSITION X. THÉORÊME X.

*Les mouvemens des planettes peuvent ſe conſerver très-longtemps dans les eſpaces céleſtes.*

Dans le ſcholie de la Prop. 40. du Liv. 2. on a fait voir qu'un globe d'eau gelée mû librement dans notre air, perdroit par la réſiſtance de l'air $\frac{1}{4586}$ partie de ſon mouvement en parcourant ſon demi diamétre. La même proportion doit avoir lieu à peu près, dans des globes beaucoup plus grands, & qui ſe mouveroient avec beaucoup plus de vîteſſe que ceux dont on a parlé alors.

Mais le globe de la terre eſt plus denſe que s'il étoit entiérement formé d'eau, ce que je prouve ainſi. Si le globe de la terre étoit d'eau, il y auroit des corps qui ayant moins de gravité ſpécifique ſurnâgeroient & reviendroient d'eux-mêmes à la ſuperficie. Et par cette raiſon un globe composé de terre qui ſeroit entiérement entouré d'eau, ſurnâgeroit en quelque lieu s'il étoit plus léger que l'eau & cette eau s'amaſſeroit vers le côté opposé. Il en eſt de même de notre terre qui eſt en grande partie entourée par la mer. Si elle n'étoit pas plus denſe que l'eau, elle ſurnâgeroit, & ſelon le dégré de ſa légereté ſpécifique elle ſortiroit en partie de l'eau qui ſe ramaſſeroit toute dans les régions opposées.

Par le même raiſonnement on doit conclure, que les taches du Soleil ſont plus légeres que la matiére du Soleil ſur laquelle elles nâgent. Et dans la formation d'une planette quelconque qu'on ſuppoſe avoir été originairement fluide, la matiére la plus peſante doit avoir été au centre. Ainſi comme la terre eſt ordinairement à ſa ſurface environ deux fois plus peſante que l'eau, & qu'en fouillant plus avant, elle eſt trois, quatre, & même cinq fois plus denſe : il eſt vraiſemblable qu'il y a enviroir cinq ou six fois plus de matiére dans le globe de la terre que s'il n'étoit formé que d'eau ; surtout puisqu'on vient de faire voir que la terre est environ quatre fois plus dense que Jupiter. Si donc la matiére de Jupiter est un peu plus dense que l'eau, il est clair que dans l'espace de trente jours, dans lesquels il parcourt la longueur de 459 de ses demi diamétres, il ne perdroit que la dixiéme partie environ de son mouvement dans un milieu qui seroit de la même densité que notre air. Or comme la résistance des milieux diminue avec leurs poids & leur densité ; que l'eau, par exemple, qui est $13\frac{2}{5}$ fois environ moins dense que le vif-argent, résiste $13\frac{3}{5}$ fois moins que ce fluide ; & que l'air qui est 860 fois plus léger que l'eau résiste 860 fois moins : dans les cieux, où le poids du milieu dans lequel les planettes se meuvent diminue à l'infini, la résistance y doit être presque nulle.

On a fait voir dans le Scholie de la Prop. 22. Liv. 2. que si on montoit à la hauteur de deux cens milles au-dessus de la surface de la terre, la densité de l'air à cette distance, seroit à celle de l'air qui nous environne, comme 30 à 0, 0000000000003998, ou comme 75000000000000 à 1 environ. Ainsi la planette de Jupiter, en faisant sa révolution dans un milieu de cette densité, ne perdroit pas en 1000000 ans la $\frac{1}{1000000}$ partie de son mouvement par la résistance du milieu. Nous ne connoissons que l'air, les exhalaisons & les vapeurs, qui résistent près de la surface de la terre puisque lorsqu'on les a ôté avec soin du récipient d'une machine pneumatique les corps y tombent librement, & sans éprouver aucune résistance sensible ; ensorte que l'or même & une plume très-legere étant jettés ensemble tombent avec une vîtesse égale, & arrivent en même temps au fond de la machine en tombant de la hauteur de 4, 6 ou 8 pieds. Il est donc clair que les planettes pourront se mouvoir très-longtemps sans éprouver de résistance sensible dans les espaces célestes vuides d'air & d'exhalaisons.

## HYPOTHESE PREMIERE.

*Le centre du système du monde est en repos.*

C'est ce dont on convient généralement, les uns seulement prétendent que la terre est ce centre, & d'autres que c'est le soleil. Voyons ce qui résulte de cette hypothèse.

## PROPOSITION XI. THÉORÉME XI.

*Le centre commun de gravité du Soleil, de la terre, & de toutes les planettes, est en repos.*

Car ce centre, par le Cor. 4. des Loix, ou sera en repos, ou sera mû uniformement en ligne droite. Mais si ce centre avançoit toujours, le centre du monde ne seroit donc pas en repos, ce qui est contre l'hypothèse.

## PROPOSITION XII. THÉORÉME XII.

*Le Soleil est toujours en mouvement, mais il s'éloigne très-peu du centre commun de gravité de toutes les planettes.*

Car puisque, par le Cor. 2. de la Prop. 8. la matiére du Soleil est à la matiére de Jupiter comme 1067 à 1, & que la distance de Jupiter au Soleil est au demi diamétre du Soleil dans une raison un peu plus grande; le commun centre de gravité du Soleil & de Jupiter tombera dans un point qui sera un peu au-dessus de la surface du Soleil. Par le même raisonnement, la matiére du Soleil étant à la matiére de Saturne comme 3021 à 1, & la distance de Saturne au Soleil étant au demi diamétre du Soleil dans une raison un peu moindre: le commun centre de gravité de Saturne & du Soleil tombera dans un point qui sera un peu au-dessous de la surface du Soleil. Et en suivant le même calcul on trouvera que si la terre & toutes les planettes étoient placées d'un méme côté du Soleil, le commun centre de gravité de tous ces astres s'éloigneroit à peine du centre du Soleil d'un demi diamétre de cet astre. Comme dans les autres cas la distance entre le centre du Soleil

& le commun centre de gravité eſt encore moindre, & que ce commun centre de gravité eſt toujours en repos. Il arrive que le Soleil, ſelon la différente poſition des planettes, ſe meut ſucceſſivement de tous les côtés, mais il ne s'écarte jamais que très-peu du centre commun de gravité.

*Cor.* Le commun centre de gravité du Soleil, de la terre, & de toutes les planettes, doit donc être regardé comme le centre du monde. Car la terre, les planettes & le Soleil s'attirant mutuellement, ils ſont toujours en mouvement par la force de leur gravité en vertu des loix du mouvement : ainſi leurs centres mobiles ne peuvent être pris pour le centre du monde, qui doit être en repos. Si le corps vers lequel la gravité entraine plus fortement tous les autres devoit être placé dans ce centre, (comme c'eſt l'opinion vulgaire) ce privilége appartiendroit au Soleil ; mais comme le Soleil ſe meut, il faut choiſir pour le centre commun un point immobile duquel le centre du Soleil s'éloigne très-peu, & duquel il s'éloigneroit encore moins, ſi le Soleil étoit plus grand & plus denſe, car alors il ſeroit mû moins fortement.

## PROPOSITION XIII. THÉOREME XIII.

*Les planettes ſe meuvent dans des ellipſes qui ont un de leurs foyers dans le centre du Soleil, & les aires décrites autour de ce centre ſont proportionnelles au temps.*

Nous avons diſcuté ci-deſſus ces mouvemens d'après les Phénoménes. Les principes des mouvemens une fois connus, donnent les mouvemens céleſtes *à priori*. Ayant donc trouvé que les poids des planettes ſur le Soleil ſont réciproquement comme le quarré de leurs diſtances à ſon centre ; il eſt évident, par les Prop. 1. & 11, & par le Cor. 1. de la Prop. 13. du 1. Livre, que ſi le Soleil étoit en repos, & que les planettes n'agiſſent point mutuellement les unes ſur les autres, tous leurs orbes ſeroient des ellipſes qui auroient le Soleil dans leur foyer commun, & elles décriroient autour de ce foyer des aires proportionnelles au temps. Or les actions mutuelles des planettes les unes sur les autres sont si foibles qu'elles peuvent être négligées, &, par la Prop. 66. du Liv. 1. elles troublent moins la description de leurs ellipses autour du Soleil lorsqu'on suppose cet astre mobile, que si on le faisoit immobile.

Cependant l'action de Jupiter sur Saturne ne doit pas être absolument négligée : car la gravité vers Jupiter est à la gravité vers le Soleil (à distances égales) comme 1 à 1067 ; donc, dans la conjonction de Jupiter & de Saturne, la distance de Saturne à Jupiter étant à sa distance au Soleil à peu près comme 4 à 9, la gravité de Saturne vers Jupiter sera à sa gravité vers le Soleil comme 81 à $16 \times 1067$ ou comme 1 à 211 à peu près. Et delà vient que l'orbe de Saturne est dérangé si sensiblement dans chaque conjonction avec Jupiter, que les Astronomes s'en apperçoivent. L'excentricité de cette planette est tantôt augmentée & tantôt diminuée selon sa situation dans ses conjonctions ; son aphélie avance quelquefois & quelquefois recule, & son mouvement moyen est tour à tour accéléré & retardé. Cependant tout le dérangement que l'attraction de Jupiter cause dans le mouvement de Saturne autour du Soleil, excepté dans le mouvement moyen, peut presque s'éviter en supposant le foyer inférieur de son orbite placé dans le centre commun de gravité de Jupiter & du Soleil (par la Prop. 67. du Liv. 1.) alors lorsque ce dérangement est le plus grand, il passe à peine deux minutes. Et le plus grand dérangement dans le mouvement moyen surpasse à peine deux minutes par an.

Dans la conjonction de Jupiter & de Saturne les gravités accélératrices du Soleil vers Saturne, de Jupiter vers Saturne & de Jupiter vers le Soleil sont à peu près comme 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 3021}{25}$ ou 156609 : ainsi la différence des gravités du Soleil & de Jupiter vers Saturne est à la gravité de Jupiter vers le Soleil comme 65 à 156609, ou comme 1 à 2409. La plus grande force de Saturne pour troubler les mouvemens de Jupiter eſt proportionnelle à cette différence, auſſi le dérangement de l'orbe de Jupiter eſt-il beaucoup moindre que celui de l'orbe de Saturne.

Les dérangemens qu'éprouvent les orbes des autres planettes par leurs actions mutuelles ſont beaucoup moins conſidérables ſi on en excepte l'orbe de la terre que la Lune dérange ſenſiblement. Le commun centre de gravité de la terre & de la Lune décrit autour du Soleil une ellipſe dont cet aſtre eſt le foyer, & dont les aires décrites par ce centre ſont proportionnelles au temps : la terre fait ſa révolution autour de ce centre commun dans un mois.

## PROPOSITION XIV. THÉORÉME XIV.

*L'Aphélie & les nœuds des orbites ſont en repos.*

Les aphélies ſont en repos par la Prop. 11. du Liv. 1. & par la premiére du même livre les plans des orbes ſont auſſi immobiles, & par conſéquent les nœuds. Il faut avouer cependant que les actions des planettes & des cométes les unes ſur les autres, peuvent cauſer quelques inégalités tant dans les aphélies que dans les nœuds, mais ce ſont des inégalités aſſez petites pour qu'il ſoit permis de les négliger.

*Cor.* 1. Les étoiles fixes ſont auſſi en repos, car elles conſervent les mêmes poſitions par rapport aux nœuds & aux aphélies.

*Cor.* 2. Donc puiſque le mouvement annuel de la terre ne leur cauſe point de parallaxe ſenſible, leurs forces attractives ne produiſent point d'effets ſenſibles dans la région de notre ſyſtême à cauſe de la diſtance immenſe de ces corps. Peut-être les étoiles fixes, qui ſont également diſperſées dans toutes les parties du ciel, détruiſent-elles leurs forces mutuelles par leurs attractions contraires, ſelon la Prop. 70. du Liv. 1.

## *SCHOLIE.*

Comme l'action mutuelle des planettes qui sont le plus près du Soleil, telles que Venus, Mercure, la terre & Mars sont presque insensibles à cause de la petitesse de ces planettes : leurs nœuds & leurs aphélies sont en repos, à l'altération près que peut y apporter l'action de Saturne, de Jupiter & des autres corps placés audessus d'elles. En ayant égard à cette altération, on trouve, par la théorie de la gravité, que leurs aphélies se meuvent un peu en conséquence par rapport aux fixes, & cela dans la proportion sesquiplée des distances de ces planettes au Soleil. Ensorte que si l'aphélie de Mars fait $33' \, 20''$ en cent ans, en conséquence par rapport aux fixes : les aphélies de la terre, de Venus, & de Mercure feront dans le même espace de cent ans $17' \, 40''$, $10' \, 53''$ & $4' \, 16''$ respectivement. Mais on ne fait pas attention dans cette Proposition à ces mouvemens qui sont presque insensibles.

## PROPOSITION XV. PROBLÉME I.

*Trouver les diamétres principaux des orbes.*

Il faut les prendre en raison sesquiplée des temps périodiques, par la Prop. 15 du Liv. 1. Ensuite, par la Prop. 60 du Liv. 1. il faut augmenter le diamétre de chacun des orbes dans la raison qu'il y a entre la masse de la planette ajoutée à celle du Soleil, & la premiere des deux moyennes proportionnelles entre cette somme & le Soleil.

## PROPOSITION XVI. PROBLÉME II.

*Trouver les excentricités & les aphélies des orbes.*

Ce Probléme se résout par la Prop. 18 du Liv. 1.

PROPOSITION

## PROPOSITION XVII. THÉORÉME XV.



*Les mouvemens diurnes des planettes sont uniformes, & la libration de la Lune vient de son mouvement diurne.*

Cela est clair par la premiére loi du mouvement & par le Cor. 22. de la Prop. 66. Liv. 1.

Jupiter par rapport aux fixes fait sa révolution diurne en 9 h. 56′, Mars en 24 h. 39′, Venus en 23 h. environ, la terre en 23 h. 56′, le Soleil en 25 jours $\frac{1}{2}$, & la Lune en 27 jours 7 h. 43′; c'est ce que les Phénoménes prouvent. Les taches du Soleil revenant sur son disque dans la même situation au bout de 27 j. $\frac{1}{2}$ par rapport à la terre; il faut que le Soleil fasse sa révolution par rapport aux fixes en 25 j. $\frac{1}{2}$ environ. Et comme le jour de la Lune par sa révolution uniforme autour de son axe est d'un mois, sa même face doit regarder toujours la terre à la différence près qui est produite par l'excentricité de son orbite. C'est-là la libration de la Lune en longitude : quant à sa libration en latitude, elle dépend de la latitude de la Lune, & de l'inclinaison de son axe au plan de l'écliptique.

*Mercator* a amplement expliqué la théorie de cette libration de la Lune d'après mes lettres dans son Astronomie publiée au commencement de l'année 1676.

Le satellite le plus éloigné de Saturne paroît tourner autour de son axe d'un mouvement semblable, & présenter toujours le même côté à Saturne; car toutes les fois qu'il approche de la partie orientale de l'orbe de cette planette, on le voit à peine, & souvent il disparoît entierement : ce qui peut venir de ce qu'il présente alors à la terre une partie de son disque dans laquelle il se trouve des taches, comme Cassini l'a remarqué.

Le satellite le plus éloigné de Jupiter paroît tourner aussi de même autour de son axe, car il a, dans la partie de son disque opposée à Jupiter, une tache que l'on voit comme si elle étoit dans le disque même de Jupiter, toutes les fois que ce satellite passe entre Jupiter & nos yeux.

## PROPOSITION XVIII. THÉORÉME XVI.

*Les axes des planettes sont plus petits que les rayons de leurs équateurs.*

Si les planettes n'avoient point le mouvement journalier de rotation autour de leur axe, elles devroient être sphériques à cause de l'égale gravité de leurs parties. Le mouvement de rotation fait que les parties qui s'éloignent de l'axe font effort pour monter vers l'équateur. Et par conséquent, si la matiére dont elles sont composées étoit fluide, son élévation vers l'équateur augmenteroit le diamétre de ce cercle, & son abbaissement vers les Pôles diminueroit l'axe. Aussi les observations astronomiques nous apprennent-elles que dans Jupiter le diamétre qui va d'un pôle à l'autre est plus court que celui qui va de l'Orient à l'Occident. Par le même raisonnement, on verra que si notre terre n'étoit pas un peu plus haute à l'équateur qu'aux pôles, les mers s'affaissant vers les pôles, & s'élevant vers l'équateur inonderoient toutes ces régions.

## PROPOSITION XIX. PROBLÉME III.

*Trouver la proportion des axes d'une planette.*

*Norvood*, notre compatriote, vers l'année 1635. trouva en mesurant un espace de 905751 pieds anglois entre *Londres* & *Yorck*, & en observant la différence des latitudes de ces deux villes qui est de $2^d\ 28'$, que le dégré avoit 367196 pieds anglois, c'est-à-dire, 57300 toises *de Paris.*

*Picart* en mesurant un arc de $1^d\ 22'\ 55''$ dans le méridien entre *Amiens* & *Malvoisine*, trouva que le dégré avoit 57060 toises *de Paris*, *Cassini* le pere mesura dans le méridien la distance entre la ville de *Collioure* en *Roussillon* & l'observatoire de *Paris* : & son fils ajouta à cette mesure celle de la distance entre l'observatoire de *Paris*, & la tour de *Dunkerque* : la distance totale étoit de

$486156\frac{1}{2}$ toises, & la différence des latitudes des villes de *Collioure* & de *Dunkerque* de $8^d\ 31'\ 11\frac{1}{6}''$, ce qui donne l'arc d'un dégré de 57061 toises de *Paris*. De ces mesures on conclud la circonférence de la terre de 123249600 pieds *de Paris*, & son demi diamétre de 19615800 pieds, en supposant que la terre soit sphérique.

On a vu ci-dessus que dans la latitude *de Paris* les corps graves en tombant parcourent 15 pieds 1 pouces & $1\frac{7}{9}$ lignes ou $2173\frac{7}{9}$ lignes en une seconde. Mais le poids des corps diminue par le poids de l'air qui les environne; supposons que cette diminution soit la $\frac{1}{11000}$e partie du poids total, le corps en tombant dans le vuide parcoureroit 2174 lignes en une seconde.

Un corps qui circuleroit dans un cercle à la distance de 19615800 pieds du centre, & qui feroit sa révolution uniformement en $23^h\ 56'\ 4''$ sidérales, décriroit un arc de 1433, 46 pieds en une seconde, le sinus verse de cet arc est de 0, 0523656 pieds ou de 7, 54064 lignes. Ainsi la force avec laquelle les graves descendent à la latitude *de Paris*, est à la force centrifuge des corps sous l'équateur causée par le mouvement de rotation de la terre, comme 2174 à 7, 54064.

La force centrifuge des corps sous l'équateur, est à la force centrifuge par laquelle les corps tendent à s'éloigner perpendiculairement de la terre à la latitude de Paris qui est de $48^d\ 50'\ 10''$ en raison doublée du rayon au sinus du complement de cette latitude, c'est-à-dire, comme 7, 54064 à 3, 267. En ajoutant cette force à la force qui fait descendre les graves à la latitude de Paris, la chute des graves produite à cette latitude par la force totale de la gravité sera dans une seconde de 2177, 267 lignes ou 15 pieds 1 pouce, 5, 267 lignes de Paris. Et la force totale de la gravité dans cette latitude sera à la force centrifuge des corps sous l'équateur comme 2177, 267 à 7, 54064 ou comme 289 à 1.

Si présentement *APBQ* représente la terre non supposée sphérique comme auparavant, mais formée par la révolution

DU SYSTEME DU MONDE.

d'une ellipse autour de son petit axe *PQ*, & que *ACQqca* soit un canal plein d'eau depuis le pôle *Qq* jusqu'au centre *Cc*, & depuis ce centre jusqu'à l'équateur *Aa* : le poids de l'eau dans la branche *ACca* du canal, doit être au poids de l'eau dans l'autre branche *QCcq* comme 289 à 288 à cause que la force centrifuge qui vient du mouvement circulaire soutient & ôte du poids de l'eau une partie sur 289 & que par conséquent les 288 parties d'eau qui sont dans la branche *ACca* soutiennent les 289 de l'autre.

En suivant la méthode du Cor. 2. de la Prop. 91. du 1. Livre, je trouve que si la terre étoit composée d'une matiére homogène, qu'elle fut privée de tout mouvement, & que son axe *PQ* fut à son diamétre *AB* comme 100 à 101 : la gravité au lieu *Q* de la terre seroit à la gravité dans le même lieu *Q* d'une sphére décrite du centre *C* & du rayon *PC* ou *QC*, comme 126 à 125.

Par le même raisonnement, on trouvera que la gravité dans le lieu *A* d'un sphéroïde décrit par la révolution de l'ellipse *APBQ* autour de son axe *AB*, est à la gravité au même lieu *A* dans une sphére décrite du centre *C* & du rayon *AC*, comme 125 à 126. De plus la gravité au lieu *A* de la terre est moyenne proportionnelle entre les gravités dans ce sphéroïde & dans cette sphére : à cause que la sphére, en diminuant le diamétre *PQ* dans la raison de 101 à 100, se changeroit dans la figure de la terre ; & que cette figure en diminuant dans la même raison le diamétre perpendiculaire aux deux diamétres *AB*, *PQ*, se changeroit dans le sphéroïde décrit par la révolution de l'ellipse *ABPQ* autour de *AB* ; & dans l'un & l'autre cas, la gravité en *A* diminueroit dans la même raison à peu près.

Enfin la gravité en *A* dans la sphére dont le centre est *C* & le rayon *AC*, est à la gravité au même lieu *A* sur la terre, comme 126 à $125\frac{1}{2}$, & la gravité au lieu *Q* dans la sphére dont le centre est *C* & le rayon *QC*, est à la gravité au lieu *A* dans la sphére dont le centre est *C* & le rayon *AC*, en raison des diamétres, (par la Prop. 72. du Liv. 1.) c'eſt-à-dire, comme 100 à 101. Joignant donc ces trois raiſons 126 à 125, 126 à $125\frac{1}{2}$, & 100 à 101, la gravité ſur la terre au lieu *Q* ſera à la gravité ſur la terre au lieu *A*, comme 126 × 126 × 100 à 125 × $125\frac{1}{2}$ × 101, ou comme 501 à 500.

Or, comme (par le Cor. 3. de la Prop. 91. du Liv. 1.) la gravité dans l'un ou l'autre branche *ACca* ou *QCcq* du canal eſt comme la diſtance des lieux au centre de la terre; ſi ces branches ſont ſéparées en parties proportionnelles aux touts par des ſurfaces tranſverſales & équidiſtantes, les poids d'un nombre quelconque de parties de l'une de ces branches, ſeront aux poids d'autant de parties dans l'autre branche en raiſon composée des quantités de matiére & des forces accélératrices, c'eſt-à-dire, de la raiſon de 101 à 100 & de celle de 500 à 501, ou, ce qui revient au même, en raiſon ſimple de 505 à 501. Donc, ſi la force centrifuge d'une partie quelconque de la branche *ACca*, laquelle vient du mouvement diurne, étoit au poids de la même partie, comme 4 à 505, enſorte que du poids de cette partie diviſée en 505, ſa force centrifuge en ôtât 4; les poids ſeroient égaux dans l'une & l'autre branche, & par conſéquent le fluide reſteroit en équilibre.

Mais la force centrifuge d'une partie quelconque eſt au poids de cette même partie comme 1 à 289, c'eſt-à-dire, que la force centrifuge qui devroit être la $\frac{4}{505}$e partie du poids n'en eſt que la $\frac{1}{289}$e partie, ainſi on peut dire, par une ſimple analogie, ſi la force centrifuge $\frac{4}{505}$ fait que la hauteur de l'eau dans la branche *ACca* ſurpaſſe la hauteur de l'eau dans la branche *QCcq* d'une centiéme partie de toute la hauteur: la force centrifuge $\frac{1}{289}$ ſera que l'excès de la hauteur dans la branche *ACca* ne ſera que $\frac{1}{229}$e partie de la hauteur de l'eau dans l'autre branche *QCcq*. Et le diamétre de la terre qui paſſe par ſes pôles ſera au diamétre de l'équateur comme 229 à 230. Ainſi, comme le demi diamétre médiocre de la terre eſt, ſelon la meſure de *Picart*, de

19615800 pieds de Paris, ou de 3923, 16 milles, (ſuppoſé que le mille ſoit de 5000 pieds) la terre ſera plus haute à l'équateur qu'aux pôles de 85472 pieds, ou de $17\frac{1}{10}$ milles, & ſa hauteur à l'équateur ſera de 19658600 pieds environ, & de 19573000 aux pôles.

Si la planette eſt plus petite, ou plus grande que la terre, mais que ſa denſité, & le temps périodique de ſa révolution diurne ſoient les mêmes, la proportion de la force centrifuge à la gravité demeurera la même, & par conſéquent la proportion entre l'axe & le diamétre de l'équateur ſera auſſi la même.

Mais ſi le mouvement diurne eſt accéléré ou retardé dans une raiſon quelconque, il augmentera ou diminuera la force centrifuge dans la raiſon doublée de cette raiſon, & par conſéquent la différence des diamétres augmentera ou diminuera dans cette même raiſon doublée à peu près. Si la denſité de la planette augmente ou diminue dans une raiſon quelconque, la gravité vers cette planette augmentera ou diminuera dans la même raiſon. Mais la différence des diamétres diminuera au contraire en raiſon de l'augmentation de la gravité, ou augmentera en raiſon de la diminution de la gravité. Ainſi comme la terre fait ſa révolution en $23^h\ 56'$ & Jupiter en $9^h\ 56'$, par rapport aux fixes, & que par conſéquent les quarrés des temps ſont comme 29 à 5, & les denſités comme 400 à $94\frac{1}{2}$: la différence des diamétres de Jupiter ſera à ſon petit diamétre comme $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ à 1, ou comme 1 à $9\frac{1}{3}$ à peu près. Le diamétre de Jupiter de l'Orient à l'Occident eſt donc à ſon diamétre entre les pôles comme $10\frac{1}{3}$ à $9\frac{1}{3}$ à peu près. Donc, puiſque ſon plus grand diamétre eſt de $37''$, ſon petit diamétre entre ſes pôles ſera de $33''\ 25'''$ & ajoutant $3''$ à peu près pour la lumiére erratique, les diamétres apparens de cette planette ſeront de $40''$ & $36''\ 25'''$ à peu près : c'eſt-à-dire, qu'ils ſeront l'un à l'autre comme $11\frac{1}{6}$ à $10\frac{1}{6}$ à peu près. Mais ce rapport ne doit avoir lieu qu'en ſuppoſant toute la matiére de Jupiter d'une égale denſité ; car ſi elle étoit plus denſe vers le plan de l'équateur que vers les pôles, ſes diamétres pourroient être l'un à l'autre comme 12 à 11, ou comme 13 à 12, ou même comme 14 à 13. Caſſini a obſervé dans l'année 1691. que le diamétre de Jupiter de l'Orient à l'Occident ſurpaſſoit ſon autre diamétre environ d'une de ſes quinziémes parties. Notre compatriote *Pound* avec un téleſcope de 123 pieds & un excellent Micrométre, ayant meſuré les diamétres de Jupiter en 1719. les trouva tels qu'ils ſont marqués dans la table ſuivante.

| *Temps.* | | | *Grand diamétre.* | *Petit diamétre.* | *Différence des diamétres entr'eux.* |
|---|---|---|---|---|---|
| | *Jours* | *Heures* | *Parties* | *Parties* | |
| *Janv.* | 28 | 6 | 13, 40 | 12, 28 | *comme* 12 *à* 11 |
| *Mars* | 6 | 7 | 13, 12 | 12, 20 | $13\frac{3}{4}$ *à* $12\frac{3}{4}$ |
| *Mars* | 9 | 7 | 13, 12 | 12, 08 | $12\frac{2}{3}$ *à* $11\frac{2}{3}$ |
| *Avril* | 9 | 9 | 12, 32 | 11, 48 | $14\frac{1}{2}$ *à* $13\frac{1}{2}$ |

Cette théorie s'accorde avec les Phénoménes ; car l'équateur des planettes étant beaucoup plus expoſé que les autres parties à l'action du Soleil, la matiére qui y eſt, pour ainſi dire, plus cuite doit y être plus denſe que vers les pôles.

Que la gravité diminue ſous l'équateur par la rotation diurne de notre terre, & que parconſéquent elle doive être plus élevée vers l'équateur qu'aux pôles, (ſi ſa matiére eſt d'une denſité uniforme) c'eſt ce qui paroîtra clairement par les expériences des pendules que je vais rapporter dans la Propoſition ſuivante.

## PROPOSITION XX. PROBLEME IV.

*Trouver & comparer entr'eux les poids des corps dans les diverſes régions de la terre.*

Comme les poids de l'eau renfermée dans les branches inégales du canal *ACQqca* ſont égaux ; & que les poids de ſes parties, qui ſont proportionnelles aux branches, & ſituées de même dans leur totalité, ſont entr'eux comme les poids entiers,

& que par conſéquent ils ſont égaux entr'eux ; les poids des parties égales & également ſituées dans ces branches, ſeront réciproquement comme ces branches, c'eſt-à-dire, comme 230 à 229. Il en eſt de même de tous les corps quelconques homogènes égaux, & qui ſeront ſituées ſemblablement dans les branches de ce canal ; leurs poids ſeront réciproquement comme ces branches, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les diſtances de ces corps au centre de la terre. C'eſt pourquoi, les poids des corps ſitués dans les parties ſupérieures de ces canaux, ou à la ſurface de la terre, ſeront entr'eux réciproquement comme leur diſtance à ſon centre. Par le même raiſonnement, les poids, dans quelque région de la terre que ce ſoit, ſont réciproquement comme les diſtances des lieux au centre de la terre ; & par conſéquent, en ſuppoſant que la terre ſoit un ſphéroïde, leur proportion eſt donnée.

On tire de-là ce théorême, que l'augmentation du poids, en allant de l'équateur vers les pôles, doit être à peu près comme le ſinus verſe du double de la latitude, ou, ce qui eſt la même choſe, comme le quarré du ſinus droit de la latitude. Les arcs des dégrés de latitude augmentent à peu près dans la même raiſon dans le méridien. Ainſi la latitude de Paris étant de $48^d\ 50'$, celle des lieux ſitués ſous l'équateur de $00^d\ 00'$, & celle des lieux ſitués aux pôles de $90^d$, les ſinus verſes des arcs doubles étant par conſéquent de 11334, 00000, & 20000, pour le rayon de 10000 ; & la gravité aux pôles étant à la gravité ſous l'équateur comme 230, à 229, ou, ce qui revient au même, l'excès, de la gravité aux pôles étant à la gravité ſous l'équateur comme 1 à 229 : on trouvera que l'excès de la gravité dans la latitude de Paris, eſt à la gravité ſous l'équateur, comme $1 \times \frac{11334}{20000}$ à 229, ou comme 5667 à 2290000. Donc les gravités totales dans ces lieux, ſeront l'une à l'autre comme 2295667 à 2290000. Or comme les longueurs des pendules qui font leurs oſcillations en temps égaux, ſont en raiſon directe des gravités, & qu'à la latitude de Paris la longueur du pendule qui bat les ſecondes eſt de 3 pieds de

Paris

Paris $8\frac{1}{2}$ lignes, ou plûtôt de 3 pieds $8\frac{5}{9}$ lignes, à cause du poids de l'air: la longueur du pendule sous l'équateur sera moindre que la longueur du pendule synchrone à la latitude de Paris. Et cette différence sera d'une ligne & 87 milliémes de lignes. C'est par un semblable calcul qu'on a dressé la table suivante.

| *Latitude du lieu.* | *Longueur du Pendule.* | | *Mesure d'un dégré du Méridien.* |
|---|---|---|---|
| *Dégrés.* | *Pieds.* | *Lignes.* | *Toises.* |
| 0 | 3 | 7, 468 | 56637 |
| 5 | 3 | 7, 482 | 56642 |
| 10 | 3 | 7, 526 | 56659 |
| 15 | 3 | 7, 596 | 56687 |
| 20 | 3 | 7, 692 | 56724 |
| 25 | 3 | 7, 812 | 56769 |
| 30 | 3 | 7, 948 | 56823 |
| 35 | 3 | 8, 099 | 56882 |
| 40 | 3 | 8, 261 | 56945 |
| 1 | 3 | 8, 294 | 56958 |
| 2 | 3 | 8, 327 | 56971 |
| 3 | 3 | 8, 361 | 56984 |
| 4 | 3 | 8, 394 | 56997 |
| 45 | 3 | 8, 428 | 57010 |
| 6 | 3 | 8, 461 | 57022 |
| 7 | 3 | 8, 494 | 57035 |
| 8 | 3 | 8, 528 | 57048 |
| 9 | 3 | 8, 561 | 57061 |
| 50 | 3 | 8, 594 | 57074 |
| 55 | 3 | 8, 756 | 57137 |
| 60 | 3 | 8, 907 | 57196 |
| 65 | 3 | 9, 044 | 57250 |
| 70 | 3 | 9, 162 | 57295 |
| 75 | 3 | 9, 258 | 57332 |
| 80 | 3 | 9, 329 | 57360 |
| 85 | 3 | 9, 372 | 57377 |
| 90 | 3 | 9, 387 | 57382 |

On voit par cette table que l'inégalité des dégrés est si petite, que dans la géographie on peut supposer la terre sphérique: surtout si la matiére est plus dense vers l'équateur que vers les pôles.

Quelques Aſtronomes envoyés dans des régions fort éloignées pour faire des obſervations aſtronomiques, obſerverent que le mouvement des horloges à pendule étoit plus lent vers l'équateur que dans nos pays. M. *Richer* fut le premier qui fit cette obſervation dans l'Iſle de *Cayenne* en 1672. En obſervant au mois d'Août le paſſage des fixes par le méridien, il trouva que ſa pendule retardoit ſur le moyen mouvement du Soleil, & que la différence par jour étoit de 2′ 28″. Enſuite ayant fait oſciller un pendule ſimple enſorte que ſes vibrations fuſſent iſochrones à celles de ſa pendule qui étoit excellente, il détermina la longueur du pendule ſimple, & il répéta ſes expériences pluſieurs fois chaque ſemaine pendant 10 mois. Etant enſuite retourné en France il compara la longueur de ce pendule avec celle du pendule qui bat les ſecondes à Paris (lequel avoit 3 pieds de Paris & 8 lignes $\frac{3}{5}$) & il trouva que le pendule ſous l'équateur étoit plus court qu'à Paris d'une ligne & un quart de ligne.

Depuis ce temps, *Halley* notre compatriote trouva vers l'année 1677. qu'à l'iſle de *Sainte Hélene* le mouvement de ſa pendule étoit plus lent qu'à *Londres*, il n'en détermina pas la différence, mais il racourcit ſon pendule de plus de la huitiéme partie d'un pouce, c'eſt-à-dire, d'une ligne & demie. Pour faire cette opération, comme la longueur de la vis vers le bas du pendule n'étoit pas ſuffiſante, il mit un anneau de bois à la boëte de la vis, & il y ſuſpendit le poids du pendule.

Enſuite dans l'année 1682. MM. *Varin & Deshayes* déterminerent la longueur du pendule qui bat les ſecondes à l'Obſervatoire de *Paris*, de 3 pieds de Paris 8 lignes & $\frac{5}{9}$, & dans l'Iſle de *Gorée* ils trouverent par la même méthode que la longueur du pendule ſynchrone étoit de 3 pieds 6 lignes & $\frac{5}{9}$, ainſi la différence étoit de deux lignes. La même année, aux iſles de la *Guadaloupe* & de la *Martinique*, ils trouverent la longueur du pendule ſynchrone de 3 pieds 6 lignes $\frac{1}{2}$.

M. *Couplet le fils* en 1697. au mois de Juillet, régla ſa pendule ſur le moyen mouvement du Soleil à l'obſervatoire de Paris, enſorte que pendant un temps aſſez long, elle s'accordoit parfaitement avec le mouvement du Soleil, & étant à *Lisbonne* au mois de Novembre ſuivant il trouva que cette même pendule retardoit, & que la différence étoit de $2' \ 13''$ en 24 heures. Au mois de Mars ſuivant, il trouva qu'à *Paraïbe* ſon horloge retardoit ſur *Paris* de $4' \ 12''$ en 24 heures. Et il aſſure que le pendule qui battoit les ſecondes à *Lisbonne* étoit plus court que celui qui les battoit à *Paris* de 2 lignes $\frac{1}{2}$ & que celui qui les battoit à *Paraïbe* étoit plus court que celui qui les battoit à *Paris* de 3 lignes $\frac{2}{3}$. Il auroit déterminé plus exactement ces différences s'il eût fait celle de *Lisbonne* de 1 ligne $\frac{1}{3}$ & celle de *Paraïbe* de 2 lignes $\frac{5}{9}$, car ces différences répondent reſpectivement à $2' \ 13''$ & à $4' \ 12''$ qui ſont les différences qu'il avoit remarquées entre les temps marqués par ſon horloge, ainſi on ne doit pas beaucoup ajouter de foi à ces obſervations groſſiéres.

Les années ſuivantes, c'eſt-à-dire, en 1699. & en 1700. M. *Deshayes* étant de nouveau en Amérique, détermina la longueur du pendule qui bat les ſecondes dans les iſles de *Cayenne* & de *Grenade* un peu moindre de 3 pieds 6 lignes $\frac{1}{2}$. Dans l'iſle de *S. Chriſtophe*, il trouva cette longueur de 3 pieds 6 lignes $\frac{3}{4}$. Et dans l'iſle de *S. Domingue* de 3 pieds 7 lignes.

En l'année 1704. le P. *Feuillée* trouva à *Portobello* en Amérique, la longueur du pendule qui bat les ſecondes de 3 pieds de Paris, 5 lignes & $\frac{7}{12}$, c'eſt-à-dire, près de 3 lignes moindre qu'à Paris, mais il dût y avoir de l'erreur dans ſon obſervation, car étant allé enſuite à la *Martinique*, il trouva que la longueur du pendule iſochrone n'étoit que trois pieds de Paris 5 lignes & $\frac{10}{12}$ᵉ.

Or la latitude méridionale de *Paraïbe* eſt de $6^d \ 38'$, la latitude ſeptentrionale de *Portobello* de $9^d \ 33'$, & les latitudes ſeptentrionales des iſles de *Cayenne*, de *Gorée*, de la *Guadaloupe*, de la *Martinique*, de *Grenade*, de *S. Chriſtophe*, & de *S. Domingue*, ſont reſpectivement de $4^d \ 55'$, $14^d \ 40'$, $14^d \ 00'$, $14^d$

DU SYSTEME DU MONDE.

$44'$, $12^d\,6'$, $17^d\,19'$, & de $19^d\,48'$; & les excès de la longueur du pendule de Paris sur les longueurs des pendules isochrones observées dans ces latitudes, sont un peu plus grands que ne les donne la table des longueurs du pendule calculée ci-dessus. Ainsi la terre doit être un peu plus élevée à l'équateur que ce calcul ne l'a donné, & sa matiére doit être plus dense à son centre que près de la superficie, supposé cependant que la chaleur de la Zone torride n'ait pas un peu augmenté la longueur du pendule.

M. *Picart* a observé qu'une barre de fer, qui pendant la gelée étoit longue d'un pied, devenoit, étant échauffée par le feu, d'un pied & un quart de ligne. Et M. *de la Hire* a remarqué depuis, qu'une barre de fer qui avoit six pieds pendant l'hyver, devenoit de six pieds & $\frac{2}{3}$ de ligne lorsqu'elle étoit exposée au Soleil de l'Eté.

Dans le premier cas, la chaleur fut plus grande que dans le second, & dans celui-ci la chaleur fut plus grande que celle des parties externes du corps humain, car les métaux acquerrent une grande chaleur lorsqu'ils sont exposés au Soleil de l'Eté. Mais le pendule d'une horloge n'est jamais exposé au Soleil de l'Eté, & n'atteint même jamais la chaleur des parties externes du corps humain. Ainsi le pendule de l'horloge dont la longueur étoit de trois pieds, n'a jamais pu devenir plus long l'Eté que l'Hyver, que d'un quart de ligne, & par conséquent on ne peut attribuer les différences qui se trouvent entre les longueurs des pendules isochrones en différentes régions à la différente chaleur des climats. Elle ne peut être attribuée non plus aux erreurs glissées dans les observations des Astronomes françois, car quoiqu'elles ne s'accordent pas parfaitement entr'elles, cependant les différences sont si petites qu'on peut les négliger. Ces observations s'accordent toutes à donner les pendules isochrones plus courts vers l'équateur qu'à l'observatoire de Paris, & selon toutes ces observations, cette différence n'est pas moindre que d'une ligne & un quart, & elle ne passe pas 2 lignes $\frac{2}{3}$.

Dans les observations de M. *Richer* à *Cayenne*, la différence fut d'une ligne & un quart, dans celle de M. *Deshayes* la différence corrigée fut d'une ligne & demie, ou d'une ligne trois quarts, dans les autres observations qui sont moins éxactes elle étoit environ de deux lignes; & ces différences doivent être attribuées, partie aux erreurs commises dans les observations, partie à la dissemblance des parties internes de la terre, & à la différente hauteur des montagnes, & partie enfin à la différente température de l'air.

Une barre de fer longue de trois pieds est plus courte en Angleterre l'Hyver que l'Eté de la sixiéme partie d'une ligne, autant que j'en puis juger; ainsi ôtant cette différence causée par la chaleur, d'une ligne & un quart, qui est la différence trouvée par M. *Richer*, il restera toujours une différence de $1\frac{1}{12}$ ligne, qui approche assez de $1\frac{87}{1000}$ trouvée ci-dessus par la théorie. *Richer* répéta ses observations à la *Cayenne* toutes les semaines pendant 10 mois, & il compara les longueurs du pendule à *Cayenne* avec les longueurs du même pendule en France déterminées de même. Les autres observateurs n'avoient point fait leurs observations avec tant de soin & de précaution, si donc on regarde les observations de M. *Richer* comme éxactes, il s'ensuivra que la terre doit être plus haute à l'équateur qu'aux pôles de 17 milles environ, comme la théorie précédente l'a donné.

## PROPOSITION XXI. THÉORÉME XVII.

*Les points équinoxiaux rétrogradent, & l'axe de la terre, à chaque révolution annuelle, a une nutation par laquelle il s'incline deux fois vers l'écliptique & retourne deux fois à sa premiere position.*

C'est ce qui est prouvé par le Cor. 20. de la Prop. 66. du Liv. 1. mais ce mouvement de nutation doit être trés-foible, & on peut à peine s'en appercevoir.

## PROPOSITION XXII. THÉORÉME XVIII.

*Tous les mouvemens de la Lune, & toutes ses inégalités sont une suite & se tirent des principes qu'on a posés ci-dessus.*

Pendant que les grandes planettes sont portées autour du Soleil, elles peuvent emporter dans leur révolution d'autres planettes plus petites, qui tournent autour d'elles dans des ellipses dont le foyer est placé dans le centre des grandes planettes, ce qui est clair par la Prop. 65. du Liv. 1. Les mouvemens de ces petites planettes, doivent être troublés de plusieurs façons par l'action du Soleil qui doit causer des inégalités dans leur mouvement telles qu'on en remarque dans notre Lune; car dans les syzygies cette planette (selon les Cor. 2. 3. 4. & 5. de la Prop. 66.) se meut plus vîte & décrit autour de la terre des aires plus grandes en temps égaux que dans les quadratures, & alors elle parcourt un orbe moins courbe, & approche par conséquent plus près de la terre, à moins que son mouvement excentrique ne fasse un effet contraire. Car l'excentricité de la Lune est la plus grande (par le Cor. 9. de la Prop. 66.) lorsque son apogée est dans les syzygies, & elle est la moindre lorsque l'apogée est dans les quadratures; ensorte que la Lune va plus vîte & est plus près de la terre dans son périgée; & elle va plus lentement, & est plus loin de nous dans son apogée, lorsqu'elle est dans les syzygies que lorsqu'elle est dans les quadratures. De plus, l'apogée avance, & les nœuds rétrogradent, mais d'un mouvement inégal: l'apogée (par les Cor. 7. & 8. de la Prop. 66.) avance plus vîte dans ses syzygies, & rétrograde plus lentement dans ses quadratures, & l'excès du mouvement progressif sur la rétrogradation se fait, pour l'année entiere, en conséquence. Mais les nœuds (par le Cor. 2. de la Prop. 66.) sont en repos dans leurs syzygies, & rétrogradent très-vîte dans leurs quadratures. Quant à la plus grande latitude de la Lune, elle est plus grande dans ses quadratures (par le Cor. 10. de la Prop. 66.) que dans ses syzygies: & le moyen mouvement eſt plus lent dans le périhélie de la terre (par le Cor. 6. de la Prop. 66.) que dans ſon aphélie. Ce ſont là les inégalités les plus remarquables que les Aſtronomes ayent obſervées dans le mouvement de la Lune.

Il y en a encore quelques-unes qui n'avoient pas été obſervées par les premiers Aſtronomes, & qui troublent tellement les mouvemens lunaires, que juſqu'à-préſent, on n'avoit pu les réduire à aucune régle certaine. Telles ſont les vîteſſes ou les mouvemens horaires de l'apogée & des nœuds de la Lune, & leurs équations, ainſi que la différence entre la plus grande excentricité dans les ſyzygies & la plus petite dans les quadratures, & l'inégalité qu'on appelle variation; toutes ces quantités augmentent & diminuent annuellement (par le Cor. 14. de la Prop. 66.) en raiſon triplée du diamétre apparent du Soleil. De plus, la variation augmente ou diminue à peu près en raiſon doublée du temps qui s'écoule entre les quadratures (par les Cor. 1. & 2. du Lemme 10. & le Cor. 16. de la Prop. 66. Liv. 1.) mais cette inégalité eſt ordinairement rapportée dans le calcul aſtronomique à la proſthaphéréſe de la Lune, & eſt confondue avec elle.

## PROPOSITION XXIII. PROBLÉME V.

*Les inégalités des mouvemens des ſatellites de Jupiter & de Saturne peuvent ſe déduire des mouvemens de la Lune.*

On peut déduire des mouvemens de notre Lune les mouvemens analogues des Lunes ou des ſatellites de Jupiter, & cela en cette ſorte.

Par le Cor. 16. de la Prop. 66. du Liv. 1. le mouvement moyen des nœuds du ſatellite le plus éloigné de Jupiter eſt au mouvement moyen des nœuds de notre Lune, en raiſon composée de la raiſon doublée du temps périodique de la terre autour du Soleil, au temps périodique de Jupiter autour du Soleil, & de la raiſon ſimple du temps périodique de ce ſatellite autour de Jupiter au temps périodique de la Lune autour de la terre; ainsi en cent ans les nœuds du dernier satellite de Jupiter feront $8^d\ 24'$ en antécédence.

Par le même corollaire, les mouvemens moyens des nœuds des satellites intérieurs sont au mouvement des nœuds de ce dernier satellite comme les temps périodiques de ces satellites intérieurs au temps périodique du satellite extérieur, ainsi ils sont donnés.

Il suit encore du même Corollaire que le mouvement en conséquence de l'apside la plus haute d'un satellite est au mouvement de ses nœuds en antécédence, comme le mouvement de l'apogée de notre Lune au mouvement de ses nœuds, & il est par conséquent donné.

Le mouvement de la plus haute apside ainsi trouvé, doit être diminué dans la raison de 5 à 9 ou de 1 à 2 à peu près, pour une raison qu'il n'est pas à propos d'expliquer ici.

Les plus grandes équations des nœuds, & de l'apside la plus haute d'un satellite quelconque sont, à peu près, aux plus grandes équations des nœuds & de l'apside la plus haute de la Lune, respectivement, comme le mouvement des nœuds & de l'apside la plus haute des satellites dans le temps d'une révolution des premieres équations, au mouvement des nœuds & de l'apogée de la Lune dans le temps d'une révolution des derniéres équations.

La variation d'un satellite, telle qu'on l'observeroit de Jupiter, est à la variation de la Lune comme sont entr'eux les mouvemens entiers des nœuds pendant les temps pendant lesquels ce satellite & la Lune font leur révolution autour du Soleil, par le même Cor. Ainsi dans le satellite le plus éloigné de Jupiter elle ne passe pas $5''\ 12'''$.

PROPOSITION

## PROPOSITION XXIV. THÉORÉME XIX.

*Le flux & le reflux de la mer sont causés par les actions de la Lune & du Soleil.*

Par les Cor. 19. & 20. de la Prop. 66. du premier Livre, on voit que la mer doit s'abbaisser & s'élever deux fois chaque jour tant solaire que lunaire, & que la plus grande élévation de l'eau dans les mers libres & profondes, doit suivre le passage de l'astre par le méridien du lieu dans un espace de temps moindre que six heures. C'est en effet ce qui arrive dans la mer Atlantique & d'Ethiopie, & dans tout le trajet qui est entre la France & le Cap de bonne Espérance vers l'Orient, ainsi que dans la mer Pacifique sur les rivages du Chili & du Pérou : car dans toutes ces côtes les marées arrivent vers la 2, 3, ou quatriéme heure, excepté que dans les lieux où l'eau rencontre beaucoup de sables, la marée retarde jusqu'à la 5, 6 & septiéme heure, & quelquefois au de-là. Je compte les heures depuis le passage de l'un & de l'autre astre par le méridien du lieu tant au-dessus qu'au-dessous de l'horison, & par les heures du jour lunaire j'entends la vingt-quatriéme partie du temps que la Lune employe dans son mouvement diurne apparent à revenir au méridien du lieu.

La plus grande force du Soleil ou de la Lune, pour élever les eaux de la mer, se trouve dans le moment même qu'ils atteignent le méridien du lieu. Cette force qu'ils impriment alors à la mer y subsiste pendant un certain temps, & s'augmente par la force nouvelle qui lui est ensuite imprimée, jusqu'à ce que la mer soit parvenue à sa plus grande hauteur, ce qui arrive dans l'espace d'une heure, de deux heures, & le plus souvent dans celui de trois heures environ vers les rivages, ou même dans un temps plus long, si la mer a beaucoup de bancs.

Les deux mouvemens que ces deux astres excitent, ne peuvent pas être apperçus chacun à part, mais il s'en compose un mouvement mixte. Dans la conjonction ou l'opposition de ces astres, leurs actions conspirent & causent le plus grand flux & le plus grand reflux. Dans les quadratures, le Soleil éleve l'eau lorsque la Lune l'abbaisse, & il l'abbaisse lorsque la Lune l'éleve; & la marée étant l'effet de la différence de ces actions opposées, elle est alors la plus petite. Or comme l'expérience fait voir que la Lune fait plus d'effet sur la mer que le Soleil, la plus grande hauteur de l'eau arrive, à peu près, à la troisiéme heure lunaire.

Hors des syzygies & des quadratures, la plus grande hauteur de l'eau devroit toujours arriver à la troisiéme heure lunaire par la seule action de la Lune, & à la troisiéme heure solaire par la seule action du Soleil; & par ces actions composées elle arrive à un temps intermédiaire, mais qui est plus près de la troisiéme heure lunaire que de la troisiéme heure solaire; ainsi dans le passage de la Lune des syzygies aux quadratures, où la troisiéme heure solaire précede la troisiéme heure lunaire, la plus grande hauteur de l'eau précede aussi la troisiéme heure lunaire, & elle la précede d'un intervalle qui est le plus grand un peu après les octans de la Lune; dans le passage des quadratures aux Syzygies c'est le contraire, la plus haute marée suit la troisiéme heure lunaire avec des intervalles égaux à ceux avec lesquels elle l'avoit précédée.

Telles sont les loix du flux & du reflux dans les mers libres, mais aux embouchures des fleuves, les plus grandes hauteurs de l'eau arrivent plus tard, toutes choses d'ailleurs égales.

Les effets du Soleil & de la Lune sur la mer dépendent de leurs distances de la terre; car dans leurs moindres distances ils font de plus grands effets, & dans leurs plus grandes distances leurs effets sont moindres, & cela en raison triplée de leurs diamétres apparens. Ainsi le Soleil étant l'hyver dans son périgée, il fait plus d'effet sur la mer, & par conséquent, toutes choses égales, les marées sont un peu plus hautes dans les syzygies, &

un peu moindres dans les quadratures, en Hyver qu'en Eté ; & la Lune étant chaque mois dans son périgée, les marées sont plus grandes alors que 15 jours devant ou 15 jours après qu'elle est dans son apogée. Par ces deux causes il arrive que dans deux syzygies continues les deux plus grandes marées ne se suivent pas éxactement.

Les effets du Soleil & de la Lune sur la mer dépendent aussi de la déclinaison de ces astres, ou de leur distance de l'équateur ; car si l'astre étoit dans le pôle, il attireroit d'une maniére constante toutes les parties de l'eau, sans que son action fut augmentée ni diminuée, & par conséquent elle n'exciteroit aucun mouvement de réciprocation. Donc ces astres s'éloignant de l'équateur vers le pôle, leurs effets doivent diminuer peu à peu, & par conséquent ils doivent causer de moindres marées dans leurs syzygies solsticiales que dans leurs syzygies équinoxiales. Dans leurs quadratures solsticiales elles doivent, au contraire, être plus grandes que dans leurs quadratures équinoxiales ; parce que les effets de la Lune, qui est alors dans l'équateur, surpassent beaucoup ceux du Soleil ; ainsi les plus grandes marées arrivent dans les syzygies, & les moindres dans les quadratures de ces astres, vers les temps de l'équinoxe de l'un & de l'autre ; & la plus grande marée dans les syzygies est toujours accompagnée de la plus petite dans les quadratures, comme l'expérience le fait voir.

Le Soleil étant moins éloigné de la terre en Hyver qu'en Eté, les plus grandes & les plus petites marées précedent plus souvent l'équinoxe du Printemps qu'elles ne le suivent, & elles suivent plus souvent l'équinoxe d'Automne qu'elles ne le précedent.

Les effets du Soleil & de la Lune sur la mer dépendent encore de la latitude des lieux. Que *ApEP* représente la terre couverte de toutes parts par une mer très-profonde ; que *C* soit son centre ; *P* & *p* ses pôles ; *AE* son équateur ; *F* un lieu quelconque de la terre pris hors de l'équateur ; *Ff* le parallele Fig. 2.

Fig. 2.

de ce lieu; *D d* le parallele qui lui répond de l'autre côté de l'équateur; *L* le lieu où la Lune étoit trois heures auparavant; *H* le lieu de la terre qui y répond perpendiculairement; *h* le lieu opposé à celui-là; *K*, *k* les lieux qui en sont distans de 90$^{d}$; *CH*, *Ch* les plus grandes hauteurs de la mer mesurées du centre de la terre; & *CK*, *Ck* ses plus petites hauteurs: si sur les axes *Hh*, *Kk* on décrit une ellipse, cette ellipse par sa révolution autour de son grand axe *Hh* décrira un sphéroïde *HPK hpk*; lequel représentera à peu près la figure de la mer, & *CF*, *Cf*, *CD*, *Cd* seront les hauteurs de la mer aux lieux *F*, *f*, *D* & *d*. De plus, si dans la révolution de l'ellipse dont on vient de parler, un point quelconque *N* décrit un cercle *MN*, lequel coupe les paralleles *Ff*, *Dd* dans les lieux quelconques *R* & *T* & l'équateur *AE* en *S*; *CN* sera la hauteur de la mer dans tous les lieux *R*, *S*, *T*, situés dans ce cercle. Ainsi dans la révolution diurne d'un lieu quelconque *F*, l'élévation des eaux sera la plus grande en *F*, la troisiéme heure après le passage de la Lune par le méridien sur l'horison; & leur plus grand abbaissement sera en *Q* la troisiéme heure après le coucher de la Lune; ensuite la plus grande élévation sera en *f* la troisiéme heure après le passage de la Lune par le méridien sous l'horison; & enfin le plus grand abbaissement en *Q* la troisiéme heure après le lever de la Lune; & la derniére élévation des eaux en *f* sera moindre que la premiere en *F*.

Supposons toute la mer séparée en deux flots hémisphériques, l'un boréal dans l'hémisphére *KHk*, & l'autre austral dans l'hémisphére opposé *Khk*; ces flots étant toujours opposés l'un à l'autre viennent tour à tour au méridien de chaque lieu de la terre dans l'intervalle de 12 heures lunaires. Mais comme les régions boréales participent plus du flux boréal, & les australes du flux austral, il doit s'en composer des marées qui seront alternativement plus grandes & moindres dans chacun des lieux hors de l'équateur, dans lesquels le Soleil & la Lune se levent &

se couchent. Ainsi la plus grande marée, lorsque la Lune décline vers le Zenith du lieu, tombera à peu près à la troisiéme heure après le passage de la Lune au méridien sur l'horison ; & la déclinaison de la Lune changeant, cette plus grande marée deviendra la plus petite. La plus grande différence de ces marées tombera dans le temps des solstices ; surtout si le nœud ascendant de la Lune se trouve dans le premier point d'Aries. C'est ce qui est conforme à l'expérience, car en hyver les marées du matin sont plus grandes que celles du soir, & en Eté celles du soir surpassent celles du matin. A *Plimouth* cette différence va presque à un pied, & à *Bristol* elle va à 15 pouces : comme l'ont observé *Colepressius* & *Sturmius*.

Les mouvemens de la mer dont j'ai parlé jusqu'à présent sont un peu altérés par cette force de réciprocation des eaux, par laquelle le flux pourroit subsister quelque temps quoique les actions du Soleil & de la Lune sur la mer vinssent à cesser. Cette conservation du mouvement une fois imprimé diminue la différence des marées alternatives ; & elle rend les marées plus grandes immédiatement après les syzygies, & plus petites immédiatement après les quadratures. C'est pourquoi les marées alternatives à *Plimouth* & à *Bristol* ne différent pas entr'elles beaucoup plus que d'un pied ou de 15 pouces ; en sorte que les plus grandes marées dans ces ports ne sont pas les premieres après les syzygies, mais les troisiémes.

Tous ces mouvemens sont retardés lorsque les eaux de la mer passent sur des bas fonds, ainsi les plus grandes marées dans les détroits & dans les embouchures des fleuves, ne sont que le quatriéme ou même le cinquiéme jour après les syzygies.

De plus, il se peut faire que le flux se propage de l'océan par plusieurs détroits jusqu'au même port, & qu'il passe plus vîte par quelques-uns de ces détroits que par les autres : d'où il arrive que le même flux étant divisé en deux ou plusieurs flux qui arrivent successivement, il peut composer de nouveaux mouvemens de différens genres. Supposons deux flux égaux qui arrivent de deux endroits différens dans le même port, & dont l'un précéde l'autre de six heures, & tombe dans la troisiéme heure après le passage de la Lune par le méridien de ce port; si la Lune, lorsqu'elle arrive à ce méridien, étoit dans l'équateur, il y auroit toutes les six heures des flux qui seroient contrebalancés par des reflux égaux & l'eau seroit stagnante pendant tout l'espace de ce jour-là; mais si la Lune déclinoit alors, les marées seroient tour à tour plus grandes & moindres dans l'océan, comme on l'a dit; & elles se propageroient de l'océan dans ce port deux à deux; ainsi il y arriveroit deux marées fortes & deux marées foibles tour à tour. Les deux marées fortes feroient que l'eau acquéreroit sa plus grande hauteur dans le milieu entre l'une & l'autre, la marée forte & la marée foible feroient que l'eau acquéreroit sa hauteur moyenne entre ces deux marées, & entre les deux marées foibles l'eau monteroit à sa moindre hauteur. Ainsi dans l'espace de 24 heures l'eau n'acquéreroit pas deux fois, comme il arrive ordinairement, mais seulement une fois sa plus grande hauteur, & une fois sa moindre hauteur. La plus grande hauteur de l'eau, si la Lune décline vers le pôle qui est sur l'horison du lieu, tombera à la sixiéme ou à la treiziéme heure après le passage de la Lune au méridien, & elle se changera en reflux lorsque la déclinaison de la Lune changera.

*Halley* a trouvé des exemples de tout cela dans les observations des pilotes faites à *Batsham* port du royaume de *Tunquin*, situé à $20^{d}\ 50'$ de latitude boréale. Dans ce port, il n'y a point de marée le jour qui suit le passage de la Lune par l'équateur, ensuite, lorsque la Lune commence à décliner vers le Nord on commence à s'appercevoir du flux & du reflux, non pas deux fois par jour comme dans les autres ports, mais une fois seulement chaque jour; & le flux arrive lorsque la Lune se couche, & le reflux lorsqu'elle se leve.

Le flux augmente dans ce port avec la déclinaison de la Lune jusqu'au septiéme ou huitiéme jour, ensuite il diminue par les mêmes dégrés pendant ſept autres jours ; & lorſqu'enſuite la Lune paſſe dans les ſignes oppoſés il ceſſe entierement & ſe change après en reflux. Le reflux arrive alors au coucher de la Lune, & le flux à ſon lever, juſqu'à ce que la Lune revienne dans les premiers ſignes.

On arrive à ce port par deux détroits, l'un qui eſt dans la mer de la Chine entre le continent & l'iſle de *Laconie*, l'autre dans la mer des Indes entre le continent & l'iſle de *Borneo*. De ſçavoir ſi les marées, en paſſant par ces détroits, & venant de la mer des Indes dans l'eſpace de 12 heures, & de la mer de la Chine dans l'eſpace de 6 heures, & en arrivant ainſi à la troiſiéme & à la neuviéme heure lunaire, compoſent ſeules ces ſortes de mouvemens, ou s'il ne s'y mêle point d'autres cauſes propres à ces mers, c'eſt ce que je laiſſe à déterminer par les obſervations qu'on pourra faire ſur les côtes voiſines.

J'ai expliqué juſqu'ici les cauſes des mouvemens de la Lune & de la mer, il me reſte à traiter à préſent de la quantité de ces mouvemens.

## PROPOSITION XXV. PROBLÉME VI.

*Trouver les forces du Soleil pour troubler les mouvemens de la Lune.*

Que $S$ repréſente le Soleil, $T$ la terre, $P$ la Lune, $CADB$ l'orbe de la Lune. Que $SK$ priſe ſur $SP$ ſoit égale à $ST$; & que $SL$ ſoit à $SK$ en raiſon doublée de $SK$ à $SP$; enfin que $LM$ ſoit parallele à $PT$; ſi la gravité accélératrice de la terre vers le Soleil eſt exprimée par la diſtance $ST$ ou $SK$, $SL$ ſera la gravité accélératrice de la Lune vers le Soleil, laquelle eſt compoſée des parties $SM$, $LM$, deſquelles $LM$ & la partie $TM$ de $SM$ troublent les mouvemens de la Lune, comme on l'a fait voir au Livre premier dans la Propoſition 66. & ſes Corollaires. Fig. 3.

La terre & la Lune faiſant leur révolution autour de leur commun centre de gravité, le mouvement de la terre autour de

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 3.

ce centre est aussi troublé par des forces semblables; mais on peut rapporter la somme de ces mouvemens & de ces forces à la Lune & représenter les sommes de ces forces par des lignes analogues *TM* & *LM*.

La force *LM*, dans sa moyenne quantité, est à la force centripéte, par laquelle la Lune peut faire sa révolution dans son orbite à la distance *PT*, autour de la terre supposée en repos, en raison doublée des temps périodiques de la Lune autour de la terre & de la terre autour du Soleil, par le Cor. 17. de la Prop. 66. du Liv. 1. c'est-à-dire, en raison doublée de 27 jours, $7^{h}$ $43'$ à 365 jours $6^{h}$ $9'$, ou, ce qui revient au même, comme 1000 à 178725, ou enfin comme 1 à $178\frac{29}{40}$: Or nous avons trouvé dans la Prop. 4. que si la terre & la Lune tournent autour d'un commun centre de gravité, leur moyenne distance entr'elles sera environ de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres médiocres de la terre à peu près: & la force par laquelle la Lune peut tourner dans son orbe autour de la terre en repos, à la distance *PT*, qui est de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres de la terre, est à la force par laquelle elle peut y tourner dans le même temps à la distance de 60 demi diamétres comme $60\frac{1}{2}$ est à 60; de plus, cette force est à la force de la gravité sur la terre comme 1 à $60 \times 60$ à peu près. Donc la force moyenne *ML* est à la force de la gravité sur la surface de la terre, comme $1 \times 60\frac{1}{2}$ à $60 \times 60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, ou comme 1 à 638092, 6. Il n'est plus question maintenant que de connoître la proportion des lignes *TM*, *ML* pour avoir la force *TM*, & par conséquent celles par lesquelles le Soleil trouble les mouvemens de la Lune. *C. Q. F. T.*

## PROPOSITION XXVI. PROBLÉME VII.

*Trouver l'incrément horaire de l'aire que la Lune décrit autour de la terre, en supposant que son orbite soit circulaire.*

Nous avons dit que les aires que la Lune décrit autour de la terre sont proportionnelles au temps lorsqu'on néglige l'altéra-

tion

tion que l'action du Soleil cause dans les mouvemens lunaires. Examinons ici quelle est l'inégalité du moment, ou de l'incrément horaire causée par cette action.

Afin de rendre le calcul plus facile, supposons l'orbe de la Lune parfaitement circulaire, & négligeons toutes ses inégalités, excepté celle dont il est ici question.

A cause du grand éloignement du Soleil, supposons que les lignes $SP$, $ST$ soient paralleles entr'elles; par ce moyen, la force $LM$ sera toujours réduite à sa moyenne quantité $TP$, ainsi que la force $TM$ à sa moyenne quantité $3\,PK$. Ces forces, par le Cor. 2. des Loix, composent la force $TL$; laquelle, en abbaissant $LE$ perpendiculairement sur le rayon $TP$, se résout dans les forces $TE$, $EL$, dont la premiere $TE$, agissant toujours selon le rayon $TP$, n'accélere ni ne retarde la description de l'aire $TPC$ parcourue par le rayon $TP$; quant à la seconde $EL$, comme elle agit selon la perpendiculaire à ce rayon, elle accélere ou retarde cette description autant qu'elle retarde ou accélere le mouvement de la Lune. Cette accélération de la Lune, qui se fait à chaque instant, dans son passage de la quadrature $C$ à la conjonction $A$, est comme la force même accélérante $EL$, c'est-à-dire, comme $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$. Fig. 4.

Que le temps soit représenté par le moyen mouvement de la Lune ou (ce qui revient presqu'au même) par l'angle $CTP$, ou encore par l'arc $CP$. Qu'on tire $CG$ perpendiculaire & égale à $CT$; & qu'on suppose le quart de cercle $AC$ divisé en un nombre infini de petites parties égales $Pp$, &c. qui représentent autant de petites parties égales de temps; qu'on mene de plus $pk$ perpendiculaire à $CT$, & qu'on tire $TG$ qui rencontre en $F$ & en $f$ ces mêmes lignes $KP$, $kp$ prolongées; il est clair que $FK$ sera égale à $TK$, & qu'on aura $Kk : PK :: Pp : Tp$, c'est-à-dire, en raison donnée; donc $FK \times Kk$ ou l'aire $FKkf$ sera comme $\frac{3\,PK \times TK}{TP}$, c'est-à-dire, comme $EL$; & par consé-

Fig. 4.

quent l'aire totale $GCKF$ sera comme la somme de toutes les forces $EL$ imprimées à la Lune pendant tout le temps $CP$, & par conséquent comme la vîtesse que toutes ces forces ont produite, c'est-à-dire, comme l'accélération de la description de l'aire $CTP$, ou comme l'incrément du moment.

La force par laquelle la Lune peut faire sa révolution autour de la terre, supposée en repos, à la distance $TP$, dans le temps périodique $CADB$ de 27 jours, $7^h\ 43'$, seroit qu'un corps en tombant pendant le temps $CT$ parcoureroit la longueur $\frac{1}{2}\ CT$, & acquéreroit en même temps une vîtesse égale à celle de la Lune dans son orbe ; ce qui est clair par le Cor. 9. de la Prop. 4. Liv. 1. Or comme la perpendiculaire $Kd$ abbaissée sur $TP$ est la troisiéme partie de $EL$, & la moitié de $TP$ ou de $ML$ dans les octans, la force $EL$ dans les octans, où elle est la plus grande, surpassera la force $ML$ dans la raison de 3 à 2, ainsi elle sera à la force par laquelle la Lune peut tourner autour de la terre en repos, dans son temps périodique, comme 100 à $\frac{2}{3} \times 17872\frac{1}{2}$ ou 11915, & dans le temps $CT$ elle devroit produire une vîtesse qui seroit la $\frac{100}{11915}$ partie de la vîtesse de la Lune, & pendant le temps $CPA$ elle devroit produire une vîtesse qui seroit plus grande dans la raison de $CA$ à $CT$ ou $TP$.

Que la plus grande force $EL$ dans les octans soit représentée par l'aire $FK \times Kk$ égale au rectangle $\frac{1}{2}\ TP \times Pp$. La vîtesse que la plus grande force peut produire dans un temps quelconque $CP$ sera à la vîtesse que la plus petite force entiére $EL$ peut produire dans le même temps, comme le rectangle $\frac{1}{2}\ TP \times CP$ à l'aire $KCGF$ : & les vîtesses produites pendant le temps total $CPA$ seront entr'elles comme le rectangle $\frac{1}{2}\ TP \times CA$ & le triangle $TCG$, ou comme l'arc d'un quart de cercle $CA$ & son rayon $TP$. Donc la vîtesse à la fin du temps total sera la $\frac{100}{11915}$ partie de la vîtesse de la Lune. Si l'on ajoute, & si l'on ôte de cette vîtesse de la Lune, qui est proportionnelle à l'incrément médiocre de l'aire, la moitié de cette derniére vîtesse, & qu'on

Fig. 4.

repréſente l'incrément moyen par le nombre 11915, la ſomme 11915 + 50 ou 11965 repréſentera le plus grand incrément de l'aire dans la ſyzygie *A*, & la différence 11915 − 50 ou 11865 le plus petit incrément de cette même aire dans les quadratures. Donc les aires décrites en temps égaux dans les ſyzygies & dans les quadratures ſont entr'elles, comme 11965 & 11865. Ajoutant au plus petit incrément 11865, un incrément qui ſoit à la différence 100 des incrémens, comme le trapéze *FKCG* au triangle *TCG*, ou (ce qui eſt la même choſe) comme le quarré du ſinus *PK* au quarré du rayon *TP*, c'eſt-à-dire, comme *Pd* à *TP*, la ſomme repréſentera l'incrément de l'aire, lorſque la Lune ſe trouve dans un lieu intermédiaire quelconque *P*.

Tout cela a lieu dans l'hypothéſe que le Soleil & la terre ſoient en repos, & que la Lune faſſe ſa révolution dans le temps ſynodique de 27 jours, 7$^{h}$ 43′. Mais comme la vraie période ſinodique lunaire eſt de 29 jours, 12$^{h}$ 44′, les incrémens des momens doivent augmenter en raiſon du temps, c'eſt-à-dire, en raiſon de 1080853 à 1000000. De cette maniére, l'incrément total, qui étoit la $\frac{100}{11915}$ partie du moment médiocre, deviendra ſa $\frac{100}{11023}$ partie. Ainſi le moment de l'aire dans la quadrature de la Lune ſera au moment de cette même aire dans la ſyzygie, comme 11023 − 50 à 11023 + 50, ou comme 10973 à 11073; & à ſon moment, lorſque la Lune eſt dans un lieu quelconque intermédiaire *P*, comme 10973 à 10973 + *Pd*, en ſuppoſant *TP* = 100.

Donc l'aire que la Lune décrit autour de la terre à chaque particule égale de temps, eſt à peu près comme la ſomme du nombre 219, 46 & du ſinus verſe du double de la diſtance de la Lune à la prochaine quadrature, dans un cercle dont le rayon eſt l'unité. Tout ceci ſuppoſe que la variation dans les octans ſoit de grandeur médiocre. Si la variation y eſt plus grande ou plus petite, ce ſinus verſe doit être augmenté ou diminué dans la même raiſon.

## PROPOSITION XXVII. PROBLÉME VIII.

*Par le mouvement horaire de la Lune trouver quelle est sa distance de la terre.*

L'aire que la Lune décrit à chaque moment autour de la terre, est comme le mouvement horaire de la Lune, & le quarré de la distance de la Lune à la terre conjointement ; & par conséquent, la distance de la Lune à la terre est en raison composée de la raison soufdoublée de l'aire directement, & de la raison soufdoublée inverse du mouvement horaire. *C. Q. F. T.*

*Cor.* 1. On a, par ce moyen, le diamétre apparent de la Lune : car il est réciproquement comme sa distance à la terre. C'est aux Astronomes à voir combien cette régle s'accorde éxactement avec les Phénoménes.

*Cor.* 2. On peut encore tirer de-là un moyen d'employer les Phénoménes à déterminer l'orbite de la Lune beaucoup plus éxactement qu'on n'a fait jusqu'à présent.

## PROPOSITION XXVIII. PROBLÉME IX.

*Trouver les diamétres de l'orbe dans lequel la Lune devroit se mouvoir, en supposant qu'elle n'eût point d'excentricité.*

La courbure de la trajectoire qu'un mobile décriroit s'il étoit toujours tiré perpendiculairement à cette trajectoire, est en raison directe de l'attraction, & en raison inverse du quarré de la vîtesse. Je suppose que les courbures des courbes sont entr'elles dans la derniére proportion des sinus, ou des tangentes des angles de contact qui appartiennent aux rayons égaux, lorsque ces rayons diminuent à l'infini.

Fig. 3. L'attraction de la Lune vers la terre dans les syzygies est l'excès de sa gravité vers la terre sur la force solaire $2PK$, laquelle est la différence des gravités de la Lune & de la terre vers le Soleil : & dans les quadratures, cette attraction est la somme de

la gravité de la Lune vers la terre, & de la force solaire $KT$ dirigée vers la terre. Ces attractions, en nommant $N$ la quantité $\frac{AT+CT}{2}$, sont, à peu près, comme $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \times N}$ & $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \times N}$; ou comme $178725\ N \times CT^2 - 2000\ AT^2 \times CT$ & $178725\ N \times AT^2 + 1000\ CT^2 \times AT$. Car si la gravité accélératrice de la Lune vers la terre est représentée par le nombre 178725, la force médiocre $ML$, qui dans les quadratures est $PT$ ou $TK$, & qui tire la Lune vers la terre, sera 1000, & la force médiocre $TM$ dans les syzygies sera 3000; de laquelle, si on ôte la force médiocre $ML$, il restera la force 2000, par laquelle la Lune s'éloigne de la terre dans les syzygies, & laquelle j'ai nommée ci-devant $2PK$. Fig. 3.

La vîtesse de la Lune dans les syzygies $A$ & $B$ est à sa vîtesse dans les quadratures $C$ & $D$, comme $CT$ à $AT$, & comme le moment de l'aire que la Lune décrit dans les syzygies autour de la terre, est au moment de cette même aire dans les quadratures conjointement, c'est-à-dire, comme $11073\ CT$ à $10973\ AT$.

Cela posé, il est évident que la courbure de l'orbe de la Lune dans les syzygies est à sa courbure dans les quadratures comme $120406729 \times 178725\ AT^2 \times CT^2 \times N - 120406729 \times 2000\ AT^4 \times CT$ à $122611329 \times 178725\ AT^2 \times CT^2 \times N + 122611329 \times 1000\ CT^4 \times AT$, c'est-à-dire, comme $2151969\ AT \times CT \times N - 24081\ AT^3$ à $2191371\ AT \times CT \times N + 12261\ CT^3$.

Comme on ignore la figure de l'orbe de la Lune, nous supposerons que cet orbe soit l'ellipse $DBCA$ dans le centre $T$ de laquelle la terre est placée, & dont le grand axe $DC$ passe par les quadratures, & le petit axe $AB$ par les syzygies. Et à cause que le plan de cette ellipse se meut d'un mouvement angulaire autour de la terre, & que la trajectoire dont nous cherchons la courbure doit être décrite dans un plan qui soit entiérement privé de tout mouvement angulaire: il faut considérer la figure que la Fig. 5.

Fig. 5.

Lune, en faisant sa révolution dans cette ellipse, décrit dans ce plan immobile, c'est-à-dire, la figure $Cpa$, dont chaque point $p$ est déterminé en prenant un point quelconque $P$ dans l'ellipse pour représenter le lieu de la Lune, & en menant $Tp$ égale à $TP$, par une loi telle que l'angle $PTp$ soit égal au mouvement apparent du Soleil depuis la quadrature $C$; ou (ce qui revient à peu près au même) que l'angle $CTp$ soit à l'angle $CTP$ comme le temps de la révolution synodique de la Lune est au temps de sa révolution périodique, ou comme 29 jours $12^{h}$ $44'$ à 27 jours $7^{h}$ $43'$.

Prenant donc l'angle $CTa$ dans cette raison à l'angle droit $CTA$, & faisant $Ta$ égale à $TA$; $a$ sera l'apside la plus basse, & $C$ l'apside la plus haute de cet orbe $Cpa$ quant aux courbures dans ces deux points, je trouve, en faisant le calcul nécessaire, que la différence entre la courbure de l'orbe $Cpa$ au sommet $a$, & la courbure du cercle dont le centre est $T$ & le rayon $TA$ est à la différence entre la courbure de l'ellipse au sommet $A$, & la courbure de ce même cercle, en raison doublée de l'angle $CTP$ à l'angle $CTp$; & que la courbure de l'ellipse en $A$ est à la courbure de ce cercle, en raison doublée de $TA$ à $TC$; de plus, que la courbure de ce cercle est à la courbure du cercle dont le centre est $T$ & le rayon $TC$ comme $TC$ à $TA$; & que cette courbure est à la courbure de l'ellipse en $C$, en raison doublée de $TA$ à $TC$; & enfin que la différence entre la courbure de l'ellipse au sommet $C$ & la courbure de ce dernier cercle, est à la différence entre la courbure de la figure $Tpa$ au sommet $C$, & la courbure de ce même cercle, en raison doublée de l'angle $CTp$ à l'angle $CTP$. Ce qui se tire aisément des sinus des angles de contact, & des différences de ces angles.

Employant donc toutes ces raisons, on trouve que la courbure de la figure $Cpa$ en $a$, est à sa courbure en $C$, comme $AT^{3} + \frac{16824}{100000} CT^{2} \times AT$ à $CT^{3} + \frac{16824}{100000} AT^{2} \times CT$. Le nombre

Fig. 5.

$\frac{16824}{100000}$ repréſentant la différence des quarrés des angles $CTP$ & $CTp$ diviſée par le quarré du plus petit angle $CTP$, ou, ce qui eſt la même choſe, la différence des quarrés des temps 27 jours $7^h\ 43'$ & 29 jours $12^h\ 44'$ diviſée par le quarré du temps 27 jours $7^h\ 43'$.

Donc puiſque $a$, repréſente la ſyzygie de la Lune, & $C$ ſa quadrature, la proportion qu'on vient de trouver doit être la même que celle de la courbure de l'orbe de la Lune dans les ſyzygies à la courbure du même orbe dans les quadratures, qui a été trouvée ci-deſſus. C'eſt pourquoi, pour trouver la proportion de $CT$ à $AT$, il n'y a qu'à multiplier les extrêmes & les moyens entr'eux; & les termes qui en viendront étant diviſés par $TC \times AT$ donneront l'équation $2062,79\ CT^4 - 2151969\ N \times CT^3 + 368676\ N \times AT \times CT^2 + 36342\ AT^2 \times CT^2 - 362047\ N \times AT^2 \times CT + 2191371\ N \times AT^3 + 4051,4\ AT^4 = 0$. Dans laquelle, ſi au lieu de la demie ſomme $N$ des termes $AT$, $CT$, on met 1, & au lieu de leur demie différence $x$, & par conſéquent $1 + x$ au lieu de $CT$, & $1 - x$ au lieu de $AT$; on aura $x = 0,00719$, c'eſt-à-dire, que le demi diamétre $CT$ ſera $1,00719$, & le demi diamétre $AT$ $0,99281$ : leſquels nombres ſont entr'eux à peu près comme $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$. La diſtance de la Lune à la terre dans les ſyzygies, eſt donc à ſa diſtance dans les quadratures comme $69\frac{1}{24}$ à $70\frac{1}{24}$, ou en nombres ronds comme 69 à 70, pourvû qu'on faſſe abſtraction de l'excentricité.

## PROPOSITION XXIX. PROBLÉME X.

*Trouver la variation de la Lune.*

Fig. 5.

Cette inégalité de la Lune vient en partie de l'inégalité des momens de l'aire que la Lune décrit autour de la terre, & en partie de la forme elliptique de l'orbe lunaire. Suppoſant que la Lune ſe meuve dans une ellipſe $DBCA$ autour de la terre en repos, placée dans le centre de cette ellipſe, elle décrira des aires

Fig. 5.

*CTP* proportionnelles aux temps; & si le demi grand diamétre *CT* de l'ellipse est à son petit demi diamétre *TA* comme 70 à 69, la tangente de l'angle *CTP* sera à la tangente de l'angle du mouvement moyen calculé depuis la quadrature *C*, comme 69 à 70. Mais la description de l'aire *CTP*, lorsque la Lune passe de la quadrature à la syzygie, doit être accélérée, en telle sorte que son moment dans la syzygie soit à son moment dans la quadrature comme 11073 à 10973, & que l'excès du moment dans un lieu intermédiaire quelconque *P*, sur le moment dans la quadrature, soit comme le quarré du sinus de l'angle *CTP*. C'est ce qu'on fera assez exactement, si on diminue la tangente de l'angle *CTP* en raison sousdoublée du nombre 10973 au nombre 11073, c'est-à-dire, en raison du nombre 68, 6877 au nombre 69. Par ce moyen, la tangente de l'angle *CTP* sera à la tangente du mouvement moyen comme 68, 6877 à 70. Et l'angle *CTP* dans les octans, où le mouvement moyen est de $45^d$, sera de $44^d\ 27'\ 28''$, qui étant ôté de l'angle du mouvement moyen qui est de $45^d$ donnera $32'\ 32''$ pour la plus grande variation.

Ce seroit là la plus grande variation, si la Lune, en passant de la quadrature à la syzygie, décrivoit un angle *CTA* qui fut exactement de 90 dégrés. Mais à cause du mouvement de la terre, par lequel le Soleil avance en conséquence par son mouvement apparent, la Lune, avant d'avoir atteint le Soleil, décrit un angle *CTa*, qui est plus grand qu'un angle droit, dans la raison du temps de la révolution sinodique de la Lune au temps de sa révolution périodique, c'est-à-dire, en raison de 29 jours $12^h\ 44'$ à 27 jours, $7^h\ 43'$. Il faut donc augmenter tous les angles autour du centre *T* dans la même raison, ce qui au lieu de $32'\ 32''$ pour la plus plus grande variation donnera $35'\ 10''$.

C'est-là la grandeur de la variation dans la moyenne distance du Soleil à la terre, en négligeant les différences qui peuvent naître de la courbure du grand orbe, & de la quantité dont l'action du Soleil sur la Lune, lorsqu'elle est nouvelle & en croissant

ſant, ſurpaſſe l'action de ce même aſtre ſur la Lune lorſqu'elle eſt pleine & gibbeuſe.

Dans les autres diſtances du Soleil à la terre, la plus grande variation eſt en raiſon compoſée de la raiſon doublée directe du temps de la révolution ſynodique de la Lune (pour le temps donné de l'année) & de la raiſon inverſe triplée de la diſtance du Soleil à la terre. Ainſi dans l'apogée du Soleil, la plus grande variation eſt de 33′ 14″, & dans ſon périgée, elle eſt de 37′ 11″, ſuppoſé que l'excentricité du Soleil ſoit au demi diamétre tranſverſal du grand orbe comme $16\frac{11}{16}$ à 1000.

Nous avons trouvé juſqu'à préſent la variation de la Lune en ſuppoſant que ſon orbe ne ſoit point excentrique, & que lorſqu'elle eſt dans ſes octans elle ſoit toujours à ſa médiocre diſtance de la terre. Mais comme la Lune par ſon excentricité eſt tantôt plus près & tantôt plus loin de la terre qu'elle ne l'eſt dans l'orbe qu'on vient d'éxaminer, ſa variation pourra être un peu plus grande, ou un peu moindre que la précédente : j'en laiſſe l'excès ou le défaut à déterminer aux aſtronomes par les Phénoménes.

## PROPOSITION XXX. PROBLÊME XI.

*Trouver le mouvement horaire des nœuds de la Lune dans un orbe circulaire.*

Que $S$ déſigne le Soleil, $T$ la terre, $P$ la Lune, $NPn$ l'orbe de la Lune, $Npn$ la projection de cet orbe dans le plan de l'écliptique; $N$ & $n$ les nœuds, $nTNm$ la ligne de ces nœuds prolongée infiniment; $PI$, $PK$ des perpendiculaires abbaiſſées ſur les lignes $ST$, $Qq$; $Pp$ une perpendiculaire abbaiſſée ſur le plan de l'écliptique; $A$ & $B$ les ſyzygies de la Lune dans ce plan; $AZ$ une perpendiculaire à la ligne des nœuds $Nn$; $Q$ & $q$ les quadratures de la Lune dans le plan de l'écliptique, & $pK$ une perpendiculaire à la ligne $Qq$ des quadratures. *Fig. 6.*

La force du Soleil pour troubler les mouvemens de la Lune eſt compoſée de deux forces (par la Prop. 25.) l'une proportionnelle à la ligne $LM$ de la figure de cette Propoſition, & l'autre à la

Fig. 6.

ligne $MT$ de la même figure. La Lune par la premiere de ces forces est tirée vers la terre, & par la seconde vers le Soleil, suivant une ligne parallele à la droite $ST$ menée du Soleil à la terre.

La premiere force $LM$ agissant dans le plan de l'orbite lunaire ne sçauroit altérer sa situation de ce plan, ainsi elle ne doit point être considérée. Quant à la force $MT$ par laquelle le plan de l'orbite lunaire est dérangé, elle a pour expression $3PK$ ou $3IT$. Et cette force (par la Prop. 25.) est à celle par laquelle la Lune pourroit être mûe uniformement (dans son temps périodique) dans un cercle autour de la terre supposée fixe, comme $3IT$ au rayon du cercle multiplié par le nombre 178, 725, ou comme $IT$ au rayon multiplié par 59, 575. Au reste dans ce calcul & dans tout ce qui suit, je considére toutes les lignes menées de la Lune au Soleil comme paralléles à celles qui sont tirées de la terre au Soleil, parce que l'inclinaison de ces lignes diminue à peu près tous les effets dans quelques cas, de la même maniére qu'elle les augmente dans d'autres; & que nous cherchons les mouvemens médiocres des nœuds, en négligeant les fractions insensibles qui rendroient le calcul trop embarrassant.

$PM$ désignant maintenant l'arc que la Lune décrit dans un instant donné, & $ML$ la petite ligne dont la Lune parcoureroit la moitié dans le même temps en vertu de la force précédente $3IT$; soient tirées $PL$, $PM$ que l'on prolonge en $m$ & en $l$, jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan de l'écliptique, & soit abbaissée la perpendiculaire $PH$ de $P$ sur $Tm$.

Parce que la droite $ML$ est parallele au plan de l'écliptique, & que par conséquent elle ne peut rencontrer la droite $ml$ qui est dans ce plan, que de plus ces droites $ML$, $ml$, sont dans un même plan $LMPml$; il faudra qu'elles soient paralleles, & par conséquent que les triangles $LMP$, $lmP$ soient semblables.

Présentement, comme $MPm$ est dans le plan de l'orbite dans lequel la Lune se meut en $P$, le point $m$ tombera sur la ligne $Nn$ menée par les nœuds $N$, $n$ de cette orbite : & parce que la force qui fait décrire la moitié de la petite ligne $LM$, feroit décrire cette ligne entiere si elle étoit imprimée en une seule fois dans le lieu $P$; & qu'elle feroit mouvoir la Lune dans l'arc dont la corde seroit $LP$, & transporteroit par conséquent la Lune du plan $MPmT$ dans le plan $LPlT$; le mouvement angulaire des nœuds engendré par cette force sera égal à l'angle $mTl$. Mais $ml : mP :: ML : MP$, donc, à cause que $MP$ est donnée par la supposition du temps constant, $ml$ sera comme le rectangle $ML \times mP$, c'est-à-dire, comme le rectangle $IT \times mP$. Et l'angle $mTl$, si on suppose l'angle $Tml$ droit, sera comme $\frac{ml}{Tm}$, & par conséquent comme $\frac{IT \times mP}{Tm}$, ou, ce qui revient au même, (à cause des proportionnelles $Tm$ & $mP$, $TP$ & $PH$) comme $\frac{IT \times PH}{TP}$ ou comme $IT \times PH$ à cause que $TP$ est donnée. Fig. 6.

Mais comme l'angle $Tml$ ou $STN$ n'est pas droit, l'angle $mTl$ sera moindre, & cela dans la raison du sinus de l'angle $STN$ au rayon, ou de $AZ$, à $AT$. Donc la vîtesse des nœuds est comme $IT \times PH \times AZ$, c'est-à-dire, comme le produit des sinus des trois angles $TPI$, $PTN$ & $STN$.

Si ces angles, les nœuds étant dans les quadratures, & la Lune dans la syzygie, sont droits, la petite droite $ml$ se trouvera à une distance infinie, & l'angle $mTl$ deviendra égal à l'angle $mPl$. Or dans ce cas, l'angle $mPl$ est à l'angle $PTM$ que la Lune décrit dans le même temps par son mouvement apparent autour de la terre, comme 1 à 59, 575. Car l'angle $mPl$ est égal à l'angle $LPM$, c'est-à-dire, à l'angle de la déflexion de la Lune du chemin rectiligne, qui seroit produite par la seule force solaire $3IT$ dans ce temps donné, si la Lune cessoit d'être pesante; de plus, l'angle $PTM$ est égal à l'angle de la déflexion de la Lune du chemin rectiligne causée par la seule force qui la retient dans son orbite, en faisant abstraction de la force solaire $3IT$. Et ces forces, comme nous l'avons dit ci-dessus, sont entr'elles comme 1 à 59, 575. Donc, comme le mouvement moyen horaire de la Lune, à l'égard des fixes, eſt de $32'$, $56''$, $27'''$ $12^{iv}\frac{1}{2}$, le mouvement horaire du nœud ſera, dans ce cas, de $33''$, $10'''$, $33^{iv}$, $12^{v}$; & dans les autres cas, ce mouvement horaire ſera à $33''$, $10'''$, $33^{iv}$, $12^{v}$, comme le produit des ſinus des trois angles *TPI*, *PTN*, & *STN*, (c'eſt-à-dire, de la diſtance de la Lune à la quadrature, de la diſtance de la Lune au nœud, & de la diſtance du nœud au Soleil) eſt au cube du rayon. Et toutes les fois que le ſigne d'un de ces angles paſſera du poſitif au négatif, & du négatif au poſitif, le mouvement des nœuds ſe changera de regreſſif en progreſſif, & de progreſſif en regreſſif. D'où il arrive que les nœuds avancent toutes les fois que la Lune eſt entre une des quadratures & le nœud le plus proche de la quadrature. Dans les autres cas, les nœuds rétrogradent, & en vertu de l'excès du mouvement rétrograde ſur le mouvement progreſſif les nœuds ſeront portés chaque mois en antécédence.

Fig. 7. *Cor.* 1. De-là il ſuit, que ſi on abbaiſſe des extrémités *P* & *M* d'un arc donné infiniment petit *PM*, les perpendiculaires *PK*, *Mk* à la ligne *Qq* qui paſſe par les quadratures, & qu'on prolonge ces perpendiculaires juſqu'à ce qu'elles coupent la ligne des nœuds *Nn* en *D* & en *d* le mouvement horaire des nœuds ſera comme l'aire *MPDd* & le quarré de la ligne *AZ* conjointement. Car ſoient *PK*, *PH* & *AZ* les trois ſinus dont on vient de parler, *PK* étant le ſinus de la diſtance de la Lune à la quadrature, *PH* le ſinus de la diſtance de la Lune au nœud, & *AZ* le ſinus de la diſtance du nœud au Soleil : on aura pour la viteſſe du nœud le produit $PK \times PH \times AZ$. Mais $PT : PK :: PM : Kk$; donc, à cauſe des données *PT* & *PM*, la petite droite *Kk* ſera proportionnelle à *PK*. De plus, $AT : PD :: AZ : PH$, & par conſéquent *PH* eſt proportionnelle à $PD \times AZ$. Donc $PK \times PH$ eſt comme $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ſera comme $Kk \times PD \times AZ^2$, c'eſt-à-dire, comme l'aire *PDdM* & $AZ^2$ conjointement. *C. Q. F. D.*

*Cor.* 2. Dans une poſition quelconque donnée des nœuds, le mouvement horaire médiocre est la moitié du mouvement horaire dans les syzygies de la Lune, c'est-à-dire, que ce mouvement est à 16'', 35''', 16^iv, 36^v, comme le quarré du sinus de la distance des nœuds aux syzygies est au quarré du rayon, ou ce qui revient au même, comme $AZ^2$ à $AT^2$.

Fig. 7.

Car si la Lune parcourt d'un mouvement uniforme le demi cercle $QAq$, la somme de toutes les aires $PDdM$ décrites pendant le temps que la Lune va de $Q$ à $M$ sera l'aire $QMdE$ terminée par la tangente $QE$ du cercle; & la somme de toutes les aires $PDdM$ pendant que la Lune va en $n$ sera l'aire totale $EQAn$ que la ligne $PD$ décrit, ensuite la Lune allant de $n$ en $q$, la ligne $PD$ tombera hors du cercle, & décrira l'aire $nqe$ terminée par la tangente $qe$ du cercle; laquelle aire, à cause que les nœuds alloient d'abord en rétrogradant & vont alors en avançant, doit être retranchée de la premiere aire, & par son égalité à l'aire $QEN$, le reste deviendra le demi cercle $NQAn$. Donc la somme de toutes les aires $PDdM$ décrites pendant le temps que la Lune parcourt un demi cercle, est l'aire du demi cercle; & la somme de toutes les mêmes aires décrites pendant le temps que la Lune parcourt le cercle entier, est l'aire du cercle entier.

Mais l'aire $PDdM$, lorsque la Lune est dans les syzygies, est le rectangle sous l'arc $PM$ & le rayon $PT$; & la somme de toutes les aires égales à celle-là, décrites pendant le temps que la Lune parcourt le cercle, est le rectangle de toute la circonférence & du rayon; & ce rectangle étant égal à deux cercles, est double du rectangle précédent. Donc les nœuds, avec une vîtesse continuée uniformement & égale à celle qu'ils ont dans les syzygies lunaires, décriroient un espace double de celui qu'ils décrivent réellement; & par conséquent le mouvement médiocre, qui étant continué uniformement feroit décrire aux nœuds l'espace qu'ils parcourent réellement d'un mouvement inégal, est la moitié du mouvement qu'ils ont dans les syzygies lunaires. Et comme le plus grand mouvement horaire, lorf-

Fig. 7.

que les nœuds sont dans les quadratures, est de 33'', 10''', 33$^{iv}$, 12$^{v}$, le mouvement médiocre horaire sera dans ce cas de 16'', 35''', 16$^{iv}$, 36$^{v}$. Or le mouvement horaire des nœuds étant toujours comme $AZ^2$ & l'aire $PDdM$ conjointement, il est encore dans les syzygies comme $AZ^2$ & l'aire $PDdM$ conjointement, ou, ce qui revient au même, comme $AZ^2$ (à cause qu'alors l'aire $PDdM$ est donnée); le mouvement médiocre sera aussi comme $AZ^2$, donc ce mouvement, lorsque les nœuds seront hors des quadratures, sera à 16'', 35''', 16$^{iv}$, 36$^{v}$, comme $AZ^2$ à $AT^2$. *C. Q. F. D.*

## PROPOSITION XXXI. PROBLÈME XII.

*Trouver le mouvement horaire des nœuds de la Lune dans un orbe elliptique.*

Fig. 8. Que $Qpmaq$ désigne une ellipse, $Qq$ son grand axe, $ab$ son petit axe; $QAqB$ le cercle circonscrit; $T$ la terre placée au centre commun de l'ellipse & du cercle; $S$ le Soleil; $p$ la Lune mue dans l'ellipse, & $pm$ l'arc qu'elle décrit dans une particule donnée infiniment petite de temps; $Nn$ la ligne des nœuds; $pK$ & $mk$ les perpendiculaires abbaissées sur l'axe $Qq$ & prolongées jusqu'à ce qu'elles rencontrent le cercle en $P$ & en $M$, & la ligne des nœuds en $D$ & en $d$.

Cela posé, je dis que si la Lune décrit autour de la terre des aires proportionnelles au temps, le mouvement horaire du nœud dans l'ellipse sera comme l'aire $pDdm$ & $AZ^2$ conjointement.

Pour le démontrer, soient menées $PF$ & $pf$ qui touchent en $P$ & $p$ le cercle & l'ellipse, qui rencontrent en $F$ & en $f$ la ligne des nœuds $TN$, & qui se rencontrent elles-mêmes ainsi que l'axe $TQ$ en $Y$. Soit pris $ML$ pour désigner l'espace que la Lune tournant dans le cercle, pourroit décrire d'un mouvement transversal par la force $3IT$ ou $3PK$, pendant qu'elle décrit l'arc $PM$. Et prenant $ml$ pour l'espace que la Lune, tournant dans le même temps dans l'ellipse, décriroit par la même force $3IT$ ou $3PK$; enfin soient prolongées $LP$ & $lp$ jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan de l'écliptique en $G$ & en $g$; & soient tirées $FG$ & $fg$ dont la premiere $FG$ prolongée coupe $pf$, $pg$ & $TQ$ en $c$, $e$, & $R$, respectivement, & dont la seconde $fg$ prolongée coupe $TQ$ en $r$. Fig. 8.

Il est clair que la force $3\,IT$ ou $3\,PK$ dans le cercle, étant à la force $3\,IT$ ou $3\,pK$ dans l'ellipse comme $PK$ à $pK$ ou comme $AT$ à $aT$; l'espace $ML$, décrit par la premiere force, sera à l'espace $ml$ décrit par la derniere, comme $PK$ à $pK$, c'est-à-dire, à cause des figures semblables $PYKp$ & $FYRc$ comme $FR$ à $cR$. Mais, (par les triangles semblables $PLM$, $PGF$) $ML : FG :: PL : PG$, c'est-à-dire, (à cause des paralleles $Lk$, $PK$, $GR$) $:: pl : pe$, ou, ce qui revient au même, (à cause des triangles semblables $plm$, $pce$) $:: lm : ce$. Donc $LM : lm$ ou $FR : cR :: FG : ce$.

De là il suit que si $fg$ étoit à $ce$ comme $fY$ à $cY$, ou comme $fr$ à $cR$, c'est-à-dire, en raison composée de $fr$ à $FR$ & de $FR$ à $cR$ ou de $fT$ à $FT$ & de $FG$ à $ce$, en ôtant de part & d'autre la raison de $FG$ à $ce$, il y auroit égalité entre la raison de $fg$ à $FG$ & celle de $fT$ à $FT$; c'est-à-dire, que les angles à la terre soutenus par $fg$ & $FG$, seroient égaux : ou, ce qui revient au même, les mouvemens des nœuds dans l'ellipse & dans le cercle seroient égaux dans cette supposition, puisque ces angles, seroient, par ce que nous avons vû dans la Proposition précédente, les mouvemens des nœuds dans le temps dans lequel la Lune parcourt l'arc $PM$ dans le cercle & l'arc $pm$ dans l'ellipse.

Cela seroit en effet ainsi, si $fg$ étoit à $ce$ comme $fY$ à $cY$, c'est-à-dire, si $fg$ étoit $= \frac{ce \times fY}{cY}$. Mais à cause des triangles semblables $fgp$, $cep$, on a $fg : ce :: fp : cp$; donc $fg = \frac{ce \times fp}{cp}$; & par conséquent l'angle que $fg$ soustend réellement, est au premier angle que $FG$ soustend, c'est-à-dire, le mouvement des

Fig. 8.

nœuds dans l'ellipſe eſt au mouvement des nœuds dans le cercle comme cette ligne $fg$ ou $\frac{ce+fp}{cp}$ à la premiere valeur de $fg$ qu'on a trouvé $= \frac{ce \times fY}{cY}$, ou ce qui revient au même, en raiſon compoſée de $fp \times cY$ à $fY \times cp$, c'eſt-à-dire, en raiſon de $fp$ à $fY$ & de $cY$ à $cp$, ou bien encore, en menant $ph$ parallele à $TN$ & rencontrant $FP$ en $h$, en raiſon compoſée de $Fh$ à $FY$ & de $FY$ à $FP$; ou enfin dans la raiſon $Fh$ à $FP$ qui eſt celle de $Dp$ à $DP$, ou de l'aire $Dpmd$ à l'aire $DPMd$.

Or comme, par le Cor. 1. de la Prop. 30. le mouvement horaire des nœuds dans le cercle eſt en raiſon compoſée de $AZ^2$ & de l'aire $DPMd$, le mouvement horaire des nœuds dans l'ellipſe eſt donc en raiſon compoſée de l'aire $Dpmd$ & de $AZ^2$. *C. Q. F. D.*

*Cor.* C'eſt pourquoi, comme dans une poſition donnée des nœuds, la ſomme de toutes les aires $pDdm$ décrites pendant le temps que la Lune va d'une quadrature à un lieu quelconque $m$, eſt l'aire $mpQEd$, terminée par la ligne $QE$ tangente de l'ellipſe; & que la ſomme de toutes ces aires décrites dans une révolution entiére eſt l'aire elliptique entiere : le mouvement médiocre des nœuds dans l'ellipſe ſera au mouvement médiocre des nœuds dans le cercle, comme l'ellipſe au cercle; c'eſt-à-dire, $:: Ta : TA$ ou $:: 69 : 70$. & par conſéquent, puiſque (Cor. 2. Propoſition 30.) le mouvement horaire médiocre des nœuds dans le cercle, eſt à $16'', 35''', 16^{iv}, 36^{v}$ comme $AZ^2$ à $AT^2$, ſi on prend l'angle de $16'', 21''', 3^{iv}, 30^{v}$, comme 69 à 70, le mouvement horaire médiocre des nœuds dans l'ellipſe ſera à $16'', 21''', 3^{iv}, 30^{v}$, comme $AZ^2$ à $AT^2$; c'eſt-à-dire, comme le quarré du ſinus de la diſtance du nœud au Soleil eſt au quarré du rayon.

Au reſte, les aires que la Lune décrit autour de la terre, étant parcourues plus promptement dans les ſyzygies que dans les quadratures

Fig. 8.

dratures, le temps doit diminuer dans les ſyzygies & augmenter dans les quadratures, & le mouvement des nœuds doit ſubir la même loy.

Or le moment de l'aire dans les quadratures de la Lune, eſt à ſon moment dans les ſyzygies comme 10973 à 11073; & par conſéquent, le moment médiocre dans les octans eſt à l'excès dans les ſyzygies & au défaut dans les quadratures, comme la demie ſomme 11023 de ces nombres eſt à leur demie différence 50. Ainſi à cauſe que le temps dans des parties égales de l'orbe de la Lune eſt réciproquement comme ſa vîteſſe, le temps médiocre dans les octans ſera à l'excès du temps dans les quadratures & à ſon défaut dans les ſyzygies, produit par cette cauſe, comme 11023 à 50 à peu près. Quant aux lieux placés entre les quadratures & les ſyzygies, je trouve que l'excès des momens de l'aire à chacun des lieux ſur le plus petit moment dans les quadratures, eſt à peu près proportionnel au quarré du ſinus de la diſtance de la Lune aux quadratures; & par conſéquent, la différence entre le moment dans un lieu quelconque, & le moment médiocre dans les octans, eſt comme la différence entre le quarré du ſinus de la diſtance de la Lune aux quadratures, & le quarré du ſinus de $45^{d}$ ou la moitié du quarré du rayon; & l'incrément du temps dans chacun des lieux entre les octans & les quadratures, & ſon décrément entre les octans & les ſyzygies, ſont dans la même raiſon.

Mais le mouvement des nœuds, pendant le temps que la Lune parcourt des parties égales d'orbe, eſt accéléré ou retardé en raiſon doublée du temps. Car ce mouvement, pendant que la Lune parcourt l'arc $PM$ (toutes choſes d'ailleurs égales) eſt comme $ML$; & $ML$ eſt en raiſon doublée du temps. C'eſt pourquoi le mouvement des nœuds dans les ſyzygies, pendant le temps que la Lune parcourt des parties données de ſon orbe, eſt diminué dans la raiſon doublée du nombre 11073 au nombre 11023; & le décrément eſt au mouvement reſtant comme 100 à 10973, & par conſéquent au mouvement total à peu près comme 100 à 11073. Or le décrément dans les lieux entre les octans & les ſyzygies & l'incrément entre les octans & les quadratures ſont à peu près à ce décrément en raiſon composée de la raiſon du mouvement total dans ces lieux au mouvement total dans les ſyzygies, & de la raiſon que la différence entre le quarré du ſinus de la diſtance de la Lune à la quadrature, & la moitié du quarré du rayon, a avec la moitié du quarré du rayon.

Ainſi, ſi les nœuds ſont dans les quadratures, & qu'on prenne deux lieux également diſtans de l'octant, & deux autres également diſtans de la ſyzygie & de la quadrature : enſuite, que des décrémens des mouvemens dans les deux lieux entre la ſyzygie & l'octant, on retranche les incrémens des mouvemens dans les deux autres lieux qui ſont entre l'octant & la quadrature ; le décrément reſtant ſera égal au décrément dans la ſyzygie : ce dont il eſt facile de voir la raiſon. De-là il ſuit que le décrément médiocre qui doit être retranché du mouvement médiocre des nœuds, eſt la quatrième partie du décrément dans la ſyzygie.

Le mouvement total horaire des nœuds dans les ſyzygies, lorſque la Lune eſt ſuppoſée décrire des aires proportionnelles au temps autour de la terre, a été trouvé précédemment de $32'' \, 42''' \, 7^{iv}$ ; & le décrément du mouvement des nœuds, dans le temps que la Lune décrit plus promptement ce même eſpace, eſt, ſuivant ce qu'on vient de dire, à ce mouvement, comme 100 à 11073 ; donc ce décrément eſt de $17''' \, 43^{iv} \, 11^{v}$ dont la quatriéme partie $4''' \, 25^{iv} \, 48^{v}$ retranchée du mouvement horaire médiocre trouvé ci-deſſus de $16'' \, 21''' \, 3^{iv} \, 30^{v}$ donne $16'' \, 16''' \, 37^{iv} \, 42^{v}$ pour le mouvement médiocre horaire corrigé.

Si les nœuds ſe trouvent hors des quadratures, & qu'on conſidere deux lieux également diſtans de part & d'autre des ſyzygies ; la ſomme des mouvemens des nœuds, lorſque la Lune ſera dans ces lieux, ſera à la ſomme des mouvemens lorſque la Lune ſera dans ces mêmes lieux, & que les nœuds ſeront dans les quadratures, comme $AZ^2$ à $AT^2$. Et les décrémens des mouvemens qui viennent des causes dont on a parlé, seront l'un à l'autre comme ces mouvemens, c'est-à-dire, que les mouvemens restans seront l'un à l'autre comme $AZ^2$ à $AT^2$, & les mouvemens médiocres comme les mouvemens restans. Donc le mouvement médiocre horaire corrigé, dans une position quelconque donnée des nœuds, sera à $16'' \, 16''' \, 37^{iv} \, 42^{v}$ comme $AZ^2$ à $AT^2$, c'est-à-dire, comme le quarré du sinus de la distance des nœuds aux syzygies au quarré du rayon. Fig. 8.

## PROPOSITION XXXII. PROBLÉME XIII.

*Trouver le mouvement moyen des nœuds de la Lune.*

Le mouvement moyen annuel est la somme de tous les mouvemens médiocres horaires dans une année. Qu'on imagine un nœud allant vers $N$, & qu'on suppose de plus qu'à la fin de chaque heure il soit replacé dans son premier lieu ; ensorte que malgré son mouvement propre, il conserve toujours la même position par rapport aux fixes. Qu'on suppose encore que pendant ce tems le Soleil, par le mouvement de la terre, s'éloigne de ce nœud, & qu'il acheve uniformement sa révolution annuelle apparente. $Aa$ étant un très-petit arc donné que la ligne $TS$ menée au Soleil parcourt sur le cercle $NAn$ dans un petit temps donné : le mouvement médiocre horaire sera, par ce qu'on a fait voir ci-devant, comme $AZ^2$, c'est-à-dire, à cause des proportionnelles $AZ$, $ZY$, comme le rectangle sous $AZ$ & $ZY$, ou, ce qui revient au même, comme l'aire $AZYa$. Et la somme de tous les mouvemens médiocres horaires depuis le commencement sera comme la somme de toutes les aires $aYZA$ c'est-à-dire, comme l'aire $NAZ$. Or la plus grande aire $AZYa$ est égale au rectangle sous l'arc $Aa$ & le rayon du cercle ; & par conséquent, la somme de tous les rectangles dans le cercle entier sera à la somme d'autant de plus grands, comme l'aire de tout le cercle est au rectangle sous la circonférence entiere Fig. 9.

Fig. 9.

& le rayon, c'est-à-dire, comme 1 à 2. Mais le mouvement horaire, répondant au grand rectangle, a été trouvé de $16''$ $16'''$ $37^{iv}$ $42^{v}$, qui devient de $39^{d}$ $38'$ $7''$ $50'''$ dans une année entiere sidérale de 365 jours $6^{h}$ $9'$ : donc la moitié $19^{d}$ $49'$ $3''$ $55'''$ de ce mouvement est le mouvement moyen des nœuds qui répond à tout le cercle. Et le mouvement des nœuds, pendant que le Soleil va de *N* en *A*, est à $19^{d}$ $49'$ $3''$ $55'''$ comme l'aire *NAZ* à tout le cercle.

Cela seroit ainsi dans la supposition que le nœud fut remis à chaque heure à son premier lieu, & que le Soleil au bout d'une année retournât au même nœud d'où il étoit parti au commencement. Mais comme le mouvement du nœud est cause que le Soleil y revient plutôt, il faut compter de combien le temps de ce retour est abrégé.

Le Soleil parcourant par an $360^{d}$, & le nœud par son plus grand mouvement faisant dans le même temps $39^{d}$ $38'$ $7''$ $50'''$ ou 39,6355 dégrés ; & le mouvement médiocre de ce nœud dans un lieu quelconque *N* étant à son mouvement médiocre dans ses quadratures, comme $AZ^2$ à $AT^2$, le mouvement du Soleil sera au mouvement du nœud au lieu *N* comme $360\ AT^2$ à $39,6355\ AZ^2$, c'est-à-dire, comme $9,0827646\ AT^2$ à $AZ^2$. Ainsi en supposant que toute la circonférence du cercle *NAn* soit divisée en petites parties égales *Aa*, le temps pendant lequel le Soleil parcoureroit la petite partie *Aa*, si le cercle étoit en repos, sera au temps pendant lequel il parcourera la même petite partie, ce cercle & les nœuds revolvans autour du centre *T*, réciproquement comme $9,0827646\ AT^2$ à $9,0827646\ AT^2 + AZ^2$. Car le temps est réciproquement comme la vîtesse avec laquelle cette petite partie est parcourue, & cette vîtesse est la somme des vîtesses du Soleil & du nœud. Donc si le temps pendant lequel le Soleil parcoureroit l'arc *NA*, indépendamment du mouvement du nœud, est représenté par le secteur *NTA*, & la petite partie de temps pendant laquelle il

Fig. 9.

parcoureroit un très-petit arc $Aa$ par la petite portion $ATa$ de ce secteur ; que l'on abbaisse $aY$ perpendiculaire sur $Nn$, & qu'on prenne $dZ$ sur $AZ$ d'une longueur telle que le rectangle $dZ \times ZY$ soit à la petite portion $ATa$ du secteur comme $AZ^2$ à $9,0827646\,AT^2 + AZ^2$, c'est-à-dire, ensorte que $dZ : \frac{1}{2}AZ :: AT^2 : 9,0827646\,AT^2 + AZ^2$ ; le rectangle $dZ \times ZY$ représentera le décrément du temps causé par le mouvement du nœud, pendant le temps total pendant lequel l'arc $Aa$ a été parcouru. Et si la courbe $NdGn$ est le lieu des points $d$, l'aire curviligne $NdZ$ sera le décrément total pendant le temps employé à parcourir l'arc $NA$ entier, & par conséquent l'excès du secteur $NAT$ sur l'aire $NdZ$ sera ce temps total. Or comme le mouvement du nœud dans un temps plus court est moindre dans la raison du temps, l'aire $AaZY$ devra être diminuée dans la même raison ; ce qui se fera en prenant sur $AZ$ l'intervalle $eZ$ qui soit à la ligne $AZ$ comme $AZ^2$ à $9,0827646\,AT^2 + AZ^2$. Par ce moyen le rectangle $eZ \times ZY$ sera à l'aire $AZYa$ comme le décrément du temps employé à parcourir l'arc $Aa$, au temps total dans lequel il seroit parcouru si le nœud étoit en repos ; & par conséquent ce rectangle répondra au décrément du mouvement du nœud. Et si la courbe $NeFn$ est le lieu des points $e$, l'aire totale $NeZ$, qui est la somme de tous les décrémens, répondra au décrément total, pendant le temps employé à parcourir l'arc $AN$ ; & l'aire restante $NAe$ répondra au mouvement restant, qui est le vrai mouvement du nœud, pendant le temps pendant lequel l'arc total $NA$ est parcouru par les mouvemens réunis du Soleil & des nœuds.

Mais en employant les méthodes des suites infinies, on trouve que l'aire du demi cercle est à l'aire de la figure $NeFn$ cherchée, environ comme 793 à 60. Donc, comme le mouvement qui répondoit au cercle entier étoit de $19^d\ 49'\ 3''\ 55'''$ le mouvement qui répond au double de la figure $NeFn$ sera de $1^d\ 29'\ 58''\ 2'''$ qui, étant soustrait du premier mouvement, donnera $18^d\ 19'\ 5''\ 53'''$ pour le mouvement total du nœud par rapport aux fixes entre ses propres conjonctions avec le Soleil; retranchant ensuite ce mouvement du mouvement annuel du Soleil qui est de $360^d$, on aura $341^d\ 40'\ 54''\ 7'''$ pour le mouvement du Soleil entre ces mêmes conjonctions. Et ce mouvement est au mouvement annuel de $360^d$, comme le mouvement du nœud ci-devant trouvé de $18^d\ 19'\ 5''\ 53'''$ à son mouvement annuel, qui par conséquent sera de $19^d\ 18'\ 1''\ 23'''$. Et c'est-là le mouvement moyen des nœuds dans une année sidérale. Ce mouvement, par les tables astronomiques, est de $19^d\ 21'\ 21''\ 50'''$. Ainsi la différence est moindre que $\frac{1}{300}$ partie du mouvement total, & elle vient vraisemblablement de l'excentricité de l'orbe de la Lune, & de son inclinaison au plan de l'écliptique. Par l'excentricité de cet orbe le mouvement des nœuds est un peu trop accéléré, & son inclinaison le retarde un peu trop, ce qui le réduit à peu près à sa juste quantité.

## PROPOSITION XXXIII. PROBLÊME XIV.

*Trouver le mouvement vrai des nœuds de la Lune.*

Fig. 9. Le temps étant représenté par l'aire $NTA - NdZ$ l'aire $NAe$ représente le mouvement vrai, ainsi il est donné par les quadratures. Comme le calcul seroit pénible par cette méthode, il vaut mieux employer la construction suivante.

Fig. 10. Du centre $C$, & d'un intervale quelconque $CD$, soit décrit le cercle $BEFD$, & soit prolongée $CD$ en $A$, ensorte que $AB$ soit à $AC$ comme le mouvement moyen à la moitié du mouvement vrai médiocre, lorsque les nœuds sont dans les quadratures, c'est-à-dire, comme $19^d\ 18'\ 1''\ 23'''$ à $19^d\ 49'\ 3''\ 55'''$. $BC$ sera par conséquent à $AC$ comme la différence $0^d\ 31'\ 2''\ 32'''$ de ces mouvemens au dernier mouvement de $19^d\ 49'\ 3''\ 55'''$, c'est-à-dire, comme $1$ à $38\frac{3}{10}$; soit ensuite tirée par le point $D$ la ligne indéfinie $Gg$, qui touche le cercle en $D$; & soit pris l'angle $BCE$ ou $BCF$ égal au double de la

distance du Soleil au lieu du nœud qui est trouvé par le mouvement moyen ; enfin soit tirée *AE* ou *AF* qui coupe la perpendiculaire *DG* en *G* ; & soit pris un angle qui soit au mouvement total du nœud entre ses syzygies ( c'est-à-dire à $9^d$ $11'$ $3''$ ) comme la tangente *DG* à la circonférence entiere du cercle *BED* ; cet angle ( au lieu duquel on peut prendre l'angle *DAG* ) étant ajouté au mouvement moyen des nœuds lorsqu'ils passent des quadratures aux syzygies, & étant soustrait de ce mouvement moyen lorsqu'ils passent des syzygies aux quadratures, on aura leur mouvement vrai. Car le résultat de cette opération s'accorde à très-peu de chose près avec ce que l'on trouveroit en exprimant le temps par l'aire *NTA* — *NdZ* & le mouvement du nœud par l'aire *NAe* : comme on peut s'en assurer par le calcul.

Fig. 10.

C'est-là l'équation semestre du mouvement des nœuds. Il y a aussi une équation de ce mouvement pour chaque mois, mais elle n'est pas nécessaire pour trouver la latitude de la Lune. Car la variation de l'inclinaison de l'orbe de la Lune au plan de l'écliptique, éprouve une double inégalité, l'une tous les six mois, & l'autre tous les mois ; cette inégalité de tous les mois & l'équation des nœuds pour chaque mois se compensent & se corrigent tellement l'une l'autre, qu'on peut les négliger en déterminant la latitude de la Lune.

*Cor.* Il est clair, par cette Proposition & par la précédente, que les nœuds sont stationnaires dans leurs syzygies ; que dans leur quadratures ils rétrogradent d'un mouvement horaire de $16''$ $19'''$ $26^{iv}$ ; & que l'équation du mouvement des nœuds dans les octans est de $1^d$ $30'$, ce qui s'accorde très-bien avec les phénoménes célestes.

## *SCHOLIE.*

*J. Machin* professeur d'astronomie à *Gresham* & *Henri Pemberton* M. D. ont trouvé chacun de leur côté le mouvement des nœuds par une autre méthode que la précédente, & on a fait mention de cette autre méthode dans un autre lieu. Les écrits de l'un & de l'autre que j'ai vûs, contenoient chacun deux Propositions & s'accordoient parfaitement. Je joindrai ici l'écrit du Docteur *Machin* parce qu'il m'est tombé plutôt entre les mains.

## DU MOUVEMENT DES NŒUDS DE LA LUNE.

### PROPOSITION PREMIERE.

*Le mouvement moyen du Soleil depuis le nœud, se trouve en prenant une moyenne proportionnelle géométrique entre le mouvement moyen du Soleil, & le mouvement médiocre avec lequel le Soleil s'éloigne le plus vîte du nœud dans les quadratures.*

Fig. 11. *Soient* T *le lieu où est la terre,* N n *la ligne des nœuds de la Lune dans un temps quelconque donné,* K T M *une ligne tirée à angles droits sur cette ligne,* T A *une droite qui tourne autour du centre avec la même vîtesse angulaire que celle avec laquelle le Soleil & le nœud s'éloignent l'un de l'autre, ensorte que l'angle compris entre la ligne* N n *qui est en repos, & la ligne* T A *qui tourne, soit toujours égal à la distance des lieux du Soleil & du nœud. Cela posé, si on divise une ligne quelconque* T K *dans les parties* T S *&* S K *qui soient comme le mouvement horaire moyen du Soleil au mouvement moyen horaire du nœud dans les quadratures, & qu'on prenne* T H *moyenne proportionnelle entre la partie* T S *& la toute* T K, *cette ligne sera proportionnelle au mouvement moyen du Soleil depuis le nœud.*

*Soit décrit du centre* T *& du rayon* T K *le cercle* N K M n. *Du même centre & des demi axes* T H, T N *soit décrite ensuite l'ellipse* H N n L, *si dans le temps que le Soleil s'éloigne du nœud de la quantité de l'arc quelconque* N a, *on imagine une ligne passant toujours par l'extrémité* a *de cet arc, l'aire du secteur* N T a *représentera la somme des mouvemens du nœud & du Soleil dans le même temps. Soit* A a *le petit*

*arc*

*arc que la ligne* T b a *décrit ainsi en tournant uniformément dans une petite portion de temps donnée, le petit secteur* T A a *sera donc comme la somme des vitesses avec laquelle le Soleil & le nœud sont transportés chacun dans leur temps.* Fig. 11.

*La vitesse du Soleil est presqu'uniforme, ensorte que sa petite inégalité ne produit aucune altération sensible dans le mouvement moyen des nœuds.*

*L'autre partie de cette somme, c'est-à-dire, la vitesse du nœud dans sa médiocre quantité, augmente, en s'éloignant des syzygies, en raison doublée du sinus de sa distance au Soleil; par le Cor. de la Prop. 31. du troisiéme Livre des Principes, & comme elle est la plus grande dans les quadratures avec le Soleil en* K, *elle a la même raison à la vitesse du Soleil que* S K *à* S T, *c'est-à-dire, qu'elle est comme la différence des quarrés de* T K *& de* T H, *ou comme le rectangle* K M H *est à* $TH^2$. *Mais l'ellipse* N B H *partage le secteur* A T a, *qui exprime la somme de ces deux vitesses, en deux parties* A B b a *&* B T b *proportionnelles à ces mêmes vitesses. Soit donc prolongée* B T *jusqu'à ce qu'elle atteigne le cercle en* β; *soit ensuite menée par* B *perpendiculairement au grand axe la ligne* B G, *qui, prolongée des deux côtés, rencontrera le cercle aux points* F & f, *& l'on verra que l'espace* A B b a *étant au secteur* T B b *comme le rectangle* $AB \times B\beta$ *est à* $BT^2$ (*à cause que ce rectangle est égal à la différence des quarrés de* T A *& de* T B, *à cause de la ligne* A β *coupée également & inégalement en* T *& en* B) *la proportion qui est entre ces deux quantités, lorsque l'espace* A B b a *est le plus grand en* K, *devient la même que la raison du rectangle* K M H *à* $HT^2$, *mais la plus grande vitesse médiocre du nœud étoit à la vitesse du Soleil en cette même raison: donc le secteur* A T a *sera divisé dans les quadratures en parties proportionnelles aux vitesses. Et parce que le rectangle* $KH \times HM$ *est à* $HT^2$ *comme* $FB \times Bf$ *à* $BG^2$, *& que le rectangle* $AB \times B\beta$ *est égal au rectangle* $FB \times Bf$, *la petite aire* A B b a, *lorsqu'elle est la plus grande, sera au secteur restant* T B b, *comme le rectangle* $AB \times B\beta$ *à* $BG^2$; *mais la raison de ces petites aires aux secteurs restans est en général celle*

Fig. 11.

*des rectangles* AB × B$\beta$ *à* BT². *Donc l'aire* ABba *sera plus petite au lieu* A *que l'aire semblable dans les quadratures, en raison doublée de* BG *à* BT, *c'est-à-dire, en raison doublée du sinus de la distance du Soleil au nœud. Donc la somme de toutes les petites aires* ABba, *c'est-à-dire, l'espace* ABN *sera comme le mouvement du nœud dans le temps dans lequel le Soleil s'éloigne du nœud par l'arc* NA. *Et l'espace restant, ou, ce qui revient au même, le secteur elliptique* NTB *sera comme le mouvement moyen du Soleil dans le même temps. Or comme le moyen mouvement annuel du nœud est celui qui a lieu dans le temps que le Soleil acheve sa période, le mouvement moyen du nœud depuis le Soleil sera au mouvement moyen du Soleil, comme l'aire circulaire à l'aire elliptique, c'est-à-dire, comme la droite* TK *à la droite* TH *qui est moyenne proportionnelle entre* TK *&* ST; *ou, ce qui revient au même, comme cette moyenne proportionnelle* TH *à la ligne* TS.

## PROPOSITION II.

*Le mouvement moyen des nœuds de la Lune étant donné, trouver leur mouvement vray.*

Fig. 11.

*Soit l'angle* A *la distance du Soleil au lieu moyen du nœud, ou le mouvement moyen du Soleil depuis le nœud. En prenant l'angle* B *tel que sa tangente soit à la tangente de l'angle* A, *comme* TH *à* TK, *c'est-à-dire, en raison sousdoublée du mouvement horaire médiocre du Soleil au mouvement horaire médiocre du Soleil depuis le nœud placé dans les quadratures; cet angle* B *sera la distance du Soleil au lieu vrai du nœud.*

*Car tirant* FT, *l'angle* FTN *sera, par la démonstration de la Prop. précédente, la distance du Soleil au lieu moyen du nœud, l'angle* ATN *sa distance au lieu vrai, & les tangentes de ces angles seront entr'elles comme* TK *à* TH.

Cor. *Donc* FTA *est l'équation des nœuds de la Lune, & le sinus de cet angle, lorsqu'il est le plus grand dans les octans, est au rayon comme* KH *à* TK + TH. *Dans un autre lieu quelconque* A *le sinus de cette équation est au plus grand sinus, comme le sinus de la somme* *des angles* FTN + ATN *au rayon : c'est-à-dire, environ comme le sinus de* 2 FTN *double de la distance du Soleil au lieu moyen du nœud est au rayon.* Fig. 11.

## *SCHOLIE.*

*Si le mouvement horaire médiocre des nœuds dans les quadratures, est de* $16'' \ 16''' \ 37^{iv} \ 42^{v}$, *c'est-à-dire, qu'il soit dans une année entiere sidérale de* $39^{d} \ 38' \ 7'' \ 50'''$. *On aura* TH *à* TK *en raison sousdoublée du nombre* 9,0827646 *au nombre* 10,0827646, *ou, ce qui revient au même, comme* 18,6524761 *à* 19,6524761. *Et par conséquent on aura* TH : HK :: 18,6524761 : 1, *c'est-à-dire, comme le mouvement du Soleil dans une année sidérale au moyen mouvement du nœud qui est de* $19^{d} \ 18' \ 1'' \ 23'''\frac{2}{3}$.

*Mais si le mouvement moyen des nœuds de la Lune en* 20 *années Juliennes est de* $386^{d} \ 51' \ 15''$, *comme on le déduit des observations employées dans la théorie de la Lune : le mouvement moyen des nœuds dans une année sidérale, sera de* $19^{d} \ 20' \ 31'' \ 58'''$, *&* TH *sera à* HK *comme* $360^{d}$ *à* $19^{d} \ 2' \ 31'' \ 58'''$, *c'est-à-dire, comme* 18,61214 *à* 1. *Delà, on tire le mouvement horaire médiocre des nœuds dans les quadratures de* $16'' \ 18''' \ 48^{iv}$. *Et la plus grande équation des nœuds dans les octans de* $1^{d} \ 29' \ 57''$.

## PROPOSITION XXXIV. PROBLÉME XV.

*Trouver la variation horaire de l'inclinaison de l'orbe de la Lune sur le plan de l'écliptique.*

Soient $A$ & $a$ les syzygies ; $Q$ & $q$ les quadratures ; $N$ & $n$ les nœuds ; $P$ le lieu de la Lune dans son orbe ; $p$ la projection de ce lieu dans le plan de l'écliptique, & $mTl$ le mouvement momentané des nœuds calculé comme ci-dessus. Fig. 12.

Si sur la ligne $Tm$ on abbaisse la perpendiculaire $PG$, qu'on tire la ligne $pG$, qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre $Tl$ en $g$, & qu'on tire $Pg$ : l'angle $PGp$ sera l'inclinaison de l'orbite de la Lune au plan de l'écliptique, lorsque la Lune est en $P$ ; l'angle $Pgp$ l'inclinaison du même orbe l'instant d'aprés, & par consé-

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 12.

quent l'angle $GPg$ la variation momentanée de l'inclinaison. Or cet angle $GPg$ est à l'angle $GTg$ en raison composée de $TG$ à $PG$, & de $Pp$ à $PG$. Donc, en mettant une heure pour le moment du temps; & par conséquent (par la Prop. 30.) $33'' \, 10''' \, 33^{iv} \times \frac{IT \times AZ \times PG}{AT^3}$, pour l'angle $GTg$, l'angle $GPg$, ou la variation horaire de l'inclinaison sera à l'angle de $33'' \, 10''' \, 33^{iv}$, comme $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ à $AT^3$. *C. Q. F. T.*

Ce qu'on vient de dire a lieu dans la supposition que la Lune tourne uniformément dans un orbe circulaire. Mais si cet orbe est elliptique, le mouvement médiocre des nœuds diminuera dans la raison du petit axe au grand axe; comme on l'a fait voir ci-dessus. Et la variation de l'inclinaison diminuera aussi dans la même raison.

*Cor.* 1. Si on éleve $TF$ perpendiculaire sur $Nn$, qu'on prenne $pM$ pour le mouvement horaire de la Lune dans le plan de l'écliptique; qu'on prolonge les perpendiculaires $pK$, $Mk$ à $QT$, jusqu'à ce qu'elles rencontrent $TF$ en $H$ & en $h$; on aura $IT : AT :: Kk : Mp$, & $TG : Hp :: TZ : AT$; donc $IT \times TG$ sera égal à $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, c'est-à-dire, à l'aire $HpMh$ multipliée par la raison de $\frac{TZ}{Mp}$; & par conséquent la variation horaire de l'inclinaison sera à $33'' \, 10''' \, 33^{iv}$, comme l'aire $HpMh$ multipliée par $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ à $AT^3$.

*Cor.* 2. Donc, si la terre & les nœuds étoient retirés à la fin de chaque heure de leurs lieux nouveaux, & qu'ils fussent toujours ramenés à leurs premiers lieux en un instant, ensorte que leur position donnée demeurât la même pendant un mois entier périodique, toute la variation de l'inclinaison dans ce même temps seroit à $33'' \, 10''' \, 33^{iv}$, comme le produit de la somme de toutes les aires $HpMh$, décrites pendant la révolution du point $p$, par la quantité $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ est à $Mp \times AT^3$, c'est-à-dire, comme le cercle entier $QAqa$ multiplié par $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ à $Mp \times AT^3$, ou, ce qui revient au même, comme la circonférence $QAqa \times AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ à $2Mp \times AT^2$.

Fig. 12.

*Cor.* 3. Ainsi dans une position donnée des nœuds, la variation horaire médiocre, qui étant continuée uniformément pendant un mois, produiroit cette variation entiére, est à $33'' \; 10''' \; 33^{iv}$, comme $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ à $2AT^2$, ou comme $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ à $PG \times 4AT$, c'est-à-dire, (puisque $Pp$ est à $PG$ comme le sinus de l'inclinaison dont on vient de parler au rayon, & que $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2}AT}$ est à $4AT$ comme le sinus du double de l'angle $ATn$ au quadruple du rayon) comme le sinus de cette même inclinaison multiplié par le sinus du double de la distance des nœuds au Soleil, est au quadruple du quarré du rayon.

*Cor.* 4. Puisque la variation horaire de l'inclinaison, lorsque les nœuds sont dans les quadratures, est (par cette Prop.) à l'angle de $33'' \; 10''' \; 33^{iv}$, comme $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ à $AT^3$, c'est-à-dire, comme $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ à $2AT$, ou, ce qui revient au même, comme le sinus du double de la distance de la Lune aux quadratures multiplié par $\frac{Pp}{PG}$ est au double du rayon; la somme de toutes les variations horaires pendant le temps que la Lune passe de la quadrature à la syzygie dans cette position des nœuds (c'est-à-dire dans un espace de 177 heures & $\frac{1}{4}$) sera à la somme d'autant d'angles de $33'' \; 10''' \; 33^{iv}$, laquelle est $5878''$, comme la somme de tous les sinus du double de la distance de la Lune aux quadratures, multipliée par $\frac{Pp}{PG}$ est

Fig. 12. à la somme d'autant de diamétres; c'est-à-dire, comme le diamétre multiplié par $\frac{Pp}{PG}$ à la circonférence. Or cette proportion, si l'inclinaison est supposée de $5^{d}\,1'$, devient celle de $7 \times \frac{874}{10000}$ à 22, ou de 278 à 10000. Donc la variation totale composée de la somme de toutes les variations horaires qui ont eu lieu dans le temps dont on vient de parler, est de $163''$ ou de $2'\,43''$.

## PROPOSITION XXXV. PROBLÉME XVI.

*Trouver pour un temps donné l'inclinaison de l'orbe de la Lune au plan de l'écliptique.*

Fig. 13. $AD$ étant le sinus de la plus grande inclinaison, & $AB$ le sinus de la plus petite, soit coupée $BD$ en deux parties égales au point $C$, & soit décrit du centre $C$ & de l'intervalle $BC$ le cercle $BGD$. Soit prise ensuite sur $AC$, $CE$ en même raison à $EB$ que $EB$ à $2BA$: soit fait l'angle $AEG$ égal au double de la distance des nœuds aux quadratures pour le temps donné, abbaissant alors $GH$ perpendiculaire sur $AD$, $AH$ sera le sinus de l'inclinaison cherchée.

Car $GE^2 = GH^2 + HE^2 = BHD + HE^2 = HBD + HE^2 - BH^2 = HBD + BE^2 - 2BH \times BE = BE^2 + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Donc, puisque $2EC$ est donné, $GE^2$ sera comme $AH$. Que $AEg$ représente le double de la distance des nœuds aux quadratures à la fin d'un moment quelconque de temps donné, l'arc $Gg$, à cause que l'angle $GEg$ est donné sera comme la distance $GE$. Mais $Hh : Gg :: GH : GC$, & par conséquent $Hh$ est comme $GH \times Gg$ ou $GH \times GE$, c'est-à-dire, comme $\frac{GH}{GE} \times GE^2$ ou $\frac{GH}{GE} \times AH$, ou, ce qui revient au même, en rai-

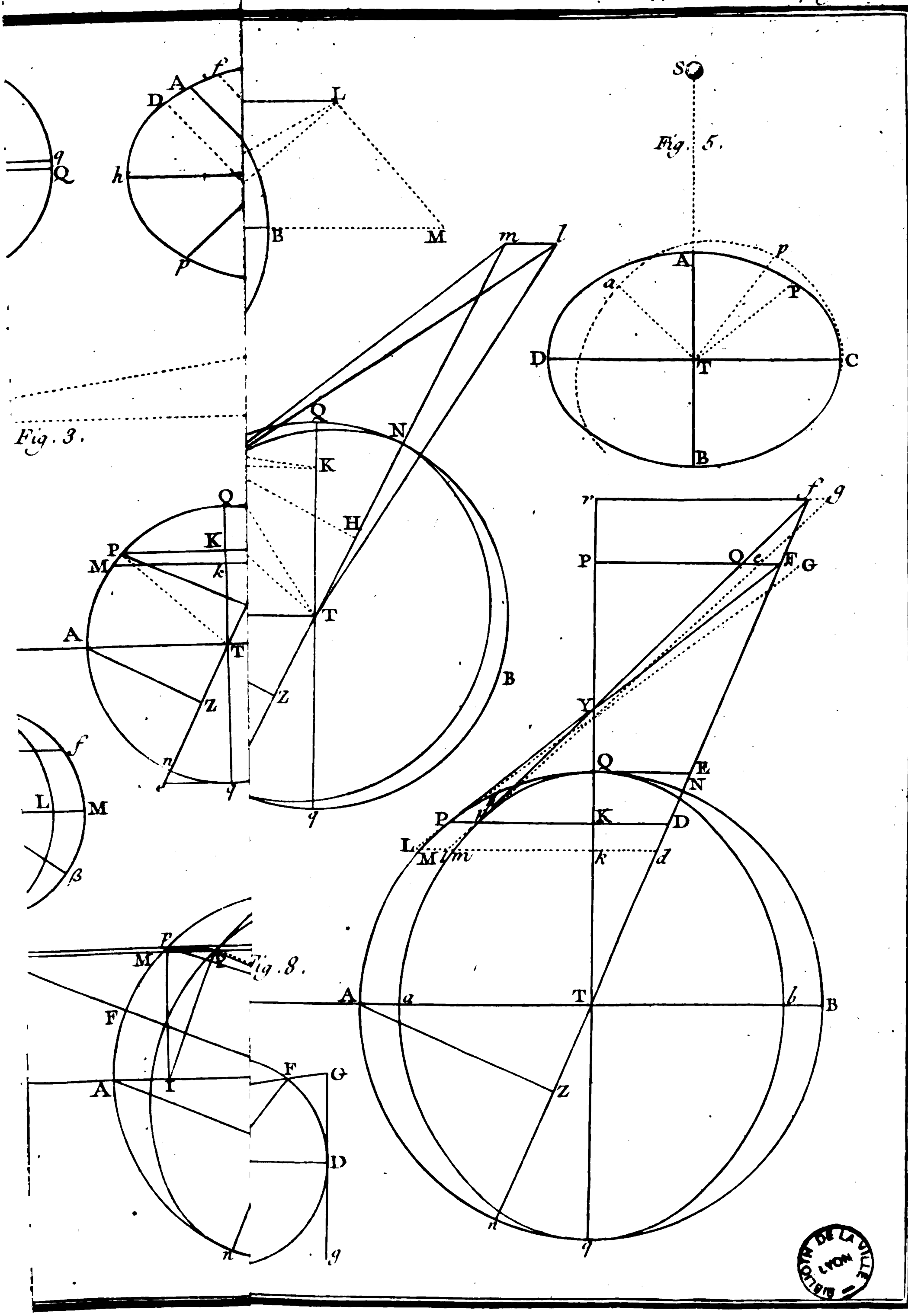


Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 8.

Fig. 13.

ſon compoſée de $AH$ & du ſinus de l'angle $AEG$. Donc, ſi la ligne $AH$ eſt dans quelque cas égale au ſinus d'inclinaiſon, elle augmentera par les mêmes incrémens que ce ſinus, ſuivant le Cor. 3. de la Prop. précédente, & par conſéquent elle demeurera toujours égale à ce ſinus. Mais la ligne $AH$ eſt égale à ce ſinus, lorſque le point $G$ tombe en $B$ ou en $D$. Donc elle lui eſt toujours égale. *C. Q. F. D.*

J'ai ſuppoſé dans cette démonſtration que l'angle $BEG$, qui eſt le double de la diſtance des nœuds aux quadratures, augmentoit uniformément, parce qu'il ſeroit ſuperflu en cette occaſion d'avoir égard à la petite inégalité de cette augmentation.

Suppoſons maintenant que l'angle $BEG$ ſoit droit, & que dans ce cas $Gg$ ſoit l'augmentation horaire du double de la diſtance des nœuds au Soleil, la variation horaire de l'inclinaiſon ſera alors (par le Cor. 3. de la derniére Propoſition) à $33'' \; 10''' \; 33^{iv}$ comme le produit du ſinus d'inclinaiſon $AH$ & du ſinus de l'angle droit $BEG$, qui eſt le double de la diſtance des nœuds au Soleil, au quadruple du quarré du rayon; c'eſt-à-dire, comme le ſinus $AH$ de la médiocre inclinaiſon eſt au quadruple du rayon; ou, ce qui revient au même, (parce que cette inclinaiſon médiocre eſt preſque de $5^d \; 8' \frac{1}{2}$) comme ſon ſinus 896, au quadruple du rayon 40000, ou comme 224 à 10000. Mais la variation totale qui répond à la différence $BD$ des ſinus, eſt à cette variation horaire, comme le diamétre $BD$ à l'arc $Gg$; c'eſt-à-dire, en raiſon compoſée du diamétre $BD$. à la demie circonférence $BGD$, & de la raiſon de $2079\frac{7}{10}$ heures que le nœud employe à aller des quadratures aux ſyzygies, à une heure; joignant donc toutes ces raiſons, la variation totale $BD$ ſera à $33'' \; 10''' \; 33^{iv}$, comme $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ à 110000, ou comme 29645 à 1000, & par conſéquent cette variation $BD$ ſera de $16' \; 23'' \frac{1}{2}$.

C'eſt-là la plus grande variation de l'inclinaiſon tant qu'on ne fait pas attention au lieu de la Lune dans ſon orbite. Car lorſque

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 13.

les nœuds ſont dans les ſyzygies, cette inclinaiſon ne change point par la différente poſition de la Lune; mais ſi les nœuds ſont dans les quadratures, l'inclinaiſon eſt moindre lorſque la Lune eſt dans les ſyzygies, que lorſqu'elle eſt dans les quadratures, de 2′ 43″; comme nous l'avons dit dans le Cor. 4. de la Prop. précédente. Et la moitié de cette différence qui eſt de 1′ 21″ $\frac{1}{2}$ étant ôtée, la variation totale médiocre *BD* dans les quadratures de la Lune devient de 15′ 2″, & en l'ajoutant à cette variation dans les ſyzygies elle devient de 17′ 45″. Donc ſi la Lune ſe trouve dans les ſyzygies, la variation totale dans le paſſage des nœuds des quadratures aux ſyzygies ſera de 17′ 45″; & par conſéquent ſi l'inclinaiſon lorſque les nœuds ſont dans les ſyzygies eſt de 5$^d$ 17′ 20″, elle ſera, lorſque les nœuds ſont dans les quadratures & la Lune dans les ſyzygies, de 4$^d$ 59′ 35″. C'eſt ce qui ſe trouve confirmé par les obſervations.

Si enſuite on veut connoître cette inclinaiſon de l'orbe lorſque la Lune eſt dans les ſyzygies & que les nœuds ſont dans un lieu quelconque; il faut prendre *AB* à *AD* comme le ſinus de 4$^d$ 59′ 35″ au ſinus de 5$^d$ 17′ 20″, faiſant enſuite l'angle *AEG* égal au double de la diſtance des nœuds aux quadratures, *AH* ſera le ſinus de l'inclinaiſon cherchée.

L'inclinaiſon de cette orbite, lorſque la Lune eſt à 90$^d$ des nœuds, eſt égale à celle qu'on vient de déterminer. Et dans les autres lieux de la Lune, l'inégalité pour chaque mois, qui ſe trouve dans la variation de l'inclinaiſon, ſe compenſe dans le calcul de la latitude de la Lune, & elle eſt en quelque façon corrigée par l'inégalité du mouvement des nœuds à chaque mois; (comme nous l'avons dit ci-deſſus) ainſi on peut la négliger dans le calcul de la latitude.

## *SCHOLIE.*

J'ai voulu montrer par ces calculs des mouvemens de la Lune qu'on pouvoit les déduire de la théorie de la gravité. J'ai trouvé encore

encore par la même théorie que l'équation annuelle du mouvement moyen de la Lune vient de la différente dilatation de l'orbe de la Lune par la force du Soleil, selon le Cor. 6. de la Prop. 66. liv. 1. car cette force étant plus grande dans le périgée du Soleil, elle dilate l'orbe de la Lune; & étant plus petite dans son apogée elle fait que l'orbe de la Lune se contracte. Or la Lune se meut plus lentement dans l'orbe dilaté, & plus vîte dans l'orbe contracté; l'équation annuelle par laquelle on compense cette inégalité est nulle dans l'apogée & dans le périgée du Soleil; dans la moyenne distance du Soleil à la terre elle monte jusqu'à $11' \; 50''$ environ, & dans les autres lieux elle est proportionnelle à l'équation du centre du Soleil; elle s'ajoute au moyen mouvement de la Lune lorsque la terre va de son aphélie à son périhélie, & elle s'en soustrait dans la partie opposée de l'orbite.

En prenant le rayon du grand orbe de 1000 parties, & l'excentricité de la terre de $16\frac{7}{8}$, cette équation, lorsqu'elle est la plus grande, devient par la théorie de la gravité de $11' \; 49''$. Mais l'excentricité de la terre paroît être un peu plus grande, augmentant donc l'excentricité cette équation doit augmenter dans la même raison. Ainsi si on suppose l'excentricité de $16\frac{11}{12}$, la plus grande équation sera de $11' \; 51''$.

J'ai trouvé aussi que dans le périhélie de la terre, l'apogée & les nœuds de la Lune alloient plus vîte, à cause de la plus grande force du Soleil, que dans son aphélie, & cela en raison triplée inverse de la distance de la terre au Soleil. Delà on tire que les équations annuelles de ces mouvemens sont proportionnelles à l'équation du centre du Soleil. Or le mouvement du Soleil est en raison doublée de la distance de la terre au Soleil inversement, & la plus grande équation du centre, que cette inégalité produit, est de $1^{d} \; 56' \; 20''$ ce qui s'accorde avec l'excentricité du Soleil de $16\frac{11}{12}$ dont on vient de parler. Si le mouvement du Soleil étoit en raison triplée inverse de la distance, cette inégalité produiroit $2^{d} \; 54' \; 30''$ pour la plus grande équation. Donc les plus grandes équations que les inégalités des mouvemens de l'apogée & des nœuds de la Lune produisent sont à $2^d\ 54'\ 30''$ comme le mouvement moyen diurne de l'apogée & le mouvement moyen diurne des nœuds de la Lune sont au mouvement moyen diurne du Soleil. D'où il suit que la plus grande équation du mouvement moyen de l'apogée est de $19'\ 43''$ & que la plus grande équation du mouvement moyen des nœuds est de $9'\ 24''$; la première équation est additive & la dernière soustractive lorsque la terre va de son périhélie à son aphélie : c'est le contraire lorsqu'elle est dans la partie opposée de son orbite.

Par la théorie de la gravité il est certain que l'action du Soleil sur la Lune est un peu plus forte lorsque le diamétre transversal de l'orbe de la Lune passe par le Soleil, que lorsque le même diamétre est perpendiculaire à la ligne qui joint le Soleil & la terre : & par conséquent l'orbe de la Lune est un peu plus grand dans le premier cas que dans le dernier. Delà on tire une autre équation du mouvement moyen de la Lune qui dépend de la situation de l'apogée de la Lune par rapport au Soleil, & cette équation est la plus grande lorsque l'apogée de la Lune est dans le même octant que le Soleil ; & elle est nulle lorsque l'apogée parvient aux quadratures ou aux syzygies : elle s'ajoute au mouvement moyen dans le passage de l'apogée de la Lune de la quadrature du Soleil à la syzygie, & elle se soustrait dans le passage de l'apogée de la syzygie à la quadrature. Cette équation, que j'appellerai équation sémestre, monte jusqu'à $3'\ 45''$ environ dans les octans de l'apogée lorsqu'elle est la plus grande, autant que je l'ai pu conclure des phénoménes. C'est-là sa quantité dans la médiocre distance du Soleil à la terre : mais elle doit être augmentée & diminuée en raison triplée de la distance du Soleil inversement, donc, dans la plus grande distance du Soleil elle est de $3'\ 34''$, & dans la plus petite de $3'\ 56''$ à peu près : lorsque l'apogée de la Lune est située hors des octans elle devient moindre, & elle eſt à la plus grande équation comme le ſinus du double de la diſtance de l'apogée de la Lune à la prochaine ſyzygie ou à la prochaine quadrature eſt au rayon.

Par la même théorie de la gravité l'action du Soleil ſur la Lune eſt un peu plus grande, lorſque la ligne droite menée par les nœuds de la Lune paſſe par le Soleil, que lorſque cette ligne coupe à angles droits la ligne qui joint la terre & le Soleil. Ce qui donne une autre équation du mouvement moyen de la Lune, que j'appellerai ſeconde ſemeſtre, laquelle eſt la plus grande lorſque les nœuds ſont dans les octans du Soleil, & qui s'évanouit lorſqu'ils ſont dans les quadratures ou dans les ſyzygies; dans les autres poſitions des nœuds, elle eſt proportionnelle au ſinus du double de la diſtance de l'un ou l'autre nœud à la prochaine ſyzygie ou quadrature: elle doit s'ajouter au moyen mouvement de la Lune, ſi le Soleil s'éloigne en antécédence du nœud dont il eſt le plus voiſin, & ſe retrancher s'il s'en éloigne en conſéquence; dans les octans, où elle eſt la plus grande, elle va à 47″ dans la moyenne diſtance du Soleil à la terre, ainſi que je le trouve par la théorie de la gravité. Dans les autres diſtances du Soleil, cette plus grande équation, dans les octans des nœuds, eſt réciproquement comme le cube de la diſtance du Soleil à la terre, & par conſéquent, dans le périgée du Soleil elle monte environ à 49″, & dans ſon apogée à 45″ environ.

Par la même théorie de la gravité l'apogée de la Lune avance le plus lorſqu'il eſt en oppoſition ou en conjonction avec le Soleil, & il rétrograde le plus lorſqu'il eſt en quadrature avec le Soleil.

Dans le premier cas l'excentricité eſt la plus grande, & dans le ſecond elle eſt la moindre, par les Cor. 7. 8. & 9. de la Prop. 66. du Liv. 1. & ſes inégalités, par ces mêmes Corollaires, ſont les plus grandes, & produiſent l'équation principale de l'apogée que j'appelle ſemeſtre. La plus grande équation ſemeſtre eſt de $12^d\ 18'$ à peu près, autant que je l'ai pu conclure des obſervations. *Horroxius* notre compatriote eſt le premier qui ait aſſuré que la Lune faiſoit sa révolution dans une ellipse autour de la terre qui est placée dans son foyer inférieur. *Halley* a mis le centre de cette ellipse dans un épicycle dont le centre tourne uniformement autour de la terre. Et de ce mouvement dans l'épicycle naissent les inégalités dans la progression & la régression de l'apogée, dont on a parlé, ainsi que la quantité de l'excentricité.

Fig. 14. Supposant que la distance médiocre de la Lune à la terre soit divisée en 100000 parties, que *T* soit la terre, & *TC* l'excentricité médiocre de la Lune de 5505 parties. Soit prolongée *TC* en *B*, ensorte que *BC* soit le sinus de la plus grande équation semestre de $12^d\ 18'$ pour le rayon *TC* & le cercle *BDA* décrit du centre *C* & du rayon *BC* sera cet épicycle dans lequel le centre de l'orbe de la Lune est placé, & fait sa révolution selon l'ordre des lettres *B D A*. Soit ensuite pris l'angle *BCD* égal au double argument annuel, ou au double de la distance du vrai lieu du Soleil à l'apogée de la Lune corrigé en premier lieu, *CTD* sera l'équation de l'apogée semestre de la Lune, & *TD* l'excentricité de son orbe tendant vers l'apogée corrigé en second lieu. Ayant l'excentricité, le mouvement moyen, & l'apogée de la Lune, ainsi que le grand axe de son orbe de 200000 parties, on en tirera, par les méthodes ordinaires, le lieu vrai de la Lune dans son orbe, & sa distance à la terre.

Le centre de l'orbe de la Lune se meut plus vîte autour du centre *C* dans le périhélie de la terre que dans son aphélie, à cause de la plus grande force du Soleil, & cela en raison triplée inverse de la distance de la terre au Soleil. A cause de l'équation du centre du Soleil comprise dans l'argument annuel, le centre de l'orbe de la Lune se meut plus vîte dans l'épicycle *BDA* en raison doublée inverse de la distance de la terre au Soleil. Afin donc d'augmenter la vîtesse de ce centre dans la raison simple inverse de la distance, du centre *D* de l'orbe soit tirée la droite *DE* vers l'apogée de la Lune, ou parallelement à la ligne *TC*, & soit pris l'angle *EDF* égal à l'excès de l'argument annuel dont on a parlé sur la distance de l'apogée de la Lune au périgée du Soleil en conséquence ; ou, ce qui est la même chose, soit pris l'angle *CDF* égal au complément de la vraie anomalie du Soleil à 360 dégrés. Soit fait ensuite *DF* à *DC* en raison composée de la double excentricité du grand orbe à la distance médiocre du Soleil à la terre, & du mouvement moyen diurne du Soleil depuis l'apogée de la Lune, au moyen mouvement diurne du Soleil depuis son propre apogée, c'est-à-dire, en raison composée de $33\frac{7}{8}$ à 1000 & de $52' \, 27'' \, 16'''$ à $59' \, 8'' \, 10'''$, ou simplement dans la raison de 3 à 100. Fig. 14.

Supposé que le centre de l'orbe de la Lune soit placé dans le point *F* & dans un épicycle dont le centre soit *D* & le rayon *DF*, & qu'il fasse sa révolution tandis que le point *D* avance dans la circonférence du cercle *DABD*. Par ce moyen la vîtesse, avec laquelle le centre de l'orbe de la Lune parcourera la ligne courbe décrite autour du centre *C*, sera, à peu près, en raison renversée du cube de la distance du Soleil à la terre, comme cela doit être.

Le calcul de ce mouvement est très-difficile, mais on peut le rendre plus aisé par l'approximation suivante. Prenant toujours 100000 parties pour la distance médiocre de la Lune à la terre, & 5505 pour l'excentricité *TC* ; la ligne *CB* ou *CD* sera de $1172\frac{3}{4}$ parties, & la ligne *DF* de $35\frac{1}{5}$. Cette ligne, à la distance *TC*, soustend l'angle à la terre que la translation du centre de l'orbe du lieu *D* aulieu *F* produit dans le mouvement de ce centre : & cette même droite étant doublée dans une position parallele à la ligne qui joint la terre & le foyer supérieur de l'orbe de la Lune, elle soustend le même angle, lequel est par conséquent celui que cette translation produit dans le mouvement du foyer ; & à la distance de la Lune à la terre, elle soustend l'angle que cette même translation produit dans le mouvement de la Lune, ensorte que cet angle peut être appellé la seconde équation du centre. Cette équation, dans la médiocre distance

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 14.

de la Lune à la terre, est, à peu près, comme le finus de l'angle que cette droite *DF* fait avec la ligne tirée du point *F* à la Lune, & lorsqu'elle est la plus grande, elle va jusqu'à 2′ 25″. L'angle que cette droite *DF* fait avec la ligne tirée du point *F* à la Lune, se trouve ou en soustrayant l'angle *EDF* de l'anomalie moyenne de la Lune, ou en ajoutant la distance de la Lune au Soleil à la distance de l'apogée de la Lune à l'apogée du Soleil. Et la quatriéme proportionnelle au rayon, au sinus de cet angle ainsi trouvé, & à 2′ 25″ est la seconde équation du centre qu'il faut ajouter, si cette somme est moindre qu'un demi cercle, ou soustraire si elle est plus grande. C'est ainsi qu'on aura la longitude de la Lune dans les syzygies même des luminaires.

Comme l'atmosphere de la terre réfracte la lumiére du Soleil jusqu'à la hauteur de 35 ou 40 milles, qu'en la réfractant elle la repand autour de l'ombre de la terre, & que la lumiére ainsi éparse dans les confins de l'ombre l'étend & la dilate, j'ajoute une minute ou une minute & un tiers au diamétre de l'ombre que produit la parallaxe dans les éclipses de Lune.

Au reste, la théorie de la Lune doit être examinée & établie par les Phénoménes, premiérement dans les syzygies, ensuite dans les quadratures, & enfin dans les octans. Dans cette vue, j'ai observé assez éxactement les mouvemens moyens de la Lune & du Soleil au méridien, dans l'observatoire royal de Greenwich, Et (pour le dernier jour de Décembre de l'année 1700 vieux stile) j'ai trouvé le mouvement moyen du Soleil à $20^d\ 43'\ 40''$ du Capricorne, & son apogée à $7^d\ 44'\ 30''$ du Cancer, & le moyen mouvement de la Lune à $15^d\ 21'\ 00''$ du Verseau, son apogée à $8^d\ 20'\ 00''$ des Poissons, & son nœud ascendant à $27^d\ 24'\ 20''$ du Lion.

La différence méridienne de cet observatoire à l'observatoire royal de Paris est de $0^d, 9', 20''$, mais on n'a pas encore le moyen mouvement de la Lune & de son apogée assez éxactement.

## PROPOSITION XXXVI. PROBLÉME XVII.

Fig. 15.

*Trouver la force du Soleil pour mouvoir les eaux de la mer.*

On a vu, par la Prop. 25. de ce Livre, que la force *ML* ou *PT* du Soleil, pour troubler les mouvemens de la Lune, eſt dans les quadratures de la Lune, à la force de la gravité ſur la terre, comme 1 à 638092, 6. & que la force *TM* – *LM* ou 2 *PK* dans les ſyzygies de la Lune eſt deux fois plus grande. Or ces forces, ſi on deſcendoit à la ſurface de la terre, diminueroient en raiſon des diſtances au centre de la terre, c'eſt-à-dire, en raiſon de $60\frac{1}{2}$ à 1; Donc, à la ſurface de la terre, la premiere de ces forces eſt à la force de la gravité comme 1 à 38604600. C'eſt par cette force que la mer eſt abbaiſſée dans les lieux qui ſont éloignés du Soleil de $90^{d}$. L'autre force, qui eſt deux fois plus grande, éleve la mer dans les régions ſituées ſous le Soleil, & dans celles qui lui ſont oppoſées. Ainſi la ſomme de ces forces eſt à la force de la gravité comme 1 à 12868200. Et parce que la même force produit le même mouvement, ſoit qu'elle abbaiſſe l'eau de la mer dans les régions diſtantes du Soleil de 90 dégrés, ſoit qu'elle l'éleve ſous le Soleil & dans les régions oppoſées au Soleil, cette ſomme ſera la force totale du Soleil pour mouvoir les eaux de la mer, & elle fera le même effet que ſi elle étoit employée toute entiére à élever la mer dans les régions ſous le Soleil ou oppoſées au Soleil, & qu'elle ne produiſit aucun effet dans les régions diſtantes du Soleil de $90^{d}$.

C'eſt-là la force du Soleil pour mouvoir la mer dans un lieu quelconque donné, lorſque le Soleil eſt dans le Zenith du lieu, & dans ſa moyenne diſtance à la terre; mais dans les autres poſitions du Soleil, ſa force pour élever l'eau de la mer eſt directement comme le ſinus verſe du double de ſa hauteur ſur l'horiſon du lieu, & inverſement comme le cube de la diſtance du Soleil à la terre.

*Cor.* Comme la force centrifuge des parties de la terre produite par ſon mouvement diurne, laquelle force eſt à la force de la gravité dans la raiſon de 1 à 289, eſt cauſe que la hauteur de l'eau ſous l'équateur ſurpaſſe ſa hauteur au pôle de 85472 pieds de Paris, ainſi qu'on l'a vu ci-deſſus dans la Prop. 19. il eſt clair que la force du Soleil dont il s'agit ici, laquelle eſt à la force de la gravité comme 1 à 12868200 & par conſéquent à la force centrifuge comme 289 à 12868200, ou comme 1 à 44527, produira cet effet que la hauteur de l'eau dans les régions ſous le Soleil & oppoſées au Soleil ſurpaſſera ſa hauteur, dans les lieux diſtans du Soleil de 90 dégrés, d'un pied de Paris; 11 pouces $\frac{1}{10}$ puiſque cette hauteur eſt à 85472 pieds comme 1 à 44527.

## PROPOSITION XXXVII. PROBLÉME XVIII.

*Trouver la force de la Lune pour mouvoir les eaux de la mer.*

La force de la Lune pour mouvoir la mer ſe trouve par ſa proportion avec la force du Soleil, & on peut conclure cette proportion de la proportion des mouvemens de la mer qui ſont cauſés par ces deux forces.

A l'embouchure du fleuve d'*Avone* au-deſſous de *Briſtol* à la troiſiéme pierre, dans l'Automne & le Printemps, l'aſcenſion totale de l'eau, au temps de la conjonction & de l'oppoſition du Soleil & de la Lune, eſt environ de 45 pieds ſelon l'obſervation de *Samuel Sturmius*; dans les quadratures elle eſt de 25 pieds ſeulement. La premiere hauteur vient de la ſomme de ces forces, & la derniere de leur différence. Nommant donc $S$ & $L$ les forces du Soleil & de la Lune, lorſqu'ils ſont dans l'équateur & dans leur moyenne diſtance de la terre, on aura $L+S : L-S :: 45 : 25$ ou $:: 9 : 5$.

Dans le Port de *Plimouth*, *Samuel Colopreſſus* a obſervé que le flux monte dans ſa médiocre hauteur à peu près à 16 pieds, & qu'au Printemps & à l'Automne la hauteur du flux dans les ſyzygies peut ſurpaſſer ſa hauteur dans les quadratures de plus de 7 ou 8 pieds. Prenant 9 pieds pour la plus grande différence de ces hauteurs, on aura $L+S : L-S :: 20\frac{1}{2} : 11\frac{1}{2}$ ou $:: 41 : 23$, laquelle

laquelle proportion ſe rapporte aſſez à la premiere. La grandeur du flux dans le port de *Briſtol* ſemble donner plus de poids aux obſervations de *Sturmius*, ainſi juſqu'à ce qu'on ait trouvé quelque choſe de plus certain, nous nous ſervirons de la proportion de 9 à 5.

Au reſte, à cauſe des mouvemens réciproques des eaux, les plus grandes marées n'arrivent pas préciſément dans les ſyzygies du Soleil & de la Lune, mais ce ſont les troiſiémes après les ſyzygies, comme on l'a dit; ou bien elles ſuivent de très-près le troiſiéme paſſage de la Lune par le méridien du lieu après les ſyzygies, ou plutôt (comme l'a remarqué *Sturmius*) elles arrivent le troiſiéme jour après celui de la nouvelle Lune, ou de la pleine Lune, ou un peu plus ou un peu moins après la 12 heure depuis la nouvelle ou la pleine Lune. Et par conſéquent elles arrivent à peu près la quarante-troiſiéme heure après la nouvelle ou la pleine Lune.

Elles arrivent dans ce port la ſeptiéme heure environ après le paſſage de la Lune par le méridien du lieu; ainſi elles ſuivent de très-près le paſſage de la Lune par le méridien du lieu, lorſque la Lune eſt éloignée du Soleil, ou de l'oppoſition du Soleil d'environ 80 ou 90 dégrés en conſéquence. L'Hyver & l'Eté les marées ont plus de force, non pas dans les ſolſtices mêmes, mais lorſque le Soleil en eſt éloigné de la dixiéme partie du cercle, ou environ de 36 à 37 dégrés. De même, le plus grand flux arrive après le paſſage de la Lune par le méridien du lieu, lorſque la Lune eſt éloignée du Soleil environ de la dixiéme partie de tout l'eſpace qui eſt entre une marée & l'autre. Suppoſé que cette diſtance ſoit d'environ $18^{d}\frac{1}{2}$, la force du Soleil dans cette diſtance de la Lune aux ſyzygies & aux quadratures, ſera moindre pour augmenter & diminuer le mouvement de la mer cauſé par la Lune, que dans ſes ſyzygies & dans ſes quadratures, & cela en raiſon du rayon au ſinus de complément de cette diſtance doublée, ou de l'angle de $37^{d}$, c'eſt-à-dire, en raiſon de 10000000 à 7986355.

Ainsi dans l'analogie ci-dessus on écrira pour $S$ $0,7986355\,S$.

Mais il faut diminuer la force de la Lune dans les quadratures à cause de sa déclinaison. Car la Lune dans les quadratures, ou plutôt dans le $18\frac{1}{2}$ dégré après les quadratures, a une déclinaison d'environ $22^d\ 13'$. Et la force d'un astre sur la mer est moindre lorsqu'il s'éloigne de l'équateur, en raison doublée du sinus de complément de sa déclinaison à peu-près : & par conséquent la force de la Lune dans ses quadratures est seulement de $0,8570327\,L$. Donc on a $L + 0,7986355\,S : 0,8570327\,L - 0,7986355\,S :: 9 : 5$.

De plus, les diamétres de l'orbite dans lequel la Lune feroit sa révolution sans excentricité, sont entr'eux comme 69 à 70 ; ainsi la distance de la Lune à la terre dans les syzygies, est à sa distance dans les quadratures, comme 69 à 70, toutes choses d'ailleurs égales : & ses distances dans le $18^e$ dégré $\frac{1}{2}$ depuis les syzygies, où la marée est la plus grande, & dans le $18^e$ dégré $\frac{1}{2}$ après les quadratures, où arrivent les plus petites marées, sont à sa moyenne distance comme $69,098747$ & $69,897345$ à $69\frac{1}{2}$. Mais les forces de la Lune pour mouvoir la mer sont en raison inverse triplée des distances : donc les forces, à la plus grande & à la plus petite de ces distances, sont à la force dans la médiocre distance, comme $0,9830427$ & $1,017522$ à 1. D'où l'on tire $1,017522\,L + 0,7986355\,S$ à $0,9830427 \times 0,8570327\,L - 0,7986355\,S$ comme 9 à 5. Et $S$ à $L$ comme 1 à $4,4815$.

Ainsi la force du Soleil étant à la force de la gravité, comme 1 à 12868200, la force de la Lune sera à la force de la gravité comme 1 à 2871400.

*Cor.* 1. Comme l'eau par l'action du Soleil, monte à la hauteur d'un pied 11 pouces & $\frac{1}{15}$ de pouce, elle montera à 8 pieds 7 pouces & $\frac{5}{22}$ de pouces par l'action de la Lune, & par les forces réunies de ces deux astres elle montera à 10 pieds $\frac{1}{2}$, & lorsque la Lune est dans son périgée l'eau montera à la hauteur de 12 pieds ½ & plus, surtout si le flux est aidé par les vents qui souflent alors.

Une force de cette nature suffit pour causer tous les mouvemens de la mer, & elle répond assez éxactement à la quantité de ces mouvemens. Car dans les mers qui ont une grande largeur de l'Orient à l'Occident, comme dans la mer Pacifique, & dans les parties de la mer Atlantique & Ethiopique qui sont au-delà des tropiques, l'eau monte ordinairement à la hauteur de 6, 9, 12 ou 15 pieds. Aureste on prétend que dans la mer Pacifique qui est plus profonde & plus large que la mer Atlantique & la mer d'Ethiopie, les marées y sont aussi plus grandes. Et en effet, pour que le flux soit complet la largeur de la mer de l'Orient à l'Occident ne doit pas être moindre que de 90[d].

Dans la mer d'Ethiopie l'ascension de l'eau entre les tropiques est moindre que dans les zones tempérées, à cause du peu de largeur de la mer entre l'Afrique & la partie australe de l'Amérique. L'eau ne peut pas monter dans le milieu de la mer qu'elle ne descende en même temps vers l'un & l'autre rivage Oriental & Occidental; mais dans nos mers qui sont plus resserrées, l'eau s'éleve à un rivage lorsqu'elle descend à l'autre; & par cette raison, le flux & le reflux sont très-peu sensibles dans les isles qui sont fort loin de la terre ferme.

Dans de certains ports, où l'eau arrive avec impétuosité après avoir rencontré beaucoup de bancs de sable; & où elle est obligée de fluer & de refluer pour emplir & vuider tour à tour le golfe; le flux & le reflux doivent être plus grands, comme à *Plymouth*, au pont de *Chepstown* en Angleterre, au mont *Saint Michel* & à *Avranches* en *Normandie*, à *Cambaie* & à *Pégu* dans l'Inde Orientale.

Dans ces lieux, la mer arrivant & se retirant avec une grande vîtesse, elle inonde tantôt le rivage à plusieurs milles & tantôt elle le laisse à sec. Le choc de l'eau lorsqu'elle arrive & lorsqu'elle se retire, ne cesse que lorsqu'elle s'est élevée ou abbaissée de 30, 40, ou 50 pieds & plus. C'est la même chose dans les détroits oblongs & dans les mers pleines de bancs de sable, comme le détroit de *Magellan*, & les mers qui environnent l'*Angleterre*. Le flux dans ces ports & dans ces détroits augmente beaucoup par l'impétuosité avec laquelle la mer arrive & se retire. Mais sur les rivages près desquels la mer devient tout à coup très-large & très-profonde, & où l'eau peut s'élever & s'abbaisser sans s'y porter & s'en retirer avec impétuosité, la grandeur des marées répond aux forces du Soleil & de la Lune.

*Cor.* 2. La force de la Lune pour mouvoir la mer étant à la force de la gravité comme 1 à 2871400, il est clair, que cette force est beaucoup moindre que ce qu'il faudroit qu'elle fût pour qu'elle pût être apperçue, ou dans les expériences des pendules, ou dans toutes celles qu'on peut faire dans la statique & dans l'hydrostatique. Cette force de la Lune n'a d'effet sensible que dans les marées.

*Cor.* 3. Puisque la force de la Lune pour mouvoir la mer est à la force du Soleil sur la mer comme 4,4815 à 1, & que ces forces (par le Cor. 14. de la Prop. *66*. Liv. 1.) sont en raison composée des densités du Soleil & de la Lune & du cube de leurs diamétres apparens; la densité de la Lune doit être à la densité du Soleil comme 4,4815 à 1 directement, & comme le cube du diamétre de la Lune au cube du diamétre du Soleil inversement : c'est-à-dire, (les moyens diamétres apparens de la Lune & du Soleil étant de $31' \, 16''\frac{1}{2}$ & de $32' \, 12''$) comme 4891 à 1000. Or la densité du Soleil est à la densité de la terre comme 1000 à 4000; donc la densité de la Lune est à la densité de la terre comme 4891 à 4000, ou comme 11 à 9. Ainsi le globe de la Lune est plus dense & plus terrestre que notre terre.

*Cor.* 4. Puisque le vrai diamétre de la Lune est, selon les observations astronomiques, au vrai diamétre de la terre, comme 100 à 365; la masse de la Lune sera à la masse de la terre comme 1 à 39,788.

*Cor.* 5. La gravité accélératrice à la surface de la Lune, sera presque 3 fois moindre que la gravité accélératrice à la surface de la terre.

*Cor.* 6. La distance du centre de la Lune au centre de la terre, sera à la distance du centre de la Lune au commun centre de gravité de la Lune & de la terre comme 40,788 à 39,788.

*Cor.* 7. La médiocre distance du centre de la Lune au centre de la terre dans les octans de la Lune sera à peu près de $60\frac{2}{5}$ demi grands diamétres de la terre. Or le demi grand diamétre de la terre a été trouvé de 19658600 pieds de Paris : donc la médiocre distance des centres de la Lune & de la terre qui est de $60\frac{2}{5}$ de ces demi grands diamétres, aura 1187379440 pieds. Et cette distance (par le Cor. précédent) est à la distance du centre de la Lune au commun centre de gravité de la terre & de la Lune, comme 40,788 à 39,788. Ainsi cette derniere distance est de 1158268534 pieds. Or comme la Lune fait sa révolution, par rapport aux fixes, en 27 jours, 7 heures, $43'\frac{4}{5}$, le sinus verse de l'angle que la Lune décrit dans une minute, est de 12752341 parties pour un rayon de 1000,000000,000000, & de 14,7706353 pieds pour un rayon de 1158268534 pieds. Donc la Lune tombant vers la terre, par la même force qui la retient dans son orbite, parcoureroit dans une minute 14,7706353 pieds. En augmentant cette force en raison de $178\frac{29}{40}$ à $177\frac{29}{40}$, on aura la force totale de la gravité à l'orbe de la Lune par le Cor. de la Prop. 3. & la Lune tombant par cette force pendant une minute, parcourera 14,8538067 pieds. Donc, à la soixantiéme partie de la distance de la Lune au centre de la terre, c'est-à-dire, à la distance de 197896573 pieds du centre de la terre, un corps grave en tombant parcourera aussi dans une seconde 14,8538067 pieds. Donc à la distance de 19615800 pieds, c'est-à-dire, à la distance du moyen demi diamétre de la terre, un corps grave en tombant parcourera dans une seconde 15,11175 pieds ou 15 pieds, 1 pouce, $4\frac{1}{11}$ lignes. C'est-là la quantité de la chute des graves à $45^d$ de latitude. Et par la table qu'on a donné dans la Prop. 20. la quantité de cette descente sera plus grande à la latitude de *Paris* de $\frac{4}{7}$ de ligne environ. Donc, selon ce calcul, les graves en tombant dans le vuide à la latitude de *Paris*, parcoureroient 15 pieds de *Paris* 1 pouce & $4\frac{21}{33}$ lignes environ en une seconde. Si on retranche de la gravité la force centrifuge que le mouvement diurne de la terre produit à cette latitude, les graves, en y tombant, parcoureront dans une seconde 15 pieds 1 pouce & $1\frac{1}{2}$ lignes. Or on a fait voir, dans les Prop. 4. & 19. que les graves parcourent en effet cet espace en une seconde à la latitude de *Paris*.

*Cor.* 8. La moyenne distance des centres de la Lune & de la terre dans les syzygies de la Lune est de soixante demi grands diamétres de la terre, moins la trentiéme partie d'un demi diamétre environ. Dans les quadratures de la Lune, la moyenne distance de ces centres, est de $60\frac{5}{6}$ demi diamétres de la terre. Car ces deux distances sont à la distance moyenne de la Lune dans les octans comme 69 & 70 à $69\frac{1}{2}$ par la Prop. 28.

*Cor.* 9. La moyenne distance des centres de la Lune & de la terre dans les syzygies de la Lune est de $60\frac{1}{10}$ demi diamétres moyens de la terre. Et dans les quadratures de la Lune la distance moyenne de ces centres est de 61 demi diamétres moyens de la terre, moins la trentiéme partie d'un demi diamétre.

*Cor.* 10. Dans les syzygies de la Lune sa parallaxe horisontale médiocre est à 0, 30, 38, 45, 52, 60 & 90 dégrés de latitude, de 57′ 20″, 57′ 16″, 57′ 14″, 57′ 12″, 57′ 10″, 57′ 8″ & 57′ 4″ respectivement.

Dans ces calculs je n'ai point considéré l'attraction magnétique de la terre dont la quantité est très-petite & est ignorée. Si jamais on parvient à la connoître, & que les mesures des dégrés dans le méridien, la longueur des pendules isochrones à diverses latitudes, les loix du flux & du reflux, la parallaxe de la Lune, & les diamétres apparens du Soleil & de la Lune, soient exactement déterminés par les Phénomenes; on pourra refaire tout ce calcul plus exactement.

## PROPOSITION XXXVIII. PROBLÉME XIX.

*Trouver la figure de la Lune.*

Si la Lune étoit fluide comme notre mer, la force de la terre pour élever les parties de ce fluide les plus proches & les plus éloignées de la terre, seroit à la force avec laquelle la Lune éleve les parties des eaux de notre mer situées sous la Lune & opposées à la Lune, en raison composée de la raison de la gravité accélératrice de la Lune vers la terre à celle de la terre vers la Lune, & de la raison du diamétre de la Lune au diamétre de la terre, c'est-à-dire, comme $39{,}788 \times 100$ à $1 \times 365$ ou comme 1081 à 100. Ainsi, comme la force de la Lune éleve notre mer à la hauteur de 8 pieds & $\frac{3}{5}$, le fluide de la Lune seroit élevé par la force de la terre à la hauteur de 93 pieds. Et par cette cause la forme de la Lune doit être celle d'un sphéroïde dont le grand diamétre prolongé passe par le centre de la terre, & surpasse l'autre diamétre qui lui est perpendiculaire de 186 pieds. La Lune a donc cette forme & doit l'avoir prise dès le commencement. *C. Q. F. T.*

*Cor.* C'est ce qui fait que la Lune présente toujours le même côté à la terre; car la Lune ne peut être en repos dans une autre position, mais elle doit toujours retourner à celle-là en oscillant. Cependant ces oscillations sont très-lentes, parce que les forces qui les produisent sont très-petites : ensorte que cette partie de la Lune qui devroit toujours être tournée vers la terre, peut regarder l'autre foyer de l'orbe lunaire (par la raison alléguée dans la Prop. 17.) & n'être pas ramenée en un instant vers la terre.

## LEMME PREMIER.

*Si* APEp *représente la terre uniformement dense*, C *son centre*, AE *son équateur &* P, p *ses pôles ; que de plus*, Pape *soit la sphére inscrite, que* QR *représente le plan coupé perpendiculairement* Fig. 16.

*par la droite tirée du centre du Soleil au centre de la terre ; qu'enfin toutes les particules qui composent l'excédent* PapAPepE *de la terre* Fig. 16. *par-dessus la sphere inscrite, tendent à s'éloigner de ce plan* QR *avec un effort qui soit proportionnel à leur distance à ce plan : alors* 1°. *Toutes les particules qui sont placées dans le plan de l'équateur* AE, *& qui sont rangées également autour du globe en forme d'anneau, auront pour faire tourner la terre autour de son centre, une force qui sera à celle que toutes ces mêmes particules (placées par supposition dans le lieu de l'équateur le plus distant du plan* QR*) auroient pour faire mouvoir la terre d'un semblable mouvement circulaire autour de son centre, comme* 1. *est à* 2.

2°. *Ce mouvement circulaire se fera autour d'un axe placé dans la commune section de l'équateur & du plan* QR.

Fig. 17. Si du centre *K* & avec le diamétre *IL* on décrit le demi cercle *INLK*, qu'on suppose la demi circonférence *INL* partagée en un nombre infini de parties égales, & que de chacune de ces parties *N* on abbaisse le sinus *NM* sur le diamétre *IL*. La somme des quarrés de tous ces sinus *NM* sera égale à la somme des quarrés des sinus *KM*; & l'une & l'autre somme sea égale à la somme des quarrés d'autant de demi diamétres *KN*; donc la somme de tous les quarrés de tous les sinus *NM* sera sousdouble de la somme des quarrés d'autant de demi diamétres *KN*.

Fig. 16. Soit à présent divisé le périmétre du cerle *AE* en autant de parties égales, & par chacune de ces particules *F* soit abbaissée une perpendiculaire *FG* au plan *QR*, ainsi que du point *A* la perpendiculaire *AH*. La force par laquelle la particule *F* s'éloigne du plan *QR* sera comme cette perpendiculaire *FG* (par l'hypothése) & cette force, multipliée par la distance *CG* sera l'efficacité de la particule *F* pour faire tourner la terre autour de son centre. Ainsi l'efficacité d'une particule au lieu *F*, sera à l'efficacité d'une particule au lieu *A*, comme $FG \times GC$ à $AH \times HC$, c'est-à-dire, $:: FC^2 : AC^2$; & par conséquent, l'efficacité de toutes les parties dans leurs lieux *F* sera à l'efficacité d'autant de

de particules dans le lieu $A$, comme la somme de tous les $FC^2$ à la somme d'autant de $AC^2$, c'est-à-dire, par ce qui a déja été démontré, comme un à deux. *C. Q. F. D.* Fig. 16.

Et parce que ces particules agissent en s'éloignant perpendiculairement du plan $QR$, & cela également de chaque côté de ce plan ; elles font tourner la circonférence du cercle de l'équateur, ainsi que la terre qui y est attachée, au tour de l'axe qui est dans ce plan $QR$ & dans le plan de l'équateur.

## LEMME II.

*Les mêmes choses étant posées, la force & l'efficacité que toutes les particules placées de toutes parts autour du globe, ont pour faire tourner la terre autour du même axe, est à la force qu'un même nombre de particules, supposé placées en forme d'anneau dans le cercle de l'équateur* AE, *auroient pour faire tourner la terre d'un semblable mouvement circulaire, comme deux à cinq.*

Soit $KI$ un cercle mineur quelconque parallele à l'équateur, & soient $L$, $l$, deux particules quelconques égales situées dans ce cercle hors du globe $Pape$. Si sur le plan $QR$, qui est perpendiculaire au rayon tiré au Soleil, on abbaisse les perpendiculaires $LM$, $lm$, toutes les forces avec lesquelles ces particules s'éloignent du plan $QR$ seront proportionnelles à ces perpendiculaires. Supposé à présent que la droite $Ll$ soit paralléle au plan $Pape$ ; qu'elle soit coupée en deux parties égales au point $X$ ; & que par le point $X$ on tire $Nn$ qui soit parallele au plan $QR$ & qui rencontre les perpendiculaires $LM$, $lm$, en $N$ & en $n$ ; abbaissant $XY$ perpendiculairement sur le plan $QR$, les forces contraires des particules $L$ & $l$, pour faire tourner la terre en sens contraire, seront comme $LM \times MC$ & $lm \times mC$, c'est-à-dire, comme $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$, ou $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC - NM \times mC$ : & leur différence $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$ sera la force de ces deux particules prises ensemble pour faire tourner Fig. 18.

DU SYSTEME DU MONDE.

Fig. 18.

la terre. La partie positive $LN \times Mm$ ou $2LN \times NX$ de cette différence, est à la force $2AH \times HC$ de deux particules de même grandeur placées en $A$, comme $LX^2$ à $AC^2$. Et la partie négative $NM \times \overline{MC + mC}$, ou $2XY \times CY$ est à la force $2AH \times HC$ de ces mêmes particules placées en $A$, comme $CX^2$ à $AC^2$. Donc la différence des forces de ces parties, c'est-à-dire, la force de deux particules $L$ & $l$ prises ensemble pour faire tourner la terre, est à la force de deux particules qui leur seroient égales & qui seroient placées dans le lieu $A$ pour faire tourner la terre de la même maniére, dans la raison de $LX^2 - CX^2$ à $AC^2$. Mais si la circonférence $IK$ est divisée en un nombre innombrable de parties égales $L$, toutes les $LX^2$ seront à autant de $IX^2$ comme 1 à 2 (par le Lemme 1.) & par conséquent à autant de $AC^2$ comme $IX^2$ à $2AC^2$; & autant de $CX^2$ à autant de $AC^2$ comme $2CX^2$ à $2AC^2$; donc les forces réunies de toutes les particules de la circonférence du cercle $IK$, sont aux forces réunies d'autant de particules dans le lieu $A$; comme $IX^2 - 2CX^2$ à $2AC^2$: & par conséquent, (par le Lemme 1.) aux forces réunies d'autant de particules dans la circonférence du cercle $AE$ comme $IX^2 - 2CX^2$ à $AC^2$.

Si à présent le diamétre $Pp$ de la sphere est divisé en un nombre innombrable de parties égales sur lesquelles s'élevent autant de cercles $IK$; la matiére du périmétre d'un de ces cercles quelconque $IK$ sera comme $IX^2$: ainsi la force de cette matiere pour faire tourner la terre sera comme $IX^2 \times IX^2 - 2CX^2$. Mais la force de cette même matiere, si elle étoit placée dans le périmétre du cercle $AE$, seroit comme $IX^2 \times AC^2$. Donc la force de toutes les particules de la matiére placée dans le périmétre de tous ces cercles hors du globe, est à la force d'autant de particules de la matiére placées dans le périmétre du grand cercle $AE$, comme tous les $IX^2 \times IX^2 - 2CX^2$ à autant de $IX^2 \times AC^2$, c'est-à-dire, comme tous les $AC^2 - CX^2 \times AC^2 - 3CX^2$ à autant de $AC^2 - CX^2 \times AC^2$, ou,

Fig. 18.

ce qui revient au même, comme tous les $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ à autant de $AC^4 - AC^2 \times CX^2$, ou encore, comme toute la quantité fluente, dont la fluxion est $AC^4 - 4AC^2 \times CX^2 + 3CX^4$ est à toute la quantité fluente dont la fluxion est $AC^4, - AC^2 \times CX^2$; Et par conséquent, par la méthode des fluxions, comme $AC^4 \times CX - \frac{4}{3}AC^2 \times CX^3 + \frac{3}{5}CX^5$ à $AC^4 \times CX - \frac{1}{3}AC^2 \times CX^3$, c'est-à-dire, en écrivant au lieu de $CX$ la ligne entiére $Cp$ ou $AC$, comme $\frac{4}{15}AC^5$ à $\frac{2}{3}AC^5$, ou comme 2 à 5. *C. Q. F. D.*

## LEMME III.

*Les mêmes choses étant posées, je dis que le mouvement dont nous avons parlé, de toute la terre entiere autour de l'axe, lequel mouvement est composé des mouvemens de toutes les particules, sera au mouvement du précédent anneau autour du même axe, dans une raison composée de la raison de la matiére de la terre à la matiere de cet anneau, & de la raison de trois fois le quarré du quart de cercle à deux fois le quarré du diamétre, c'est-à-dire, en raison composée de la matiere à la matiere, & de 925275 à 1000000.*

Car le mouvement d'un cylindre tournant autour de son axe supposé fixe, est au mouvement de la sphére inscrite, & qui tourne en même temps, comme quatre quarrés égaux sont à trois des cercles inscrits dans ces quarrés: & le mouvement du cylindre est au mouvement d'un anneau très-mince qui touche la sphére & le cylindre dans leur commun contact, comme le double de la matiére du cylindre est au triple de la matiére de l'anneau; & le mouvement de cet anneau continué uniformément autour de l'axe de ce cylindre est à son mouvement uniforme autour de son diamétre dans le même temps périodique, comme la circonférence du cercle est au double de son diamétre.

## HYPOTHESE II.

*Si l'anneau, dont on vient de parler, faisoit seul sa révolution autour du Soleil dans l'orbe de la terre par le mouvement annuel, tout le reste*

DU SYSTEME DU MONDE.

*de la terre étant ôté, & que cependant il tournât par le mouvement diurne autour de son axe incliné au plan de l'écliptique de $23\frac{1}{2}$ dégrés : le mouvement des points équinoxiaux seroit le même, soit que cet anneau fût fluide, soit qu'il fût formé d'une matiére solide.*

## PROPOSITION XXXIX. PROBLÊME XX.

*Trouver la précession des Equinoxes.*

Le mouvement horaire médiocre des nœuds de la Lune dans un orbe circulaire, lorsque les nœuds sont dans les quadratures, a été trouvé de $16'' \, 35''' \, 16^{iv} \, 36^{v}$, & sa moitié $8'' \, 17''' \, 38^{iv} \, 18^{v}$ est le mouvement moyen horaire des nœuds dans cet orbe, par les raisons ci-dessus expliquées; ainsi ce mouvement dans une année entiere sidérale est de $20^{d} \, 11' \, 46''$. Or, puisque les nœuds de la Lune dans un tel orbe feroient tous les ans $20^{d} \, 11' \, 46''$ en antécédence, & que s'il y avoit plusieurs Lunes, les mouvemens des nœuds de chacune seroient (par le Cor. 16. de la Prop. 66. du Liv. 1.) comme les temps périodiques; il s'ensuit, que si la Lune tournoit autour de la terre près de sa surface dans l'espace d'un jour sidéral, le mouvement annuel de ses nœuds seroit à $20^{d} \, 11' \, 46''$ comme un jour sidéral qui est de $23^{h} \, 56'$ au temps périodique de la Lune qui est de 27 jours $7^{h} \, 43'$, c'est-à-dire, comme 1436 à 39343. Il en seroit de même des nœuds d'un anneau de Lunes qui entoureroit la terre; soit que ces Lunes ne fussent pas contigues, soit qu'elles devinssent fluides & qu'elles formassent un anneau continu, soit enfin que la matiére de cet anneau s'endurcit & qu'il devint infléxible.

Fig. 18. Supposons donc que cet anneau soit égal en quantité de matiére à la partie de terre $PapAPepE$ qui est l'excédent du sphéroïde sur le globe $Pape$, ce globe étant à cet excédent du sphéroïde comme $aC^2$ à $AC^2 - aC^2$, c'est-à-dire, (à cause que le petit demi diamétre de la terre $PC$ ou $aC$ est au demi grand diamétre $AC$ dans la raison de 229 à 230) comme 52441 à 459; si cet anneau entouroit la terre dans le sens de l'équateur,

& que l'un & l'autre tournassent ensemble autour du diamétre de l'anneau, le mouvement de l'anneau seroit au mouvement du globe intérieur (par le Lemme 3. de ce Livre) comme 459 à 52441 & 1000000 à 925275 conjointement, c'est-à-dire, comme 4590 à 485223; & par conséquent le mouvement de l'anneau seroit à la somme des mouvemens de l'anneau & du globe, comme 4590 à 489813. Ainsi si l'anneau étoit adhérent au globe, & qu'il lui communiquât son mouvement par lequel ses nœuds ou les points équinoxiaux rétrogradent: le mouvement qui resteroit à l'anneau seroit à son mouvement primitif comme 4590 à 489813; & par conséquent le mouvement des points équinoxiaux seroit diminué dans la même raison.

Le mouvement annuel des points équinoxiaux du corps composé de l'anneau & du globe, seroit donc au mouvement de $20^{d}$ $11' 46''$ comme 1436 à 39343, & 4590 à 489813 conjointement, c'est-à-dire, comme 100 à 292369. Mais les forces par lesquelles les nœuds des Lunes (comme je l'ai expliqué ci-dessus) & par conséquent les points équinoxiaux de l'anneau rétrogradent, c'est-à-dire, les forces $3IT$ sont, dans chaque particule, comme les distances de ces particules au plan $QR$, & c'est par ces forces que ces particules s'éloignent de ce plan; donc (par le Lemme 2.) si la matiére de l'anneau étoit répandue sur toute la superficie du globe, ensorte qu'elle formât sur la partie supérieure de la terre la figure $PapAPepE$, la force & l'efficacité de toutes les particules pour faire tourner la terre autour d'un diamétre quelconque de l'équateur, & par conséquent pour mouvoir les points équinoxiaux, deviendroit moindre qu'auparavant dans la raison de 2 à 5. Et par conséquent, la régression annuelle des points équinoxiaux sera à $20^{d}\ 11'\ 46''$ comme 10 à 73092, c'est-à-dire, qu'elle sera de $9''\ 56'''\ 50^{iv}$. Fig. 6.

Au reste ce mouvement doit être diminué à cause de l'inclinaison du plan de l'équateur au plan de l'écliptique, c'est-à-dire, en raison du sinus 91706 (qui est le sinus de complément de $23^{d}\frac{1}{2}$)

au rayon 100000. Ainsi ce mouvement deviendra de $9'' 7''' 20^{iv}$. Et c'est-là la précession annuelle des équinoxes causée par la force du Soleil.

Mais la force de la Lune pour élever l'eau de la mer a été trouvée à la force du Soleil comme 4, 4815 à 1 environ ; & la force de la Lune pour mouvoir les points équinoxiaux, est à la force du Soleil dans la même proportion ; donc la précession annuelle des points équinoxiaux, causée par la force de la Lune, doit être de $40'' 52''' 52^{iv}$. Ainsi la précession annuelle totale des équinoxes produite par ces deux forces, doit être de $50'' 00''' 12^{iv}$, & ce mouvement s'accorde avec les phénoménes, car la précession des équinoxes selon les observations astronomiques est annuellement d'environ $50''$

Si la terre est plus haute à l'équateur qu'aux pôles de plus de 17 milles $\frac{1}{6}$, sa matiére doit être moins dense à la circonférence qu'au centre : & la précision des équinoxes devra être augmentée en vertu de cette plus grande hauteur de l'équateur & diminuée à cause de cette moindre densité.

Nous avons expliqué jusqu'à présent le systême du Soleil, de la terre, de la Lune & des planettes : il nous reste à traiter des cométes.

## LEMME IV.

*Les Cométes sont placées au-dessus de la Lune, & viennent dans la région des Planettes.*

De même que le défaut de parallaxe diurne fait voir que les cométes sont au-dessus des régions sublunaires, leur parallaxe annuelle prouve qu'elles descendent dans la région des planettes. Car les cométes qui vont suivant l'ordre des signes sont toutes, vers la fin de leur apparition, de plus en plus retardées ou même rétrogrades, si la terre est entr'elles & le Soleil, & accélérées également, si la terre est en opposition. Au contraire, les cométes qui vont contre l'ordre des signes vont plus vîte vers la fin de leur apparition, si la terre se trouve entr'elles & le Soleil ; & elles vont plus lentement ou sont rétrogrades, si la terre ſe trouve en oppoſition avec elles. Ces mouvemens apparens des cométes viennent principalement des mouvemens de la terre dans ſes différentes poſitions par rapport à elles, de même que les planettes nous paroiſſent quelquefois rétrogrades, quelquefois plus lentes & quelquefois plus promptes, ſelon que leur mouvement conſpire avec celui de la terre, ou qu'il lui eſt contraire. Si la terre va du même côté que la cométe, & qu'elle ſoit tranſportée autour du Soleil d'un mouvement angulaire qui ſurpaſſe aſſez celui de la cométe pour que la ligne qui ſuivroit continuellement la terre & la cométe convergeât du côté qui eſt par de-là la cométe, la cométe vue de la terre paroîtra alors rétrograde à cauſe de ſon mouvement plus lent; mais ſi la terre eſt mue plus lentement, le mouvement de la cométe (en retranchant celui de la terre) devient encore plus lent. Et lorſque la terre ira du côté oppoſé à celui de la cométe, la cométe paroîtra plus rapide. Or de cette accélération & de ce mouvement rétrograde on tire la diſtance de la cométe de la maniére ſuivante.

Soient $\Upsilon QA$, $\Upsilon QB$, $\Upsilon QC$ trois longitudes de la cométe, obſervées au commencement de ſon mouvement, & ſoit $\Upsilon QF$ la derniére longitude obſervée lorſque la cométe ceſſe d'être apperçue. Soit de plus tirée la ligne $ABC$ dont les parties $AB$, $BC$ ſéparées par les lignes $QA$ & $QB$, $QB$ & $QC$, ſoient entr'elles comme les temps écoulés entre les trois premieres obſervations. Soit prolongé $AC$ juſqu'en $G$, enſorte que $AG$ ſoit à $AB$ comme le temps entre la premiere & la derniere obſervation, eſt au temps entre la premiere & la ſeconde, & ſoit enfin tirée la ligne $QG$: ſi la cométe étoit mue uniformément dans une ligne droite, & que la terre fût en repos ou qu'elle avançât en ligne droite d'un mouvement uniforme; l'angle $\Upsilon QG$ ſeroit la longitude de la cométe au temps de la derniere obſervation. L'angle $FQG$, qui eſt la différence de ces longitudes, eſt donc formé par l'inégalité des mouvemens de la terre & de la cométe. Cet angle, ſi la terre & la cométe vont vers des côtés oppoſés, étant ajouté à l'angle Fig. 19.

DU SYSTEME DU MONDE.

$\Upsilon QG$ rendra le mouvement apparent de la cométe plus prompt: mais si la cométe & la terre vont vers le même côté, il faut soustraire l'angle $FQG$ de ce même angle $\Upsilon QG$, & cette soustraction rendra le mouvement apparent de la cométe plus lent, ou même rétrograde, comme je viens de le faire voir. Cet angle est formé principalement par le mouvement de la terre, & par conséquent on peut le prendre pour la parallaxe de la cométe, en négligeant le petit décrément ou le petit incrément de cet angle qui peut naître de l'inégalité du mouvement de la cométe dans son orbe.

Fig. 20. On tire de cette parallaxe la distance de la cométe en cette maniére. Que $S$ représente le Soleil, $acT$ le grand orbe, $a$ le lieu de la terre dans le temps de la premiere observation, $c$ son lieu dans le temps de la troisiéme, $T$ celui où elle se trouve dans le temps de la derniere, & $T\Upsilon$ la ligne droite tirée vers le commencement d'*Aries*. Soit pris l'angle $\Upsilon TV$ égal à l'angle $\Upsilon QF$, c'est-à-dire, à la longitude de la cométe lorsque la terre est en $T$. Soit de plus tirée $ac$ prolongée en $g$, ensorte que $ag:ac::AG:AC$, & $g$ sera le lieu que la terre auroit atteint au temps de la derniere observation par un mouvement continué uniformément dans la ligne droite $ac$. Donc si on tire la ligne $g\Upsilon$ parallele à $T\Upsilon$, & qu'on fasse l'angle $\Upsilon gV$ égal à l'angle $\Upsilon QG$, cet angle $\Upsilon gV$ sera égal à la longitude de la cométe vue du lieu $g$; & l'angle $TVg$ sera la parallaxe qui vient de la translation de la terre du lieu $g$ au lieu $T$: & par conséquent $V$ sera le lieu de la cométe dans le plan de l'écliptique. Ce lieu $V$ est ordinairement inférieur à l'orbe de Jupiter.

On conclut la même chose de la courbure du chemin des cométes. Ces corps marchent à peu près dans de grands cercles pendant qu'ils se meuvent avec leur plus grande vîtesse; mais dans la fin de leurs cours, où cette partie de leur mouvement apparent qui vient de la parallaxe a une plus grande proportion au mouvement total apparent, elles ont coutume de s'écarter de ces cercles, eles, & lorſque la terre ſe meut vers un côté du ciel, elles vont vers le côté oppoſé. Cette déflexion vient principalement de la parallaxe, car elle répond au mouvement de la terre; & la grandeur de cette déflexion prouve, ſelon mon calcul, que les cométes, lorſqu'elles diſparoiſſent, ſont placées aſſez loin au-deſſous de Jupiter. Et par conſéquent dans leur périgée & leur périhélie, où elles ſont plus proches, elles deſcendent ſouvent au-deſſous des orbes de Mars & des planettes inférieures.

La proximité des cométes ſe confirme encore par la lumiére de leurs têtes. Car l'éclat d'un corps céleſte, éclairé du Soleil & qui s'éloigne à de très-grandes diſtances, diminue en raiſon quadruplée de ſa diſtance: c'eſt-à-dire, dans une raiſon doublée à cauſe que la diſtance de ce corps au Soleil augmente, & dans une autre raiſon doublée, à cauſe de la diminution de ſon diamétre apparent. Ainſi ſi la quantité de la lumiére & le diamétre apparent d'une cométe ſont donnés, on aura ſa diſtance, en diſant, cette diſtance eſt à la diſtance d'une planette en raiſon directe du diamétre au diamétre, & en raiſon ſouſdoublée inverſe de l'illumination à l'illumination.

*Flamſtead* obſervant le plus petit diamétre de la chevelure de la cométe de 1682 le trouve de $2' \, 0''$ avec une lunette de 16 pieds armée d'un micrométre, le noyau ou l'étoile qui étoit dans le milieu de la tête occupoit à peine la dixiéme partie de cette largeur, ainſi ſon diamétre étoit ſeulement de $11''$ ou $12''$. Mais l'illumination & l'éclat de ſa tête ſurpaſſoit celle de la tête de la cométe de 1680, & elle étoit preſque auſſi brillante que les étoiles de la premiere ou de la ſeconde grandeur. Suppoſons que ſa lumiere fut environ ſouſquadruple de celle de Saturne & de ſon anneau: comme la lumiere de l'anneau étoit preſque égale à celle du globe & que le diamétre apparent du globe étoit preſque de $21''$, la lumiére du globe & de l'anneau égaloient enſemble la lumiére d'un globe de $30''$ de diamétre: ainſi la diſtance de la cométe étoit à la diſtance de Saturne comme 1 à $\sqrt{4}$ inversement & comme 12″ à 30″ directement, c'est-à-dire, comme 24 à 30 ou comme 4 à 5.

La cométe qui parut au mois d'*Avril* 1665. surpassoit par son éclat, selon *Hevelius*, presque toutes les étoiles fixes, & même Saturne par la vivacité de sa lumiére. Ainsi cette cométe étoit plus brillante que celle qui avoit paru à la fin de l'année précédente. Laquelle cependant avoit été jugée aussi brillante que les étoiles de la premiere grandeur. Le diamétre de sa chevelure étoit presque de 6′ & son noyau étant comparé aux planettes par le secours d'une lunette, étoit sans aucun doute plus petit que Jupiter, & paroissoit quelquefois égaler le globe de Saturne, & quelquefois il paroissoit plus petit. Or comme le diamétre de la chevelure des cométes passe rarement 8′ ou 12′, & que celui du noyau ou de l'étoile centrale est presque la dixiéme ou même quelquefois la quinziéme partie du diamétre de la chevelure, il est clair que ces étoiles ont pour la plûpart la même grandeur apparente que les planettes. Ainsi comme on peut ordinairement comparer leur lumiére avec celle de Saturne & que quelquefois elle la surpasse; il est clair que toutes les cométes dans leur périhélie sont au-dessous de Saturne ou très-peu au-dessus. Ceux donc qui les placent dans la région des étoiles fixes, se trompent extrêmement: car à cette distance elles ne devroient pas être plus éclairées par notre Soleil que les planettes de notre systême le sont par les étoiles fixes.

En traitant toutes ces choses, nous n'avons pas fait attention à l'obscurcissement des cométes causé par la fumée épaisse & abondante qui entoure leurs têtes, & qui fait que leur lumiére paroît vue comme à travers un nuage.

Plus cette fumée obscurcit les cométes, plus il faut qu'elles approchent du Soleil afin que la lumiére qu'elles réfléchissent puisse être presque égale à celle des planettes: d'où il est très-vraisemblable que les cométes descendent beaucoup au-dessous de l'orbe de Saturne comme nous l'avons prouvé par la parallaxe.

La même chose se trouve amplement confirmée par leurs queues, ces queues sont formées ou par la réfléxion de la fumée éparse dans l'Ether, ou par la lumiére de la tête des cométes. Dans le premier cas on doit diminuer la distance des cométes, car sans cela, il faudroit supposer que cette fumée qui s'exhale sans cesse de leurs têtes est propagée dans un espace immense avec une vîtesse & une expansion incroyable. Dans le dernier cas, on attribue toute la lumiére de la queue & de la chevelure au noyau de la tête; or si nous concevons que toute cette lumiére est rassemblée & resserrée dans le disque du noyau, il est certain que ce noyau, toutes les fois que la cométe a une queue très-grande & très-éclatante, devroit être beaucoup plus brillant que Jupiter: car donnant plus de lumiére & ayant un plus petit diamétre apparent, il doit être beaucoup plus éclairé & beaucoup plus près du Soleil que Jupiter. Bien plus, lorsque leur tête est cachée sous le Soleil, & que leurs queues paroissent, ainsi qu'il arrive quelquefois, comme de grandes poutres enflammées, on doit par le même raisonnement les placer au-dessous de l'orbe de Venus; car si toute cette lumiére est supposée rassemblée en une étoile, elle doit surpasser de beaucoup Venus en clarté.

On doit conclure la même chose de la lumiére des têtes des cométes qui croît lorsqu'elles s'éloignent de la terre & qu'elles vont vers le Soleil, & qui décroît lorsqu'elles s'éloignent du Soleil & reviennent vers la terre. Ainsi la derniere cométe de l'année 1665. (comme l'a observé *Hevelius*) perdoit toujours de son mouvement apparent depuis qu'il eut commencé à l'appercevoir, & par conséquent elle avoit devancé le périgée; mais cependant la lumiére de sa tête n'en augmentoit pas moins de jour en jour, jusqu'à ce qu'enfin étant plongée dans les rayons du Soleil elle cessa d'être visible. Le mouvement de la cométe de 1683 (observée par le même *Hevelius*) étoit très-lent à la fin du mois de *Juillet* que l'on commença à l'appercevoir, car elle ne faisoit alors environ que 40 ou 45 minutes de son orbe par jour, depuis ce temps son mouvement diurne augmenta continuellement jusqu'au 4 *Septembre* qu'il étoit presque de 5 dégrés; or pendant tout ce temps la cométe s'approcha de la terre ainsi qu'on pouvoit s'en assurer par le diamétre de sa tête mesuré avec le micrométre : car *Hevelius* le trouva le 6 *Aoust* de 6′ 5″ seulement, y compris la chevelure; mais le 2 *Septembre* il étoit de 9′ 7″, ce qui rendoit sa tête plus petite au commencement de son mouvement que vers la fin. Cependant dans le commencement comme elle étoit près du Soleil, elle paroissoit beaucoup plus brillante que vers la fin, comme le rapporte le même *Hevelius*, & pendant tout ce temps, quoiqu'elle s'approchât de la terre, sa lumiére diminua toujours, parce qu'elle s'éloignoit du Soleil.

Le mouvement de la cométe de 1618 fut le plus prompt vers le milieu du mois de Décembre, & celui de la cométe de 1680 vers la fin du même mois, ces cométes étoient par conséquent alors dans leur périgée, & cependant leurs têtes furent les plus brillantes environ 15 jours auparavant, lorsqu'elles sortoient des rayons du Soleil, & le plus grand éclat de leurs queues avoit été quelque temps auparavant, lorsqu'elles étoient le plus près du Soleil.

La tête de la cométe de 1618 paroissoit, selon les observations de *Cysatus* faites le premier *Décembre*, plus grande que les étoiles de la premiere grandeur, & le 16 *Décembre* (étant alors dans son périgée) sa grandeur étoit fort diminuée, mais sa lumiére & son éclat l'étoient beaucoup davantage, & le 7 *Janvier Kepler* ne pouvant plus appercevoir sa tête cessa de l'observer.

La tête de la cométe de 1680 fut observée le 12 *Décembre* par *Flamstead* à la distance de 9 dégrés du Soleil, & alors sa lumiére parut à peine égaler celle des étoiles de la troisiéme grandeur. Le 15 & le 17 *Décembre* elle lui parut comme les étoiles de la troisiéme grandeur, lorsque leur lumiére est diminuée par celle des nuées vers le Soleil couchant. Le 26 *Décembre* elle se mouvoit beaucoup plus vîte, & par conséquent elle étoit plus près de son périgée, & alors elle étoit plus petite que l'étoile de la troisiéme grandeur de la bouche de *Pégaze*, le 3 *Janvier* elle paroiſſoit de la quatriéme, le 9 de la cinquiéme & le 13 elle diſparut à cauſe de la clarté de la Lune qui l'effaçoit. Le 25 *Janvier* elle égaloit à peine la lumiére des étoiles de la ſeptiéme grandeur.

Si on prend des temps égaux avant & après ſon périgée, ſa tête, qui étoit alors dans des régions très-éloignées, auroit dû paroître également brillante, puiſqu'alors elle étoit également éloignée de la terre, mais elle parut beaucoup plus brillante lorſqu'elle fut du côté du Soleil, & preſque éteinte de l'autre côté du périgée. On doit donc conclure de la grande différence qui ſe trouva entre ſa lumiére dans l'une & l'autre poſition, qu'elle étoit très-près du Soleil dans la premiere; car la lumiére des cométes a coutume d'être réguliére & de paroître plus vive, lorſque leur tête ſe meut plus vîte, & qu'elles ſont par conſéquent dans leur périgée, ſi ce n'eſt à moins que l'augmentation de leur clarté ne vienne de leur plus grande proximité du Soleil.

*Cor.* 1. Les cométes brillent donc parce qu'elles réfléchiſſent la lumiére du Soleil.

*Cor.* 2. On doit voir par ce qui a été dit, pourquoi les cométes s'approchent ſi fort du Soleil. Si elles étoient vûes dans les régions beaucoup au-delà de Saturne, elles devroient paroître plus ſouvent dans les parties du ciel oppoſées au Soleil; & celles qui ſeroient placées dans ces parties du ciel ſeroient plus voiſines de la terre; & le Soleil étant interpoſé obſcurciroit les autres. Mais en parcourant l'hiſtoire des cométes, j'ai trouvé qu'on en a découvert quatre ou cinq fois plus dans l'hémiſphére qui eſt vers le Soleil que dans l'hémiſphére oppoſé, outre beaucoup d'autres qu'il n'eſt pas douteux que les rayons du Soleil n'ayent empêché d'être viſibles. Certainement lorſqu'elles deſcendent vers nos régions, elles n'ont point de queues & par conſéquent elles ne ſont point encore aſſez éclairées du Soleil pour qu'on puiſſe les appercevoir à la ſimple vûe, & l'on ne les apperçoit que lorſqu'elles ſont plus près de nous que Jupiter. La plus grande partie de l'eſpace qu'elles décrivent autour du

Soleil, lorsqu'elles en sont très-près, est du côté de la terre qui regarde le Soleil; & par conséquent les cométes étant alors plus près du Soleil, elles en sont plus éclairées.

*Cor.* 3. Il suit delà, que les espaces célestes sont dénués de toute résistance; car les cométes suivent des routes obliques & quelquefois contraires à celles des planettes, & elles se meuvent très-librement en tout sens, & conservent très-long-temps leurs mouvemens, même ceux qui se font contre l'ordre des signes.

Je me trompe beaucoup si les cométes ne sont pas des corps de même genre que les planettes, & si elles ne circulent pas perpétuellement dans un même orbe, car l'opinion de quelques-uns qui prétendent que ce sont des météores, étant fondée sur les changemens continuels qui arrivent à leur tête, tombe d'elle-même par tout ce qu'on vient de voir.

Les têtes des cométes sont environnées de très-grands atmosphéres, & ces atmosphéres doivent être plus denses en enbas. Ainsi les changemens qu'on apperçoit dans les cométes sont vûs dans les nuages de ces atmosphéres & non dans les corps mêmes des cométes. De même que la terre vue des planettes ne renverroit la lumiére que par les nuages qui l'environnent & la cachent, il est très-vraisemblable aussi que les bandes de Jupiter qui sont mobiles sur cet astre sont formées dans les nuées qui l'entourent & qui font que nous l'appercevons plus difficilement. Or les corps des cométes qui sont environnés de nuages plus profonds & plus denses doivent être bien plus difficiles à appercevoir.

## PROPOSITION XL. THÉORÉME XX.

*Les cométes se meuvent dans des sections coniques dont le foyer est dans le centre du Soleil, & elles décrivent autour de cet astre des aires proportionnelles au temps.*

Cette Proposition est claire par le Cor. 1. de la Prop. 13. Liv. 1. & par les Prop. 8. 12. & 13. de ce troisiéme Livre.

*Cor.* 1. Delà il suit, que si les cométes tournent dans des orbes, ces orbes ſont des ellipſes, & leurs temps périodiques doivent être aux temps périodiques des planettes en raiſon ſeſquiplée de leurs grands axes. Donc la plus grande partie des cométes faiſant leur révolution dans des orbes qui renferment ceux des planettes, & qui ſont par conſéquent plus grands que les leurs, elles doivent ſe mouvoir plus lentement qu'elles: enſorte que ſi l'axe de l'orbe d'une cométe eſt quatre fois plus grand que l'axe de l'orbe de Saturne, le temps de la révolution de la cométe ſera au temps de la révolution de Saturne, c'eſt-à-dire, à 30 ans, comme $4\sqrt{4}$ (ou 8) à 1, ainſi elle ſera de 240 ans.

*Cor.* 2. Les orbes des cométes approchent beaucoup de la parabole, enſorte même qu'on peut, ſans erreur ſenſible, les prendre pour des paraboles.

*Cor.* 3. Et par conſéquent (par le Cor. 7. de la Prop. 16 Liv. 1.) la vîteſſe de toute cométe ſera toujours, à peu près, à la vîteſſe d'une planette quelconque qui tourne dans un cercle autour du Soleil, en raiſon ſouſdoublée du double de la diſtance de la planette au centre du Soleil, à la diſtance de la cométe au même centre.

Suppoſons que le rayon du grand orbe, ou le demi grand diamétre de l'ellipſe dans laquelle la terre tourne ait 100000000 parties, & que la terre dans ſon mouvement médiocre diurne en parcoure 1720212 parties, & $71675\frac{1}{2}$ parties par heure, une cométe qui ſeroit à la même diſtance médiocre du Soleil que la terre, & qui auroit une vîteſſe qui ſeroit à celle de la terre comme $\sqrt{2}$ à 1, parcoureroit dans ſon mouvement diurne 2432747 parties, & $101364\frac{1}{2}$ parties par heure, & dans les plus grandes & les plus petites diſtances, le mouvement tant diurne qu'horaire ſera à ce mouvement diurne & horaire en raiſon ſouſdoublée des diſtances réciproquement, & par conſéquent il ſera donné.

*Cor.* 4. Donc, ſi le paramétre de la parabole eſt quadruple du rayon du grand orbe, & qu'on ſuppoſe que le quarré de ce rayon eſt de 100000000 parties, l'aire que la cométe décrira autour du Soleil sera chaque jour de $1216373\frac{1}{2}$ parties, & à chaque heure cette aire sera de $50682\frac{1}{4}$ parties, si le paramétre est plus ou moins grand dans une raison quelconque, l'aire diurne & horaire sera plus grande ou plus petite en la même raison sousdoublée.

## LEMME V.

*Trouver la ligne parabolique qui passe par un nombre quelconque de points donnés.*

Fig. 21. Soient ces points donnés $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, &c. & soient abaissées de ces points, à une droite quelconque $HN$ donnée de position, les perpendiculaires $AH$, $BI$, $CK$, $DL$, $EM$, $FN$.

Voir la démonstration de la formule du 1er cas dans ~~le~~ traité élémentaire de calcul diff. et intég. de Lacroix art. 349, 1ère édit. — 380. 4e édit. Celle du 2e cas se trouve à l'article 352. 1ère édit. art. 383 4e édit.

*Cas* 1. Si les intervalles $HI$, $IK$, $KL$, &c. des points $H$, $I$, $K$, $L$, $M$, $N$ sont égaux, rassemblez les premieres différences $b$, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. des perpendiculaires $AH$, $BI$, $CK$, &c. les secondes $c$, $2c$, $3c$, $4c$, &c. les troisiémes $d$, $2d$, $3d$, &c. c'est-à-dire, que $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $- EM + FN = 5b$, &c. qu'ensuite $b - 2b = c$ &c. & qu'on parvienne ainsi à la dernière différence supposée $f$, qu'on éleve enfin une perpendiculaire quelconque $RS$ laquelle soit une ordonnée à la courbe cherchée : on aura sa longueur de la maniére suivante, supposé que les intervalles $HI$, $IK$, $KL$, $LM$, &c. soient des unités, & que $AH = a$, $- HS = p$, $\frac{1}{2}p \times - IS = q$, $\frac{1}{3}q \times + SK = r$, $\frac{1}{4}r \times + SL = s$, $\frac{1}{5}s \times + SM = t$ ; & en continuant ainsi jusqu'à la pénultiéme perpendiculaire $ME$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | | $2b$ | | $3b$ | | $4b$ | | $5b$ |
| | $c$ | | $2c$ | | $3c$ | | $4c$ | |
| | | $d$ | | $2d$ | | $3d$ | | |
| | | | $e$ | | $2e$ | | | |
| | | | | $f$ | | | | |

Fig. 21.

*ME*, & mettant des signes négatifs aux termes *HS*, *IS*, &c. qui sont du côté de *A* par rapport à *S*, & des signes positifs aux termes *SK*, *SL*, &c. qui sont de l'autre côté du point *S*. Et en ayant attention de placer ces signes comme il convient, on aura $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

*Cas* 2. Si les intervalles *HI*, *IK*, &c. des points *H*, *I*, *K*, *L*, &c. sont inégaux, prenez les différences premieres $b$, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$ des perpendiculaires *AH*, *BI*, *CK*, &c. divisées par les intervalles de ces perpendiculaires, les secondes différences $c$, $2c$, $3c$, $4c$, &c. divisées par les seconds intervalles, les troisiémes $d$, $2d$, $3d$, &c. divisées par les troisiémes intervalles, les quatriémes $e$, $2e$, &c. divisées par les quatriémes intervalles, & ainsi de suite, c'est-à-dire, de sorte que $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. ensuite $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. & enfin $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Ayant trouvé ces différences, soient nommées $AH = a$, $-HS = p$, $p \times -IS = q$, $q \times + SK = r$, $r \times + SL = s$, $s \times + SM = t$, & ainsi de suite jusqu'à la pénultiéme perpendiculaire *ME*, l'ordonnée cherchée *RS* sera $= a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

*Cor.* On peut trouver par-là, à peu près, les aires de toutes les courbes; car si on a quelques points d'une courbe quelconque qu'on se propose de quarrer, & qu'on imagine une parabole menée par ces mêmes points: l'aire de cette parabole sera à peu près la même que celle de la courbe qu'on doit quarrer; or on a des méthodes très-connues par lesquelles on peut toujours quarrer géométriquement les paraboles.

DU SYSTEME DU MONDE.

du Soleil sera chaque jour de $1216373\frac{1}{2}$ parties, & à chaque heure cette aire sera de $50682\frac{1}{4}$ parties, si le paramétre est plus ou moins grand dans une raison quelconque, l'aire diurne & horaire sera plus grande ou plus petite en la même raison sousdoublée.

## LEMME V.

*Trouver la ligne parabolique qui passe par un nombre quelconque de points donnés.*

Fig. 21. Soient ces points donnés $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, &c. & soient abaissées de ces points, à une droite quelconque $HN$ donnée de position, les perpendiculaires $AH$, $BI$, $CK$, $DL$, $EM$, $FN$.

*Cas* 1. Si les intervalles $HI$, $IK$, $KL$, &c. des points $H$, $I$, $K$, $L$, $M$, $N$ sont égaux, rassemblez les premieres différences $b$, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$, &c. des perpendiculaires $AH$, $BI$, $CK$, &c. les secondes $c$, $2c$, $3c$, $4c$, &c. les troisiémes $d$, $2d$, $3d$, &c. c'est-à-dire, que $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $- EM + FN = 5b$, &c. qu'en-

$$\begin{array}{ccccccccc}
b & & 2b & & 3b & & 4b & & 5b \\
& c & & 2c & & 3c & & 4c & \\
& & d & & 2d & & 3d & & \\
& & & e & & 2e & & & \\
& & & & f & & & &
\end{array}$$

suite $b - 2b = c$ &c. & qu'on parvienne ainsi à la derniére différence supposée $f$, qu'on éleve enfin une perpendiculaire quelconque $RS$ laquelle soit une ordonnée à la courbe cherchée : on aura sa longueur de la maniére suivante, supposé que les intervalles $HI$, $IK$, $KL$, $LM$, &c. soient des unités, & que $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p \times -IS = q$, $\frac{1}{3}q \times +SK = r$, $\frac{1}{4}r \times +SL = s$, $\frac{1}{5}s \times +SM = t$ ; & en continuant ainsi jusqu'à la pénultiéme perpendiculaire

$ME$

*ME*, & mettant des signes négatifs aux termes *HS*, *IS*, &c. qui sont du côté de *A* par rapport à *S*, & des signes positifs aux termes *SK*, *SL*, &c. qui sont de l'autre côté du point *S*. Et en ayant attention de placer ces signes comme il convient, on aura $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

Fig. 21.

*Cas* 2. Si les intervalles *HI*, *IK*, &c. des points *H*, *I*, *K*, *L*, &c. sont inégaux, prenez les différences premieres $b$, $2b$, $3b$, $4b$, $5b$ des perpendiculaires *AH*, *BI*, *CK*, &c. divisées par les intervalles de ces perpendiculaires, les secondes différences $c$, $2c$, $3c$, $4c$, &c. divisées par les seconds intervalles, les troisiémes $d$, $2d$, $3d$, &c. divisées par les troisiémes intervalles, les quatriémes $e$, $2e$, &c. divisées par les quatriémes intervalles, & ainsi de suite, c'est-à-dire, de sorte que $b = \frac{AH - BI}{HI}$, $2b = \frac{BI - CK}{IK}$, $3b = \frac{CK - DL}{KL}$, &c. ensuite $c = \frac{b - 2b}{HK}$, $2c = \frac{2b - 3b}{IL}$, $3c = \frac{3b - 4b}{KM}$, &c. & enfin $d = \frac{c - 2c}{HL}$, $2d = \frac{2c - 3c}{IM}$, &c. Ayant trouvé ces différences, soient nommées $AH = a$, $-HS = p$, $p \times -IS = q$, $q \times + SK = r$, $r \times + SL = s$, $s \times + SM = t$, & ainsi de suite jusqu'à la pénultiéme perpendiculaire *ME*, l'ordonnée cherchée *RS* sera $= a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.

*Cor.* On peut trouver par-là, à peu près, les aires de toutes les courbes ; car si on a quelques points d'une courbe quelconque qu'on se propose de quarrer, & qu'on imagine une parabole menée par ces mêmes points : l'aire de cette parabole sera à peu près la même que celle de la courbe qu'on doit quarrer ; or on a des méthodes très-connues par lesquelles on peut toujours quarrer géométriquement les paraboles.

## LEMME VI.

Fig. 21. *Ayant observé quelques-uns des lieux d'une comète, trouver son lieu dans un temps quelconque intermédiaire donné.*

Que *HI*, *IK*, *KL*, *LM* représentent les temps qui se sont écoulés entre les observations; *HA*, *IB*, *KC*, *LD*, *ME* les cinq longitudes observées de la comète; *HS* le temps donné entre la premiere observation & la longitude cherchée; si on suppose une courbe réguliére *ABCDE* qui passe par les points *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, on trouvera par le Lemme précédent son ordonnée *RS*, & cette ligne sera la longitude cherchée.

Par la même méthode ayant observé cinq latitudes, on trouvera la latitude à un temps donné.

Si les différences des longitudes observées sont petites, comme de 4 ou 5 dégrés seulement; il suffira de 3 ou 4 observations pour trouver la latitude & la longitude nouvelle. Si les différences sont plus grandes, comme de 10 ou 20 dégrés; il faudra employer cinq observations.

## LEMME VII.

*Tirer par le point donné P une ligne droite BC, dont les parties PB, PC coupées par deux droites AB, AC, données de position, ayent l'une à l'autre une raison donnée.*

Fig. 22. Du point *P* soit menée une ligne droite *PD* à l'une de ces lignes comme *AB*, & soit prolongée cette ligne vers l'autre droite *AC* jusqu'en *E*, ensorte que *PE* soit à *PD* dans la raison donnée; soit tirée de plus *EC* parallele à *AD*; en menant *CPB*, on aura $PC : PB :: PE : PD$. *C. Q. F. F.*

## LEMME VIII.

Fig. 23. *Soit* ABC *une parabole dont le foyer soit* S, *que la corde* AC *coupée en deux au point* I *retranche le segment* ABCI, *dont le diamétre soit* I$\mu$ *& le sommet* $\mu$. *Soit pris sur* I$\mu$ *prolongée* $\mu$O *égale à la*

*moitié de* I$\mu$, *soit tirée* OS *que l'on prolonge en* $\xi$ *ensorte que* S$\xi$ *soit égale à* 2SO. *Si la comète* B *se meut dans l'arc* CBA *&* *qu'on tire* $\xi$B *qui coupe* AC *en* E: *le point* E *retranchera de la corde* AC *un segment* AE *à peu près proportionnel au temps.*

Fig. 23.

Car soit tiré $EO$ coupant l'arc parabolique $ABC$ en $Y$, & soit aussi tiré $\mu X$ qui touche le même arc à son sommet $\mu$, & qui rencontre $EO$ en $X$; l'aire curviligne $AEX\mu A$ sera à l'aire curviligne $ACY\mu A$ comme $AE$ à $AC$. Or comme le triangle $ASE$ est au triangle $ASC$ dans la même raison, l'aire totale $ASEX\mu A$ sera à l'aire totale $ASCY\mu A$ comme $AE$ à $AC$. Mais à cause que $\xi O$ est à $SO$ comme 3 à 1, & que $EO$ est à $XO$ dans la même raison, $SX$ sera parallele à $EB$: & par conséquent si on tire $BX$, le triangle $SBE$ sera égal au triangle $XEB$. Donc si à l'aire $ASEX\mu A$ on ajoute le triangle $EXB$, & que de cette somme on ôte le triangle $SEB$, il restera l'aire $ASBX\mu A$ égale à l'aire $ASEX\mu A$, & elle sera par conséquent à l'aire $ASCY\mu A$ comme $AE$ à $AC$. Mais l'aire $ASBY\mu A$ est égale, à peu près, à l'aire $ASBX\mu A$, & cette aire $ASBY\mu A$ est à l'aire $ASCY\mu A$ comme le temps employé à décrire l'arc $AB$ est au temps employé à décrire l'arc total $AC$: donc $AE$ sera à $AC$, à très-peu de choses près, dans la raison des temps. *C. Q. F. D.*

*Cor.* Lorsque le point $B$ devient le sommet $\mu$ de la parabole, $AE$ est exactement à $AC$ dans la raison des temps.

## *SCHOLIE.*

Si on tire $\mu\xi$ qui coupe $AC$ en $\delta$ & qu'on prenne dessus $\xi n$ qui soit à $\mu B$ comme 27 $MI$ à 16 $M\mu$: ayant tiré $Bn$ elle coupera la corde $AC$ dans la raison des temps plus exactement qu'auparavant. Le point $n$ doit tomber au-delà du point $\xi$ si le point $B$ est plus éloigné du sommet principal de la parabole que le point $\mu$ & il doit tomber au contraire en-deça si le point $B$ est moins éloigné de ce même sommet.

Fig. 24.

## LEMME IX.

*Les droites* $I\mu$, $\mu M$ & $\frac{AI \times IC}{4 S\mu}$ *sont égales entr'elles.*

Car $4 S\mu$ est le paramétre de la parabole pour le sommet $\mu$.

## LEMME X.

*Si on prolonge* $S\mu$ *jusqu'en* N *& en* P, *ensorte que* $\mu N$ *soit la troisiéme partie de* $I\mu$, *& que* $SP : SN :: SN : S\mu$, $SP$ *sera la hauteur à laquelle la cométe auroit une vîtesse capable de lui faire parcourir un arc égal à la corde* AC *dans un temps égal à celui qu'elle employe à parcourir l'arc* $A\mu C$.

Car si cette cométe dans le même temps avançoit uniformément dans la ligne droite qui touche la parabole en $\mu$, avec la vîtesse qu'elle a en $\mu$ ; l'aire qu'elle décriroit autour du point $S$ seroit égale à l'aire parabolique $ASC\mu$. Ainsi le produit de la partie de la tangente qu'elle décriroit alors & de la droite $S\mu$, seroit au produit de $AC$ par $SM$, comme l'aire $ASC\mu$ au triangle $ASC$, c'est-à-dire, comme $SN$ à $SM$. C'est pourquoi $AC$ est à la partie de la tangente qui a été décrite, comme $S\mu$ à $SN$. Or comme la vîtesse de la cométe à la hauteur $SP$ est (par le Cor. 6. de la Prop. 16. Liv. 1.) à sa vîtesse à la hauteur $S\mu$, en raison sousdoublée inverse de $SP$ à $S\mu$, c'est-à-dire, en raison de $S\mu$ à $SN$; la droite décrite avec cette vîtesse dans le même temps sera à la partie de la tangente qui a été décrite, comme $S\mu$ à $SN$. Donc $AC$ & la droite décrite avec cette nouvelle vîtesse étant à la longueur décrite sur la tangente dans cette même raison, elles sont égales entr'elles. *C. Q. F. D.*

*Cor.* Donc la cométe avec la vîtesse qu'elle a à la hauteur $S\mu + \frac{2}{3} I\mu$ décriroit dans le même temps la corde $AC$ à peu près.

## LEMME XI.

Fig. 24.

*Si une cométe privée de tout mouvement tombe vers le Soleil de la hauteur* SN *ou* $S\mu + \frac{1}{3} I\mu$, *& que la force qui la pousse dans le commencement de cette chute soit conservée la même pendant tout le temps qu'elle tombe ; elle décrira en descendant un espace égal à la droite* $I\mu$ *dans la moitié du temps dans lequel elle auroit parcouru dans son orbe l'arc* AC.

Car la cométe, dans le temps pendant lequel elle décrit l'arc parabolique *AC*, décriroit dans le même temps la corde *AC* avec la vîtesse qu'elle avoit à la hauteur *SP* ( par le dernier Lemme ) : ainsi ( par le Cor. 7. de la Prop. 16. Liv. 1. ) en faisant dans le même temps, par la force de sa gravité, sa révolution dans un cercle dont le demi diamétre seroit *SP*, elle décriroit un arc dont la longueur seroit à la corde *AC* de l'arc parabolique en raison sousdoublée de 1 à 2. Et par conséquent tombant vers le Soleil de la hauteur *SP* avec la même force avec laquelle elle pesoit sur le Soleil à cette même hauteur, elle parcoureroit dans la moitié de ce temps ( par le Cor. 9. de la Prop. 4. du Liv. 1. ) un espace égal au quarré de la moitié de cette corde divisé par le quadruple de la hauteur *SP*, c'est-à-dire, l'espace $\frac{AI^2}{4SP}$. Ainsi comme le poids de la cométe sur le Soleil à la hauteur *SN* est à son poids sur le Soleil à la hauteur *SP* dans la raison de *SP* à $S\mu$, la cométe, par le poids qu'elle a à la hauteur *SN*, décrira, en tombant vers le Soleil dans le même temps, un espace $\frac{AI^2}{4S\mu}$, c'est-à-dire, un espace égal à $I\mu$ ou à $\mu M$. *C. Q. F. D.*

## PROPOSITION XLI. PROBLÉME XXI.

*Déterminer par trois observations données la trajectoire d'une cométe dans une parabole.*

J'ai tenté de beaucoup de maniéres la solution de ce Probléme

DU SYSTEME DU MONDE.

qui eſt très-difficile ; pour y parvenir j'avois réſolu les Problêmes du premier Livre qui y ont rapport. Mais enſuite je ſuis parvenu à la ſolution que je vais donner, laquelle eſt un peu plus ſimple.

Soient choiſies trois obſervations dont les intervalles de temps ſoient les plus égaux qu'il eſt poſſible ; & que cependant l'intervalle du temps où la cométe ſe meut plus lentement ſoit un peu plus grand que l'autre, enſorte, par exemple, que la différence de ces temps ſoit à leur ſomme comme leur ſomme à 600 jours plus ou moins : ou que le point *E* tombe à peu près ſur le point *M*, & que de-là il ſe détourne plus vers *I* que vers *A*. Si on n'a pas de telles obſervations, il faudra trouver un nouveau lieu de la cométe par le Lemme 6. Fig. 23.

Fig. 25. Que *S* déſigne le Soleil ; *T*, *t*, *τ* trois lieux de la terre dans ſon grand orbe ; *TA*, *tB*, *τC* trois longitudes obſervées de la cométe ; *V* le temps écoulé entre la premiere & la ſeconde obſervation ; *W* le temps écoulé entre la ſeconde & la troiſiéme ; & *X* la droite que la cométe peut parcourir pendant tout ce temps avec la vîteſſe qu'elle a dans la moienne diſtance de la terre au Soleil, laquelle on trouvera (par le Cor. 3. de la Prop. 40. Liv. 3.) & que *tV* ſoit perpendiculaire ſur la corde *Tτ*.

Dans la longitude moienne obſervée *tB*, ſoit pris un point quelconque *B* pour le lieu de la cométe dans le plan de l'écliptique, & ſoit tirée enſuite vers le Soleil *S* la ligne *BE* qui ſoit à la fléche *tV* comme $SB \times St^2$ eſt au cube de l'hypothénuſe du triangle rectangle dont les côtés ſont *BS* & la tangente de la latitude de la cométe dans la ſeconde obſervation pour le rayon *tB*. Par le point *E* ſoit menée (par le Lemme 7. du Liv. 3.) la droite *ACE* dont les parties *AE*, *EC* terminées par les droites *TA* & *τC* ſoient l'une à l'autre comme les temps *V* & *W* : *A* & *C* ſeront, à peu près, les lieux de la cométe dans le plan de l'écliptique pour la premiere & la troiſiéme obſervation, pourvu que *B*, qui eſt ſuppoſé ſon lieu dans la ſeconde obſervation, ait été pris exactement.

Fig. 25.

Elevez la perpendiculaire $Ii$ fur $AC$ partagée en deux également au point $I$. Par le point $B$ tirez, par penſée, $Bi$ parallele à $AC$, tirez, mentalement, $Si$ qui coupe $AC$ en $\lambda$, & achevez le parallélograme $iI\lambda\mu$. Prenez $I\sigma$ égale à $3\,I\lambda$, & tirez, mentalement, par le Soleil $S$, $\sigma\xi$ égale à $3\,S\sigma + 3\,i\lambda$; & effaçant les lettres $A, E, C, I$, menez, par penſée, $BE$, du point $B$ vers le point $\xi$, laquelle ligne ſoit à la premiere $BE$ en raiſon doublée de la diſtance $BS$ à la quantité $S\mu + \frac{1}{3}\,i\lambda$; & par le point $E$ tirez de nouveau la droite $AEC$ en ſuivant le même procédé qu'auparavant, c'eſt-à-dire, enſorte que ſes parties $AE$, & $EC$ ſoient l'une à l'autre, comme les temps écoulés entre les obſervations $V$ & $W$; $A$ & $C$ ſeront les lieux de la cométe plus exactement.

Soient élevées $AM$, $CN$, $IO$ perpendiculaires ſur la ligne $AC$ partagée en deux parties égales au point $I$. $AM$, $CN$ ſont les tan gentes des latitudes dans la premiere & la troiſiéme obſervation pour les rayons $TA$ & $\tau C$. Soit tirée enſuite $MN$ qui coupe la ligne $IO$ en $O$, & ſoit fait le rectangle $iI\lambda\mu$ comme ci-devant; ſur $IA$ prolongée, ſoit priſe $ID$ égale à $S\mu + \frac{2}{3}\,i\lambda$. Enſuite ſoit priſe, ſur $MN$ vers $N$, la ligne $MP$, laquelle ſoit à la droite $X$ ci-devant trouvée, en raiſon ſouſdoublée de la moienne diſtance de la terre au Soleil (ou du demi diamétre du grand orbe) à la diſtance $OD$. Si le point $P$ tombe ſur le point $N$; les points $A$, $B$, $C$ ſeront les trois lieux de la cométe par leſquels ſon orbe doit être décrit dans le plan de l'écliptique. Si le point $P$ ne tombe pas ſur le point $N$; il faut prendre ſur la ligne $AC$, $CG$ égale à $NP$, enſorte que les points $G$ & $P$ ſoient vers les mêmes parties de la droite $NC$.

Par la même méthode qu'on a trouvé les points $E$, $A$, $C$, $G$, en ſe ſervant du point $B$; on trouvera de nouveaux points $e$, $a$, $c$, $g$, & $\epsilon$, $\alpha$, $\kappa$, $\gamma$, en ſe ſervant d'autres points quelconques $b$ & $\beta$. Enſuite, ſi par $G$, $g$, $\gamma$, on fait paſſer la circonférence d'un cercle $Gg\gamma$ qui coupe la ligne $\tau C$ en $Z$: le point $Z$ ſera un lieu de la cométe dans le plan de l'écliptique. Et ſi

Fig. 25.

on prend ſur $AC$, $ac$ & $\alpha\varkappa$ les droites $AF$, $af$ & $\alpha\varphi$ égales reſpectivement à $CG$, $cg$ & $\varkappa\gamma$, & qu'on faſſe paſſer la circonférence d'un cercle $Ff\varphi$ par les points $F$, $f$, $\varphi$, & que cette circonférence coupe la ligne $AT$ en $X$; le point $X$ ſera un autre lieu de la cométe dans le plan de l'écliptique. Enſuite élevant aux points $X$ & $Z$ les tangentes des latitudes de la cométe pour les rayons $TX$ & $TZ$, on aura deux lieux de la cométe dans ſa propre orbite. Enfin, (par la Prop. 19. Liv. 1.) faiſant paſſer par ces deux lieux une parabole dont le foyer ſoit $S$, elle ſera la trajectoire de la cométe. *C. Q. F. T.*

La démonſtration de cette conſtruction ſuit des Lemmes précédens: car puiſque (par le Lemme 7.) la droite $AC$ a été coupée en $E$, dans la raiſon des temps, comme l'éxige le Lemme 8. & que $BE$ (par le Lemme 11.) eſt la partie de la ligne $BS$ ou $B\xi$ dans le plan de l'écliptique, compriſe entre l'arc $ABC$ & la corde $AEC$, & qu'enfin $MP$ eſt (par le Cor. du Lemme 10.) la longueur de la corde de l'arc que la cométe doit parcourir dans ſa propre orbite entre la premiere & la troiſiéme obſervation, elle ſera par conſéquent égale à $MN$, pourvu que $B$ ſoit le vrai lieu de la cométe ſous le plan de l'écliptique.

Au reſte, il ne faut pas prendre les points $B$, $b$ & $\beta$ à volonté, mais il faut les choiſir près l'un de l'autre. Si on connoît à peu prés l'angle $AQt$ ſous lequel la projection de l'orbe décrit dans le plan de l'écliptique coupe la ligne $Bt$; il faut mener dans cet angle l'occulte $AC$ qui ſoit à $\frac{4}{3}T\tau$ en raiſon ſouſdoublée de $SQ$ à $St$. Et tirant la droite $SEB$ dont la partie $EB$ égale la droite $Vt$, on déterminera le point $B$ qu'il faut prendre pour le premier. Enſuite effaçant la ligne $AC$, & la tirant de nouveau ſelon la conſtruction précédente, & trouvant de plus la droite $MP$; on prendra le point $b$ ſur $tB$, enſorte que ($Y$ étant l'interſection de $TA$, $\tau C$) la diſtance $Yb$ ſoit à la diſtance $YB$ en raiſon compoſée de la raiſon ſouſdoublée de $SB$ à $Sb$ & de la raiſon ſimple de $MP$ à $MN$. De la même maniére, on trouvera le troiſiéme

siéme point *β* si on veut répéter l'opération une troisiéme fois ; mais par cette méthode deux opérations seront plus que suffisantes ; car si la distance *Bb* étoit très-petite, après que les points *F*, *f* & *G*, *g* seront trouvés, les droites *Ff*, *Gg* qu'on tirera, couperont *AT* & *τC* dans les points cherchés *X* & *Z*.

## EXEMPLE.

Soit proposée la cométe de 1680. Son mouvement calculé d'après les observations de *Flamsted*, & corrigé par *Halley* sur les mêmes observations, est exposé dans la table suivante.

| | *Temps apparent.* | *Temps vrai.* | *Longitude du Soleil.* | *Longitude* de la Cométe. | *Latitude boréale.* de la Cométe. |
|---|---|---|---|---|---|
| | h ′ | h ′ ″ | d ′ ″ | d ′ ″ | d ′ ″ |
| 1680. *Déc.* 12 | 4.46 | 4.46. 0 | ♑ 1.51.23 | ♑ 6.32.30 | 8.28. 0 |
| 21 | 6.32½ | 6.36.59 | 11. 6.44 | ♒ 5. 8.12 | 21.42.13 |
| 24 | 6.12 | 6.17.52 | 14. 9.26 | 18.49.23 | 25.23. 5 |
| 26 | 5.14 | 5.20.44 | 16. 9.22 | 28.24.13 | 27. 0.52 |
| 29 | 7.55 | 8. 3. 2 | 19.19.43 | ♓ 13.10.41 | 28. 9.58 |
| 30 | 8. 2 | 8.10.26 | 2.201. 9 | 17.38.20 | 28.11.53 |
| 1681. *Janv.* 5 | 5.51 | 6. 1.38 | 26.22.18 | ♈ 8.48.53 | 26.15. 7 |
| 9 | 6.49 | 7. 0.53 | ♒ 0.29. 2 | 18.44. 4 | 24.11.56 |
| 10 | 5.54 | 6. 6.10 | 1.27.43 | 20.40.50 | 23.43.52 |
| 13 | 6.56 | 7. 8.55 | 4.33.20 | 25.59.48 | 22.17.28 |
| 25 | 7.44 | 7.58.42 | 16.45.36 | ♉ 9.35. 0 | 17.56.30 |
| 30 | 8. 7 | 8.21.53 | 21.49.58 | 13.19.51 | 16.42.18 |
| *Fev.* 2 | 6.20 | 6.34.51 | 24.46.59 | 15.13.53 | 16. 4. 1 |
| 5 | 6.50 | 7. 4.41 | 27.49.51 | 16.59. 6 | 15.27. 3 |

Ajoutez à ces obſervations quelques-unes que j'ai faites moi-même.

| | *Temps de l'apparition.* | *Longitude de la Comète.* | *Latitude boréale de la Comète.* |
|---|---|---|---|
| | h ′ | d ′ ″ | d ′ ″ |
| 1681. *Février.* 25 | 8 . 30 | ♉ 26 . 18 . 35 | 12 . 46 . 46 |
| 27 | 8 . 15 | 27 . 4 . 30 | 12 . 36 . 12 |
| *Mars.* 1 | 11 . 0 | 27 . 52 . 42 | 12 . 23 . 40 |
| 2 | 8 . 0 | 28 . 12 . 48 | 12 . 19 . 38 |
| 5 | 11 . 30 | 29 . 18 . 0 | 12 . 3 . 16 |
| 7 | 9 . 30 | ♓ 0 . 4 . 0 | 11 . 57 . 0 |
| 9 | 8 . 30 | 0 . 43 . 4 | 11 . 45 . 52 |

Ces obſervations ont été faites avec un téleſcope de ſept pieds & un micrométre dont les fils étoient placés dans le foyer du téleſcope : & c'eſt avec ces inſtrumens que nous avons déterminé les poſitions des fixes entre elles, & les poſitions de la cométe par rapport aux fixes. Que $A$ repréſente l'étoile de la quatriéme grandeur dans le talon gauche de Perſée ( marquée o dans *Bayer* ) $B$ l'étoile ſuivante de la troiſiéme grandeur dans ſon pied gauche ( marquée $\zeta$ dans *Bayer* ) & $C$ l'étoile de la ſixiéme grandeur dans le talon du même pied ( marquée $n$ dans *Bayer* ) & $D$, $E$, $F$, $G$, $H$, $I$, $K$, $L$, $M$, $N$, $O$, $Z$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, d'autres étoiles plus petites du même pied : que $p$, $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$, $V$, $X$ ſoient les lieux de la cométe dans les obſervations ci-deſſus décrites ; la diſtance $AB$ étant de $80\frac{7}{12}$ parties, $AC$ étoit de $52\frac{1}{4}$, $BC$ en avoit $58\frac{5}{6}$, $AD$ $57\frac{5}{12}$, $BD$ $82\frac{6}{11}$, $CD$ $23\frac{2}{3}$, $AE$ $29\frac{4}{7}$, $CE$ $57\frac{1}{2}$, $DE$ $49\frac{11}{12}$, $AI$ $27\frac{7}{12}$, $BI$ $52\frac{1}{6}$, $CI$ $36\frac{7}{12}$, $DI$ $53\frac{5}{11}$, $AK$ $38\frac{2}{3}$, $BK$ 43, $CK$ $31\frac{5}{9}$, $FK$ 29, $FB$ 23, $FC$ $36\frac{1}{4}$, $AH$ $18\frac{6}{7}$, $DH$ $50\frac{7}{8}$, $BN$ $46\frac{5}{12}$, $CN$ $31\frac{1}{3}$, $BL$ $45\frac{5}{12}$, $NL$ $31\frac{5}{7}$ : & $HO$ étoit à $HI$ comme 7 à 6, & étant prolongée elle paſſoit entre les étoiles $D$ & $E$, enſorte que la diſtance de l'étoile $D$ à cette ligne étoit de $\frac{1}{6}CD$ : &

Fig. 26.

*L M* étoit à *L N* comme 2 à 9, & étant prolongée elle passoit par l'étoile *H*. Par là les positions des fixes entr'elles étoient déterminées. Fig. 26.

Enfin *Pound* notre compatriote, observa de nouveau la position de ces fixes entr'elles, & il a donné la table suivante de leurs longitudes & de leurs latitudes.

| *Fixes.* | *Longitudes.* | | | *Latitudes boréales.* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | d | ' | '' | d | ' | '' |
| A | ♉ 26 | 41 | 50 | 12 | 8 | 36 |
| B | 28 | 40 | 23 | 11 | 17 | 54 |
| C | 27 | 58 | 30 | 12 | 40 | 25 |
| E | 26 | 27 | 17 | 12 | 52 | 7 |
| F | 28 | 28 | 37 | 11 | 52 | 22 |
| G | 26 | 56 | 8 | 12 | 4 | 58 |
| H | 27 | 11 | 45 | 12 | 2 | 1 |
| I | 27 | 25 | 2 | 11 | 53 | 11 |
| K | 27 | 42 | 7 | 11 | 53 | 26 |
| L | ♉ 29 | 33 | 34 | 12 | 7 | 48 |
| M | 29 | 18 | 54 | 12 | 7 | 20 |
| N | 28 | 48 | 29 | 12 | 31 | 9 |
| Z | 29 | 44 | 48 | 11 | 57 | 13 |
| α | 29 | 52 | 3 | 11 | 55 | 48 |
| β | ♊ 0 | 8 | 23 | 11 | 48 | 56 |
| γ | 0 | 40 | 10 | 11 | 55 | 18 |
| δ | 1 | 3 | 20 | 11 | 30 | 42 |

J'observai donc les positions de la cométe à ces étoiles de la maniére suivante.

Le Vendredy 25 *Février* v. st. à 8$^{h}\frac{1}{2}$ après mid. la cométe étant en *p*, sa distance à l'étoile *E*, étoit moindre que $\frac{3}{13}$ *A E*, & plus grande que $\frac{1}{5}$ *A E*; ainsi elle étoit à peu près égale à $\frac{3}{14}$ *A E*; & l'angle *A p E* n'étoit presque pas obtus, mais approchoit beaucoup d'être droit; ensorte qu'en tirant du point *A* une perpendiculaire sur *p E*, la distance de la cométe à cette perpendiculaire étoit de $\frac{1}{5}$ *p E*.

La même nuit à 9$^{h}\frac{1}{2}$, la cométe étant en *P*, sa distance à l'étoile $E$ étoit plus grande que $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ $AE$, & plus petite que $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ $AE$, ainsi elle étoit à peu près égale à $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ ou $\frac{8}{39}$ $AE$. Et la cométe étoit éloignée de la perpendiculaire tirée de l'étoile $A$ à la ligne $PE$ de $\frac{4}{5}$ $PE$.

Fig. 16.

Le Dimanche 27 *Février* à 8 $^{h}$ $\frac{1}{4}$ après midi, la cométe étant en $Q$, sa distance à l'étoile $O$ étoit égale à la distance des étoiles $O$ & $H$, & la ligne $QO$, prolongée, passoit entre les étoiles $K$ & $B$; je ne pus pas déterminer plus exactement la position de cette ligne à cause des nuages qui survinrent.

Le Mardy premier *Mars* à 11 $^{h}$ après midi, la cométe étant en $R$, elle étoit éxactement entre les étoiles $K$ & $C$, & la partie $CR$ de la ligne $CRK$ étoit un peu plus grande que $\frac{1}{3}$ $CK$, & un peu plus petite que $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{8} CR$, ainsi elle étoit égale à $\frac{1}{3} CK + \frac{1}{16} CR$, ou à $\frac{16}{45} CK$.

Le Mercredy 2 *Mars* à 8 $^{h}$ après midi, la cométe étant en $S$, sa distance à l'étoile $C$ étoit à peu près de $\frac{4}{9}$ $FC$, la distance de l'étoile $F$ à la droite $CS$, prolongée, étoit de $\frac{1}{24}$ $FC$; & la distance de l'étoile $B$ à la même ligne étoit 5 fois plus grande que la distance de l'étoile $F$. De plus, la ligne $NS$ prolongée passoit entre les étoiles $H$ & $I$ cinq ou six fois plus près de l'étoile $H$ que de l'étoile $I$.

Le Samedy 5 *Mars* à 11 $^{h}$ $\frac{1}{2}$ après midi, la cométe étant en $T$, la ligne $MT$ étoit égale à $\frac{1}{2}$ $ML$, & la ligne $LT$ prolongée passoit entre $B$ & $F$ quatre ou cinq fois plus près de $F$ que de $B$, en retranchant de $BF$, sa cinquiéme ou sa sixiéme partie vers $F$. Et $MT$ prolongée passoit au-delà de l'espace $BF$ du côté de l'étoile $B$, quatre fois plus prés de l'étoile $B$ que de l'étoile $F$. $M$ étoit une des plus petites étoiles qu'on pût à peine appercevoir par le télescope, & $L$ une étoile un peu plus grande & presque de la huitiéme grandeur.

Fig. 26.

Le Lundy 7 *Mars* à $9^{h}\frac{1}{2}$ après midi, la cométe étant en $V$, la ligne $V\alpha$ prolongée passoit entre $B$ & $F$, & elle retranchoit de $BF$ vers $F$ $\frac{1}{10}$ $BF$, elle étoit à la ligne $V\beta$ comme 5 à 4; & la distance de la cométe à la ligne $\alpha\beta$ étoit $\frac{1}{2}$ $V\beta$.

Le Mercredy 9 *Mars* à $8^{h}\frac{1}{2}$ après midi, la cométe étant en $X$, la droite $\gamma X$ étoit égale à $\frac{1}{4}\gamma\delta$, & la perpendiculaire tirée de l'étoile $\delta$ à la ligne $\gamma X$ étoit de $\frac{2}{5}\gamma\delta$.

La même nuit à 12 heures, la cométe étant en $Y$, la ligne $\gamma Y$ étoit égale à $\frac{1}{3}\gamma\delta$ ou un peu plus petite, comme $\frac{5}{16}\gamma\delta$, & la perpendiculaire abbaissée de l'étoile $\delta$ à la ligne $\gamma Y$ étoit égale à $\frac{1}{6}$ ou à $\frac{1}{7}\gamma\delta$ environ. Mais la cométe pouvoit à peine être vue, parce qu'elle étoit très-près de l'horison, & on ne pouvoit pas déterminer son lieu avec autant de précision que dans les observations précédentes.

Par ces observations, par la construction des figures, & par les calculs, je déterminai les longitudes & les latitudes de la cométe, & *Pound* corrigea ses lieux sur les lieux corrigés des fixes, & j'ai donné ci-dessus ces lieux corrigés.

Je me servis d'un micrométre assez grossiérement construit, cependant les erreurs des longitudes & des latitudes ( en tant qu'elles peuvent venir de mes observations ) surpassent à peine une minute. Au reste, la cométe ( selon mes observations ) commença à la fin de son mouvement à s'éloigner considérablement vers le Nord du parallele qu'elle avoit décrit à la fin de *Février*.

Pour determiner ensuite l'orbe de la cométe, je choisis trois des observations de *Flamsted* décrites ci-dessus, celles du 21 *Décembre*, du 5 & du 25 *Janvier*, & j'ai trouvé par ces observations, que $St$ avoit 9842, 1 parties, que $Vt$ en avoit 455, en supposant que le demi diamétre du grand orbe en eût 10000.

Dans la premiére opération prenant $tB$ de 5657 parties, je trouvai $SB$ de 9747, $BE$ pour la premiére fois étoit de 412, $S\mu$ de 9503, & $i\lambda$ de 413. $BE$ la seconde fois en avoit 421, $OD$ 10186, $X$ 8528, 4 $MP$ 8450, $MN$ 8475, & $NP$ 25,

DU SYSTEME DU MONDE.

d'où j'ai conclu la diſtance $tb$ de 5640 pour la ſeconde opération. Et par cette opération j'ai trouvé enfin la diſtance $TX$ de 4775, & la diſtance $\tau Z$ de 11322. Par le moyen de ces diſtances j'ai trouvé, en déterminant l'orbe, le nœud deſcendant dans ♋ $1^d\ 53'$ & le nœud aſcendant dans ♑ $1^d\ 53'$. L'inclinaiſon du plan de cet orbe au plan de l'écliptique étoit de $61^d\ 20'\frac{1}{3}$; ſon ſommet, ou le périhélie de la cométe, étoit éloigné du nœud de $8^d\ 38'$, & il étoit dans ♐ $27^d\ 43'$, ayant une latitude auſtrale de $7^d\ 34'$; & ſon paramétre étoit de 236, 8 parties, & l'aire qu'elle décrivoit chaque jour autour du Soleil en avoit 93585, ſuppoſé que le quarré du demi diamétre du grand orbe fut de 100000000.

Fig. 26.

La cométe avançoit dans cet orbe ſelon l'ordre des ſignes, & le 8 *Décembre* à $0^h\ 4'$. après midi elle étoit dans le ſommet de ſon orbite ou dans ſon périhélie, toutes ces déterminations ont été faites graphiquement avec une échelle de parties égales, & les cordes des angles ont été priſes d'après la table des ſinus naturels; & en faiſant une grande figure dans laquelle le demi diamétre du grand orbe (qu'on ſuppoſe avoir 10000 parties) étoit de 16 pouces anglais & un tiers.

Enfin, pour ſçavoir ſi la cométe parcouroit effectivement l'orbe ainſi trouvé, je déterminai par des opérations partie arithmétiques & partie graphiques les lieux de la cométe dans cet orbe pour le temps de quelques-unes des obſervations; comme on le verra dans la table ſuivante.

| | *Diſtances de la Cométe au Sol.* | *Longitudes concluës.* | *Latitudes concluës.* | *Longitudes obſervées.* | *Latitudes obſervées.* | *Diff. des Longit.* | *Différence des Latitudes.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | d ′ | d ′ | d ′ | d ′ | ′ | ′ |
| *Déc.* 12 | 2792 | ♑ 6.32 | $8.18\frac{1}{2}$ | ♑ $6.31\frac{1}{3}$ | 8.26 | +1 | $-7\frac{1}{2}$ |
| 29 | 8403 | ♓ $13.13\frac{2}{3}$ | 28. 0 | ♓ $13.11\frac{3}{4}$ | $28.10\frac{1}{12}$ | +2 | $-10\frac{1}{12}$ |
| *Févr.* 5 | 16669 | ♉ 17. 0 | $15.29\frac{2}{3}$ | ♉ $16.59\frac{7}{8}$ | $15.27\frac{2}{5}$ | +0 | $+2\frac{1}{4}$ |
| *Mars.* 5 | 21737 | $29.19\frac{3}{4}$ | 12. 4 | $29.20\frac{6}{7}$ | $12.3\frac{1}{2}$ | −1 | $+\frac{1}{2}$ |

*Halley* a déterminé cette orbite depuis plus exactement par le calcul arithmétique qu'on ne le peut faire graphiquement ; & il a trouvé comme nous le lieu des nœuds dans ♋ $1^d\ 53'$ & ♑ $1^d\ 53'$, & l'inclinaison du plan de l'orbite au plan de l'écliptique de $61^d\ 20'\frac{1}{3}$. ainsi que le temps du périhélie de la cométe le 8 *Décembre* $0^h\ 4'$. Mais ayant mesuré la distance du périhélie au nœud ascendant dans l'orbite de la cométe, il la trouva de $9^d\ 20'$. Le paramétre de la parabole étant de 2430 parties, la médiocre distance du Soleil à la terre en ayant 100000. Et employant ces élémens, il a déterminé de même par un calcul arithmétique éxact, les lieux de la cométe aux temps des observations, comme il suit.

| *Temps vrai.* | | *Distance de la Cométe au Soleil.* | *Longitudes comptées.* | *Latitudes comptées.* | *Erreurs en Longitudes.* | *Erreurs en Latitudes.* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Jours.* | h | | d ′ ″ | d ′ ″ | ′ ″ | ′ ″ |
| *Déc.* 12. | 4.46 | 28028 | ♑ 6.29.25 | 8.26. 0 Bor. | −3. 5 | −2. 0 |
| 21. | 6.37 | 61076 | ♒ 5. 6.30 | 21.43.20 | −1.42 | +1. 7 |
| 24. | 6.18 | 70008 | 18.48.20 | 25.22.40 | −1. 3 | −0.25 |
| 26. | 5.21 | 75576 | 28.22.45 | 27. 1.36 | −1.28 | +0.44 |
| 29. | 8. 3 | 14021 | ♓ 13.12.40 | 28.10.10 | +1.59 | +0.12 |
| 30. | 8.10 | 86661 | 17.40. 5 | 28.11.20 | +1.45 | −0.33 |
| *Janv.* 5. | 6. 1½ | 101440 | ♈ 8.49.49 | 26.15.15 | +0.56 | +0. 8 |
| 9. | 7. 0 | 110959 | 18.44.36 | 24.12.54 | +0.32 | +0.58 |
| 10. | 6. 6 | 113162 | 20.41. 0 | 23.44.10 | +0.10 | +0.18 |
| 13. | 7. 9 | 120000 | 26. 0.21 | 22.17.30 | +0.33 | +0. 2 |
| 25. | 7.59 | 145370 | ♉ 9.33.40 | 17.57.55 | −1.20 | +1.25 |
| 30. | 8.22 | 155303 | 13.17.41 | 16.42. 7 | −2.10 | −0.11 |
| *Févr.* 2. | 6.35 | 160951 | 15.11.11 | 16. 4.15 | −2.42 | +0.14 |
| 5. | 7. 4½ | 166686 | 16.58.25 | 15.29.13 | −0.41 | +2.10 |
| 25. | 8.41 | 202570 | 26.15.46 | 12.48. 0 | −2.49 | +1:14 |
| *Mars.* 5. | 11.39 | 216205 | 29.18.35 | 12. 5.40 | +0.35 | +2.24 |

Cette cométe avoit déja paru dès le mois de *Novembre* précédent, & elle fut observée à *Coburg* en *Saxe*, par M. *Gottfried Kirch*, le 4, le 6, & le 11 du même mois v. ſt. & de ſes poſitions par rapport aux plus prochaines étoiles fixes, obſervées aſſez exactement, tantôt avec un téleſcope de deux pieds, & tantôt avec un de dix pieds (les lieux des étoiles fixes étant ceux que *Pound* avoit déterminés, & la différence en longitudes de *Coburg* & de *Londres*, étant de 11 degrés) *Halley* a déterminé les lieux de cette cométe en cette maniére.

Le 3 *Novembre* à $17^h\ 2'$ du temps apparent à *Londres*, la cométe étoit dans le $29^d\ 51'$ du Lion, & avoit $1^d\ 17'\ 45''$ de latitude boréale.

Le 5 *Novembre* à $15^h\ 58'$ la cométe étoit dans le $3^d\ 23'$ de la Vierge ayant $1^d\ 6'$ de latitude boréale.

Le 10 *Novembre* à $16^h\ 31'$ la cométe étoit également éloignée des étoiles du Lion marquées $\sigma$ & $\tau$ dans *Bayer*; & cependant elle ne parvint jamais à la ligne qui les joint, mais elle s'en éloignoit peu.

Dans le catalogue des étoiles de *Flamſted*, l'étoile $\sigma$ avoit alors pour longitude $14^d\ 15'$ ♍, & $1^d\ 41'$ à peu près de latitude boréale, & $\tau$ étoit dans le $17^d\ 3'\frac{1}{2}$ ♍, & avoit $0^d\ 34'$ de latitude auſtrale, & le point milieu entre ces étoiles étoit le $15^d\ 39'\frac{1}{4}$ ♍ avec $0^d\ 33'\frac{1}{2}$ de latitude boréale.

Soit la diſtance de la cométe à cette ligne de $10'$ ou $12'$ environ, la différence des longitudes de la cométe & de ce point milieu ſera de $7'$ & celle des latitudes de $7'\frac{1}{2}$ environ; partant, la cométe étoit dans le $15^d\ 32'$ ♍ avec une latitude boréale de $26'$ environ.

La premiere obſervation de la poſition de la cométe par rapport à quelques petites étoiles fixes, fut faite aſſez éxactement ainſi que la ſeconde. Dans la troiſiéme qui fut moins éxacte, l'erreur pût être de 6 à 7 minutes, ou de très-peu de choſe plus grande, & la longitude de la cométe, dans la premiere obſervation qui fut la plus éxacte de toutes, étant calculée dans l'orbe l'orbe parabolique dont on a parlé, étoit de ♌ 29 d 30′ 22″, sa latitude boréale de 1 d 25′ 7″, & sa distance au Soleil de 115546 parties.

De plus, *Halley* ayant remarqué qu'il avoit paru quatre grandes cométes à 575 ans d'intervalle, sçavoir, une au mois de Septembre après la mort de Jules César, une l'an 531 de Jesus-Christ sous le consulat de Lampadius & d'Oreste, une l'an 1106 de Jesus-Christ au mois de Février, & enfin une sur la fin de l'année 1680. & que toutes quatre avoient une queue très-longue & très-brillante, (excepté que la queue de celle qui parut à la mort de César paroissoit moins grande à cause de la position de la terre) il chercha l'orbe elliptique, dont le grand axe auroit 1382957 parties (la moyenne distance du Soleil à la terre en ayant 10000) dans lequel une cométe pût faire sa révolution en 575 ans; & plaçant son nœud ascendant dans ♋ 2 d 2′. Et faisant l'inclinaison du plan de son orbite au plan de l'écliptique de 61 d 6′ 48″; le périhélie de la cométe dans ce plan se trouvoit ♐ 22 d 44′ 25″. Et le temps corrigé du périhélie le 7 Décembre 23 h 9′; la distance du périhélie au nœud ascendant dans le plan de l'écliptique de 9 d 17′ 35″; & l'axe conjugué de 18481, 2 parties, il calcula le mouvement de la cométe dans cet orbe elliptique, & ses lieux, tant ceux qui sont déduits des observations, que ceux comptés dans cet orbe, se trouvent dans la table suivante.

| Temps vrai. | Longitudes observées. | Lat. boréales observ. | Longitudes comptées. | Latitudes comptées. | Erreurs en Longitudes. | Erreurs en Latitudes. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| d h ' | d ' " | d ' " | d ' " | d ' " | ' " | ' " |
| *Nov.* 3.16.47 | ♌ 29.51. 0 | 1.17.45 | ♌ 29.51.22 | 1.17.32 B | +0.22 | −0.13 |
| 5.15.37 | ♍ 3.23. 0 | 1. 6. 0 | ♍ 3.24.32 | 1. 6. 9 | +1.32 | +0. 9 |
| 10.16.18 | 15.32. 0 | 0.27. 0 | 15.33. 2 | 0.25. 7 | +1. 2 | −1.53 |
| 16.17. 0 | | | ♎ 8.16.45 | 0.53. 7 A | | |
| 18.21.34 | | | 18.52.15 | 1.26.54 | | |
| 20.17. 0 | | | 28.10.36 | 1.53.35 | | |
| 23.17. 5 | | | ♏ 13.22.42 | 2.29. 0 | | |
| *Déc.* 12. 4.46 | ♑ 6.32.30 | 8.28. 0 | ♑ 6.31.20 | 8.29. 6 B | −1.10 | +1. 6 |
| 21. 6.37 | ♒ 5. 8.12 | 21.42.13 | ♒ 5. 6.14 | 21.44.42 | −1.58 | +2.29 |
| 24. 6.18 | 18.49.23 | 25.23. 5 | 18.47.30 | 25.23.35 | −1.53 | +0.30 |
| 26. 5.21 | 28.24.13 | 27. 0.52 | 28.21.42 | 27. 2. 1 | −2.31 | +1. 9 |
| 29. 8. 3 | ♓ 13.10.41 | 28. 9.58 | ♓ 13.11.14 | 28.10.38 | +0.33 | +0.40 |
| 30. 8.10 | 17.38.20 | 28.11.53 | 17.38.27 | 28.11.37 | +0. 7 | −0.16 |
| *Janv.* 5. 6. 1½ | ♈ 8.48.53 | 26.15. 7 | ♈ 8.48.51 | 26.14.57 | −0. 2 | −0.10 |
| 9. 7. 1 | 18.44. 4 | 24.11.56 | 18.43.51 | 24.12.17 | −0.13 | +0.21 |
| 10. 6. 6 | 20.40.50 | 23.43.32 | 20.40.23 | 23.43.25 | −0.27 | −0. 7 |
| 13. 7. 9 | 25.59.48 | 22.17.28 | 26. 0. 8 | 22.16.32 | +0.20 | −0.56 |
| 25. 7.59 | ♉ 9.35. 0 | 17.56.30 | ♉ 9.34.11 | 17.56. 6 | −0.49 | −0.24 |
| 30. 8.22 | 13.19.51 | 16.42.18 | 13.18.28 | 16.40. 5 | −1.23 | −2.13 |
| *Févr.* 2. 6.35 | 15.13.53 | 16. 4. 1 | 15.11.59 | 16. 2. 7 | −1.54 | −1.54 |
| 5. 7. 4½ | 16.59. 6 | 15.27. 3 | 16.59.17 | 15.27. 0 | +0.11 | −0. 3 |
| 25. 8.41 | 26.18.35 | 12.46.46 | 26.16.59 | 12.45.22 | −1.36 | −1.24 |
| *Mars.* 1.11.10 | 27.52.42 | 12.23.40 | 27.51.47 | 12.22.28 | −0.55 | −1.12 |
| 5.11.39 | 29.18. 0 | 12. 3.16 | 29.20.11 | 12. 2.50 | +2.11 | −0.26 |
| 9. 8.38 | 0.43. 4 | 11.45.52 | ♊ 0.42.43 | 11.45.35 | −0.21 | −0.17 |

Les observations de cette comète, depuis le commencement de son apparition jusqu'à la fin, s'accordent autant avec son mouvement dans l'orbe ci-dessus décrit, que les mouvemens des planettes ont coutume de s'accorder avec leurs théories, ce qui prouve que ce fut la même comète qui parut pendant tout ce temps & que son orbite a été exactement déterminée.

Nous avons obmis dans la table précédente les observations faites les 16, 18, 20 & 23 *Novembre* parce qu'elles étoient moins éxactes.

*Pontheus* & ses compagnons observerent le 17 *Novembre* v. st. à 6 heures du matin à Rome (ce qui est à 5 $^{h}$ 10′ à Londres) la comète, par des fils appliqués aux fixes & la trouverent en ♎

8 d 30′ ayant 0 d 40′ de latitude auſtrale. On trouve leurs obſervations dans le traité que *Pontheus* a publié de cette cométe, *Cellius* qui y étoit préſent & qui envoya ſes obſervations à M. *Caſſini*, vit à la même heure la cométe dans ♎ 8 d 30′, ayant 0 d 30′ de latitude auſtrale.

*Galletius* obſerva la cométe à *Avignon* à l'heure qui répond à 5 h 42′ du matin à *Londres* & il la vit dans ♎ 8 d ſans latitude, & par la théorie elle devoit être dans ♎ 8 d 16′ 45″ avec 0 d 53′ 7″ de latitude auſtrale.

Le 18 *Novembre* à 6 h 30′ du matin à Rome (qui répondent à 5 h 40′ du matin à *Londres.*) *Pontheus* vit la cométe dans ♎ 13 d 30′ ayant 1 d 20′ de latitude auſtrale, *Cellius* l'obſerva dans ♎ 13 d 30′ ayant 1 d 00′ de latitude auſtrale, *Galletius* à 5 h 30′ du matin à *Avignon* obſerva la cométe dans ♎ 13 d 00′ ayant 1 d 00′ de latitude auſtrale, & le R. P. *Ango* à *la Fléche* en *France* obſerva la cométe à 5 h du matin (qui répondent à 5 h 9′ à *Londres*) dans le milieu de deux petites étoiles, dont l'une eſt l'étoile du milieu des trois qui ſont en ligne droite dans la main auſtrale de la Vierge, marquée ψ dans *Bayer*, & l'autre eſt la derniere de ſon aîle laquelle eſt marquée θ dans *Bayer*. Donc alors la cométe étoit dans ♎ 12 d 46′ ayant une latitude auſtrale de 50′. Le même jour, à *Boſton* dans la *Nouvelle Angleterre* à 42 d ½ de latitude à 5 h du matin (ce qui répond à 9 h 44′ du matin à *Londres*) la cométe fut vûe près ♎ 14 d ayant une latitude auſtrale de 1 d 30′, comme je l'ai appris de l'illuſtre *Halley*.

Le 19 *Novembre* à 4 h ½ du matin à *Cambridge*, un jeune homme obſerva la cométe diſtante d'environ 2 d de l'épi de la Vierge vers le Nord-Oueſt; or cet épi étoit dans ♎ 19 d 23′ 47″ ayant 2 d 1′ 59″ de latitude auſtrale.

Le même jour à 5 h du matin à *Boſton* dans la *Nouvelle Angleterre*, la cométe étoit éloignée de 1 d de l'épi de la Vierge, & la différence des latitudes étoit de 40′.

Le même jour dans l'Iſle de la *Jamaïque*, la cométe étoit éloignée de l'épi d'environ un degré.

Le même jour le Docteur *Arthur-ftor*, au fleuve du *Patuxent* proche *Hunt-ing Creek* dans le *Maryland* vers les confins de *la Virginie* à $38^{d}\frac{1}{2}$ de latitude, vit à $5^{h}$ du matin (qui répondent à $10^{h}$ à *Londres*) la cométe au-dessus de l'épi de la Vierge, & touchant presque à cette étoile, y ayant environ $\frac{3}{4}$ de degrés entre eux, & faisant usage de toutes ces observations, je conclus, qu'à $9^{h}\ 44'$ à *Londres*, la cométe étoit dans ♎ $18^{d}\ 50'$, ayant $1^{d}\ 25'$ de latitude australe environ; & par la théorie elle devoit être dans ♎ $18^{d}\ 52'\ 15''$ avec $1^{d}\ 26'\ 54''$ de latitude australe.

Le 20 *Novembre*, le Docteur *Montenarus* professeur d'astronomie à *Padoue*, vit à $6^{h}$ du matin à Venise (qui répondent à $5^{h}\ 10'$ à *Londres*) la cométe dans le $23^{d}$ de la balance ayant $1^{d}\ 30'$ de latitude australe.

Le même jour à *Boston*, la cométe étoit distante de l'épi de la Vierge de $4^{d}$ de longitude vers l'Orient, & par conséquent elle étoit dans ♎ $23^{d}\ 24'$ environ.

Le 21 *Novembre*, *Pontheus* & ses compagnons, à $7^{h}\frac{1}{4}$ du matin, observerent la cométe dans ♎ $27^{d}\ 50'$ ayant $1^{d}\ 16'$ de latitude australe, *Cellius* l'observa dans ♎ $28^{d}$. Le P. *Ango* à $7^{h}$ du matin, l'observa dans ♎ $27^{d}\ 45'$ & *Montenarus* dans le $27^{d}\ 51'$ de ce même signe.

Le même jour dans l'Isle de *la Jamaïque*, la cométe fut vûe auprès du commencement du scorpion, & elle avoit à peu près la même latitude que l'épi de la Vierge, c'est-à-dire, $2^{d}\ 2'$.

Le même jour à *Balsora* dans l'*Inde Orientale*, à $5^{h}$ du matin (qui répondent à $11^{h}\ 20'$ de la nuit précédente à *Londres*) on prit la distance de la cométe à l'épi de la Vierge, & elle se trouva de $7^{d}\ 35'$ vers l'Orient. Et elle étoit posée dans la ligne droite qui joint l'épi & la balance, & ainsi elle étoit dans ♎ $26^{d}\ 58'$, & elle avoit $1^{d}\ 11'$ environ de latitude australe; & après $5^{h}\ 40'$ (qui répondent environ à $5^{h}$ du matin à Londres) elle étoit dans ♎ $28^{d}\ 12'$, ayant une latitude australe de $1^{d}\ 16'$ & par la théorie elle devroit être dans ♎ $28^d\ 10'\ 36''$ avec $1^d\ 53'\ 35''$ de latitude auſtrale.

Le 22 *Novembre* la cométe fut vûe par *Montenarus* dans ♏ $2^d\ 33'$, & à *Boſton* dans la *Nouvelle Angleterre* elle parut dans ♏ $3^d$ environ, ayant preſque la même latitude qu'auparavant, c'eſt-à-dire, $1^d\ 30'$.

Le même jour à *Balſora* à $5^h$ du matin, la cométe fut obſervée dans ♏ $1^d\ 50'$, donc à $5^h$ du matin à *Londres* la cométe étoit dans ♏ $3^d\ 5'$ environ.

Le même jour à $6^h \frac{1}{2}$ du matin à *Londres*, *Hook* vit la cométe dans ♏ $3^d\ 30'$ environ, c'eſt-à-dire, dans la ligne droite qui paſſe par l'épi de la Vierge & le cœur du Lion, non pas exactement à la vérité, mais s'éloignant un peu de cette ligne vers le Nord: *Montenarus* remarqua de même que la ligne menée de la cométe par l'épi paſſoit ce jour-là & les ſuivans par le côté auſtral du cœur du Lion, y ayant ſeulement un très-petit intervalle entre le cœur du Lion & cette ligne. La ligne droite qui paſſe par l'épi de la Vierge & par le cœur du Lion, coupe l'écliptique dans ♍ $3^d\ 46'$ ſous un angle de $2^d\ 51'$, & ſi la cométe avoit été placée dans cette ligne dans ♏ $3^d$ ſa latitude auroit été de $2^d\ 26'$.

Mais comme, ſelon les obſervations de *Hook* & de *Montenarus* qui s'accordent, la cométe s'éloignoit un peu de cette ligne vers le Nord, ſa latitude étoit un peu plus petite.

Le 20 *Novembre*, ſelon l'obſervation de *Montenarus*, ſa latitude étoit environ égale à la latitude de l'épi de la Vierge, & par conſéquent elle étoit de $1^d\ 30'$ environ, & ſelon *Hook*, *Montenarus* & le P. *Ango*, qui s'accordent, elle augmentoit toujours, elle devoit donc être ſenſiblement plus grande que $1^d\ 30'$. Or entre ces deux limites trouvées de $2^d\ 26'$, & $1^d\ 30'$, la grandeur moyenne de ſa latitude étoit d'environ $1^d\ 58'$.

La queue de la cométe, ſelon *Hook* & *Montenarus* étoit dirigée à l'épi de la Vierge en déclinant cependant un peu vers le Midi ſelon *Hook*, & vers le Nord ſelon *Montenarus*; ainſi cette déclinaiſon étoit à peine ſenſible, & la queue étoit à peu près parallele à l'équateur, & elle se détournoit un peu de l'opposition du Soleil vers le Nord.

Le 23 *Novembre* v. st. à 5 heures du matin à *Norberg* (ce qui fait 4 heures $\frac{1}{2}$ à *Londres*) le Docteur *Zimmerman* vit la comète dans ♏ 8$^{d}$ 8$'$ ayant 2$^{d}$ 31$'$ de latitude australe, ses distances ayant été prises par rapport aux étoiles fixes.

Le 24 *Novembre* avant le lever du Soleil, la cométe fut vue par *Montenarus* dans ♏ 12$^{d}$ 52$'$ au côté boréal de la ligne droite tirée par le cœur du Lion & par l'épi de la Vierge, ainsi elle avoit un peu moins de 2$^{d}$ 38$'$ de latitude, cette latitude, comme nous l'avons dit, augmentoit continuellement, selon les observations de *Hook*, *Montenarus* & *Ango*; elle étoit donc alors un peu plus que de 1$^{d}$ 58$'$ & sa moyenne grandeur peut être fixée à 2$^{d}$ 18$'$ sans erreur sensible.

*Pontheus* & *Galletius* ont prétendu déterminer cette latitude, *Cellius* & celui qui l'a observée dans la *Nouvelle Angleterre* l'ont trouvée à peu près de même grandeur, c'est-à-dire, d'un degré ou d'un degré & demi.

Les observations les plus grossiéres sont celles de *Pontheus* & de *Cellius*, sur-tout celles qu'ils ont faites par les azimuths & les hauteurs, ainsi que l'ont été celles de *Galletius*.

Les meilleures sont celles où l'on employe les positions de la cométe par rapport aux fixes, comme *Montenarus*, *Hook* & *Ango* ont fait dans les leurs, ainsi que l'observateur de la *Nouvelle Angleterre* dans les siennes, & quelquefois *Pontheus* & *Cellius* dans les leurs.

Le même jour à 5 heures du matin à *Balsora* la cométe fut observée dans ♏ 11$^{d}$ 45$'$, & par conséquent à 5$^{h}$ du matin à *Londres* elle étoit dans ♏ 13$^{d}$ environ. Et par la théorie elle devoit être dans ♏ 13$^{d}$ 22$'$ 42$''$.

Le 25 *Novembre* avant le lever du Soleil, *Montenarus* observa la cométe dans ♏ 17$^{d}$ $\frac{3}{4}$ environ, & *Cellius* observa, dans le même temps, qu'elle étoit dans la ligne droite tirée de l'étoile luisante de la cuisse gauche de la Vierge & le bassin austral de la Balance, & cette ligne coupe le chemin de la cométe dans ♏ $18^d\ 36'$, & par la théorie elle devoit être dans ♏ $18^d\frac{1}{3}$ environ.

Ces observations s'accordent donc autant avec la théorie, qu'elles s'accordent entr'elles, & cet accord prouve que ce fut une seule & même cométe qui fut vue depuis le 4 *Novembre* jusqu'au 9 de *Mars*, la trajectoire de cette cométe coupa deux fois le plan de l'écliptique, ainsi elle ne fut point rectiligne. Et elle ne coupa point l'écliptique dans les parties opposées du ciel, mais à la fin de la Vierge, & au commencement du capricorne à 98 degrés environ d'intervalle; ainsi l'orbite de cette cométe s'éloignoit beaucoup d'être un grand cercle, car au mois de *Novembre* son cours s'éloignoit à peine de l'écliptique de trois degrés vers le Sud, & ensuite, au mois de *Décembre* elle s'éloignoit de l'écliptique vers le Septentrion de $29^d$, & ces deux parties de son orbite dans l'une desquelles elle s'approchoit du Soleil, & s'en éloignoit dans l'autre, paroissoient distantes l'une de l'autre d'un angle de plus de $30^d$ comme l'observa *Montenarus.*

Cette cométe parcourut 9 signes, depuis le dernier degré du Lion jusqu'au commencement des Gémeaux, outre le signe du Lion qu'elle avoit parcouru avant qu'elle commençat à être visible; & il n'y a aucune autre théorie qui donne aux cométes un mouvement régulier dans une si grande portion du ciel.

Son mouvement fut fort inégal, car vers le 20 *Novembre* elle parcourut environ 5 degrés par jour; ensuite son mouvement s'étant ralenti, entre le 26 *Novembre* & le 12 Décembre, c'est-à-dire, dans un espace de 15 jours & demi, elle ne parcourut qu'environ 40 degrés, ensuite son mouvement étant de nouveau accéléré, elle parcouroit environ $5^d$ par jour avant que son mouvement recommençat à être retardé. Or la théorie qui répond exactement à un mouvement si inégal dans la plus grande partie du ciel, qui dépend des mêmes loix qui dirigent le cours des planettes, & qui s'accorde si bien avec les observa-

DU SYSTEME DU MONDE.

tions astronomiques les plus exactes, ne peut manquer d'être vraie.

La trajectoire que la cométe décrivit, & la queue réelle qu'elle projetta dans chacun de ses lieux sont représentés, pour le

Fig. 27. plan de la trajectoire même, dans la figure 27. dans laquelle *A B C* représente la trajectoire de la cométe, *D* le Soleil, *D E* l'axe de la trajectoire, *D F* la ligne des nœuds, *G H* l'intersection de la sphére du grand orbe avec le plan de la trajectoire, *I* le lieu de la cométe le 4 *Novembre* de l'année 1680. *K* son lieu le 11 *Novembre*, *L* son lieu le 19 *Novembre*, *M* son lieu le 12 *Décembre*, *N* son lieu le 21 *Décembre*, *O* son lieu le 29 *Décembre*, *P* son lieu le 5 *Janvier* suivant, *Q* son lieu le 25 *Janvier*, *R* son lieu le 5 *Février*, *S* son lieu le 25 *Février*, *T* son lieu le 5 *Mars*, & *V* son lieu le 9 *Mars*. J'ai employé les observations suivantes pour déterminer sa queue.

Le 4 & le 6 *Novembre* sa queue ne parut point, le 11 *Novembre* sa queue commençoit déja à paroître, mais par une lunette de 10 pieds elle ne paroissoit pas avoir plus d'un demi degré de long, le 17 *Novembre* sa queue parut à *Pontheus* avoir plus de 15 degrés de long, le 18 *Novembre* elle étoit longue de $30^d$, & dans la *Nouvelle Angleterre* on la voyoit directement opposée au Soleil, & elle s'étendoit jusqu'à l'étoile de *Mars*, qui étoit alors dans ♍ $9^d\ 54'$.

Le 19 *Novembre* dans le *Maryland* la queue parut longue de $15^d$ ou $20^d$, le 10 Décembre la queue (selon l'observation de *Flamsteed*) passoit par le milieu de la distance entre la queue du serpent d'*Ophiulchus* & l'étoile $\delta$ dans l'aîle australe de l'aigle, & elle finissoit vers les étoiles *A*, $\omega$, *b* dans les tables de *Bayer*, son extrémité étoit donc dans ♑ $19^d\ \frac{1}{2}$ avec une latitude boréale de $34^d\ \frac{1}{4}$ environ.

Le 11 *Décembre* la queue s'élevoit jusqu'aux étoiles de la tête de la fléche (marquées $\alpha$, $\beta$, dans *Bayer*) & elle finissoit dans ♑ $26^d\ 43'$ avec une latitude boréale de $38^d\ 34'$.

Le

Le 12 *Décembre* la queue passoit par le milieu de la fléche, & elle ne s'étendoit pas beaucoup au-delà, car elle finissoit dans ♒ $4^d$ avec une latitude boréale de $42^d \frac{1}{2}$ environ.

Ce qu'on vient de dire doit s'entendre des parties de la queue les plus lumineuses. *Pontheus* qui observoit à *Rome* le 12 *Décembre* à $5^h 40'$ sous un ciel peut-être plus serein, & qui pouvoit distinguer les parties plus foibles de la lumiére, trouva que sa queue s'étendoit à $10^d$ par-dessus le croupion du signe; & son bord finissoit à $45'$ de cette étoile vers le Nord-Ouest, sa queue avoit ces jours-là $3^d$ de largeur vers son extrémité supérieure, & par conséquent son milieu étoit distant de cette étoile de $2^d 15'$ vers le Midi, son extrémité supérieure étoit dans ♓ $22^d$ ayant $61^d$ de latitude boréale, & par conséquent cette queue avoit environ $70^d$ de longueur.

Le 21 *Décembre* elle s'élevoit presque jusqu'à la chaise de *Cassiopée*, étant également éloignée de $\beta$ & de *Shedir*, & sa distance à chacune de ces deux étoiles étoit égale à la distance qui est entr'elles, ainsi elle finissoit à ♈ $24^d$ ayant une latitude de $47^d \frac{1}{2}$.

Le 29 *Décembre* la queue touchoit l'étoile *Scheat* qui étoit située à gauche, elle remplissoit exactement l'intervalle des 2 étoiles du pied boréal d'*Andromède*, & sa longueur étoit de $54^d$, ainsi elle finissoit dans ♉ $19^d$ & sa latitude étoit de $35^d$.

Le 5 *Janvier* la queue touchoit l'étoile $\pi$ du côté droit de la poitrine d'*Andromède*, & l'étoile $\mu$ du côté gauche de sa ceinture, (selon nos observations) elle étoit longue de $40^d$: elle étoit courbe, & son côté convéxe étoit tourné vers le Midi; & elle faisoit, près de la tête de la cométe, un angle de $4^d$ avec le cercle qui passoit par le Soleil & par la tête de la cométe, mais près de l'autre bord elle étoit inclinée à ce cercle sous un angle de $10^d$ ou de $11^d$ & la corde de la queue faisoit avec ce cercle un angle de $8^d$.

Le 13 *Janvier* la lumiére de la queue étoit encore assez sensible entre *Alamek* & *Algol*, & elle finissoit par une lumiére assez foible vers l'étoile $\kappa$ du côté de *Persée*, la distance du terme de la queue au cercle qui joignoit la cométe & le Soleil étoit de $3^{d}\ 50'$ &, l'inclinaison de la corde de la queue à ce cercle étoit de $8^{d}\frac{1}{2}$.

Le 25 & le 26 *Janvier* la queue avoit une lumiere assez foible à la longueur de 6 ou 7 dégrés; & tant cette nuit que la suivante, le temps étant fort serein, elle s'étendoit à 12 dégrés & un peu plus, par une lumiere très-foible & à peine sensible. Son axe étoit dirigé exactement vers la claire de l'épaule orientale du cocher, ainsi elle déclinoit de l'opposition du Soleil vers le Nord sous un angle de $10^{d}$.

Enfin le 10 *Février*, je vis avec une lunette la queue longue de $2^{d}$, car la lumiére très-foible dont j'ai parlé, ne pouvoit pas s'appercevoir à travers les verres.

*Pontheus* marque cependant qu'il vit la queue longue de $12^{d}$ le 7 *Février*, le 25 *Février* & les jours suivans la cométe n'avoit plus de queue.

En examinant l'orbe ci-dessus décrit, & en faisant attention aux autres Phénoménes de cette cométe, il sera bien difficile de ne pas conclure que les cométes sont des corps solides, compactes, fixes & durables, de même que les planettes; car si elles n'étoient autre chose que des vapeurs & des exhalaisons de la terre, du Soleil & des planettes, cette cométe auroit dû se dissiper dans l'instant dans son passage près du Soleil; car la chaleur du Soleil est comme la densité de ses rayons, c'est-à-dire, réciproquement comme le quarré de la distance des lieux au Soleil; ainsi, comme la distance de la cométe au centre du Soleil le 8 *Décembre*, qu'elle étoit dans son périhélie, étoit à la distance de la terre au centre du Soleil, comme 6 à 1000 environ, la chaleur du Soleil dans la cométe étoit alors à la chaleur du Soleil sur la terre en Eté, comme 1000000 à 36, ou comme 28000 à 1. Mais la chaleur de l'eau bouillante est presque triple de la chaleur que la terre reçoit en Eté des rayons du Soleil, comme j'en ai fait l'expérience ; & la chaleur du fer ardent est trois ou quatre fois plus grande que celle de l'eau bouillante, ( si je ne me trompe. ) Donc la chaleur que la terre séche de la cométe dut éprouver par les rayons du Soleil dans son périhélie, étoit presque 2000 fois plus grande que celle du fer ardent ; & par une telle chaleur, les vapeurs, les exhalaisons & toute la matiére volatile dut être consumée & dissipée en un instant.

La cométe éprouva donc une chaleur immense des rayons du Soleil dans son périhélie, & elle a pû conserver très-long temps cette chaleur ; car un globe de fer rouge d'un pouce de diamétre exposé à l'air pendant une heure, perd à peine toute sa chaleur. Et un globe d'un plus grand diamétre conserveroit la sienne plus longtemps en raison de son diamétre, parce que sa superficie ( qui est la mesure du réfroidissement par le contact de l'air ambiant ) est moindre dans cette raison eu égard à la quantité de matiére chaude qu'elle renferme. Ainsi un globe de fer rouge égal à la terre, c'est-à-dire, dont le diamétre seroit environ de 40000000 de pieds, ne se réfroidiroit qu'en 40000000 de jours, & par conséquent à peine seroit-il réfroidi en 50000 ans. Je soupçonne cependant, que par des causes cachées, la durée de la chaleur doit augmenter dans une moindre raison que celle du diamétre : & je désirerois bien en trouver la véritable raison par l'expérience.

De plus il faut remarquer que la cométe au mois de *Décembre*, où elle étoit encore toute imprégnée des rayons du Soleil, avoit une queue beaucoup plus grande & plus brillante qu'au mois de *Novembre* précédent, où elle n'avoit pas encore atteint son périhélie. Et en général, toutes les cométes ont les queues les plus grandes & les plus brillantes aussitôt après leur passage par la région du Soleil. La chaleur de la cométe contribue donc à la grandeur de sa queue, & de-là je crois qu'on doit conclure que cette queue n'est autre chose qu'une vapeur très-légere que la tête ou le noyau de la cométe exhale à cause de sa chaleur.

Au reſte, il y a trois opinions ſur les queues des cométes, celle de ceux qui croyent que ces queues ne ſont autre choſe que l'éclat du Soleil qu'on découvre à travers la tête tranſparente des cométes; celle de ceux qui prétendent que ces queues ſont cauſées par la réfraction de la lumiére en venant de la tête des cométes à la terre, & enfin celle de ceux qui ſuppoſent que ces queues ſont une eſpéce de vapeur ou de nuage qui s'éléve de la tête de la cométe, & qui ſe répand ſans ceſſe dans les régions oppoſées au Soleil.

La premiere opinion ne peut être ſoutenue que par ceux qui n'ont aucune teinture de l'optique, car la lumiére du Soleil ne ſe voit point dans une chambre obſcure, ſi ce n'eſt en tant qu'elle eſt réfléchie par les petites particules de pouſſiére & par les vapeurs qui voltigent toujours dans l'air : ainſi dans un air chargé de vapeurs plus groſſieres, elle eſt plus brillante, & frappe plus fortement les yeux; & plus l'air eſt rare, & moins il ſe réfléchit de lumiére, ainſi dans les cieux où il n'y a aucune matiére réfléchiſſante, il ne peut revenir de lumiére à nos yeux : car la lumiére ne ſe voit pas par elle-même, mais ſeulement lorſqu'elle eſt réfléchie vers nos yeux. Il faut donc que dans les régions où l'on voit les queues des cométes, il y ait une matiere qui réfléchiſſe la lumiére, ſans quoi tout le ciel où elles ſont étant rempli des rayons du Soleil, il nous paroitroit également brillant par-tout.

La ſeconde opinion eſt ſujette à bien des difficultés, car jamais il ne paroît de couleurs dans ces queues; or les couleurs ont cependant coutume d'être les compagnes inſéparables de la réfraction : la lumiére des fixes & des planettes qui nous eſt tranſmiſe pure & ſans ſe colorer, eſt une preuve que les eſpaces céleſtes, que cette lumiére traverſe, ne contiennent point de milieu réfringent. Car ce qu'on rapporte que les Egyptiens ont vû quelquefois des fixes comme des cométes, doit ſans doute ſon origine à quelque réfraction fortuite des nuées. Et la radiation & la ſcintillation des fixes doit être attribuée aux réfractions des humeurs de nos yeux & à celles de l'air, qui a toujours un petit mouvement de trémulation, ce qui ſe prouve parce que cette ſcintillation ceſſe lorſqu'on regarde les étoiles à travers un téleſcope : car la trémulation de l'air & des vapeurs qui y ſont contenues eſt cauſe que les rayons ſont détournés facilement & par ſecouſſes de la prunelle, qui eſt trés-étroite, mais il n'en eſt pas de même de l'ouverture beaucoup plus grande du verre objectif, voilà pourquoi la ſcintillation que nous éprouvons, lorſque nous regardons les étoiles avec nos yeux ſeulement, ceſſe lorſque nous les regardons à travers un téleſcope ; & cette ceſſation prouve que la lumiere eſt tranſmiſe dans les eſpaces céleſtes ſans réfraction ſenſible. Et qu'on ne diſe pas qu'on ne voit pas toujours les queues des cométes, parce que leur lumiére n'eſt pas aſſez forte, & qu'alors les rayons ſecondaires n'ont pas aſſez de force pour remuer nos yeux, & que c'eſt par cette raiſon que nous ne voyons pas de queues aux fixes : car la lumiére des fixes peut être augmentée plus de cent fois par le moyen des téleſcopes, & cependant on ne leur voit pas de queues. Les planettes donnent beaucoup plus de lumiére que les étoiles & cependant on ne leur voit point de queues, & ſouvent les cométes ont de très-grandes queues quoique la lumiere de leur tête ſoit très-foible, & très-ſourde.

La tête de la cométe de 1680. par exemple, avoit au mois de *Décembre* une lumiere qui égaloit à peine celle des étoiles de la ſeconde grandeur, & ſa queue répandoit une lumiére ſenſible dans un eſpace de 40. 50. 60. & 70 dégrés & plus : enſuite le 27 & le 28 *Janvier* ſa tête paroiſſoit ſeulement comme une étoile de la ſeptiéme grandeur, & ſa queue donnoit une lumiére, qui à la vérité étoit foible, mais qui étoit cependant aſſez ſenſible l'eſpace de 6 à 7 dégrés, & elle donnoit juſqu'à 12 dégrés & un peu plus une lumiére très-obſcure & qui ſe diſtinguoit difficilement, comme on l'a dit ci-deſſus.

Mais le 9 & le 10 *Février* que l'on cessa entiérement de voir la tête de la cométe à la vûe simple, je vis par le télescope la queue longue de deux dégrés : de plus, si la queue étoit l'effet de la réfraction de la matiére céleste, & qu'en vertu de la forme des cieux, elle se détournât de l'opposition du Soleil, cette défléxion devroit toujours se faire du même côté, & dans les mêmes régions du ciel ; mais cependant la cométe de 1680. le 28. *Décembre* à 8 $^{h}$ $\frac{1}{2}$ après-midi à *Londres*, étoit dans le 8 $^{d}$ 41$'$ des poissons, & elle avoit 28 $^{d}$ 6$'$ de latitude boréale, le Soleil étant dans le 18 $^{d}$ 26$'$ du ♑. Et la cométe de l'année 1577. étoit le 29 *Décembre* dans le 8 $^{d}$ 41$'$ des ♓ avec une latitude boréale de 28 $^{d}$ 40$'$. Le Soleil étant aussi dans le 18 $^{d}$ 26$'$ environ du ♑. Dans l'un & l'autre cas la terre étoit dans le même lieu, & la cométe paroissoit dans la même partie du ciel ; cependant dans le premier cas la queue de la cométe déclinoit (selon mes observations & celles de plusieurs autres) d'un angle de 4 $^{d}$ $\frac{1}{2}$ de l'opposition du Soleil vers le Nord ; & dans le dernier (selon les observations de *Tycho*) la déclinaison étoit de 21 $^{d}$ vers le Midi. Ainsi ne pouvant pas rapporter les queues à la réfraction des cieux, il reste à examiner si ces queues ne sont point produites par quelque matiére qui réfléchit la lumiére.

Les loix que les queues observent prouvent qu'elles viennent de la tête des cométes, & qu'elles montent dans les régions opposées au Soleil ; car lorsqu'elles sont dans les plans des orbes des cométes qui passent par le Soleil, elles se détournent toujours de l'opposition du Soleil vers les parties que leurs têtes abandonnent en avançant dans ces orbes. Ce qui fait qu'elles paroissent dans les parties directement opposées au Soleil à un spectateur placé dans ce plan ; mais à mesure que le spectateur s'éloigne de ce plan, leur déviation se fait sentir peu à peu, & elle devient de jour en jour plus grande : & cette déviation, toutes choses égales, est d'autant plus petite, que la queue est plus oblique à l'orbe de la cométe, c'est-à-dire, que la tête de la cométe approche le plus du Soleil ; sur-tout si l'angle de la déviation est vu près de la tête de la cométe : de plus, les queues qui n'ont point de déviation paroissent droites, & celles qui ont une déviation paroissent courbes, & leur courbure paroît d'autant plus grande, que leur déviation est plus grande, & qu'elle est plus sensible, toutes choses égales, à mesure que la queue est plus longue, car dans les queues fort courtes la courbure est à peine sensible.

Plus l'angle de la déviation est petit près de la tête de la cométe, & plus il est grand vers l'autre extrémité de la queue, & par conséquent le côté convéxe de la queue est tourné alors vers les parties dont elle s'écarte par sa déviation, lesquelles sont dans la ligne droite indéfinie tirée du Soleil par la tête de la cométe. Et enfin, les queues les plus longues, les plus larges, & qui brillent de la lumiére la plus vive, sont un peu plus brillantes par leur côté convéxe, & terminées plus exactement que par leur côté concave.

Les Phénoménes de la queue des cométes dépendent donc du mouvement de leur tête & non de la région du ciel dans laquelle on apperçoit leur tête ; & par conséquent elles ne sont point l'effet de la réfraction des cieux, mais elles sont formées de la matiére qui s'exhale de la tête des cométes. Et de même que dans notre air la fumée d'un corps enflammé quelconque s'éléve en-haut & monte perpendiculairement, si ce corps est en repos, ou obliquement, s'il se meut latéralement ; ainsi dans les cieux,où tous les corps célestes gravitent vers le Soleil, les vapeurs & la fumée doivent monter par rapport au Soleil ( comme on l'a déja dit ) & s'élever en haut & en ligne droite, si le corps qui fume est en repos ; ou obliquement si ce corps, en avançant, abandonne sans cesse les lieux d'où les parties supérieures de la vapeur ont commencé à monter. Et cette obliquité est moindre lorsque les vapeurs montent avec plus de vîtesse : comme dans le voisinage du Soleil, & près du corps dont la fumée s'exhale ; cette différente obliquité fait que la colonne composée de cette vapeur paroît courbe : & comme la vapeur de la colonne du côté vers lequel se fait le mouvement de la cométe est un peu plus nouvellement exhalée, elle doit être aussi un peu plus épaisse dans cet endroit, & y réfléchir par conséquent une lumiére plus abondante, & la queue y doit être terminée plus exactement. Je n'ajoute rien ici sur les agitations subites & sans loi de ces queues, ni sur l'irrégularité de leurs figures dont quelques-uns ont donné la description ; parce que ces apparences peuvent être causées par les changemens qui arrivent dans notre air & par les mouvemens des nuées, qui font paroître quelquefois de certaines parties des queues plus obscures que d'autres, & que les parties de la voye lactée, que l'on confond avec les queues qui y passent, & qu'on prend pour des parties mêmes de ces queues, peuvent encore causer ces apparences.

La rareté de notre air peut servir à nous faire comprendre comment les vapeurs qui s'exhalent de l'atmosphére des cométes, peuvent suffire à remplir des espaces si immenses. Car l'air occupe prés de la surface de la terre un espace 850 fois environ plus grand que celui qui seroit occupé par le volume d'eau qui auroit le même poids. Ainsi une colonne cylindrique d'air, haute de 850 pieds est du même poids qu'une colonne d'eau qui auroit la même base, & un pied de hauteur. Or la colonne d'air qui va jusqu'à l'extrémité de notre atmosphére est égale en poids à une colonne d'eau de 33 pieds de haut environ & de même base ; & par conséquent, si on ôtoit la partie inférieure de toute la colonne qui compose notre air jusqu'à la hauteur de 850 pieds, le poids du reste supérieur de cette colonne, seroit égal à celui d'une colonne d'eau de la hauteur de 32 pieds. Ainsi, par une regle qu'une infinité d'expériences ont confirmée, sçavoir, que la compression de l'air est comme le poids de l'atmosphére incombant, & que la gravité est réciproquement comme le quarré de la distance des lieux au centre de la terre, j'ai trouvé ( en faisant le calcul selon le Cor. de la Prop. 22. du Liv. 2. ) qu'à la hauteur d'un d'un demi diamétre de la terre au-dessus de sa surface, l'air doit être plus rare qu'ici-bas en une raison beaucoup plus grande que celle de tout l'espace renfermé dans l'orbe de Saturne à un globe d'un pouce de diamétre. Donc un globe d'air d'un pouce de diamétre qui auroit la densité qu'a notre air à un demi diamétre de la terre au-dessus de sa surface, rempliroit toutes les régions des planetes jusqu'à la sphére de Saturne & bien loin encore au-delà: or puisque notre air se raréfie à l'infini, à mesure qu'on s'éloigne de la surface de la terre, les queues des cométes doivent être formées d'une matiére très-rare, puisque leur chevelure ou leur atmosphére est presque 10 fois plus étendu que le diamétre de leur noyau, & que leurs queues vont encore beaucoup par-delà. Et quoiqu'il se puisse faire, à cause de la densité de l'atmosphére des cométes, de la grande gravitation de ces corps vers le Soleil, & de la gravité des particules de leur air, & de leurs vapeurs les unes vers les autres, que l'air qui les environne dans les espaces célestes, & par conséquent leurs queues ne soient pas aussi raréfiées que notre air; il résulte cependant de tout ceci, qu'une très-petite quantité d'air & de vapeurs peut suffire abondamment à tous les Phénoménes des queues des cométes. D'ailleurs l'extrême rareté de la matiére de ces queues est prouvée par les astres qu'on voit briller à travers,

L'atmosphére terrestre éclairé de la lumiére du Soleil, obscurcit & éteint par son épaisseur presque tous les astres & la Lune même, & cependant il ne s'étend qu'à quelques milles: mais à travers l'épaisseur immense des queues des cométes qui sont éclairées du Soleil de même que notre atmosphére, on voit les plus petites étoiles sans que leur lumiére soit affoiblie. L'éclat des queues de la plupart des cométes est comparable à peu près à celui de l'air d'une chambre obscure qui réfléchit les rayons du Soleil reçus par un trou d'un pouce ou deux de diamétre.

On peut connoître à peu près quel temps la vapeur met à s'élever de la tête des cométes à l'extrémité de leur queue, en tirant une ligne droite de l'extrémité de cette queue au Soleil, & remarquant le lieu où cette ligne coupe la trajectoire. Car la vapeur à l'extrémité de la queue, si elle s'éloigne en ligne droite du Soleil, commence à s'élever de la tête, dans le temps où la tête se trouve dans le lieu de l'intersection. Mais la vapeur ne s'éloigne pas du Soleil en ligne droite, car elle retient le mouvement que la cométe avoit avant que cette vapeur commençat à monter, & ce mouvement se composant avec celui par lequel la vapeur monte, elle monte obliquement. Ainsi la solution de ce problême sera plus exacte, si cette ligne qui coupe l'orbe est paralléle à la longueur de la queue, ou plutôt, ( à cause du mouvement curviligne de la cométe ) si cette même ligne diverge de celle de la queue.

Par ce moyen j'ai trouvé, que la vapeur qui étoit à l'extrémité de la queue de la cométe de 1680. le 25 *Janvier*, avoit commencé à s'élever de la tête avant le 11 *Décembre*, & que par conséquent, elle avoit mis plus de 45 jours à monter. Et toute la queue qui parut le 10 *Décembre* étoit montée dans l'espace de deux jours qui s'étoient écoulés depuis le périhélie de la cométe. Cette vapeur montoit donc très-vîte au commencement, lorsque la cométe étoit plus près du Soleil, & ensuite elle continuoit de monter avec un mouvement que sa gravité retardoit toujours, & en montant elle augmentoit la longueur de la queue. La queue, tant qu'elle fut visible, étoit formée de presque toute la vapeur qui s'étoit exhalée de la cométe dans le temps du périhélie; & la vapeur qui monta la premiére, & qui formoit l'extrémité de la queue, ne s'évanouit que lorsque sa distance, tant du Soleil que de nous, fut si grande, qu'on ne pût plus l'appercevoir. Ainsi les queues des autres cométes qui sont courtes ne sont point formées par des vapeurs qui s'élevent de leurs têtes par un mouvement prompt & continu, & qui ensuite se dissipent, mais ce sont des colonnes permanentes de vapeurs & d'exhalaisons qui sortent de la tête des cométes pendant plusieurs jours par un mouvement très-lent, & qui en participant du mouvement que la tête d'où elles s'exhalent avoit lorsqu'elles ont commencé à s'exhaler, continuent ensuite à se mouvoir avec cette tête dans les espaces céleftes. Ce qui fournit encore une nouvelle preuve que les espaces célestes sont privés de toute force résistante; puisque non seulement les corps solides tels que les planetes & les cométes, mais même des vapeurs très-rares, (comme celles qui forment les queues des cométes) se meuvent très-librement & d'un mouvement très-rapide dans ces espaces, & qu'elles y conservent leur mouvement pendant très-long-temps.

*Kepler* attribue l'ascension des queues des cométes qui s'élevent de l'atmosphére de leurs têtes, & le mouvement progressif de ces queues vers les parties opposées au Soleil, à l'action des rayons de lumiére qui emportent avec eux la matiére des queues. Et il n'est point absurde de penser que des vapeurs très-rares puissent céder à l'action des rayons dans des espaces libres de toute résistance, quoique des vapeurs épaisses ne puissent être mûes sensiblement par les rayons du Soleil dans notre atmosphére.

Un autre Astronome a cru qu'il pouvoit y avoir des particules de matiére graves, & d'autres légeres, & que les queues des cométes étoient composées de particules légeres, & que c'étoit par leur légereté qu'elles s'élevoient en s'éloignant du Soleil. Mais la gravité des corps terrestres étant comme la matiére qu'ils contiennent, la quantité de matiére restant la même, la gravité ne peut être ni augmentée ni diminuée. Je soupçonne plutôt que l'élévation des vapeurs qui forment les queues, vient de la raréfaction de cette matiére : car la fumée monte dans une cheminée par l'impulsion de l'air dans lequel elle nâge, cet air raréfié par la chaleur monte, parce que sa gravité spécifique est diminuée, & en montant il emporte la fumée avec lui. Pourquoi les queues des cométes ne s'éleveroient-elles pas de la même maniére du côté opposé au Soleil? Car les rayons du Soleil n'agitent les milieux qu'ils traversent que par la réflexion & la réfraction. Les particules réfléchissantes étant échauffées par cette action des rayons, échauffent la matiére éthérée avec laquelle elles sont mêlées : cette chaleur qu'elles lui communiquent la raréfie, & cette raréfaction diminuant la gravité spécifique par laquelle elle tendoit auparavant vers le Soleil, cette matiére éthérée monte & emporte avec elle les particules réfléchissantes dont la queue est composée. Les vapeurs qui composent les queues des cométes tournent autour du Soleil, & tendent par conséquent à s'éloigner de cet astre, ce qui contribue encore à leur ascension, car l'atmosphére du Soleil, & la matiére des cieux est dans un repos absolu, ou bien elle tourne plus lentement que la matiére des queues, puisqu'elle tourne par le seul mouvement qu'elle reçoit de la rotation du Soleil.

Ce sont-là les causes de l'ascension des vapeurs qui forment les queues des cométes, lorsqu'elles sont près du Soleil où leurs orbes sont les plus courbes, & où les cométes étant dans le lieu de l'atmosphére du Soleil le plus épais, & par conséquent le plus pesant, projettent les plus longues queues. Car les queues qui commencent alors à paroître conservant leur mouvement, & gravitant cependant vers le Soleil, se meuvent autour de cet astre dans des ellipses comme les têtes des cométes & par ce mouvement elles accompagnent toujours ces têtes, & leur paroissent attachées, quoiqu'elles ne leur soient pas adhérentes. Car la gravité de ces vapeurs vers le Soleil ne les fait pas s'éloigner davantage de leurs têtes pour aller vers le Soleil que la gravité des têtes vers le Soleil ne les fait s'éloigner de leurs queues pour aller vers cet astre. Ainsi elles doivent, par leur gravité commune, tomber en même temps sur le Soleil, ou être retardées de la même maniére en remontant ; ainsi la gravité ne doit point empêcher la tête & la queue des cométes, de prendre facilement entr'elles la position quelconque qui doit suivre des causes dont nous venons de parler ou d'autres causes quelconques, ni de la conserver ensuite sans obstacle.

Les queuës qui se forment dans les périhélies des cométes, doivent donc s'en aller avec leurs têtes dans des régions très-éloignées, & ensuite après une longue suite d'années revenir vers nous avec elles, ou bien s'évanouir peu à peu par la raréfaction. Car lorsque par la suite leur tête descend vers le Soleil, de nouvelles queues très-courtes doivent s'élever de leur tête par un mouvement très-lent, & ces queues doivent augmenter immensement dans le périhélie des cométes qui descendent jusqu'à l'atmosphére du Soleil: car cette vapeur doit se raréfier & se dilater perpétuellement dans les espaces libres où elle se trouve, c'est pourquoi les queues sont toutes plus larges vers leur extrémité supérieure que prés de la tête de la cométe.

Ces vapeurs perpétuellement dilatées par la raréfaction, doivent s'étendre & se répandre dans tout le ciel, & elles doivent ensuite peu à peu être attirées par leur gravité vers les planetes avec l'atmosphére desquelles il est vraisemblable qu'elles se mêlent. Car de même que les mers sont nécessaires à la constitution de notre terre, afin que la chaleur du Soleil puisse en élever des vapeurs suffisantes, lesquelles après s'être rassemblées en nuages, retombent en pluyes qui arrosent la terre, la nourrissent & la rendent capable de produire tous les végétaux; ou bien se condensent sur le sommet des montagnes par le froid qui y régne d'où (selon que quelques-uns le conjecturent avec raison) elles coulent & forment les fontaines & les fleuves: on peut croire que les cométes peuvent par leurs exhalaisons & leurs vapeurs condensées, suppléer & réparer sans cesse ce qui se consume d'humidité dans la végétation & la putréfaction, & ce qui s'en convertit en terre séche dans ces opérations: afin que par ce moyen les mers & l'humidité des planetes ne soit pas consumée. Car tous les végétaux croissent par le moyen de l'humidité, & ensuite la plus grande partie s'en convertit par la putréfaction en terre séche, puisqu'il tombe perpétuellement du limon au fond des liqueurs qui se corrompent. Ainsi la masse de la terre séche doit augmenter sans cesse, & si les parties fluides ne recevoient pas de l'accroissement par quelques causes, elles devroient diminuer perpétuellement, & à la fin elles viendroient entiérement à manquer. Je soupçonne de plus que cet esprit qui est la plus petite partie de notre air, la plus subtile, & en même temps la plus excellente, puisqu'elle est nécessaire pour donner la vie à toutes choses, vient principalement des cométes.

Les atmosphéres des cométes, en produisant des queues dans leur descente vers le Soleil doivent diminuer, & être plus étroits; (principalement vers la partie qui regarde le Soleil) & réciproquement lorsqu'elles s'éloignent du Soleil, & que leur atmosphére ne fournit plus à la formation des queues, ils doivent devenir plus considérables; & si on s'en rapporte aux observations d'*Hévélius*, ces atmosphéres paroissent les plus petits, lorsque les têtes des cométes étant déja échauffées par le Soleil, elles ont des queues très-longues & très-brillantes, & que ces têtes sont enveloppées vers les parties les plus intérieures de leur atmosphére, par la fumée très-dense & très-noire de leur noyau. Car toute fumée causée par une grande chaleur, doit être d'autant plus noire & plus épaisse. Aussi la tête de la cométe (c'est de celle de 1680. dont nous parlons) à égale distance du Soleil & de la terre, parut-elle plus obscure après son périhélie qu'auparavant. Car au mois de *Décembre* on pouvoit comparer sa lumiére à celle des étoiles de la troisiéme grandeur, & au mois de *Novembre* elle égaloit celles de la seconde & de la premiére. Et ceux qui l'ont vue dans les deux cas parlent de celui où elle étoit plus brillante comme d'une cométe plus grande. Un jeune homme de *Cambridge* qui vit cette cométe le 19 *Novembre*, trouva que sa lumiére, quoiqu'obscurcie & comme plombée, égaloit en clarté l'épi de la Vierge, & qu'elle brilloit plus qu'elle ne brilla depuis. *Montenarus* le 20 *Novembre* v. st. la vit plus grande que les étoiles de la premiére grandeur, sa queue ayant deux dégrés de long. Et le Docteur *Stor*, dans ses lettres qui me sont tombées entre les mains, marque que sa tête au mois de *Décembre* étoit très-petite, & qu'elle cédoit en grandeur à celle de la cométe qui avoit paru au mois de *Novembre* avant le lever du Soleil, quoiqu'alors sa queue fut la plus grande & la plus brillante. Il y conjecture que cela pouvoit être attribué à ce que, au commencement, la matiére de la tête étoit en plus grande quantité, & qu'elle s'étoit peu à peu consumée.

C'est vraisemblablement par la même raison, que les cométes qui ont les queues les plus longues & les plus brillantes ont les têtes les plus obscures & les plus petites. Car le 5 *Mars* n. st. de l'année 1668. à 7 heures du soir, le R.P. *Valentin Estancius* étant au *Brésil* vit une cométe près de l'horison vers le coucher du Soleil dont la tête étoit très-petite & à peine visible, & qui avoit une queue si brillante, que ceux qui étoient sur le rivage la pouvoient voir aisément se peindre dans la mer. Elle ressembloit à une poutre brillante de 23 $^{d}$ de long, elle s'étendoit de l'Occident vers le Midy, & elle étoit presque paralléle à l'horison. Cet éclat ne dura que trois jours après lesquels il diminua considérablement; & à mesure que l'éclat de cette queue diminuoit, sa grandeur augmentoit, & on dit même qu'en *Portugal* elle occupoit presque la quatriéme partie du ciel, c'est-à-dire, 45 $^{d}$ de l'Occident vers l'Orient, avec un éclat très-considérable; & cependant cette cométe ne parut jamais toute entiére; car sa tête, dans ces régions, étoit toujours cachée sous l'horison.

L'augmentation de cette queue, lorsque son éclat diminuoit, prouve clairement que la tête de la cométe s'éloignoit du Soleil & qu'elle étoit le plus près du Soleil dans le commencement de son apparition, comme la cométe de 1680.

On lit dans la Chronique Saxonne qu'il parut une cométe semblable dans l'année 1106. *dont l'étoile étoit petite, & obscure* (comme celle de l'année 1680.) *mais dont la queue étoit très-brillante, & s'étendoit comme une grande poutre vers le Nord-Est*, comme le rapporte aussi *Hévélius* d'après *Simon moine de Dunel-*

*mensis*, elle parut au commencement de *Février* & les jours suivans vers le soir. Et l'on peut conclure de la position de sa queue que sa tête étoit très-proche du Soleil. *Elle étoit distante du Soleil*, dit *Matthieu de Paris*, *environ d'une coudée. Depuis la troisiéme heure* (& plus correctement depuis la sixiéme) *jusqu'à la neuviéme elle jettoit une grande lumiére qui s'étendoit fort loin.* Telle étoit cette cométe toute de feu, décrite par *Aristote* au Liv. 1. Met. 6. *sa tête*, dit-il, *ne se voyoit pas le premier jour, parce qu'elle se couchoit avant le Soleil, ou plutôt parce qu'elle se perdoit dans ses rayons, le jour d'ensuite, c'est tout ce qu'on put faire que de l'appercevoir, car elle ne s'éloigna du Soleil que d'une distance très-petite, & elle se coucha presqu'aussitôt après lui. Et à cause de son extrême clarté* (c'est-à-dire, de sa queue) *sa tête ne paroissoit pas encore étant toute couverte de feu, mais ensuite* (continue *Aristote*) *lorsqu'elle commença,* (c'est-à-dire, la queue) *à être moins ardente, on commença à voir la face de la cométe* (c'est-à-dire, sa tête,) *& sa clarté s'étendoit jusqu'à la troisiéme partie du ciel.* (c'est donc à dire à 60 dégrés.) *Elle parut dans l'Hyver* (la quatriéme année de la 101^e^ Olympiade) *& après s'être élevée jusqu'à la ceinture d'Orion, elle y disparut.*

La cométe de 1618. qui sortit des rayons du Soleil avec une très grande queue paroissoit égaler ou même surpasser un peu les étoiles de la premiére grandeur, mais on a vu beaucoup d'autres cométes plus grandes qui avoient de très-petites queues. Il y en a eu qui, au rapport de quelques-uns, égaloient Venus, d'autres Jupiter, & d'autres même la Lune en grandeur.

Nous concluons donc de tout ceci que les cométes sont du genre des planetes, & qu'elles tournent autour du Soleil dans des orbes très-excentriques. Et comme parmi les planetes qui n'ont point de queues, celles qui tournent dans de plus petits orbes & le plus près du Soleil sont les plus petites, il est vraisemblable que les cométes, qui dans leur périhélie approchent le plus près du Soleil, sont de beaucoup plus petites que les autres, afin que par leur attraction elles ne dérangent pas le Soleil. Au reste, je laisse à

déterminer

déterminer les diamétres transverſaux des orbes des cométes & les temps périodiques de leurs révolutions quand on pourra comparer les révolutions des cométes qui reviennent après un long eſpace de temps décrire les mêmes orbites : en attendant, la propoſition ſuivante pourra répandre quelque lumiére ſur cette recherche.

## PROPOSITION XLII. PROBLÉME XXII.

*Corriger la trajectoire trouvée d'une cométe.*

*Opération première.* Il faut prendre la poſition du plan de la trajectoire, laquelle poſition a été trouvée par la Prop. précédente, & choiſir trois lieux de la cométe qui ayent été déterminés par des obſervations bien éxactes, & qui ſoient fort éloignés les uns des autres ; que *A* ſoit le temps écoulé entre la premiére & la ſeconde obſervation, & *B* celui qu'il y a eu entre la ſeconde & la troiſiéme. Il faut que la cométe ait été dans ſon périgée dans un de ces lieux, ou que du moins elle n'en ait pas été fort éloignée. Par le moyen de ces lieux apparens ſoient trouvés par des opérations trigonométriques, trois lieux vrais de la cométe, dans le plan choiſi pour la trajectoire. Enſuite par ces lieux trouvés, ſoit décrite, par les opérations arithmétiques indiquées dans la Prop. 21. du Liv. 1. une ſection conique ayant le centre du Soleil pour foyer, que les aires de cette courbe, leſquelles ſont terminées par des rayons tirés du Soleil aux lieux trouvés, ſoient *D* & *E* : c'eſt-à-dire, *D* l'aire décrite pendant le temps écoulé entre la premiére & la ſeconde obſervation, & *E* celle qui a été décrite pendant celui qui s'eſt écoulé entre la ſeconde & la troiſiéme, & que *T* ſoit le temps total pendant lequel l'aire totale $D + E$ doit être décrite par la cométe avec la vîteſſe qui a été trouvée dans la Prop. 16. du Liv. 1.

*Opération* 2^e^. Que la longitude des nœuds du plan de la trajectoire ſoit augmentée, en ajoutant à cette longitude 20′ ou 30′ que j'appelle *P* ; & que l'inclinaiſon de ce plan à celui de l'éclip-

DU SYSTEME DU MONDE.

tique reste la même. Ensuite par le moyen des trois lieux observés de la cométe desquels on a parlé, soyent trouvés dans ce nouveau plan, trois lieux vrais comme ci-dessus ; l'orbe qui passe par ces trois points, les deux aires de cet orbe décrites entre les observations lesquelles j'appelle $d$ & $e$, ainsi que le temps total pendant lequel l'aire totale $d + e$ doit être décrite.

*Opération* 3. Soit conservée la longitude des nœuds dans la premiére opération, & soit augmentée l'inclinaison du plan de la trajectoire au plan de l'écliptique en ajoutant à cette inclinaison $20'$ ou $30'$, lesquelles j'appelle $Q$. Ensuite par les trois lieux apparens de la cométe, lesquels on a observés, & dont nous avons déja parlé, soient trouvés trois lieux vrais dans ce nouveau plan ainsi que l'orbite qui passe par ces lieux, les deux aires de cette orbite décrites entre les observations, lesquelles j'appelle $\delta$ & $\epsilon$ & le temps total $\tau$ pendant lequel l'aire totale $\delta + \epsilon$ doit être décrite.

Maintenant, soit $C : 1 :: A : B$, & $G : 1 :: D : E$; soit de plus $g : 1 :: d : e$ & $\gamma : 1 :: \delta : \epsilon$; $S$ représentant le temps vrai écoulé entre la premiere & la troisiéme observation, & les signes $+$ & $-$ étant mis comme ils le doivent être, on cherchera les nombres $m$ & $n$ par cette loi, que $2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$, & que $2T - 2S = MT - mt + nT - n\tau$. Et si dans la premiére opération $I$ représente l'inclinaison du plan de la trajectoire au plan de l'écliptique, & $K$ la longitude de l'un ou de l'autre nœud, $I + nQ$ sera la vraie inclinaison du plan de la trajectoire au plan de l'écliptique, & $K + m\rho$ la vraie longitude du nœud. Et enfin, si dans la premiere, la seconde & la troisiéme opération, les quantités $R$, $r$ & $S$ représentent les paramétres de la trajectoire, & les quantités $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ les paramétres transversaux respectifs : le vrai paramétre de la trajectoire que la cométe décrit, sera $R + mr - mR + n\rho - nR$ & son vrai paramétre transversal sera $\frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL}$ : or le paramétre transversal de la cométe étant donné, son temps périodique le sera aussi. *C. Q. F. T.*

Au reste les temps périodiques des cométes & les paramétres transversaux de leurs orbes, ne peuvent être déterminés avec une certaine précision, qu'en comparant entr'elles les cométes qui paroissent en divers temps. Si plusieurs cométes après des intervales de temps égaux, décrivent le même orbe, on doit en conclure que ces cométes ne font qu'une seule & même cométe qui fait sa révolution dans le même orbe. Et enfin, par les temps des révolutions on trouvera les paramétres transversaux des orbes, & par ces paramétres on déterminera les orbes elliptiques.

Pour y parvenir il faut donc calculer les trajectoires de plusieurs cométes en les supposant paraboliques, car cette sorte de trajectoire s'accordera toujours à peu près avec les Phénoménes. C'est ce qui est prouvé, non-seulement par la trajectoire parabolique de la cométe de 1680. que j'ai comparée ci-dessus avec les observations, mais encore par celle de cette fameuse cométe qui parut dans les années 1664. & 1665. & qui a été observée par *Hevelius*. Cet astronome a calculé aussi d'après ses observations les latitudes & les longitudes de cette cométe, mais moins exactement.

*Halley* a calculé de nouveau d'après ces mêmes observations les lieux de cette cométe, & enfin par le moyen de ses lieux ainsi trouvés il a déterminé sa trajectoire. Il a placé son nœud ascendant dans le $21^{d}\ 13'\ 55''$ des ♊, l'inclinaison de son orbite au plan de l'écliptique de $21^{d}\ 18'\ 40''$, la distance du périhélie au nœud dans l'orbite de $49^{d}\ 27'\ 30''$, son périhélie dans $8^{d}\ 40'\ 30''$ du ♌ avec une latitude australe héliocentrique de $16^{d}\ 1'\ 45''$, il a trouvé de plus, que la cométe étoit dans le périhélie le 24 *Novembre* à $11^{h}\ 52'$ après midi du temps moyen à *Londres*, ou à *Dantzig* $13^{h}\ 8'$ *V. S.* & le paramétre de la parabole de 410286 parties, la moyenne distance du Soleil à la terre en ayant 100000.

On verra par la table suivante qui a été calculée par *Halley*, combien les lieux de la cométe calculés dans cet orbe, s'accordent exactement avec les observations.

DU SYSTEME DU MONDE.

| *Temps apparent à Dantzig. V. S.* | *Distances de la comète observées.* | *Lieux observés.* | *Lieux calculés dans l'orbe.* |
|---|---|---|---|
| | d ′ ″ | d ′ ″ | d ′ ″ |
| *Déc.* 1664. | | | |
| $3^{j}\ 18^{h}\ 29'\frac{1}{2}$ | du cœur du Lion. 46.24.20<br>de l'épi de la Vierge. 22.52.10 | Long. ♎ 7. 1. 0<br>Lat. auſt. 21.39. 0 | ♎ 7. 1.29<br>21.38.50 |
| 4. 18. $1\frac{1}{2}$ | du cœur du Lion. 46. 2.45<br>de l'épi de la Vierge. 23.52.40 | Long. ♎ 16.15. 0<br>Lat. auſt. 22.24. 0 | ♎ 6.16. 5<br>22.24. 0 |
| 7. 17. 48 | du cœur du Lion. 44.48. 0<br>de l'épi de la Vierge. 27.56.40 | Long. ♎ 3, 6. 0<br>Lat. auſt. 25.22. 0 | ♎ 3. 7.33<br>25.21.40 |
| 17. 14. 43 | du cœur du Lion. 53.15.15<br>de l'ép. droite d'Or. 45.43.30 | Long. ♌ 2.56. 0<br>Lat. auſt. 49.25. 0 | ♌ 2.56. 0<br>49.25. 0 |
| 19. 9. 25 | de Procyon. 35.13.50<br>de la claire de la machoire de la Baleine. 52.56. 0 | Long. ♊ 28.40.30<br>Lat. auſt. 45.48. 0 | ♊ 28.43. 0<br>45.46. 0 |
| 20. 9. $53\frac{1}{2}$ | de Procyon. 40.49. 0<br>de la claire de la machoire de la Baleine. 40. 4 0 | Long. ♊ 13. 3. 0<br>Lat. auſt. 39.54. 0 | ♊ 13. 5. 0<br>39.53. 0 |
| 21. 9. $9\frac{1}{2}$ | de l'ép. droite d'Or. 26.21.25<br>de la claire de la machoire de la Baleine. 29.28. 0 | Long. ♊ 2.16. 0<br>Lat. auſt. 33.41. 0 | ♊ 2.18.30<br>33.39.40 |
| 22. 9. 0 | de l'ép. droite d'Or. 29.47. 0<br>de la claire de la machoire de la Baleine. 20.29.30 | Long. ♉ 24.24. 0<br>Lat. auſt. 27.45. 0 | ♉ 24.27. 0<br>27.46. 0 |
| 26. 7. 58 | de la claire du Bélier. 23.20. 0<br>d'Aldébaran. 26.44. 0 | Long. ♉ 9. 0. 0<br>Lat. auſt. 12.36. 0 | ♉ 9. 2.28<br>12.34.13 |
| 27. 6. 45 | de la claire du Bélier. 20.45. 0<br>d'Aldébaran. 28.10. 0 | Long. ♉ 7. 5.40<br>Lat. auſt. 10.23. 0 | ♉ 7. 8.45<br>10.23.13 |
| 28. 7. 39 | de la claire du Bélier. 18.29. 0<br>des Hyades. 20.37. 0 | Long. ♉ 5.24.45<br>Lat. auſt. 8.22.50 | ♉ 5.27.52<br>8.23.37 |
| 31. 6. 45 | de la ceinture d'And. 30.48.10<br>des Hyades. 32.53.30 | Long. ♉ 2. 7.40<br>Lat. auſt. 4.13. 0 | ♉ 2. 8.20<br>4.16.25 |
| *Janv.* 1665.<br>7. 7. $37\frac{1}{2}$ | de la ceinture d'And. 25.11. 0<br>des Hyades. 37.12.25 | Long. ♈ 28.24.47<br>Lat. bor. 0.54. 0 | ♈ 28.24. 0<br>0.53. 0 |
| 13. 7. 0. | de la tête d'Androm. 28. 7.10<br>des Hyades. 38.55.20 | Long. ♈ 27. 6.54<br>Lat. bor. 3. 6.50 | ♈ 27. 6.39<br>3. 7.40 |
| 24. 7. 29 | de la ceinture d'And. 20.32.15<br>des Hyades. 40. 5. 0 | Long. ♈ 26.29.15<br>Lat. bor. 5.25.50 | ♈ 26.28.50<br>5.26. 0 |
| *Février.*<br>7. 8. 37 | | Long. ♈ 27. 4.46<br>Lat. bor. 7. 3.20 | ♈ 27.24.55<br>7. 3.15 |
| 22. 8. 46 | | Long. ♈ 28.29.46<br>Lat. bor. 8.12.36 | ♈ 28.29.58<br>8.10.25 |
| *Mars.*<br>1. 8. 16 | | Long. ♈ 29.18.15<br>Lat. bor. 8.36.26 | ♈ 29.18.20<br>8.36.12 |
| 7. 8. 37 | | Long. ♈ 0. 2.48<br>Lat. bor. 8.56.30 | ♉ 0. 2.42<br>8.56.56 |

Au mois de *Février* de l'année suivante 1665. la premiére étoile d'*Aries* que j'appellerai dorénavant $\gamma$, étoit dans ♈ 28$^d$ 30′ 15″ ayant une latitude boréale de 7$^d$ 8′ 58″.

La seconde d'*Aries* étoit dans ♈ 29$^d$ 17′ 18″ avec une latitude boréale de 8$^d$ 28′ 16″.

Et une autre étoile de la septiéme grandeur que j'appellerai *A*, étoit dans ♈ 28$^d$ 24′ 45″ ayant une latitude boréale de 8$^d$ 28′ 33″, or la cométe le 7 *Février* 7′ 30″ à *Paris*, (c'est-à-dire, le 7 *Février* 8′ 37″ *V. S.* à *Dantzig*) faisoit un triangle avec ces étoiles $\gamma$ & *A*, lequel étoit rectangle en $\gamma$. Et la distance de la cométe à l'étoile $\gamma$, étoit égale à la distance des étoiles $\gamma$ & *A* entr'elles, c'est-à-dire, qu'elle étoit de 1$^d$ 19′ 46″ d'un grand cercle, & par conséquent elle étoit de 1$^d$ 20′ 26″ dans le paralléle de latitude de l'étoile $\gamma$. Donc, si de la longitude de l'étoile $\gamma$, on en ôte la longitude de 1$^d$ 20′ 26″, il restera la longitude de la cométe dans ♈ de 27$^d$ 9′ 49″.

*Auzout* qui avoit fait cette observation, en conclut que la cométe étoit à peu prés dans ♈ 27$^d$ 0′ & par la figure dans laquelle *Hook* a tracé son mouvement, elle étoit dans ♈ 26$^d$ 59′ 24″; ainsi en prenant un milieu entre ces positions je l'ai mis dans ♈ 27$^d$ 4′ 46″.

Par la même observation *Auzout* détermina la latitude de la cométe à 7$^d$ 4′ ou 5′ vers le nord : elle l'auroit été plus éxactement à 7$^d$ 3′ 29″, en supposant toutesfois la différence des latitudes de la cométe & de l'étoile $\gamma$ égale à la différence des longitudes des étoiles $\gamma$ & *A*.

Le 22 *Février* à 7$^h$ 30′ à *Londres*, c'est-à-dire, le 22 *Février* à 8$^h$ 46′ à *Dantzig*, la distance de la cométe à l'étoile *A*, selon l'observation de *Hook* qu'il avoit tracée même dans une figure, & selon la figure de *Petit* tracée d'aprés les observations d'*Auzout*, étoit la cinquiéme partie de la distance entre l'étoile *A* & la premiére d'*Aries*, ou 15′ 57″. Et la distance de la cométe à la ligne qui joint l'étoile *A* & la premiére d'*Aries* étoit la qua-

DU SYSTEME DU MONDE.

triéme partie de cette cinquiéme partie, c'est-à-dire, 41." La comete étoit donc dans ♈ 28 d 29′ 46″ ayant 8 d 12′ 36″ de latitude boréale.

Le premier *Mars* à 7 h 0′ à *Londres*, qui reviennent à 8 h 16′ à *Dantzig*, la cométe fut observée près de la seconde *d'Aries*, la distance entre la cométe & cette étoile, étant à la distance entre la premiére & la seconde d'*Aries*, c'est-à-dire, à 1 d 33′ comme 4 à 45 selon *Hook*, ou comme 2 à 23 selon *Gottignies*; ou bien, en prenant un milieu entre ces positions, de 8′ 10″. Mais la cométe, selon *Gottignies*, avoit alors précédé la seconde d'*Aries* presque de la quatriéme ou cinquiéme partie du chemin qu'elle faisoit en un jour, c'est-à-dire, de 1′ 35″ environ, (en quoi il s'accorde assez bien avec *Auzout*) ou un peu moins selon *Hook*, comme 1′ par exemple. Donc, si à la longitude de la premiére d'*Aries*, on ajoute 1′, & 8′ 10″ à sa latitude, on aura la longitude de la cométe de 29 d 18′ & sa latitude boréale de 8 d 36′ 26″

Le 7 de *Mars* à 7 h 30′ à *Paris* (qui font 8 h 37′ à *Dantzig*) la distance de la cométe à la seconde d'*Aries* étoit, selon les observations d'*Auzout*, égale à la distance de la seconde d'*Aries* à l'étoile *A*, c'est-à-dire, qu'elle étoit de 52′ 29″ & la différence des longitudes de la cométe & de la seconde d'*Aries* étoit de 45′ ou 46′; ou en prenant un milieu entre ces positions de 45′ 30″. Donc la cométe étoit dans ♉ 0 d 2′ 48″. Selon la figure construite par *Petit* sur les observations d'*Auzout*, *Hevelius* a conclu la latitude de cette cométe de 8 d 54′, mais le graveur a courbé un peu irréguliérement le chemin de la cométe vers la fin de son mouvement, *Hevelius* a corrigé cette incurvation irréguliére dans la figure qu'il a tracée d'après les observations d'*Auzout*, & il a fixé la latitude de la cométe à 8 d 55′ 30″, & en corrigeant l'irrégularité, la latitude peut aller à 8 d 56′ ou à 8 d 57′.

Cette cométe fut encore vue le 9 *Mars*, & alors elle devoit être dans ♉ 0 d 18′ ayant 9 d 3′½ environ de latitude boréale.

Cette cométe parut trois mois, elle parcourut presque six signes,

& elle faisoit près de $20'$ par jour. Son orbe étoit fort différent d'un grand cercle, il étoit incurvé vers le Nord; & sur la fin son mouvement de rétrograde devint direct. Ce cours si peu ordinaire s'accorda depuis le commencement jusqu'à la fin aussi exactement avec la théorie, que le cours des planétes a coutume de s'accorder avec leur théorie, comme on le verra par la table suivante. Il faut cependant soustraire deux minutes environ pour le temps où la cométe avoit la plus grande vîtesse; ce qu'on fera en ôtant douze secondes de l'angle compris entre le nœud ascendant & le périhélie, ou en faisant cet angle de $49^{d}\ 27'\ 18''$. La parallaxe annuelle de ces deux cométes (sçavoir de celle-ci & de la précédente) étoit très-considérable, ce qui démontre le mouvement de la terre dans son grand orbe.

Cette théorie est encore confirmée par le mouvement de la cométe qui parut dans l'année 1683. Celle-là fut rétrograde dans son orbe, dont le plan faisoit avec l'écliptique un angle presque droit. Son nœud ascendant étoit (selon le calcul de *Halley*) dans ♍ $23^{d}\ 23'$: l'inclinaison de son orbe à l'écliptique étoit de $83^{d}\ 11'$: son périhélie étoit dans ♊ $25^{d}\ 29'\ 30''$, & la distance de son périhélie au Soleil étoit de 56020 parties, le rayon du grand orbe en ayant 100000, & son périhélie arriva le 2 *Juillet* à $3^{h}\ 50'$. Les lieux de la cométe dans cet orbe ont été calculés par *Halley*, & on les trouve dans la table suivante comparés avec les lieux observés par *Flamstead*.

DU SYSTEME DU MONDE.

| 1683. *Temps moy.* | *Lieu du ſoleil.* | *Long. calculées de la comét.* | *Latit. boréal. calcul.* | *Long. obſervées de la comét.* | *Lat. boréales obſerv.* | *Différ. des longitud.* | *Différ. des latitud.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Jours.* h ′ | d ′ ″ | d ′ ″ | d ′ ″ | d ′ ″ | d ′ ″ | ′ ″ | ′ ″ |
| *Juill.* 13.12.55 | ♌ 1. 2.30 | ♋ 13. 5.42 | 29.28.13 | ♋ 13. 6.42 | 29.28.20 | +1. 0 | +0. 7 |
| 15.11.15 | 2.53.12 | 11.37. 4 | 29.34. 0 | 11.39.43 | 29.34.50 | +1.55 | +0.50 |
| 17.10.20 | 4.45.45 | 10. 7. 6 | 29.33.30 | 10. 8.40 | 29.34. 0 | +1.34 | +0.30 |
| 23.13.40 | 10.38.21 | 5.10.27 | 28.51.42 | 5.11.30 | 28.50.28 | +1. 3 | −1.14 |
| 25.14. 5 | 12.35.28 | 3.27.53 | 24.24.47 | 3.27. 0 | 28.23.40 | −0.53 | −1. 7 |
| 31. 9.42 | 18. 9.22 | ♊ 27.55. 3 | 26.22.52 | ♊ 27.54.24 | 26.22.25 | −0.39 | −0.27 |
| 31.14.55 | 18.21.53 | 27.41. 7 | 26.16.57 | 27.41. 8 | 26.14.50 | +0. 1 | −2. 7 |
| *Août.* 2.14.56 | 20.17.16 | 25.29.32 | 25.16.19 | 25.28.46 | 25.17.28 | −0.46 | +1. 9 |
| 4.10.49 | 22. 2.50 | 23.18.20 | 24.10.49 | 23.16.55 | 23.12.19 | −1.25 | +1.30 |
| 6.10. 9 | 23.56.45 | 20.42.23 | 22.47. 5 | 20.40.32 | 22.49. 5 | −1.51 | +2. 0 |
| 9.10.26 | 26.50.52 | 16. 7.57 | 20. 6.37 | 16. 5.55 | 20. 6.10 | −2. 2 | −0.27 |
| 15.14. 1 | ♍ 2.47.13 | 3.30.48 | 11.37.33 | 3.26.18 | 11.32. 1 | −4.30 | −5.32 |
| 16.15.10 | 3.48. 2 | 0.43. 7 | 9.34.16 | 0.41.55 | 9.34.13 | −1.12 | −0. 3 |
| 18.15.44 | 5.45.33 | ♉ 24.52.53 | 5.11.15 | ♉ 24.49. 5 | 5. 9.11 | −3.48 | −2. 4 |
| | | | Auſtr. | | Auſtr. | | |
| 22.14.44 | 9.35.49 | 11. 7.14 | 5.16.58 | 11. 7.12 | 5.16.58 | −0. 2 | −0. 3 |
| 23.15.52 | 10.36.48 | 7. 2.18 | 8.17. 9 | 7. 1.17 | 8.16.41 | −1. 1 | −0.28 |
| 26.16. 2 | 13.31.10 | ♈ 24.45.31 | 16.38. 0 | ♈ 24.44. 0 | 16,38,20 | −1.31 | +0.20 |

La théorie précédente eſt encore confirmée par le mouvement de la cométe rétrograde qui parut l'année 1682. Son nœud aſcendant, ſelon le calcul de *Halley*, étoit dans ♉ 21 $^{d}$ 16′ 30″, l'inclinaiſon de ſon orbite au plan de l'écliptique étoit de 17 $^{d}$ 56′ 0″. Son périhélie étoit dans ♒ 2 $^{d}$ 52′ 50″, ſa diſtance périhélie au Soleil de 58328 parties, le rayon du grand orbe en ayant 100000. Et le temps corrigé de ſon périhélie étoit le 4 de *Septembre* à 7 $^{h}$ 39′. L'on trouve dans la table ſuivante, la comparaiſon de ces lieux calculés ſur les obſervations de *Flamſtead* avec les lieux que donne la théorie.

| *Temps apparent, 1682.* | *Lieu du soleil.* | *Long. de la cométe calculées.* | *Latitudes bor. calcul.* | *Long. de la cométe observées.* | *Latit. boréal. observ.* | *Differ. des longitud.* | *Differ des latitud.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Jours.* h ′ | ° ′ ″ | ° ′ ″ | ° ′ ″ | ° ′ ″ | ° ′ ″ | ′ ″ | ′ ″ |
| *Août.* 19.16.38 | ♍ 7. 0. 7 | ♌ 18.14.28 | 25.50. 7 | ♌ 18.14.40 | 25.49.5[illegible] | −0.12 | +0.12 |
| 20.15.38 | 7.55.52 | 24.46.23 | 26.14.42 | 24.46.21 | 26.12.52 | +0. 1 | + .50 |
| 21. 8.21 | 8.36.14 | 29.37.15 | 26.20. 3 | 29.38. 2 | 26.17.3[illegible] | −0.47 | +2.2[illegible] |
| 22. 8. 8 | 9.33.55 | ♍ 6.29.53 | 26. 8.42 | ♍ 6.30. 3 | 26. 7.12 | −0.10 | +1.30 |
| 29. 8.20 | 16.22.40 | ♎ 12.37.54 | 18.37.47 | ♎ 12.37.49 | 18.34. 5 | +0. 5 | +3.42 |
| 30. 7.45 | 16.19.41 | 15.36. 1 | 17.26.43 | 15.35.18 | 17.27.17 | +0.4[illegible] | −0.34 |
| *Sept.* 1. 7.33 | 19.16. 9 | 20.30.53 | 15.13. 0 | 20.27. 4 | 15. 9.49 | +3.49 | +3.11 |
| 4. 7.22 | 22.11.28 | 15.42. 0 | 12.23.48 | 25.41.58 | 12.22. 0 | +1. 2 | +1.48 |
| 5. 7.32 | 23.10.29 | 27. 0.46 | 11.33. 8 | 26.59.24 | 11.33.51 | +1.22 | −0.43 |
| 8. 7.16 | 26. 5.58 | 29.58.44 | 9.26.46 | 29.58.45 | 9.26.43 | −0. 1 | +0. 3 |
| 9. 7.26 | 27. 5. 9 | ♏ 0.44.10 | 8.49.10 | ♏ 0.44. 4 | 8.48.25 | +0. 6 | +0.45 |

Enfin le mouvement rétrograde de la cométe qui parut en 1723. confirme encore cette théorie, son nœud ascendant (selon le calcul du Docteur *Bradley* Professeur Savilien d'astronomie à *Oxford*) étoit dans ♈ 14° 16′, l'inclinaison de son orbe au plan de l'écliptique étoit de 49° 59′. Son périhélie étoit dans ♉ 12° 15′ 20″. Sa distance périhélie au Soleil étoit de 998651 parties, le rayon du grand orbe étant de 1000000, & le temps corrigé de son périhélie étoit le 16 *Septembre* à 16 h 10′. Les lieux de cette cométe dans cet orbe, calculés par *Bradley*, & comparés avec les lieux qui furent observés par lui-même, par *Pound* son grand oncle, & par le Docteur *Halley*, se trouvent dans la table suivante.

| 1723. Temps moyen. | Longit. obſerv. de la cométe. | Latit. boréales obſerv. | Longit. de la cométe calc. | Latit. boréales calc. | Diff. des Long. | Diff. des Lat. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Jours. h ′ | ° ′ ″ | ° ′ ″ | ° ′ ″ | ° ′ ″ | ″ | ″ |
| Oct. 9. 8. 5 | ♒ 7.22.15 | 5. 2. 0 | ♒ 7.21.26 | 5. 2.47 | +49 | −47 |
| 10. 6.21 | 6.41.12 | 7.44.13 | 6.41.42 | 7.43.18 | −50 | +55 |
| 12. 7.22 | 5.39.58 | 11.55. 0 | 5.40.19 | 11.54.55 | −21 | + 5 |
| 14. 8.57 | 4.59.49 | 14.43.50 | 5. 0.37 | 14.44. 1 | −48 | −11 |
| 15. 6.35 | 4.47.41 | 15.40.51 | 4.47.45 | 15.40.55 | − 4 | − 4 |
| 21. 6.22 | 4. 2.32 | 19.41.49 | 4. 2.21 | 19.42. 3 | +11 | −14 |
| 22. 6.24 | 3.59. 2 | 20. 8.12 | 3.59.10 | 20. 8.17 | − 8 | − 5 |
| 24. 8. 2 | 3.55.29 | 20.55.18 | 3.55.11 | 20.55. 9 | +18 | + 9 |
| 29. 8.56 | 3.56.17 | 22.20.27 | 3.56.42 | 22.20.10 | −25 | +17 |
| 30. 6.20 | 3.58. 9 | 22.32.28 | 3.58.17 | 22.32.12 | − 8 | +16 |
| Nov. 5. 5.53 | 4.16.30 | 23.38.33 | 4.16.23 | 23.38. 7 | + 7 | +26 |
| 8. 7. 6 | 4.29.36 | 42. 4.10 | 4.29.54 | 24. 4 40 | −18 | −10 |
| 14. 6.20 | 5. 2.16 | 24.48.46 | 5. 2.51 | 24.48.16 | −35 | +30 |
| 20. 7.45 | 5.42.20 | 25.24.45 | 5.43.13 | 25.25.17 | −53 | −32 |
| Déc. 7. 6.45 | 8. 4.13 | 26.54.18 | 8. 3.55 | 26.53.42 | +18 | +36 |

Ces exemples ſuffiſent pour prouver que les mouvemens des cométes ſe déduiſent auſſi exactement de la théorie que nous venons d'expoſer que les mouvemens des planétes ſe tirent de la leur. Ainſi on peut, par cette théorie, calculer les orbes des cométes, & l'on pourra connoître par la ſuite le temps périodique d'une cométe révolvante dans un orbe quelconque, & parvenir par ce moyen à connoître tant les axes de leurs orbes, ſuppoſés elliptiques, que leurs diſtances aphélies.

La cométe rétrograde qui parut en 1607. décrivit un orbe, dont le nœud aſcendant (ſelon le calcul de *Halley*) étoit dans ♉ 20° 21′, l'inclinaiſon du plan de ſon orbite au plan de l'écliptique de 17° 2′. Le périhélie à ♒ 2° 16′, la diſtance périhélie de 58680 parties, le rayon du grand orbe en ayant 100000; le tems du périhélie de cette cométe étoit le 16 *Octobre* à 3 h 50′.

Cet orbe s'accorde aſſez juſte avec celui de la cométe qui parut en 1682.

En ſuppoſant que ces deux cométes n'ayent été qu'une ſeule

& même cométe, on trouvera que le temps de sa révolution est de 75 ans, que le grand axe de son orbe est au grand axe de l'orbe de la terre comme $\sqrt{c : 75 \times 75}$ à 1 ou comme 1778 à 100 environ, & que la distance aphélie de cette cométe est à la distance moyenne de la terre au Soleil comme 35 à 1 environ. Ce qui étant connu, il ne sera pas difficile de déterminer l'orbe elliptique de cette cométe. Tout cela se trouvera prouvé si cette cométe revient dans ce même orbe au bout de 75 ans. Il paroît que les autres cométes employent plus de temps à faire leurs révolutions, & qu'elles montent à de plus grandes distances.

Au reste les cométes doivent troubler sensiblement leurs cours par leur attraction mutuelle, tant à cause de leur grand nombre & de leur grand éloignement du Soleil dans leurs aphélies, que du temps qu'elles demeurent dans ces aphélies, ce qui doit tantôt diminuer & tantôt augmenter leurs excentricités & les tems de leurs révolutions. Ainsi il ne faut pas espérer que la même cométe décrive toujours le même orbe, ni que son temps périodique soit toujours éxactement le même. Il suffit que les variations n'excedent pas celles qu'on peut attribuer à ces causes.

On peut trouver par-là la raison pour laquelle les cométes ne sont point renfermées dans le Zodiaque comme les planétes, & pourquoi elles sont portées par des mouvemens divers dans toutes les régions du ciel; car c'est afin que dans leurs aphélies, où leur mouvement est très-lent, elles soient assez éloignées les unes des autres pour que leur attraction mutuelle ne soit pas trop sensible. C'est par cette raison que les cométes qui descendent de plus haut, & qui par conséquent se meuvent plus lentement dans leurs aphélies, doivent remonter plus haut.

La cométe qui parut l'année 1680. étoit à peine éloignée du soleil, dans son périhélie, de la sixiéme partie du diamétre du Soleil; & à cause de l'extrême vîtesse qu'elle avoit alors & de la densité que peut avoir l'atmosphére du Soleil, elle dut éprouver quelque résistance, & par conséquent son mouvement dut être un peu retardé, & elle dut approcher plus près du Soleil, & en continuant d'en approcher toujours plus près à chaque révolution, elle tombera à la fin sur le globe du Soleil. Dans l'aphélie où son mouvement est plus lent, elle peut être retardée par l'attraction des autres cométes & tomber tout-a-coup dans le Soleil. Ainsi les étoiles fixes qui peu à peu s'épuisent en rayons & en vapeurs, peuvent se renouveller par des cométes qui viennent y tomber, & en se rallumant par le moyen de ce nouvel aliment, paroître de nouvelles étoiles. De ce genre sont les étoiles fixes qui paroissent tout d'un coup, qui sont au commencement dans tout leur brillant, & qui ensuite disparoissent peu à peu. Telle fut l'étoile que *Cornelius Gemma* apperçut le 8 *Novembre* 1572. dans la chaise de *Cassiopée*, en examinant cette partie du ciel par une nuit peu seraine, & qu'il vit la nuit suivante (c'est-à-dire, le 9 *Novembre*) plus brillante qu'aucune étoile fixe, & le cédant à peine en lumiére à Venus. *Ticho-Brahé* vit cette même étoile le 11 du même mois dans le tems où son éclat étoit le plus vif. Depuis ce jour elle diminua peu à peu, & dans l'espace de 16 mois il la vit s'évanouir.

Au mois de *Novembre*, où elle commença à paroître, sa lumiére égaloit celle de Venus.

Au mois de *Décembre* suivant à peine étoit-elle diminuée, & elle égaloit encore Jupiter.

Au mois de *Janvier* 1573. elle étoit plus petite que Jupiter, & plus grande que Sirius.

A la fin de *Février* & au commencement de *Mars* elle devint égale à Sirius.

Aux mois d'*Avril* & de *May* elle n'étoit plus que de la seconde grandeur.

Aux mois de *Juin*, *Juillet* & *Aout* elle étoit de la troisiéme.

Aux mois de *Septembre*, d'*Octobre* & de *Novembre*, elle étoit de la quatriéme.

Au mois de Décembre 1573. & au mois de *Janvier* de l'année 1574. elle ne fut plus que de la cinquiéme.

Au mois de *Février* elle étoit de la sixiéme.

Et enfin au mois de *Mars* elle disparut.

La couleur dans le commencement fut claire, blanchâtre & très brillante, ensuite elle devint jaunâtre.

Au mois de *Mars* 1573. elle étoit rougeâtre à peu près comme *Mars*, ou l'étoile Aldébaran.

Au mois de *May* elle devint d'un blanc livide tel que celui de Saturne, & elle conserva cette couleur jusqu'à la fin devenant cependant toujours plus obscure.

Telle fut aussi l'étoile que les disciples de *Kepler* apperçurent pour la premiere fois le 30 *Septembre* 1604, V. S. dans le pied droit du Serpentaire, & qui surpassoit déja Jupiter en lumiére, quoique la nuit précédente elle eut parut très-petite. Elle commença ensuite à décroître peu à peu, & on cessa de l'appercevoir au bout de 15 ou 16 mois.

Ce fut une nouvelle étoile de cette espéce qui parut si brillante du temps d'*Hipparque*, qu'elle le détermina, comme le rapporte *Pline*, à observer les fixes, & à en donner un catalogue.

Les étoiles qui paroissent & disparoissent tour à tour, dont la lumiére s'augmente peu à peu, & qui ne passent pas la troisiéme grandeur, paroissent être d'un autre genre, & nous montrer dans leur révolution tantôt une partie brillante & tantôt une partie obscure de leur disque.

Les vapeurs qui s'exhalent du Soleil, des étoiles fixes, & des queues des cométes, peuvent tomber par leur gravité dans les atmosphéres des planétes, s'y condenser, & s'y convertir en eau & en esprits humides, & ensuite par une chaleur lente, se changer peu à peu en sels, en souffres, en teintures, en limon, en argile, en boue, en sable, en pierre, en corail, & en d'autres matiéres terrestres.

## SCHOLIE GÉNÉRAL.

L'hypothèse des tourbillons est sujette à beaucoup de difficultés. Car afin que chaque planéte puisse décrire autour du Soleil des aires proportionnelles au temps, il faudroit que les temps périodiques des parties de leur tourbillon fussent en raison doublée de leurs distances au Soleil.

Afin que les temps périodiques des planétes soient en raison sesquiplée de leurs distances au Soleil, il faudroit que les temps périodiques des parties de leurs tourbillons fussent en raison sesquiplée de leurs distances à cet astre.

Et afin que les petits tourbillons qui tournent autour de Saturne, de Jupiter & des autres planétes, puissent subsister & nâger librement dans le tourbillon du Soleil, il faudroit que les temps périodiques des parties du tourbillon solaire fussent égaux. Or les révolutions du Soleil & des planétes autour de leur axe qui devroient s'accorder avec les mouvemens des tourbillons, s'éloignent beaucoup de toutes ces proportions.

Les cométes ont des mouvemens fort réguliers, elles suivent dans leurs révolutions les mêmes loix que les planétes; & leur cours ne peut s'expliquer par les tourbillons. Car les cométes sont transportées par des mouvemens très-excentriques dans toutes les parties du ciel, ce qui ne peut s'exécuter si on ne renonce aux tourbillons.

Les projectiles n'éprouvent ici-bas d'autre résistance que celle de l'air, & dans le vuide de *Boyle* la résistance cesse, ensorte qu'une plume & de l'or y tombent avec une égale vitesse. Il en est de même des espaces célestes au-dessus de l'atmosphére de la terre, lesquels sont vuides d'air : tous les corps doivent se mouvoir très-librement dans ces espaces; & par conséquent les planétes & les cométes doivent y faire continuellement leurs révolutions dans des orbes donnés d'espéce & de position, en suivant les loix ci-dessus exposées. Et elles doivent continuer par les loix de la gravité à se mouvoir dans leurs orbes, mais la position primitive & réguliére de ces orbes ne peut être attribuée à ces loix.

Les six planétes principales font leurs révolutions autour du Soleil dans des cercles qui lui sont concentriques, elles sont toutes à peu près dans le même plan, & leurs mouvemens ont la même direction.

Les dix Lunes qui tournent autour de la terre, de Jupiter & de Saturne dans des cercles concentriques à ces planétes, se meuvent dans le même sens & dans les plans des orbes de ces planétes à peu près. Tous ces mouvemens si réguliers n'ont point de causes méchaniques ; puisque les cométes se meuvent dans des orbes fort excentriques, & dans toutes les parties du ciel.

Par cette espece de mouvement les cométes traversent très-vîte & très-facilement les orbes des planétes, & dans leur aphélie, où leur mouvement est très-lent, & où elles demeurent très-longtemps, elles sont si eloignées les unes des autres que leur attraction mutuelle est presque insensible.

Cet admirable arrangement du Soleil, des planétes & des cométes, ne peut être que l'ouvrage d'un être tout-puissant & intelligent. Et si chaque etoile fixe est le centre d'un sistême semblable au nôtre, il est certain, que tout portant l'empreinte d'un même dessein, tout doit être soumis à un seul & même Etre : car la lumiere que le Soleil & les etoiles fixes se renvoyent mutuellement est de même nature. De plus, on voit que celui qui a arrangé cet Univers, a mis les etoiles fixes à une distance immense les unes des autres, de peur que ces globes ne tombassent les uns sur les autres par la force de leur gravité.

Cet Etre infini gouverne tout, non comme l'ame du monde, mais comme le Seigneur de toutes choses. Et à cause de cet empire, le Seigneur-Dieu s'appelle Παντοκράτωρ, c'est-à-dire, *le Seigneur universel.* Car *Dieu* est un mot relatif & qui se rapporte à

DU SYSTEME DU MONDE.

des serviteurs : & l'on doit entendre par divinité la puissance suprême non pas seulement sur des êtres matériels, comme le pensent ceux qui font Dieu uniquement l'ame du monde, mais sur des êtres pensans qui lui sont soumis. Le Très-haut est un Etre infini, éternel, entierement parfait : mais un Etre, quelque parfait qu'il fût, s'il n'avoit pas de domination, ne seroit pas Dieu. Car nous disons, *mon Dieu*, *votre Dieu*, *le Dieu d'Israel*, *le Dieu des Dieux*, & *le Seigneur des Seigneurs*, mais nous ne disons point, *mon Eternel*, *votre Eternel*, *l'Eternel d'Israel*, *l'Eternel des Dieux*; nous ne disons point, *mon infini*, ni *mon parfait*, parce que ces dénominations n'ont pas de relation à des êtres soumis. Le mot de Dieu signifie quelquefois le Seigneur. * Mais tout Seigneur n'est pas Dieu. La domination d'un Etre spirituel est ce qui constitue *Dieu* : elle est vraie dans le vrai Dieu, elle s'étend à tout dans le Dieu qui est au-dessus de tout, & elle est seulement fictice & imaginée dans les faux Dieux : il suit de ceci que le vrai Dieu est un Dieu vivant, intelligent, & puissant; qu'il est au-dessus de tout, & entierement parfait. Il est éternel & infini, tout-puissant, & *omni-scient*, c'est-à-dire, qu'il dure depuis l'éternité passée & dans l'éternité à venir, & qu'il est présent partout l'espace infini : il régit tout; & il connoît tout ce qui est & tout ce qui peut être. Il n'est pas l'éternité ni l'infinité, mais il est éternel & infini; il n'est pas la durée ni l'espace, mais il dure & il est présent; il dure toujours & il est présent partout; il est éxistant toujours & en tout lieu, il constitue l'espace & la durée.

Comme chaque particule de l'espace éxiste toujours, & que chaque moment indivisible de la durée dure partout, on ne peut pas dire que celui qui a fait toutes choses & qui en est le Seigneur

* *Pocock* fait dériver le mot *de Dieu* du mot arabe (*Du* & au génitif *Di*) qui signifie *Seigneur*, & c'est dans ce sens que les Princes sont appellés *Dieux* (au Pseaume 84. v. 6. & au 10. ch. de S. Jean, v. 45.) Moyse est appellé le Dieu de son frere Aaron, & le Dieu du Roi Pharaon, (ch. 4. de l'Exod. v. 16. & ch. 7. v. 1.) & dans le même sens les ames des Princes morts étoient appellées *Dieux* autrefois par les Gentils, mais c'étoit à tort, car après leur mort ils n'avoient plus de domination.

n'est

n'eſt *jamais* & *nulle-part.* Toute ame qui ſent en divers temps, par divers ſens, & par le mouvement de pluſieurs organes, eſt toujours une ſeule & même perſonne indiviſible.

Il y a des parties ſucceſſives dans la durée, & des parties co-exiſtantes dans l'eſpace: il n'y a rien de ſemblable dans ce qui conſtitue la perſonne de l'homme ou dans ſon principe penſant; & bien moins y en aura-t'il dans la ſubſtance penſante de Dieu. Tout homme, en tant qu'il eſt un Etre ſentant, eſt un ſeul & même homme pendant toute ſa vie & dans tous les divers organes de ſes ſens. Ainſi Dieu eſt un ſeul & même Dieu partout & toujours. Il eſt préſent partout, non ſeulement *virtuellement*, mais *ſubſtantiellement*, car on ne peut agir où l'on n'eſt pas. Tout eſt mû & * contenu dans lui, mais ſans aucune action des autres êtres ſur lui. Car Dieu n'éprouve rien par le mouvement des corps: & ſa toute-préſence ne leur fait ſentir aucune réſiſtance, il eſt évident que le Dieu ſuprême éxiſte néceſſairement: & par la même néceſſité il éxiſte partout & toujours. D'où il ſuit auſſi qu'il eſt tout ſemblable à lui-même, tout œil, tout oreille, tout cerveau, tout bras, tout ſenſation, tout intelligence, & tout action: d'une façon nullement humaine, encore moins corporelle, & entiérement inconnue. Car de même qu'un aveugle n'a pas d'idée des couleurs, ainſi nous n'avons point d'idées de la maniére dont l'Etre ſupréme ſent & connoît toutes choſes. Il n'a point de corps ni de forme corporelle, ainſi il ne peut être ni vû, ni touché, ni en-

* Les anciens penſoient ainſi, comme il paroît par la maniére dont s'exprime *Pythagore*, dans le livre de la Nature des Dieux de *Ciceron*, liv. 1. ainſi que *Thalès* & *Anaxagore*; *Virgile* dans les Georgiques, liv. 4. v. 220 & dans le 6 liv. de l'Eneide v. 721. *Philon* au commencement du liv. 1. de l'Allégorie. *Aratus* dans ſes phénoménes. Il en eſt de même des Auteurs ſacrés, S. *Paul*, Actes des Apôtr. ch. 17. v. 27. & 28. S. *Jean* dans ſon Evangile, ch. 14. v. 2. *Moyſe* dans le Deuteronome, ch. 4. v. 39 & ch. 10. v. 14. *David* dans le Pſeaume 139. v. 7. 8 & 9. *Salomon* au 1. liv. des Rois, ch. 8. v. 27. *Job*, ch. 22. v. 12. 13 & 14. *Jérémie*, ch. 23. v. 23 & 24. Les Payens s'imaginoient que le Soleil, la Lune, les aſtres, les ames des hommes & toutes les autres parties du monde étoient des parties de l'être ſupréme & qu'on leur devoit un culte, mais c'étoit une erreur.

tendu, & on ne doit l'adorer sous aucune forme sensible. Nous avons des idées de ses attributs, mais nous n'en avons aucune de sa substance. Nous voyons les figures & les couleurs des corps, nous entendons leurs sons, nous touchons leurs superficies extérieures, nous sentons leurs odeurs, nous goûtons leurs saveurs : mais quant aux substances intimes, nous ne les connoissons par aucun sens, ni par aucune réflexion; & nous avons encore beaucoup moins d'idée de la substance de Dieu. Nous le connoissons seulement par ses propriétés & ses attributs, par la structure très-sage & très-excellente des choses, & par leurs causes finales; nous l'admirons à cause de ses perfections; nous le révérons & nous l'adorons à cause de son empire; nous l'adorons comme soumis, car un Dieu sans providence, sans empire & sans causes finales, n'est autre chose que le destin & la nature; la nécessité métaphysique, qui est toujours & partout la même, ne peut produire aucune diversité; la diversité qui régne en tout, quant au tems & aux lieux, ne peut venir que de la volonté & de la sagesse d'un Etre qui éxiste nécessairement.

On dit allégoriquement que Dieu voit, entend, parle, qu'il se réjouit, qu'il est en colere, qu'il aime, qu'il hait, qu'il desire, qu'il construit, qu'il bâtit, qu'il fabrique, qu'il accepte, qu'il donne, parce que tout ce qu'on dit de Dieu est pris de quelque comparaison avec les choses humaines; mais ces comparaisons, quoiqu'elles soient très-imparfaites, en donnent cependant quelque foible idée. Voilà ce que j'avois à dire de Dieu, dont il appartient à la philosophie naturelle d'examiner les ouvrages.

J'ai expliqué jusqu'ici les phénoménes célestes & ceux de la mer par la force de la gravitation, mais je n'ai assigné nulle part la cause de cette gravitation. Cette force vient de quelque cause qui pénétre jusqu'au centre du Soleil & des planétes, sans rien perdre de son activité; elle n'agit point selon la grandeur des superficies, (comme les causes méchaniques) mais selon la quantité de la matiere; & son action s'étend de toutes parts à des diftances immenses, en décroissant toujours dans la raison doublée des distances.

La gravité vers le Soleil est composée des gravités vers chacune de ses particules, & elle décroît éxactement, en s'éloignant du Soleil, en raison doublée des distances, & cela jusqu'à l'orbe de Saturne, comme le repos des aphélies des planétes le prouve, & elle s'étend jusqu'aux dernieres aphélies des cométes, si ces aphélies sont en repos.

Je n'ai pû encore parvenir à déduire des phénomenes la raison de ces propriétés de la gravité, & je n'imagine point d'hypothèses. Car tout ce qui ne se déduit point des phénomenes est une hypothèse: & les hypothèses, soit métaphysiques, soit physiques, soit mécaniques, soit celles des qualités occultes, ne doivent pas être reçues dans la philosophie expérimentale.

Dans cette philosophie, on tire les propositions des phénomenes, & on les rend ensuite générales par induction. C'est ainsi que l'impénétrabilité, la mobilité, la force des corps, les loix du mouvement, & celles de la gravité ont été connues. Et il suffit que la gravité éxiste, qu'elle agisse selon les loix que nous avons exposées, & qu'elle puisse expliquer tous les mouvemens des corps célestes & ceux de la mer.

Ce seroit ici le lieu d'ajouter quelque chose sur cette espéce d'esprit très subtil qui pénétre à travers tous les corps solides, & qui est caché dans leur substance; c'est par la force, & l'action de cet esprit que les particules des corps s'attirent mutuellement aux plus petites distances, & qu'elles cohérent lorsqu'elles sont contigues; c'est par lui que les corps électriques agissent à de plus grandes distances, tant pour attirer que pour repousser les corpuscules voisins: & c'est encore par le moyen de cet esprit que la lumiére émane, se réfléchit, s'infléchit, se réfracte, & échauffe les corps; toutes les sensations sont excitées, & les membres des animaux sont mûs, quand leur volonté l'ordonne, par les vibrations

DU SYSTEME DU MONDE.

de cette ſubſtance ſpiritueuſe qui ſe propage des organes extérieurs des ſens, par les filets ſolides des nerfs, juſqu'au cerveau, & enſuite du cerveau dans les muſcles. Mais ces choſes ne peuvent s'expliquer en peu de mots; & on n'a pas fait encore un nombre ſuffiſant d'expériences pour pouvoir déterminer éxactement les loix ſelon leſquelles agit cet eſprit univerſel.



EXPOSITION

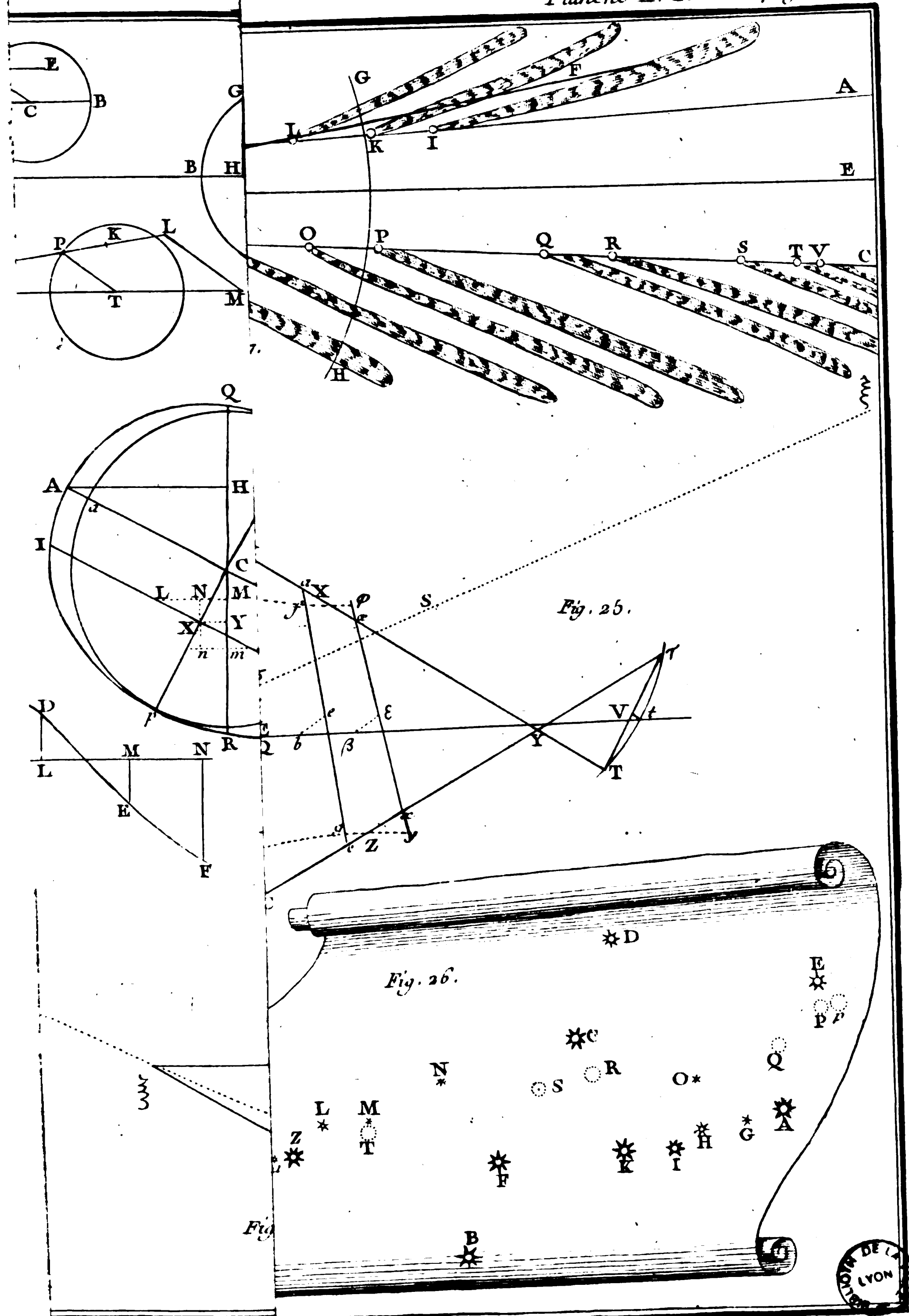
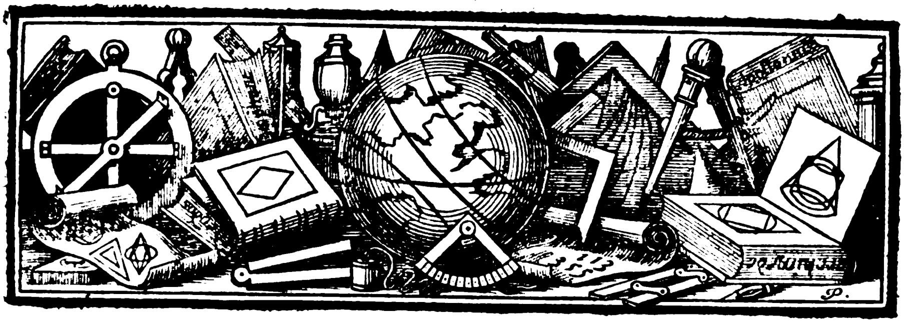


Fig. 25.

Fig. 26.



# EXPOSITION ABREGÉE DU SYSTÊME DU MONDE,

## ET EXPLICATION DES PRINCIPAUX *Phénomenes astronomiques tirée des Principes de M. Newton.*

## *INTRODUCTION.*

I.

*Premieres idées des Philosophes sur l'Astronomie.*

LES Philosophes ont commencé par avoir sur l'Astronomie, comme sur le reste, les mêmes idées que le peuple, mais ils les ont rectifiées; ainsi on a commencé par croire que la terre étoit platte, & qu'elle étoit le centre autour duquel tournoient tous les corps célestes.

I I.

*Découvertes de*

Les *Babyloniens*, & ensuite *Pithagore* & ses Disciples, ayant

*Babyloniens & de Pithagore.*

examiné ces idées des sens, reconnurent que la terre est ronde; & regarderent le Soleil comme le centre de l'univers (*a*).

## III.

On doit être surpris que le véritable systême du monde ayant été découvert, l'hypothèse dans laquelle on suppose que la terre est le centre des mouvemens célestes ait prévalu; car bien que cette hypothèse s'accorde avec les apparences, & qu'elle semble d'abord d'une extrême simplicité, il s'en faut beaucoup qu'il soit aisé d'y rendre compte des mouvemens célestes: aussi *Ptolomée*, & ceux qui depuis lui ont voulu soutenir cette opinion du repos de la terre, ont-ils été obligés d'embarrasser les cieux de différens Epycicles, & d'une quantité innombrable de cercles très-difficiles à concevoir & à employer, car il n'y a rien de si difficile que de mettre l'erreur à la place de la vérité.

Efforts qu'on a faits pour soutenir le repos de la terre.

Systême de *Ptolomée*.

Il y a grande apparence que l'autorité d'*Aristote* qui étoit presque la seule régle de vérité du tems de *Ptolomée*, est ce qui a entraîné ce grand Astronome dans l'erreur; mais comment *Aristote* n'a-t'il pas lui même suivi le véritable systême qu'il connoissoit puisqu'il l'a combattu? cette réflexion n'est pas à l'honneur de l'esprit humain; quoi qu'il en soit jusqu'à *Copernic* on a cru la terre en repos & le centre des mouvemens célestes.

## IV.

*Copernic* a renouvellé l'ancien systême de Pithagore sur le mouvement de la terre.

Ce grand homme renouvella l'ancien systême des *Babyloniens* & de *Pithagore*, & l'appuya de tant de raisons & de découvertes, que l'erreur ne put plus prévaloir; ainsi le Soleil fut remis par *Copernic* dans le centre du monde, ou, pour m'expliquer plus exactement, dans le centre de notre systême planétaire.

(*a*) M. *Newton* dans le Livre *De Systemate mundi*, attribue aussi cette opinion à *Numa Pompilius*, & il dit (pag. 1.) que c'étoit pour représenter le Soleil dans le centre des orbes célestes, que *Numa* avoit fait bâtir un Temple rond en l'honneur de *Vesta*, Déesse du Feu, dans le milieu duquel on conservoit un feu perpétuel.

## V.

Quoique les Phénomenes céleſtes s'expliquent avec une extrême facilité dans le ſyſtême de *Copernic*, quoique les obſervations & le raiſonnement lui ſoient également favorables, il s'eſt trouvé de ſon tems un Aſtronome très-habile, qui a voulu ſe refuſer à l'évidence de ſes découvertes : *Ticho*, trompé par une expérience mal faite (*b*), & peut-être encore plus par l'envie de faire un ſyſtême, en compoſa un qui tient le milieu entre celui de *Ptolomée* & celui de *Copernic* ; il ſuppoſa la terre en repos, & que les autres planetes qui tournent autour du Soleil tournoient avec lui autour de la terre en vingt-quatre heures, ce qui laiſſe ſubſiſter une des plus grandes difficultés du ſyſtême de *Ptolomée*, celle que l'on tire de l'exceſſive rapidité du mouvement du premier mobile, & prouve ſeulement combien il eſt dangereux d'abuſer de ſes lumiéres. Syſtême de *Ticho-Brahé*.

Si *Tycho* s'eſt égaré dans la maniére dont il faiſoit mouvoir les corps céleſtes, il a rendu de grands ſervices à l'Aſtronomie par l'exactitude & la longue ſuite de ſes obſervations. Il a déterminé l'oppoſition d'un très-grand nombre d'étoiles avec une exactitude inconnue avant lui ; il a découvert la réfraction de l'air qui a tant de part aux Phénomenes aſtronomiques ; il a prouvé le premier par la parallaxe des cométes qu'elles remontent beaucoup au-deſſus de la Lune ; c'eſt lui qui a découvert ce qu'on appelle *la variation de la Lune* ; & c'eſt enfin de ſes obſervations ſur le cours des planetes, que *Kepler*, avec qui il vint paſſer les dernieres années de ſa vie près de *Prague*, a tiré ſon admirable théorie des mouvemens des corps céleſtes. Services que *Ticho* a rendus à l'Aſtronomie.

(*b*) On objectoit à *Copernic* que le mouvement de la terre devoit produire des effets qui n'avoient pas lieu ; que par exemple, ſi la terre ſe meut, une pierre jettée du haut d'une tour ne devoit pas retomber au pied de cette tour, parce que la terre a marché pendant le tems que la pierre a mis à tomber, & que cependant elle retombe au pied de la tour. *Copernic* répondoit que la terre eſt dans le même cas, par rapport aux corps qui tombent à ſa ſurface, qu'un vaiſſeau qui marche par rapport aux choſes qu'on y feroit tomber, & il aſſuroit qu'une pierre jettée du haut du mât d'un vaiſſeau qui marche, retomberoit au pied de ce mât. Cette expérience qui eſt hors de doute à préſent, fut mal faite alors, & fut la cauſe ou le prétexte qui empêcha *Ticho* de ſe rendre aux découvertes de *Copernic*.

## V I.

Combien il restoit encore de choses à découvrir après *Copernic*.

*Copernic* avoit rendu sans doute un grand service à l'Astronomie & à la raison, en rétablissant le véritable Systême du monde, & c'étoit déja beaucoup que la vanité humaine se fût résolue à mettre la terre au nombre des simples planetes ; mais il restoit bien des choses à découvrir : on ne connoissoit encore ni la courbe que les planetes décrivent en tournant dans leur orbite, ni les loix qui dirigent leur cours, & c'est à *Kepler* à qui l'on doit ces importantes découvertes.

Découvertes de *Kepler*. L'ellipticité des orbites. La proportionalité des aires & des tems.

Ce grand Astronome trouva que les Astronomes qui l'avoient précédé s'étoient trompés en supposant que les orbes des planetes étoient circulaires, & il découvrit, en faisant usage des observations de *Ticho*, que les planetes se meuvent dans des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers, & qu'elles parcourent les différentes parties de leur orbite avec des vitesses différentes ; ensorte que l'aire décrite par une planete, c'est-à-dire, l'espace renfermé entre les lignes tirées du Soleil à deux lieux quelconques de la planete, est toujours proportionnelle au tems.

La relation qui est entre les tems périodiques & les distances.

Quelques années après, en comparant le tems des révolutions des différentes planetes autour du Soleil avec leur différent éloignement de cet astre, il trouva que les planetes qui sont placées plus loin du Soleil se meuvent plus lentement dans leur orbe ; & en cherchant si cette proportion est celle de leur distance, il trouva enfin en 1618. après plusieurs tentatives, que les tems de leurs révolutions sont comme la racine quarrée du cube de leurs moyennes distances au Soleil.

## V I I.

*Kepler* a non-seulement trouvé ces deux loix qui ont retenu son nom & qui dirigent toutes les planetes dans leur cours, & la courbe qu'elles décrivent, mais il avoit entrevu la force qui la leur fait décrire ; on trouve les semences du pouvoir attractif dans la Préface de son Commentaire sur la planete de Mars, & il va même jusqu'à dire que le flux est l'effet de la gravité de l'eau vers la Lune; mais il n'a pas tiré de ce principe ce qu'on auroit dû croire qu'un aussi grand homme que lui en auroit tiré, car il donne ensuite dans son Epitome d'Astronomie (c) une raison physique du mouvement des planetes tirée de principes tous différens; & dans ce même Livre de la planete de Mars, il suppose dans les planetes un côté ami & un côté ennemi; & à l'occasion de leurs aphélies & de leurs périhélies, il dit, que le Soleil attire l'un de ces côtés, & qu'il repousse l'autre.

## VIII.

On trouve l'attraction des corps célestes bien plus clairement encore dans un Livre de *Hook* sur le mouvement de la terre, imprimé en 1674. c'est-à-dire, douze ans avant les principes. *Voici la traduction de ses paroles*, pag. 27. » Alors j'expliquerai » un systême du monde qui différe à plusieurs égards de tous les au- » tres, & qui répond en tout aux régles ordinaires de la mécha- » nique, il est fondé sur ces trois suppositions.

» 1°. Que tous les corps célestes, sans en excepter aucun, ont » une attraction ou gravitation vers leur propre centre, par la- » quelle, non-seulement ils attirent leurs propres parties & les em- » pêchent de s'écarter, comme nous le voyons de la terre, mais » encore ils attirent tous les autres corps célestes qui sont dans la » sphére de leur activité; que parconséquent, non-seulement le » Soleil & la Lune ont une influence sur le corps & le mouvement » de la terre, & la terre une influence sur le Soleil & la Lune, » mais aussi que Mercure, Venus, Mars, Jupiter & Saturne ont » par leur force attractive une influence considérable sur le mou- » vement de la terre, comme aussi l'attraction réciproque de la » terre a une influence considérable sur le mouvement de ces » planetes.

Anecdote singuliere sur l'attraction.

(c) V. Greg. Liv. 1. Prop. 69.

» 2°. Que tous les corps qui ont reçu un mouvement simple & » direct continuent à se mouvoir en ligne droite, jusqu'à ce que par » quelqu'autre force effective ils en soient détournés & forcés à » décrire un cercle, une ellipse ou quelqu'autre courbe plus com- » posée.

» 3°. Que les forces attractives sont d'autant plus puissantes dans » leurs opérations, que le corps sur lequel elles agissent est plus » près de leur centre.

» Pour ce qui est de la proportion suivant laquelle ces forces dimi- » nuent à mesure que la distance augmente, j'avoue que je ne l'ai » pas encore vérifiée par des expériences, mais c'est une idée, qui » étant suivie comme elle mérite de l'être, sera très-utile aux Astro- » nomes pour réduire tous les mouvemens célestes à une régle » certaine, & je doute qu'on puisse jamais la trouver sans cela. » Celui qui entend la nature du pendule circulaire & du mouve- » ment circulaire, comprendra aisément le fondement de ce prin- » cipe, & sçaura trouver les directions dans la nature pour l'éta- » blir exactement : je donne ici cette ouverture à ceux qui ont le » loisir & la capacité de cette recherche, &c. »

## IX.

Il ne faut pas croire que cette idée jettée au hazard dans le Livre de *Hook* diminue la gloire de M. *Newton*, qui a même eu l'attention d'en faire mention dans son Livre *De Sistemate mundi.* (*d*) L'exemple de *Hook* & celui de *Kepler* servent à faire voir quelle distance il y a entre une vérité entrevue & une vérité démontrée, & combien les plus grandes lumiéres de l'esprit servent peu dans les sciences, quand elles cessent d'être guidées par la Géométrie.

## X.

*Kepler* qui a fait de si belles & de si importantes découvertes tant qu'il a suivi ce guide, fournit une des preuves les plus frap-

(*d*) Pag. 3. Edition de 1731.

pantes des égaremens où peuvent tomber les meilleurs esprits quand ils l'abandonnent pour se livrer au plaisir d'inventer des systêmes. Qui croiroit, par exemple, que ce grand homme eût pû donner dans les rêveries des Pithagoriciens sur les nombres? cependant, il croyoit que les distances des planetes principales & leur nombre étoient relatifs aux cinq corps solides réguliers de la Géométrie (*e*), & qu'on pouvoit les inscrire entr'elles; ensuite, ses observations lui ayant fait voir que les distances des planetes ne s'accordoient pas avec cette supposition, il imagina que les mouvemens célestes s'exécutoient dans des proportions qui répondoient à celles selon lesquelles on divise une corde, afin qu'elle donne les tons qui composent l'octave (*f*).

Etranges idées de *Kepler*.

*Kepler* ayant envoyé à *Ticho* une copie de l'ouvrage dans lequel il tachoit d'établir ces chiméres, *Ticho* lui répondit, qu'il (*g*) lui conseilloit de laisser là les spéculations tirées des premiers principes, & de s'appliquer plutôt à établir ses raisonnemens sur le fondement solide des observations.

Conseil très-sage de *Ticho* à *Kepler*.

Le grand *Hughens* lui-même (*h*) croyoit que le quatriéme satellite de Saturne qui porte son nom, faisant avec notre Lune & les quatre de Jupiter le nombre de six planetes secondaires, le nombre des planetes étoit complet, & qu'il étoit inutile de chercher à en découvrir de nouvelles, parce que les planetes principales sont aussi au nombre de six, & que le nombre de six est appellé *parfait*, parce qu'il est égal à la somme de ses parties aliquottes, 1, 2 & 3.

Idée bizarre de *Hughens*.

## X I.

C'est en ne s'écartant jamais de la Géométrie la plus profonde, que M. *Newton* a trouvé la proportion dans laquelle agit la gravité, & que le principe soupçonné par *Kepler* & par *Hook*, est devenu

(*e*) *Mysterium Cosmographicum.*
(*f*) *Mysterium Cosmographicum.*
(*g*) *Uti suspensis speculationibus à priori descendentibus animam potius ad observationes quas simul afferebat considerandas adjicerem.* (c'est *Kepler* qui parle) *Notæ in secundam editionem mysterii Cosmographici.*
(*h*) Dédicace de son systême de Saturne.

dans ses mains une source si féconde de vérités admirables & inespérées.

Une des choses qui avoit empêché *Kepler* de tirer du principe de l'attraction toutes les vérités qui en sont une suite, c'est l'ignorance où l'on étoit de son tems des véritables loix du mouvement. M. *Newton* a eu sur *Kepler* l'avantage de profiter des loix du mouvement établies par *Hughens*, & qu'il a poussé beaucoup plus loin que lui.

Avantage de *Newton* sur *Kepler*, de son tems les véritables loix du mouvement étoient mieux connues.

XII.

Analyse du Livre des Principes.

Le Livre des Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle dont on vient de voir la traduction, contient trois Livres: outre les Définitions, les Loix du mouvement & leurs Corollaires; le premier Livre est composé de quatorze Sections, le second en contient neuf, & le troisiéme contient l'application des Propositions des deux premiers au Systême du monde.

XIII.

Définitions.

Le Livre des Principes commence par huit Définitions; M. *Newton* fait voir dans les deux premieres comment on doit mesurer *la quantité de la matiere*, & *la quantité du mouvement*; il définit dans la troisiéme *la force d'inertie* ou force résistante dont toute matiere est douée; il fait voir dans la quatriéme ce qu'on doit entendre par *force active*; il définit dans la cinquiéme *la force centripète*; & il donne dans les sixiéme, septiéme & huitiéme, la maniere de mesurer *sa quantité absolue*, *sa quantité motrice*, & *sa quantité accélératrice*. Ensuite il établit les trois Loix de mouvement suivantes.

XIV.

1°. Que tout corps persévere de lui-même dans son état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite.

Loix du mouvement.

2°. Que le changement qui arrive dans le mouvement est toujours proportionnel à la force motrice, & se fait dans la direction de cette force.

3°. Que

3°. Que l'action & la réaction sont toujours égales & contraires.

## X V.

Après avoir expliqué ces loix & en avoir tiré plusieurs Corollaires, M. *Newton* commence son premier Livre par onze Lemmes qui en font la premiere Section ; il expose dans ces onze Lemmes sa méthode *des premieres & dernieres raisons* : Cette méthode est le fondement de la Géométrie de l'infini, & avec son secours on donne à cette Géométrie toute la certitude de l'ancienne.

Premier Livre.

La premiere Section contient les principes de la Géométrie de l'infini.

Les treize autres Sections du premier Livre des Principes, sont employées à démontrer des Propositions générales sur le mouvement des corps, sans avoir égard, ni à l'espéce de ces corps, ni au milieu dans lequel ils se meuvent.

Et les treize autres des propositions générales sur le mouvement des corps.

C'est dans ce premier Livre que M. *Newton* donne toute sa théorie de la gravitation des astres, mais il ne s'y est pas borné à examiner les questions qui y sont applicables ; il a rendu ses solutions générales, & il a donné un grand nombre d'applications de ces solutions.

## X V I.

Dans le second Livre M. *Newton* considére le mouvement des différens corps dans des milieux résistans.

Deuxiéme Livre.

Ce second Livre, qui contient une théorie très-profonde des fluides & des mouvemens des corps qui y sont plongés, paroît avoir été destiné à détruire le systême des tourbillons, quoique ce ne soit que dans le scholie de la derniere Proposition, que M. *Newton* combat ouvertement *Descartes*, & qu'il fait voir que les mouvemens célestes ne peuvent s'exécuter par ses tourbillons.

Il traite du mouvement des corps dans des milieux résistans.

M. *Newton* a composé ce Livre pour détruire les tourbillons de *Descartes*.

## X V I I.

Enfin le troisiéme Livre des Principes traite du Systême du monde ; M. *Newton* applique dans ce Livre les Propositions du premier à l'explication des Phénomenes célestes : c'est dans cette application

Troisiéme Livre.

Il traite du Systême du monde.

que je vais tâcher de suivre M. *Newton*, & de faire voir l'enchaînement de ses Principes, & avec quelle facilité ils expliquent les Phénomenes astronomiques.

XVIII.

Ce qu'on entend dans ce Traité par le mot d'*attraction*.

Au reste, je déclare ici, comme M. *Newton* a fait lui-même, qu'en me servant du mot d'*attraction*, je n'entends que la force qui fait tendre les corps vers un centre, sans prétendre assigner la cause de cette tendance.

# CHAPITRE PREMIER.

## *Principaux Phénomenes du Systême du Monde.*

I.

Il ne sera pas inutile avant de rendre compte de la maniere dont la théorie de M. *Newton* explique les Phénomenes célestes, de donner une idée abrégée de notre systême planétaire.

Il entrera nécessairement dans cette exposition des vérités découvertes par M. *Newton*, mais on remettra aux Chapitres suivans à faire voir comment il est parvenu à les découvrir; celui-ci ne contiendra que l'exposition des Phénomenes mêmes.

II.

Premiere division des corps célestes de notre systême planétaire en *planetes principales* & en *planetes secondaires*.

Les corps célestes qui composent notre systême planétaire, se divisent en *planetes principales*, c'est-à-dire, qui ont le Soleil pour centre de leur mouvement, & en *planetes secondaires*, qu'on appelle *satellites*: ces dernieres planetes tournent autour de la planete principale qui leur sert de centre.

Il y a six planetes principales, dont les caracteres & les noms sont

Noms & caractéres des planetes principales.

☿ *Mercure*,
♀ *Vénus*,
♁ *La Terre*,
♂ *Mars*,
♃ *Jupiter*,
♄ *Saturne*;

On a suivi dans cette énumération des planetes principales, l'ordre de leurs distances au Soleil, en commençant par celles qui en sont le plus près.

Quelles sont les planetes qui ont des satellites. Enumération générale des corps célestes qui composent notre systême planétaire.

La Terre, Jupiter & Saturne, sont les seules planetes ausquelles nous découvrions des satellites : la terre n'en a qu'un qui est la Lune, Jupiter en a quatre, & Saturne cinq outre son anneau, ce qui compose notre systême planétaire de dix-huit corps célestes, en comptant le Soleil, & l'anneau de Saturne.

## III.

Deuxiéme division des planetes en *planetes supérieures* & *planetes inférieures*.

Quelles sont les planetes inférieures & quel est leur arrangement.

Les planetes principales se divisent en *planetes supérieures* & *planetes inférieures* : on appelle planetes inférieures celles qui sont plus près du Soleil que la terre ; ces planetes sont *Mercure* & *Vénus* ; l'orbe (*a*) de Vénus renferme l'orbe de Mercure & le Soleil, & l'orbe de la terre est extérieur à ceux de Mercure & de Vénus, & les renferme ainsi que le Soleil.

Comment on a découvert cet arrangement.

On connoît cet arrangement parce que Vénus & Mercure nous paroissent quelquefois entre le Soleil & nous, ce qui ne pourroit pas arriver si ces deux planetes n'étoient pas plus près du Soleil que la terre ; & l'on voit sensiblement que Vénus s'éloigne plus du Soleil que Mercure, & que son orbite renferme par conséquent celle de Mercure.

Quelles sont

Les planetes supérieures sont celles qui sont plus éloignées du

(*a*) On appelle *orbe*, ou orbite, la courbe qu'une planete décrit en tournant autour du corps qui lui sert de centre.

les planetes supérieures, & quel est leur arrangement.

Soleil que la terre, elles ſont au nombre de trois, *Mars*, *Jupiter* & *Saturne.*

On connoît que les orbites de ces planetes renferment celle de la terre, parce que la terre ſe trouve quelquefois entre le Soleil & elles.

Comment on l'a découvert.

L'orbe de Mars renferme celui de la terre, l'orbe de Jupiter celui de Mars, & l'orbe de Saturne celui de Jupiter ; ainſi des trois planetes ſupérieures, Saturne eſt celle qui eſt le plus loin de la terre, & Mars en eſt le plus près.

On connoît cet arrangement, parce que les planetes qui ſont le plus près de la terre, nous (*b*) cachent quelquefois celles qui en ſont plus éloignées.

## I V.

Les planetes ſont des corps opaques.

Comment on s'en eſt apperçu.

Toutes les planetes ſont des corps opaques ; on eſt aſſuré de l'opacité de Vénus & de Mercure, parce que, lorſque ces planetes paſſent entre le Soleil & nous, elles paroiſſent ſur cet aſtre comme de petites taches noires, & qu'elles ont ce qu'on appelle *des phaſes*, c'eſt-à-dire, que la quantité de leur illumination dépend de leur poſition par rapport au Soleil & à nous.

La même raiſon nous fait juger de l'opacité de Mars, qui a auſſi *des phaſes*, & on juge de l'opacité de Jupiter & de Saturne, parce que leurs ſatellites ne nous paroiſſent point éclairés par ces planetes lorſqu'elles ſont entre le Soleil & ces ſatellites, ce qui prouve que l'hémiſphère de ces planetes qui n'eſt pas éclairé du Soleil, eſt opaque.

## V.

Les planetes ſont ſphériques.

Comment on l'a découvert.

Enfin on connoît que les planetes ſont des corps ſphériques, parce que, de quelque maniere qu'elles ſoient placées par rapport à nous, leur ſurface nous paroît toujours terminée par une courbe.

On juge que la terre eſt ſphérique, parce que dans les éclipſes ſon ombre paroit toujours terminée pour une courbe ; que ſur la

(*b*) *Volf*, Elémens d'Aſtronomie.

mer on voit disparoître petit à petit un vaisseau qui s'éloigne, ensorte qu'on commence par perdre de vûe le corps du vaisseau, puis ses voiles, puis enfin ses mats; & que de plus, on ne trouve point le bord de la superficie quoique plusieurs navigateurs en ayent fait le tour, & c'est cependant ce qui devroit arriver si la terre étoit plane.

## V I.

Tout ce que nous connoissons des planetes principales nous prouve donc que ce sont des corps sphériques, opaques & solides. *Tous les corps de notre système planétaire paroissent être du même genre, si on en excepte le Soleil.*

Le Soleil paroît être d'une nature entierement différente des planetes; nous ne sçavons pas s'il est composé de parties solides ou fluides, nous sçavons seulement que ses parties brillent, qu'elles échauffent, & qu'elles brûlent quand elles sont rassemblées dans une quantité suffisante; ainsi toutes les vraisemblances portent à croire que le Soleil est un corps de feu à peu près semblable au feu d'ici-bas, puisque ses rayons produisent les mêmes effets. *Il est vraisemblable que la substance du Soleil est du feu.*

## V I I.

Tous les corps céléstes font leurs révolutions autour du Soleil dans des ellipses (*c*) plus ou moins alongées dont le Soleil occupe un des foyers; ainsi les planetes, en tournant autour du Soleil, sont tantôt plus près, & tantôt plus loin de lui; la ligne qui passe par le Soleil, & qui se termine aux deux points de la plus grande proximité & du plus grand éloignement des planetes au Soleil, s'appelle *la ligne des apsides*, le point de l'orbite le plus éloigné du Soleil s'appelle l'*aphélie* de la planete, & le point qui en est le plus près s'appelle *son périhélie*. *Dans quelle courbe les corps céléstes tournent autour du Soleil.* *Ce que c'est que la ligne des apsides, l'aphélie & le périhélie.*

Les planetes principales emportent avec elles dans leur révolution autour du Soleil, les satellites dont elles sont le centre.

(*c*) Espéce de courbe qui est la même qu'on appelle dans le langage ordinaire une *ovale*; les foyers sont les deux points dans lesquels les Jardiniers placent leurs piquets pour tracer cette espéce de figure, dont ils se servent souvent.

En quel sens les planetes tournent autour du Soleil.

Cette révolution des planetes autour du Soleil, se fait d'Occident en Orient. (*d*)

Des cométes.

Il paroît de tems en tems des astres qui se meuvent en tout sens, & avec une extrême rapidité quand ils sont assez près de nous pour être visibles, ce sont les cométes.

Les cométes sont des planetes.

On n'a pas encore assez d'observations pour connoître le nombre des cométes, on sçait seulement, & il n'y a pas longtems qu'on n'en doute plus, que ce sont des planetes qui tournent autour du Soleil comme les autres corps de notre monde planétaire, & qu'elles décrivent des ellipses si alongées, qu'elles ne sont visibles pour nous que dans une très-petite partie de leur orbite.

## VIII.

Toutes les planetes & les cometes observent les loix de *Keple*.

Toutes les planetes observent, en tournant autour du Soleil, les deux loix de *Kepler*, dont on a parlé dans l'Introduction.

On sçait que les cométes observent la premiere de ces loix, je veux dire, celle qui fait décrire aux corps célestes (*e*) des aires égales en tems égaux; & on verra dans la suite qu'il est vraisemblable, par les observations qu'on a pû faire jusqu'à présent, que les cométes observent aussi la seconde de ces loix, c'est-à-dire, celle des tems (*f*) périodiques en raison sesquiplée des distances.

(*d*) On suppose dans tout ce qu'on dit ici, le spectateur placé sur la terre.

(*e*) Le mot *aire* en général veut dire une superficie, ici il signifie l'*espace renfermé entre deux lignes tirées du centre à deux points où se trouve la planete;* ces aires sont proportionnelles au tems, c'est-à-dire, qu'elles sont d'autant plus grandes ou plus petites, que les tems dans lesquels elles sont décrites sont plus longs ou plus courts.

(*f*) Le tems périodique est le tems qu'une planete employe à faire sa révolution dans son orbe.

Il est, je crois, plus à propos de donner un éxemple de la raison sesquiplée qu'une définition, supposé donc que la distance moyenne de Mercure au Soleil soit 4, celle de Vénus 9, que le tems périodique de Mercure soit de 40 jours, & qu'on cherche le tems périodique de Vénus, on cube les 2 premiers nombres 4 & 9, & on a 64 & 729; on tire ensuite la racine quarrée de ces 2 nombres, & il vient 8 pour celle du premier, & 27 pour celle du second; on fait ensuite cette régle de trois 8 : 27 :: 40 : 135, c'est-à dire, que la racine quarrée du cube de la moyenne distance de Mercure au Soleil est à la racine quarrée du cube de la moyenne distance de Vénus au Soleil, comme le tems périodique de Mercure autour du Soleil est au tems périodique cherché de Vénus autour du Soleil qui se trouve être 135 dans les suppositions qu'on a faites, & c'est-là ce qui s'appelle *la raison sesquiplée*.

## I X.

En admettant ces deux loix de *Kepler* que toutes les obſervations ont confirmées, elles fourniſſent des argumens très-forts pour prouver le mouvement de la terre qu'on s'eſt obſtiné ſi long-tems à diſputer ; car, en prenant la terre pour le centre des mouvemens céleſtes, ces deux loix ne ſont point obſervées ; les planetes ne décrivent point des aires proportionnelles au tems autour de la terre, & les tems des révolutions du Soleil & de la Lune, par exemple, autour de cette planete, ne ſont point comme la racine quarrée du cube de leur moyenne diſtance à la terre ; car le tems périodique du Soleil autour de la terre étant environ 13 fois plus grand que celui de la Lune, ſa diſtance à la terre devroit être, ſuivant la régle de *Kepler*, entre 5 & 6 fois plus grande que celle de la Lune ; or, on ſçait que cette diſtance eſt environ 400 fois plus grande, donc, ſi l'on admet les loix de *Kepler*, la terre n'eſt pas le centre des révolutions céleſtes.

Preuves du mouvement de la terre.

De plus, la force (*g*) centripete que M. *Newton* a fait voir être la cauſe de la révolution des planetes, rend la courbe qu'elles décrivent autour de leur centre concave (*h*) vers lui, puiſque ſon effet eſt de les retirer de la tangente (*i*) ; or, l'orbe de Mercure & de Vénus ſont, dans quelqu'unes de leurs parties, convexes à la terre, donc les planetes inférieures ne tournent pas autour de la terre.

Il eſt aiſé de prouver la même choſe des planetes ſupérieures, car ces planetes nous paroiſſent tantôt (*k*) *directes*, tantôt *ſtation-*

(*g*) Le mot *de force centripete* porte ſa définition avec lui, car il ne veut dire autre choſe, que la force qui fait tendre un corps à un centre.

(*h*) Les deux cotés du verre d'une montre peuvent ſervir à faire entendre ces mots *concave* & *convexe* ; le côté extérieur à la montre eſt *convexe*, & celui qui eſt du côté du cadran eſt *concave*.

(*i*) La tangente eſt la ligne qui touche une courbe, & qui ne peut jamais la couper.

(*k*) On dit qu'une planete eſt *directe* lorſqu'elle paroît aller ſelon l'ordre des ſignes, c'eſt-à-dire, *d'Aries* à *Taurus*, de *Taurus* à *Gemini*, &c. ce qu'on appelle encore *aller* *naires* & tantôt *rétrogrades*, toutes inégalités apparentes qui n'auroient pas lieu pour nous, si la terre étoit le centre des révolutions célestes.

Car aucune de ces apparences n'auroit lieu pour un spectateur placé dans le Soleil, puisqu'elles ne sont qu'une suite du mouvement de la terre dans son orbe, combiné avec celui de ces planetes dans le leur.

Voilà pourquoi le Soleil & la Lune sont les seuls corps célestes qui nous paroissent toujours directs ; car le Soleil ne parcourant point d'orbe, son mouvement ne peut se combiner avec celui de la terre, & la terre étant le centre des mouvemens de la Lune, elle doit toujours nous paroître directe comme toutes les planetes le paroîtroient à un spectateur placé dans le Soleil.

Objection que l'on faisoit à *Copernik*, tirée de la planete de Vénus.

La planete de Vénus fournissoit une des objections que l'on faisoit à *Copernic* contre son systême : Si Vénus, lui disoit-on, tournoit autour du Soleil, on devroit lui voir des phases comme à la Lune. Aussi, disoit *Copernic*, si vos yeux étoient assez bons pour distinguer ces phases, vous les verriez ; & peut-être les Astronomes trouveront-ils moyen quelque jour de les appercevoir.

Sa réponse à cette objection.

Découverte qui a confirmé cette réponse.

*Galilée* est le premier qui ait vérifié cette prédiction de *Copernic* ; & chaque découverte qu'on a fait depuis lui sur le cours des astres, l'a confirmé.

## X.

Sous quel angle les plans des planetes se coupent.

Les plans (*l*) des orbites de toutes les planetes se coupent dans des lignes qui passent par le centre du Soleil, ensorte qu'un spectateur placé dans le centre du Soleil se trouveroit dans les plans de tous ces orbes.

*en conséquence*, elle est *stationnaire* lorsqu'elle paroît répondre quelque tems aux mêmes points du Ciel ; & enfin elle est *rétrograde* lorsqu'elle paroît aller contre l'ordre des signes, ce qu'on appelle encore *aller en antécédence*, c'est-à-dire, de *Gemini* à *Taurus*, de *Taurus* à *Aries*, &c.

(*l*) Le plan de l'orbite d'une planéte est la surface dans laquelle elle est censée se mouvoir.

La

La ligne dans laquelle le plan de chaque orbite coupe le plan de l'écliptique, c'est-à-dire, le plan dans lequel la terre se meut, s'appelle *la ligne* des nœuds, & les points de cette Section s'appellent *les nœuds* de l'orbite.

Ce qu'on appelle les nœuds & la ligne des nœuds d'un orbite.

Tous ces plans sont inclinés au plan de l'écliptique, sous les angles suivans.

Inclinaison de ces plans à l'écliptique.

Le plan de l'orbe de Saturne fait avec le plan de l'écliptique un angle de $2^\circ \frac{1}{2}$, celui de Jupiter est de $1^\circ \frac{1}{3}$, celui de Mars est un peu moindre que $2^\circ$, celui de Vénus est un peu plus grand que $3^\circ \frac{1}{3}$, & celui de Mercure, enfin, est $7^\circ$ environ.

Ces propositions sont prises de *Gregori*, Liv. I. Prop. 3.

## X I.

Les orbes des planetes principales étant des ellipses dont le Soleil occupe un foyer, tous ces orbes sont excentriques, & le sont plus ou moins selon la distance qui est entre leur centre & le point où le Soleil se trouve placé.

On a mesuré l'excentricité de toutes ces orbites, & on a trouvé, que l'excentricité

Excentricité des planetes en demi diamétre de la terre.

| | |
|---|---|
| de Saturne est de | 54207 parties, |
| celle de Jupiter de | 25058 |
| celle de Mars de | 14115 |
| celle de la Terre de | 4692 |
| celle de Vénus de | 500 |
| & enfin celle de Mercure de | 8149 parties, |

en prenant le demi axe du grand orbe de la terre pour commune mesure, & en le supposant de 100000 parties.

En rapportant l'excentricité des planetes au demi diamétre de leur grand orbe, & en supposant ce demi diamétre de 100000 parties, les excentricités sont

Excentricité des planetes en demi diamétre de leur grand orbe.

| | |
|---|---|
| celle de Saturne de | 5683 parties, |
| celle de Jupiter de | 4822 |
| celle de Mars de | 9263 |
| celle de la Terre de | 5700 |

| | |
|---|---|
| celle de Vénus de | 694 |
| celle de Mercure de | 21000 parties; |

ainsi l'excentricité de Vénus est presqu'insensible.

## XII.

Proportion du diamétre des différentes planetes.

Les planetes sont différentes en grosseur ; on n'a le diamétre absolu que de la terre, parce que cette planete est la seule dont on ait pu mesurer la circonférence : mais on connoît le rapport qui est entre les diamétres des autres planetes, & en prenant celui du Soleil pour commune mesure, & le supposant de 1000 parties,

| | |
|---|---|
| celui de Saturne en a | 137 |
| celui de Jupiter | 181 |
| celui de Mars | 6 |
| celui de la Terre | 7 |
| celui de Vénus | 12 |
| enfin celui de Mercure | 4 |

d'où l'on voit que Mercure est la plus petite de toutes les planetes; car on sçait que les volumes des sphéres sont comme les cubes de leurs diamétres.

## XIII.

Distances des planetes au Soleil.

Les planetes sont placées à différentes distances du Soleil. En prenant la distance de la terre au Soleil pour commune mesure, & en la supposant de 100000 parties, les six planetes principales se trouvent rangées autour du Soleil dans l'ordre suivant, lorsqu'elles en sont à leur moyenne distance,

| | |
|---|---|
| Mercure en est à | 38710 |
| Vénus à | 72333 |
| La Terre à | 100000 |
| Mars à | 152369 |
| Jupiter à | 520110 |
| Saturne enfin à | 953800. |

On a calculé les distances moyennes du Soleil & des planetes à la terre, en demi diamétres de la terre ; voici celles qu'a donné M. *Cassini*, le Soleil, Mercure & Vénus, en sont à peu près également éloignés dans leur moyenne distance, qui est de 22000 demi diamétres de la terre, Mars en est à 33500, Jupiter à 115000, & Saturne à 210000.

Distances des planetes à la terre.

## XIV.

Les tems des révolutions des planetes autour du Soleil sont d'autant plus courts, qu'elles en sont plus près ; ainsi Mercure qui en est le plus près fait sa révolution en 87 jours, Vénus qui est placée ensuite fait la sienne en 224, la terre en 365, Mars en 686, Jupiter en 4332, & Saturne enfin qui est le plus éloigné du Soleil, employe 10759 jours à tourner autour de lui, tout cela en nombres rons.

Tems périodiques des planetes autour du Soleil.

## XV.

Outre leur mouvement de translation autour du Soleil, les planetes ont encore un mouvement autour de leur axe qu'on appelle *leur révolution diurne*.

Rotation des planetes.

On ne connoît la révolution diurne que du Soleil & de quatre planetes, qui sont la Terre, Mars, Jupiter & Vénus ; ce sont les taches qu'on a remarquées sur leur disque, (*m*) & qu'on a vu paroître & disparoître successivement, qui ont fait découvrir cette révolution ; Mars, Jupiter & Vénus ayant des taches sur leur surface, on a appris par le retour des mêmes taches, & par leur disparition successive, que ces planetes tournent sur elles-mêmes, & en quels tems se font les révolutions ; ainsi l'on a observé que Mars tourne en $23^h\ 20'$, & Jupiter en $9^h\ 56'$.

Moyen employé pour la découvrir.

Quelles sont les planetes dont on connoît la rotation.

Tems des rotations des planetes autour de leur axe.

Les Astronomes ne sont pas d'accord sur le tems de la révolution de Vénus autour de son axe, la plus grande partie croit qu'elle y tourne en 23 heures environ ; mais M. *Bianchini* qui a fait une

Incertitudes sur le tems de la rotation de Vénus.

(*m*) On appelle *disque* d'une planete la partie de sa surface qui est visible pour nous.

étude toute particuliere des apparences de cette planete, croit sa révolution sur elle-même de 24 jours. Comme il fut obligé de transporter l'instrument avec lequel il observoit pendant l'observation même, à cause d'une maison qui lui cachoit Vénus, & que cette opération dura près d'une heure, on peut croire que pendant ce tems la tache qu'il observoit changea; quoi qu'il en soit, son autorité dans cette matiere mérite qu'on suspende son jugement jusqu'à ce qu'on ait de plus amples observations.

M. *Delahire* a observé avec un télescope de 16 pieds, des montagnes dans Vénus plus hautes que celles de la Lune.

On ne peut s'assûrer par l'observation de la rotation de Mercure ni de celle de Saturne, & pourquoi.

Mercure est trop plongé dans les rayons du Soleil pour que l'on puisse s'assûrer par l'observation s'il tourne sur lui-même; il en est de même de Saturne à cause de son grand éloignement.

M. *Cassini* a observé en 1715. avec un télescope de 118 p. trois bandes dans Saturne semblables à celles qu'on remarque dans Jupiter, mais apparemment qu'on n'a pu suivre cette observation avec assez d'éxactitude, pour en conclure la rotation de Saturne autour de son axe.

Mais l'analogie porte à croire que ces planetes tournent aussi sur leur axe.

Mercure & Saturne étant assûjettis aux même loix qui dirigent le cours des autres corps céléstes, & ces planetes, par-tout ce que nous en pouvons connoître, nous paroissant des corps de même genre qu'eux, l'analogie nous porte à conclure que ces deux planetes tournent sur leur centre comme les autres, & que peut-être un jour on parviendra à connoître cette révolution, & en combien de tems elle s'éxécute.

## XVI.

Comment on a découvert la révolution du Soleil sur son axe.

Il paroît de tems en tems des taches sur le Soleil qui ont appris que cet astre tourne aussi sur lui-même.

Des taches du Soleil.

Il a fallu bien des observations après la découverte de ces taches, avant qu'on en ait pû observer d'assez durables pour en pouvoir conclure le tems de la révolution du Soleil sur son axe.

*Keill* rapporte dans ſa cinquiéme Leçon d'Aſtronomie ; qu'on en a obſervé qui employoient 13 jours $\frac{1}{2}$ à aller du limbe occidental du Soleil à ſon limbe oriental, & qu'au bout de 13 autres jours $\frac{1}{2}$ elles reparoiſſoient de nouveau à ſon bord occidental ; d'où il conclut, que le Soleil tourne ſur lui-même en 27 jours environ d'Occident en Orient, c'eſt-à-dire, dans le même ſens que les planetes.

Par le moyen des mêmes taches, on a trouvé que l'axe de rotation du Soleil fait, avec le plan de l'écliptique, un angle d'environ 7 dégrés.

Le Pere *Jaquier* a fait dans ſon Commentaire une réflexion ſur ces taches, qui mérite d'être rapportée. Voyant qu'aucune obſervation ne prouve l'égalité du tems de l'occultation, & qu'au contraire, par toutes les obſervations qu'il a parcourues, ces tems paroiſſent inégaux, & que le tems de l'occultation pendant lequel elles ſont cachées, a toujours été plus long que celui pendant lequel elles ſont viſibles, il en a conclu (ainſi que M. *Volf*, art. 413 de ſon Aſtron.) que ces taches ne ſont pas inhérentes au Soleil, mais qu'elles en ſont à quelque intervalle.

Jean *Fabrice* (*n*) fut le premier qui découvrit ces taches (en Allemagne l'an 1611.) & qui en conclut la révolution diurne du Soleil ; enſuite le Jéſuite (*o*) *Scheiner* les obſerva, & donna auſſi ſes obſervations, & *Galilée* vers le même tems fit la même découverte en Italie.

Du tems de *Scheiner* on voyoit plus de 50 taches ſur la ſurface du Soleil, d'où l'on peut aſſigner la cauſe d'un phénomene rapporté par quelques Hiſtoriens, que le Soleil avoit paru très pale quelquefois pendant un an entier ; car il ne faut que des taches aſſez grandes, & qui ſubſiſtent aſſez longtems, pour cauſer ce phénomene.

On ne doute plus à préſent que la terre ne tourne ſur elle-

(*n*) *Volf Elementa Aſtron.* Cap. 1

(*o*) Ce Jéſuite ayant été dire à ſon Supérieur qu'il avoit découvert des taches dans le Soleil, celui-ci lui répondit gravement *cela eſt impoſſible, j'ai lû deux ou trois fois Ariſtote, & je n'y ai rien trouvé de ſemblable.*

même en 23 h 56', ce qui compose notre jour astronomique, & cause l'alternative de jours & de nuits dont tous les climats de la terre jouissent.

## XVII.

L'effet du mouvement rotatoire des planetes est d'élever leur équateur.

Ce mouvement des corps célestes autour de leur centre altére leur forme, car on sçait que le mouvement circulaire fait acquérir aux corps qui tournent une force, qui est d'autant plus grande, le tems de leur révolution restant le même, que le cercle qu'ils décrivent est plus grand, & on appelle cette force, *force centrifuge*, c'est-à-dire, *qui éloigne du centre*; donc les parties des planetes acquiérent par la rotation une force centrifuge d'autant plus grande, qu'elles sont plus près de l'équateur de ces planetes, puisque l'équateur est le grand cercle de la sphére, & d'autant moindre, qu'elles sont plus près des pôles; (p) supposant donc que les corps célestes ayent été sphériques dans l'état de repos, leur rotation autour de leur axe a dû élever les régions de l'équateur, & abaisser celles des pôles, & changer par conséquent la forme sphérique en celle d'un sphéroïde aplati vers les pôles.

De la force centrifuge.

Quelles sont les planetes dans lesquelles on s'apperçoit de l'élévation de l'équateur.

Ainsi la théorie nous fait voir que toutes les planetes doivent être aplaties vers leurs pôles par leur rotation, mais cet aplatissement n'est sensible que dans Jupiter & dans notre globe. L'on verra dans la suite qu'on peut déterminer la quantité de cet aplatissement dans le Soleil par la théorie, mais qu'elle est trop peu considérable pour être sensible à l'observation.

Les mesures prises au cercle polaire, en France & à l'équateur, ont donné la proportion des axes (q) de la terre environ de 173 à 174.

(p) On appelle *pôles* les points autour desquels le corps révoluant tourne, & *équateur* le cercle paralléle à ces points, & qui partage la sphére révoluante en deux parties égales.

(q) On appelle *axe* ou *diamétre* en général toute ligne qui passe par le centre & se termine à la circonférence : dans le cas dont il s'agit, les axes sont deux lignes qui passent par le centre, & dont l'une se termine aux pôles & l'autre à l'équateur.

Les télescopes nous font appercevoir l'aplatissement de Jupiter, & cet aplatissement est beaucoup plus considérable que celui de la terre, parce que cette planete est beaucoup plus grosse, & qu'elle tourne beaucoup plus rapidement sur elle-même que la terre; on juge que le rapport des axes de Jupiter est celui de 13 à 14.

## XVIII.

Les observations font voir que la Terre, Mars, Jupiter, Vénus & le Soleil ont des atmospheres.

Les taches de Vénus, de Mars & de Jupiter étant variables & changeant souvent de forme, il est très-vraisemblable que ces planetes sont entourées comme la nôtre d'un atmosphére, dont les altérations produisent ces apparences.

A l'égard du Soleil comme ses taches ne sont pas inhérentes à son disque, & qu'elles paroissent & disparoissent très-souvent, on ne peut douter qu'il n'ait un atmosphére qui l'entoure immédiatement, & dans lequel ces taches se forment & se dissipent tour à tour.

## XIX.

Tout ce qu'on vient d'exposer étoit connu avant M. *Newton*, mais on ne croyoit pas avant lui qu'il fût possible de connoître la masse des planetes, leur densité, & ce que peseroit le même corps s'il étoit transporté successivement à la surface des différentes planetes : on verra dans le Chapitre suivant, comment M. *Newton* est parvenu à ces étranges découvertes; il suffit de dire ici, qu'il a trouvé que les masses du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la Terre, c'est-à-dire les quantités de matiere qu'ils contiennent, sont respectivement comme 1. $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$ & $\frac{1}{169282}$ en supposant (r) la parallaxe du Soleil de 10″ 3‴; que leurs densités sont entr'elles comme 100, 94, 67 & 400; & que les poids du même corps transporté successivement sur la surface du Soleil, de Jupiter, de

Masse du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la Terre.

Leurs densités.

Poids du même corps à leur surface.

(r) *La parallaxe* du Soleil est l'angle sous lequel le rayon de la terre est vû du Soleil, ainsi la parallaxe d'un astre quelconque par rapport à la terre, est l'angle sous lequel le rayon de la terre seroit vû de cet astre.

Saturne & de la Terre, seroient de 10000, 943, 529 & 435, respectivement.

M. *Newton* a supposé, pour déterminer ces proportions, les demi diamétres du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la Terre, comme 10000, 997, 791 & 109, respectivement.

Pourquoi ces proportions ne peuvent être connues dans les autres planetes.

On verra dans le Chapitre suivant, pourquoi l'on ne peut connoître la densité ni la quantité de matiere de Mercure, de Vénus & de Mars, ni ce que pesent les corps sur ces trois planetes.

## XX.

Proportions des grosseurs & des masses des planetes & du Soleil.

Il suit de toutes ces proportions que Saturne est environ 500 fois plus petit que le Soleil, & qu'il contient 3000 fois moins de matiere que lui; que Jupiter est 1000 fois plus petit que le Soleil, & qu'il contient 1033 fois moins de matiere que lui; que la Terre n'est qu'un point par rapport au Soleil, puisqu'elle est 1000000 fois plus petite que lui; & qu'enfin le Soleil est plus de 116 fois plus gros que toutes les planetes prises ensemble.

## XXI.

Proportions des grosseurs & des masses des planetes & de la terre, & des autres planetes entr'elles.

En comparant les planetes entr'elles, on trouve qu'il n'y a que Mercure & Mars qui soient plus petites que la Terre; que Jupiter est non-seulement la plus grosse de toutes les planetes, mais qu'elle est plus grosse que toutes les autres planetes prises ensemble, & que cette planete est plus de deux mille fois plus grosse que la Terre.

## XXII.

De la précession des équinoxes.

La Terre, outre son mouvement annuel & son mouvement diurne, a encore un autre mouvement par lequel son axe dérange son (*f*) parallélisme, & répond au bout d'un certain tems à différens points du ciel; ce mouvement cause ce qu'on appelle *la précession des équinoxes*, c'est-à-dire, la rétrogradation des points

(*f*) On appelle *parallele* une ligne qui conserve toujours la même position par rapport à quelque point supposé fixe.

équinoctiaux,

équinoctiaux, ou des points dans lesquels l'équateur de la Terre coupe l'écliptique ; le mouvement des points équinoctiaux se fait contre l'ordre des signes, & il est si lent, qu'il ne s'acheve qu'en 25920 années, il est d'un dégré en 72 ans, & de 50″ en une année environ.

En quel sens elle se fait, & en quel tems elle s'accomplit.

Sa quantité annuelle.

M. *Newton* a trouvé, comme on le verra dans la suite, la cause de ce mouvement dans l'attraction du Soleil & de la Lune, sur la protubérance de la Terre à l'équateur.

La précession des équinoxes fait que les Astronomes distinguent *l'année tropique de l'année sydéralle* ; ils appellent année tropique l'intervale de tems qui s'écoule entre les deux mêmes équinoxes dans deux révolutions annuelles de la Terre, & cette année est un peu plus courte que l'année sydéralle, qui est composée du tems que la terre employe à revenir d'un point quelconque de son orbite à ce même point.

Année *tropique* & année *sydéralle*.

## XXIII.

Il reste à parler des planetes secondaires qui sont au nombre de 10, sans compter l'anneau de Saturne ; ces 10 planetes sont les 5 Lunes de Saturne, les 4 de Jupiter, & celle qui accompagne la Terre.

Des planetes secondaires.

Les observations ont fait voir que les planetes secondaires observent les régles de *Kepler*, en tournant autour de leur planete principale.

Elles observent les régles de *Kepler*.

Il n'y a pas longtems qu'on a découvert les satellites de Jupiter & de Saturne, & cette découverte étoit impossible avant les télescopes ; (*t*) *Galilée* découvrit les 4 satellites de Jupiter, qu'il appella *les astres de Médicis*, & qui sont d'une grande utilité dans la Géographie & l'Astronomie.

Découverte des satellites de Jupiter.

M. *Hughens* fut le premier qui découvrit un satellite à Saturne,

Et de ceux de Saturne.

(*t*) M. *Volf* dans son Astronomie, Chap. II. prétend que Simon *Marius*, Mathématicien Brandbourgeois, découvrit en Allemagne trois satellites de Jupiter, la même année que *Galilée* les découvrit en Italie.

& il a retenu ſon nom, c'eſt le 4^e^. M. *Caſſini* le pere découvrit les quatre autres.

XXIV.

Diſtances des Lunes de Jupiter à cette planete, & leurs tems périodiques autour de Jupiter.

En prenant le demi diamétre de Jupiter pour commune meſure, ſes 4 ſatellites ſe trouvent placés aux diſtances ſuivantes, en commençant par celui qui en eſt le plus près.

Le premier en eſt à 5, le ſecond à 9, le troiſiéme à 14, & le quatriéme enfin à 25 en nombre rond, ſelon les obſervations de M. *Caſſini* ſur les éclipſes de ces ſatellites.

Leurs tems périodiques autour de Jupiter ſont d'autant plus longs, qu'ils ſont plus éloignés de cette planete, le premier tourne en $42^{h}$, le ſecond en 85, le troiſiéme en 171, & le quatriéme en 400, en négligeant les minutes.

On ne connoît ni la révolution diurne, ni le diamétre, ni la groſſeur, ni la maſſe, ni la denſité, ni la quantité de la force attractive de ces ſatellites, & juſqu'à préſent les meilleurs téleſcopes les ont fait voir ſi petits, qu'on ne peut gueres eſpérer de parvenir à ces découvertes. Il en eſt de même des cinq Lunes qui tournent autour de Saturne.

XXV.

En prenant le demi diamétre de l'anneau de Saturne pour commune meſure, les diſtances des ſatellites de Saturne à cette planete, ſont dans les proportions ſuivantes en commençant par le plus intérieur.

Diſtances des ſatellites de Saturne à Saturne, & leurs tems périodiques autour de cette planete.

Le premier en eſt à 1, le ſecond à 2, le troiſiéme à 5, le quatriéme à 8, & le cinquiéme à 24 en nombre rond, & leurs tems périodiques ſont, ſelon M. *Caſſini*, de $45^{h}$, $65^{h}$, $109^{h}$, $382^{h}$, & $1903^{h}$, reſpectivement.

Les ſatellites de Saturne font tous leur révolution dans le plan de l'équateur de cette planete, il n'y a que le cinquiéme qui s'en éloigne de 15 ou 16 dégrés.

Conjecture de M. *Hughens* sur un sixiéme satellite de Saturne.

Plusieurs Astronomes, & entr'autres M. *Hughens*, ont soupçonné qu'on découvriroit peut-être quelque jour, si on peut perfectionner les télescopes, un sixiéme satellite de Saturne entre le quatriéme & le cinquiéme, la distance qui est entre ces deux satellites étant trop grande proportionnellement à celle qui sépare les autres; mais il se trouveroit alors cette autre difficulté, que ce satellite, qui seroit le cinquiéme, seroit cependant beaucoup plus petit que les quatre qui lui seroient intérieurs, puisqu'il faudroit de meilleurs télescopes pour l'appercevoir.

Les orbes des satellites de Jupiter & de Saturne, sont presque concentriques à ces planetes.

Observation de M. *Maraldi* sur les satellites de Jupiter.

M. *Maraldi* a observé des taches sur les satellites de Jupiter; mais on n'a pu tirer encore aucune conséquence de cette observation, qui pourroit, si elle étoit suivie, nous apprendre beaucoup de choses sur les mouvemens des satellites.

## XXVI.

De l'anneau de Saturne.

Il n'adhere point au corps de cette planete.

Saturne, outre ses cinq Lunes, est encore entourré d'un anneau; cet anneau n'adhere au corps de Saturne dans aucune de ses parties, car on voit les étoiles fixes à travers l'espace qui le sépare du corps de cette planete; le diamétre de cet anneau est au diamétre de Saturne environ comme 9 à 4, selon M. *Hughens*, ainsi il est plus que double du diamétre de Saturne; la distance du corps de Saturne à son anneau est d'environ la moitié de ce diamétre, ensorte que la largeur de l'anneau est à peu près égale à la distance qui est entre son limbe intérieur & le globe de Saturne; son épaisseur est très-petite, car lorsqu'il nous présente le tranchant, il n'est pas visible pour nous, & il ne paroît alors que comme une raie noire qui traverse le globe de Saturne; ainsi cet anneau a des phases selon la position de Saturne dans son orbe, ce qui prouve que c'est un corps opaque, & qui ne brille, comme les autres corps de notre systême planétaire, qu'en nous réfléchissant la lumiere du Soleil.

Sa distance au corps de la planete.

Son diamétre.

Sa largeur.

Son épaisseur.

C'est un corps opaque, & qui a des phases.

On ne peut découvrir si l'anneau de Saturne tourne sur lui-même, car il ne paroît aucun changement dans son aspect d'où l'on puisse conclure cette rotation.

Le plan de cet anneau fait toujours, avec le plan de l'écliptique, un angle de $23^{\circ} \frac{1}{2}$, ainsi son axe reste toujours paralléle à lui-même dans sa translation autour du Soleil.

De la découverte de cet anneau.
Ce qu'on en pensoit avant M. *Hughens*.

C'est à M. *Hughens* qu'on doit la découverte de l'anneau de Saturne, qui est un phénomene unique dans le ciel; avant lui les Astronomes avoient observé des phases dans Saturne, car ils confondoient cette planete avec son anneau; mais ces phases étoient si différentes de celle des autres planetes, qu'on ne pouvoit les expliquer: on peut voir dans *Henelius* les noms qu'il donne à ces apparences de Saturne, & combien (*u*) il étoit loin d'en soupçonner la vérité.

M. *Hughens*, en comparant les différentes apparences de Saturne, a trouvé qu'elles étoient causées par un anneau dont il est entouré, & cette supposition répond si bien à tout ce que les télescopes y découvrent, qu'aucun Astronome ne doute à présent de l'éxistence de cet anneau.

Idée de *Gregori* sur cet anneau.

*Gregori*, en parlant de l'idée de M. *Hallei* que le globe terrestre pourroit bien n'être qu'un assemblage de croutes concentriques à un noyau intérieur, a conjecturé que l'anneau de Saturne étoit formé de plusieurs croutes concentriques qui se sont détachées du corps de la planete, dont le diamétre étoit auparavant égal à la somme de son diamétre actuel, & de la largeur de l'anneau.

On conjecture encore que l'anneau de Saturne n'est peut-être qu'un assemblage de Lunes que la grande distance nous fait voir comme contigues, mais tout cela n'est fondé sur aucune observation.

Les Satellites de Jupiter & de Saturne sont des corps sphériques.
Comment on s'en est assûré.

On sçait par les ombres des satellites de Jupiter & de Saturne sur leurs planetes principales, que ces satellites sont des corps sphériques.

(*u*) *Henelius in opusculo de Saturni nativa facie* distingue les différens aspects de Saturne par les noms de *monasphericum*, *trisphericum*, *spherico-ansatum*, *ellipti-coansatum*, *spheri-cocuspidatum*, & il subdivise encore ces phases en d'autres.

## XXVII.

Notre terre n'a qu'un ſatellite qui eſt la Lune, mais ſa proximité fait qu'on a pouſſé bien plus loin les découvertes ſur ce ſatellite que ſur les autres.

De la Lune.

La Lune fait ſa révolution autour de la terre dans une ellipſe dont la terre occupe un des foyers ; cette ellipſe change ſans ceſſe de poſition & d'eſpéce, & on verra dans les Chapitres ſuivans, que le Soleil eſt la cauſe de ces variations.

Quelle eſt la courbe qu'elle décrit autour de la terre.

La Lune ſuit la premiere des deux régles de *Kepler* en tournant autour de la terre, & elle ne s'en dérange que par l'action du Soleil ſur elle ; elle fait ſa révolution autour de la terre, d'Occident en Orient, en 27 jours 7 $^{h}$ 43', & c'eſt ce qu'on appelle *ſon mois périodique*.

Son mois périodique.

Le diſque de la Lune que nous voyons eſt tantôt entierement éclairé du Soleil, & tantôt il ne l'eſt qu'en partie : ſa partie éclairée nous paroît plus ou moins grande ſelon ſa poſition par rapport au Soleil & à la terre, & c'eſt ce qu'on appelle *ſes phaſes* ; elle ſubit toutes ſes phaſes dans l'eſpace d'une révolution qu'on appelle *ſynodique*, & qui eſt compoſée du tems qu'elle employe à aller de ſa conjonction avec le Soleil à ſa prochaine conjonction, ce mois ſynodique de la Lune eſt de 29 jours $\frac{1}{2}$ environ.

Ses phaſes.

Son mois ſynodique.

Les phaſes de la Lune prouvent qu'elle eſt un corps opaque, & qu'elle ne brille qu'en nous réfléchiſſant la lumiere du Soleil.

La Lune eſt un corps opaque & ſphérique.

On connoît que la Lune eſt un corps ſphérique, parce qu'elle nous paroît toujours terminée par une courbe.

Comment on l'a découvert.

Notre terre éclaire la Lune pendant ſes nuits de même que la Lune nous éclaire pendant les nôtres, & c'eſt par la lumiere réfléchie de la terre, qu'on voit la Lune lorſqu'elle n'eſt pas éclairée par la lumiere du Soleil.

La terre éclaire la Lune pendant ſes nuits.

Comme la ſurface de la terre eſt environ 14 fois plus grande que celle de la Lune, la terre vûe de la Lune doit paroître 14 fois plus brillante, & envoyer 14 fois plus de rayons à la Lune, que

Proportion de cette illumination.

la Lune ne nous en envoye, en ſuppoſant cependant que ces deux planetes ſoient également propres à réfléchir la lumiere.

Inclinaiſon du plan de l'orbite de la Lune.

Le plan de l'orbite de la Lune eſt incliné au plan de l'écliptique ſous un angle de 5° environ.

Le grand axe de l'ellipſe, que la Lune décrit en tournant autour de la terre, eſt ce qu'on appelle *la ligne des apſides* (x) *de la Lune.*

La Lune accompagne la terre dans ſa révolution annuelle autour du Soleil.

Ce que c'eſt que le *périgée* & l'*apogée.*

La ligne *des apſides* de la Lune eſt mobile.

Si l'orbite de la Lune n'avoit d'autre mouvement que celui de ſa tranſlation autour du Soleil avec la terre, l'axe de cet orbite demeureroit toujours paralléle à lui-même, & la Lune, étant dans ſon *apogée* & dans ſon *périgée*, ſeroit toujours aux mêmes diſtances de la terre, & répondroit toujours aux mêmes points du ciel; mais la ligne des apſides de la Lune ſe meut d'un mouvement angulaire autour de la terre ſelon l'ordre des ſignes, & l'apogée & le périgée de la Lune ne reviennent aux mêmes points qu'au bout d'environ 9 ans, qui eſt le tems de la révolution de la ligne des apſides de la Lune.

Tems de la révolution de cette ligne.

Révolution des nœuds de la Lune.

L'orbite de la Lune coupe l'orbite de la terre en deux points, qu'on appelle *ſes nœuds ;* ces points ne ſont pas toujours les mêmes, mais ils changent perpétuellement par un mouvement rétrogreſſif, c'eſt-à-dire, contre l'ordre des ſignes, & ce mouvement eſt tel, que dans l'eſpace de 19 ans les nœuds ont fait une révolution entiere, après laquelle ils reviennent couper l'orbe de la terre ou l'écliptique aux mêmes points.

Tems de cette révolution.

Excentricité de la Lune.

L'excentricité de l'orbe de la Lune change auſſi continuellement; cette excentricité eſt tantôt plus grande & tantôt moindre, enſorte que la différence entre la plus petite & la plus grande excentricité, ſurpaſſe la moitié de la plus petite.

(x) On appelle *ligne des apſides* pour la Lune, la ligne qui paſſe par l'*apogée* & par le *périgée ;* l'*apogée* eſt le point de l'orbite le plus loin de la terre, & le *périgée* eſt le point de cet orbite qui eſt le moins éloigné. On nomme en général apſides, pour toutes les orbites, les points les plus éloignés & les plus proches du point central.

On verra dans les Chapitres suivans comment M. *Newton* a trouvé la cause de toutes ces inégalités de la Lune.

Le seul mouvement de la Lune qui soit égal, est son mouvement de rotation autour de son axe ; ce mouvement s'éxécute précisément dans le même tems que sa révolution autour de la terre, ainsi son jour est de 27 de nos jours, $7^h 43'$. Son mouvement autour de son axe.

Cette égalité du jour & du mois périodique de la Lune, fait qu'elle nous présente toujours le même disque à peu près. En quel tems il s'exécute.

L'égalité du mouvement de la Lune autour de son axe, combinée avec l'inégalité de son mouvement autour de la terre, fait que la Lune nous paroît osciller sur son axe, tantôt vers l'Orient, & tantôt vers l'Occident, & c'est ce qu'on appelle *sa libration* ; par ce mouvement elle nous présente quelquefois des parties qui étoient cachées, & nous en cache qui étoient visibles. Libration de la Lune.

Cette libration vient du mouvement elliptique de la Lune, car si cette planete se mouvoit dans un cercle dont la terre occupât le centre, & qu'elle tournât sur son axe dans le tems de son mouvement périodique autour de la terre, elle présenteroit toujours éxactement à la terre la même face sans aucune variation. Sa cause.

On ne connoît point la forme de la partie de la surface de la Lune qui est de l'autre côté de son disque par rapport à nous, & il y a même des Astronomes qui veulent expliquer sa libration en donnant une forme conique à cette partie de sa surface que nous ne voyons point, & qui nient sa rotation sur elle-même.

La surface de la Lune est pleine d'éminences & de cavités, c'est ce qui fait qu'elle réfléchit de toutes parts la lumiere du Soleil, car si elle étoit unie comme un de nos miroirs, elle ne nous réfléchiroit que l'image du Soleil.

La Lune est éloignée de la terre dans sa moyenne distance de $60\frac{1}{2}$ demi diamétres de la terre, environ. Distance de la Lune à la terre.

Le diamétre de la Lune est au diamétre de la terre comme 100 à 365, sa masse est à la masse de la terre comme 1 à 39,788, & sa densité est à la densité de la terre comme 11 à 9. Son diamétre. Sa masse. Sa densité.

Ce que les corps pesent sur la Lune.

Enfin le même corps qui pese trois livres à la surface de la terre, peseroit environ une livre à la surface de la Lune.

On connoît toutes ces proportions dans la Lune, & non dans les autres satellites, parce que cette planete offre un élément qui lui est particulier ; c'est son action sur les eaux de la mer que M. *Newton* a sçu mesurer & employer à la détermination de sa masse. Nous rendrons compte dans un des Chapitres suivans, de la méthode qu'il a suivie pour y parvenir.

# CHAPITRE SECOND.

## *Comment la théorie de M. Newton explique les Phénomenes des planetes principales.*

### I.

Le premier Phénomene qu'il faut expliquer quand on veut rendre compte des mouvemens célestes, c'est celui de la circulation perpétuelle des planetes autour du centre de leur révolution.

Par la premiere loi du mouvement, tout corps suit de lui-même la ligne droite dans laquelle il a commencé à se mouvoir, donc afin qu'une planete soit détournée de la petite ligne droite qu'elle tend à décrire à chaque instant, il faut qu'une force différente de celle qui la porte à décrire cette petite ligne agisse sans cesse sur elle pour l'en détourner, de même que la corde que tient la main de celui qui fait tourner un corps en rond empêche à chaque moment ce corps de s'échapper par la tangente du cercle qu'on lui fait décrire.

Comment les anciens Philosophes & *Descartes* en dernier lieu expliquoient

Les Anciens, pour expliquer ce Phénomene, avoient imaginé des cieux solides, & *Descartes* des tourbillons ; mais l'une & l'autre de ces explications étoient de pures hypothèses dénuées de preuves,

&

& si celle de *Descartes* étoit plus philosophique, elle n'en étoit pas plus solidement établie.

la circulation des planetes dans leur orbe.

I I.

M. *Newton* commence par prouver dans la premiere proposition (*a*), que les aires qu'un corps décrit autour d'un centre immobile auquel il tend continuellement, sont proportionnelles au tems; & réciproquement dans la seconde, que si un corps décrit en tournant autour d'un centre des aires proportionnelles au tems, ce corps est attiré par une force qui le porte vers ce centre : donc, puisque selon la découverte de *Kepler* les planetes décrivent autour du Soleil des aires proportionnelles au tems, elles ont une force centripéte qui les fait tendre vers le Soleil, & qui les retient dans leur orbe.

C'est la force centripéte qui empêche les planetes de s'échapper par la tangente.

M. *Newton* a fait voir, de plus, (Cor. 1. Prop. 2.) que si la force qui agit sur le corps le faisoit tendre vers divers points, elle accéleroit ou retarderoit la description des aires qui ne seroient plus alors proportionnelles au tems : donc, si les aires sont proportionelles au tems, non-seulement le corps est animé par une force centripéte qui le porte vers le corps central, mais cette force le fait tendre à un seul & même point.

I I I.

De même que la révolution des planetes dans leur orbe prouve une force centripéte qui les retire de la tangente, ainsi de ce qu'elles ne tombent pas en ligne droite vers le centre de leur révolution, on peut conclure qu'une force, autre que la force centripéte, agit sur elles. M. *Newton* a cherché (*b*) quel tems chaque planete, placée à la distance où elle est, employeroit à tomber sur le Soleil si elle n'obéissoit qu'à l'action du Soleil sur elle, &

(*a*) Quand on cite des propositions, sans citer le Livre, ce sont des propositions du Livre premier.

(*b*) *De Systemate mundi*, pag. 31. édition de 1731.

il a trouvé que les différentes planetes employeroient à y tomber la moitié du tems périodique qu'un corps mettroit à faire sa révolution autour du même centre à une distance deux fois moindre que la leur, & que par conséquent ce tems devoit être à leur tems périodique comme 1 à $4 \sqrt{2}$ : ainsi Vénus, par exemple, mettroit environ quarante jours à arriver au Soleil, car 40 : 224 :: 1 : $4 \sqrt{2}$. à peu près ; Jupiter employeroit deux ans & un mois, & la terre & la Lune soixante-six jours & dix-neuf heures, &c. Donc, puisque les planetes ne tombent pas dans le Soleil, il faut que quelque force s'oppose à la force qui les fait tendre vers leur centre, & cette force est ce qu'on appelle *la force projectile*.

Et la force projectile les empêche de tomber vers leur centre. Prop. 36.

## I V.

L'effort que font les planetes en vertu de cette force pour s'éloigner du centre de leur mouvement, est ce qu'on appelle leur *force centrifuge ;* ainsi dans les planetes, la force centrifuge est la partie de la force projectile qui les éloigne directement du centre de leur révolution.

De la force centrifuge des planetes.

## V.

La force projectile a la même direction dans toutes les planetes, car elles tournent toutes autour du Soleil d'Occident en Orient.

En supposant que la résistance du milieu dans lequel les planetes se meuvent soit nulle, on trouve la raison de la conservation du mouvement projectile des planetes dans l'inertie de la matiere, & dans la premiere loi du mouvement, mais sa cause physique & la raison de sa direction sont encore cachées pour nous.

## V I.

Après avoir prouvé que les planetes sont retenues dans leur orbite par une force qui tend vers le Soleil, M. *Newton* démontre prop. 4. que les forces centripétes des corps qui décrivent des cercles, sont entr'elles comme les quarrés des arcs de ces cercles parcourus en tems égal, & divisés par leurs rayons ; d'où il tire, que si

M. *Newton* est parvenu à découvrir que la force qui porte les planetes vers le Soleil, suit la proportion inverse les tems périodiques des corps révoluans dans des cercles ſont en raiſon ſeſquiplée de leurs rayons, la force centripéte qui les porte vers le centre de ces cercles, eſt en raiſon réciproque des quarrés de ces mêmes rayons, c'eſt-à-dire des diſtances de ces corps au centre : or, par la ſeconde regle de *Kepler*, que toutes les planetes obſervent, les tems de leurs révolutions ſont entr'eux en raiſon ſeſquiplée de leurs diſtances à leur centre, donc, la force qui porte les planetes vers le Soleil décroit en raiſon inverſe du quarré de leurs diſtances à cet aſtre, en ſuppoſant qu'elles tournent dans des cercles concentriques au Soleil.

doublée des diſtances, par celle qui eſt entre leurs diſtances au Soleil & leurs tems périodiques.

Prop. 4. Cor. 6.

Et en ſuppoſant d'abord leurs orbes circulaires.

## VII.

L'idée qui ſe préſente le plus naturellement à l'eſprit, quant aux orbes des planetes, c'eſt qu'elles font leurs révolutions dans des cercles concentriques ; mais leurs différens diamétres apparens, & plus d'éxactitude dans les obſervations, avoient fait connoître depuis longtems que leurs orbes ne pouvoient être concentriques au Soleil : on expliquoit donc leurs cours avant *Kepler* par des cercles excentriques qui ſatisfaiſoient aſſez bien aux obſervations pour le Soleil & les planetes, ſi on en excepte Mercure & Mars.

On croyoit avant *Kepler* que les planetes tournoient autour du Soleil dans des cercles excentriques.

Ce fut le cours de cette derniere planete qui fit ſoupçonner à *Kepler* que l'orbe des planetes pourroit bien être une ellipſe dont le Soleil occupe un des foyers, & cette courbe s'accorde ſi parfaitement avec les Phénomenes, qu'il eſt à préſent reconnu de tous les Aſtronomes, que c'eſt dans des ellipſes que les planetes tournent autour du Soleil, & que cet aſtre occupe un des foyers de ces ellipſes.

Mais *Kepler* a fait voir qu'elles tournent dans des ellipſes.

## VIII.

En partant de cette découverte, M. *Newton* a cherché quelle eſt la loi de force centripéte néceſſaire pour faire décrire une ellipſe aux planetes, & il a trouvé dans la prop. 11. que cette force doit ſuivre la proportion inverſe du quarré des diſtances du corps au foyer de cette ellipſe ; mais on vient de voir qu'il avoit trouvé dans le cor. 6. de la prop. 4. que dans les cercles, les tems périodiques des corps révoluans étant en raison sesquiplée des distances, la force étoit inversement comme le quarré de ces mêmes distances ; il ne restoit plus, pour être entierement sûr que la force centripéte qui dirige les corps célestes dans leurs cours suit la proportion inverse du quarré des distances, qu'à éxaminer si les tems périodiques suivent la même proportion dans les ellipses que dans les cercles.

M. *Newton* a fait voir que dans les ellipses les tems périodiques sont dans la même proportion que dans les cercles.

Or, M. *Newton* fait voir dans la prop. 15. que les tems périodiques dans les ellipses sont en raison sesquiplée de leurs grands axes ; c'est-à-dire, que ces tems sont dans la même proportion dans les ellipses, & dans les cercles dont les diamétres seroient égaux aux grands axes des ellipses.

Cette courbe que les planetes décrivent dans leur révolution a cette propriété, que si l'on en prend de petits arcs parcourus en tems égal, l'espace compris entre la ligne tirée de l'une des extrémités de cet arc & la tangente à l'autre extrémité croit à mesure que le quarré de la distance au foyer diminue, & cela dans la même proportion ; d'où il suit, que le pouvoir attractif qui est proportionnel à cet espace, suit aussi la même proportion.

## I X.

Et que par conséquent la force centripéte qui retient les planetes dans leur orbe, décroit comme le quarré de la distance.

M. *Newton* ne s'est pas contenté d'examiner la loi qui fait décrire des ellipses aux planetes, mais il a examiné si cette même loi ne pouvoit pas faire décrire d'autres courbes aux corps, & il a trouvé (Cor. 1. prop. 13.) qu'elle ne leur feroit jamais décrire qu'une des Sections coniques dont le centre des forces seroit le foyer, & cela quelque fût la vitesse projectile.

La force centripéte étant dans cette proportion, les planetes ne peuvent décrire que des Sections coniques dont le Soleil occupe un des foyers.

Les autres loix qui feroient décrire des Sections coniques, les feroient décrire autour d'autres points que le foyer ; M. *Newton* a trouvé *P. E.* que si la puissance est comme la distance au centre, elle fera décrire au corps une Section conique dont le centre sera le centre des forces, ainsi M. *Newton* a non-seulement trouvé la loi que suit la force centripéte dans notre sistême planétaire, mais il a fait voir qu'une autre loi ne pouvoit avoir lieu dans notre monde tel qu'il est. Prop. 10.

X.

Maniere de déterminer l'orbe d'une planete, en supposant la loi de la force centripéte donnée.

M. *Newton* a cherché ensuite prop. 17. la courbe que doit décrire un corps dont la force centripéte décroit en raison inverse du quarré des distances, en supposant que ce corps parte d'un point donné avec une vitesse & une direction prises à volonté.

Il est parti pour la solution de ce problême, de la remarque qu'il avoit fait prop. 16. que les vitesses des corps qui décrivent des Sections coniques, sont à chaque point de ces courbes, inversement comme les perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes, & directement comme les racines quarrées des paramétres.

Outre que cette proposition fait un problême intéressant pour la seule Géométrie, il est encore très-utile dans l'Astronomie; car en découvrant par quelques observations la vitesse & la direction d'une planete dans quelque partie de son orbite, on peut, à l'aide de cette proposition, trouver le reste de l'orbite, & la détermination de l'orbite des cométes peut être en grande partie fondée sur la même proposition.

X I.

Quelles courbes d'autres loix de forces centripétes feroient décrire.

La proportion entre la force centripéte & la force projectile est la cause de la circulation perpétuelle des planetes dans leur orbe.

Il est aisé de s'appercevoir que d'autres loix de force centripéte que celle du quarré des distances feroient décrire d'autres courbes, & il y auroit telle loi dans laquelle les planetes, malgré la force projectile, descendroient vers le Soleil, & telle autre dans laquelle, malgré leur force centripéte, elles s'en iroient à l'infini dans les espaces céléstes; telle autre leur feroit décrire des spiralles, &c. & M. *Newton* cherche dans la prop. 42. quelles seroient les courbes décrites dans toutes sortes d'hypotèses de force centripéte.

X I I.

On voit par tout ce qu'on vient de dire que la circulation perpétuelle des planetes dans leur orbe, dépendoit de la proportion entre la force centripéte & la force projectile, & que ceux qui demandent pourquoi, lorsque les planetes sont arrivées à leur périhélie, elles remontent à leur aphélie, ne connoissent pas cette proportion; car dans la plus haute apside, la force centripéte surpasse la force centrifuge, puisqu'alors le corps s'approche du centre, & dans l'apside la plus basse, la force centrifuge surpasse à son tour la force centripéte, puisqu'en remontant le corps s'éloigne du centre, donc il falloit une certaine combinaison entre la force centripéte & la force centrifuge, pour que ces forces se surpassassent alternativement l'une & l'autre, & qu'elles fissent aller perpétuellement le corps de l'apside la plus haute à la plus basse, & de la plus basse à la plus haute.

On fait encore une objection sur la continuation des mouvemens célestes, tirée de la résistance qu'ils doivent éprouver dans le milieu dans lequel ils se meuvent. M. *Newton* a répondu à cette objection dans la Prop. 10. du Liv. 3. où il fait voir que la résistance des milieux diminue en raison de leurs poids & de leur densité; or, il avoit fait voir dans le Scholie de la Prop. 22. Liv. 2. qu'à la hauteur de 200 milles au-dessus de la surface de la terre, l'air y est plus rare qu'à sa surface dans la raison de 30000,0000000000003998 ou de 75000000000000 à 1. environ; d'où il conclut (Prop. 10. Liv. 3.) que supposant de cette densité le milieu dans lequel se meut Jupiter, cette planete parcourant en 30 jours 5 de ses demi diamétres, elle perdroit à peine en 1000000 ans, par la résistance d'un tel milieu, la 1000000$^{\text{eme}}$ partie de son mouvement. On voit donc que le milieu dans lequel se meuvent les planetes peut être si subtil, que sa résistance soit regardée comme nulle, & la proportionnalité observée constamment entre les aires & les tems, nous assure qu'en effet cette résistance est insensible.

## XIII.

Puisqu'on a vû ci-dessus que la proportionnalité des tems & des aires que les planetes décrivent autour du Soleil, prouve qu'elles tendent à cet aſtre comme à leur centre, & que la raiſon qui eſt entre leurs tems périodiques & leurs diſtances, fait connoître que cette force agit en raiſon doublée inverſe des diſtances; ſi les planetes qui font leur révolution autour du Soleil ſe trouvent environnées d'autres corps qui tournent autour d'elles, & qui ſuivent dans leurs révolutions ces mêmes proportions, il ſera prouvé que ces corps révoluans éprouvent une force centripéte qui les porte vers ces planetes, & que cette force décroît comme celle du Soleil en raiſon du quarré de la diſtance.

Comment les planetes peuvent conſerver leur mouvement malgré la réſiſtance du milieu dans lequel elles ſe meuvent.

Nous ne connoiſſons que trois planetes qui ayent des corps révoluans autour d'elles, Jupiter, la Terre & Saturne; on ſçait que les ſatellites de ces 3 planetes décrivent autour d'elles des aires proportionnelles au tems, & que par conſéquent ils ſont animés par une force qui tend vers ces planetes.

## X I V.

Jupiter & Saturne ayant chacun pluſieurs ſatellites dont on connoît les tems périodiques & les diſtances, il eſt aiſé de connoître ſi les tems de leur révolution autour de leur planete ſont à leur diſtance dans la proportion découverte par *Kepler*; & les obſervations font voir que les ſatellites de Jupiter & de Saturne obſervent auſſi cette ſeconde loi de *Kepler* en tournant autour de leur planete, & que par conſéquent la force centripéte dans Jupiter & dans Saturne, décroît en raiſon inverſe du quarré de la diſtance des corps au centre de ces planetes.

La comparaiſon des tems périodiques & des diſtances des ſatellites de Jupiter & de Saturne, fait voir que la force qui porte les ſatellites de ces planetes vers leur planete principale, ſuit auſſi la proportion doublée inverſe des diſtances.

## X V.

La terre n'ayant qu'un ſatellite, qui eſt la Lune, il paroît d'abord difficile de connoître la proportion dans laquelle agit la force qui fait tourner la Lune autour de la terre, puiſqu'on manque pour cela de terme de comparaiſon.

M. *Newton* a trouvé le moyen d'y ſuppléer, & voici comment il y eſt parvenu.

Comment M. *Newton* est parvenu à découvrir que la force attractive de la terre suit la même proportion.

Tous les corps qui tombent ici-bas parcourent, ſelon la progreſſion découverte par *Galilée*, des eſpaces qui ſont comme les quarrés des tems employés à tomber.

On connoît la diſtance moyenne de la Lune à la terre qui eſt de 60 demi diamétres de la terre en nombres ronds, & tous les corps d'ici-bas ſont cenſés à un demi diamétre du centre de la terre; donc ſi la même force fait tomber les corps & circuler la Lune dans ſon orbite, & ſi cette force décroît comme le quarré de la diſtance, elle doit agir 3600 fois plus ſur les corps placés à la ſurface de la terre que ſur la Lune, puiſque la Lune eſt 60 fois plus éloignée qu'eux du centre de la terre; on connoît l'orbe de la Lune puiſqu'on connoît à préſent la meſure de la terre, on ſçait que la Lune employe 27 jours 7 heures 43 ′ à parcourir cet orbe, on connoît par conſéquent l'arc qu'elle parcourt en une minute; or par le Cor. 9. de la Prop. 4. on voit que l'arc décrit en un tems donné par un corps qui tourne d'un mouvement uniforme & avec une force centripéte donnée dans un cercle eſt moyen proportionnel entre le diamétre de ce cercle & la ligne dont ce corps eſt deſcendu vers le centre dans le même tems.

Il eſt vrai que la Lune ne décrit pas éxactement un cercle autour de la terre, mais on peut le ſuppoſer dans le cas dont il s'agit ſans erreur ſenſible, & cette ſuppoſition faite, on trouve alors que la ligne qui exprime la quantité dont la Lune eſt tombée vers la terre en une minute par la force centripéte eſt de quinze pieds en nombres ronds.

Or la Lune, ſelon la progreſſion de *Galilée*, parcoureroit dans le lieu où elle eſt, 3600 fois moins d'eſpace en une ſeconde qu'en une minute, & les corps qui ſont à la ſurface de la terre parcourent, ſelon les expériences des pendules qu'on doit à M. *Hughens*, 15 pieds environ en une ſeconde, c'eſt-à-dire, 3600 fois plus d'eſpace que la Lune, donc la force qui les fait tomber agit 3600 fois plus ſur eux que ſur la Lune, ce qui eſt préciſément la proportion des quarrés de leurs diſtances.

On

On voit par cet exemple de quelle utilité eſt la meſure de la terre ; car pour pouvoir comparer cette flêche qui exprime la quantité dont la Lune s'eſt approchée de la terre, à l'eſpace contemporain dont la peſanteur fait tomber les corps près de la ſurface de la terre dans le même tems, il faut avoir la diſtance abſolue de la Lune à la terre, réduite en pieds, ainſi que la longueur du pendule, car il ne ſuffit pas dans ce cas d'avoir des rapports, mais il faut des grandeurs abſolues.

## XVI.

Jupiter, Saturne & notre Terre attirent donc les corps dans la même proportion que le Soleil les attire eux-mêmes, & l'induction nous porte à conclure, que la gravité ſuit les mêmes proportions dans Mars, Vénus & Mercure : car partout ce que nous connoiſſons de ces trois planetes, elles nous paroiſſent des corps de la même eſpéce que la Terre, Jupiter & Saturne ; ainſi on peut conclure, avec beaucoup de vraiſemblance, qu'elles ont la force attractive, & que cette force décroît comme le quarré des diſtances.

La meſure de la terre étoit néceſſaire pour cette découverte.

L'analogie nous porte à conclure que l'attraction ſuit auſſi la même proportion dans les planetes qui n'ont pas de ſatellites.

## XVII.

Puiſqu'il eſt prouvé par les obſervations & par l'induction que toutes les planetes ont la force attractive en raiſon inverſe du quarré des diſtances, & que par la ſeconde loi du mouvement l'action eſt toujours égale à la réaction, on doit conclure, avec M. *Newton*, que toutes les planetes gravitent les unes vers les autres, & que de même que le Soleil attire les planetes, il eſt réciproquement attiré par elles ; car puiſque la Terre, Jupiter & Saturne agiſſent ſur leurs ſatellites en raiſon inverſe du quarré des diſtances, il n'y a aucune raiſon qui puiſſe faire croire que cette action ne s'exerce pas à toutes les diſtances dans la même proportion ; ainſi les planetes doivent s'attirer mutuellement, & on voit ſenſiblement les effets de cette attraction mutuelle dans la conjonction de Jupiter & de Saturne.

Prop. 5. Liv. 3.

De quel raiſonnement M. *Newton* a conclu la gravitation mutuelle de tous les corps céleſtes.

## XVIII.

L'analogie nous portant à croire que les planetes ſecondaires ſont en tout des corps de la même eſpéce que leurs planetes principales, il eſt très-vraiſemblable qu'elles ont auſſi la force attractive, & que par conſéquent elles attirent leur planete principale de même qu'elles en ſont attirées, & qu'elles s'attirent auſſi mutuellement l'une l'autre, ce qui eſt confirmé encore par l'attraction de la Lune ſur la terre, dont les effets deviennent ſenſibles dans les marées & dans la préceſſion des équinoxes, comme on le verra dans la ſuite.

On peut donc conclure que la force attractive appartient à tous les corps céleſtes, & qu'elle agit dans tout notre ſyſtême planétaire ſelon la proportion doublée inverſe des diſtances.

## XIX.

Quelle eſt la cauſe pour laquelle un corps tourne autour d'un autre, au lieu de le forcer à tourner autour de lui.

Mais quelle eſt la raiſon qui fait tourner un corps autour d'un autre ? Pourquoi, par exemple, ſi la Lune & la terre s'attirent réciproquement en raiſon inverſe du quarré de leurs diſtances, la terre ne tourne-t'elle pas autour de la Lune, au lieu de faire tourner la Lune autour d'elle ; il faut certainement que la loi que ſuit l'attraction ne dépende pas ſeulement de la diſtance, & qu'il y entre quelque autre élément par lequel on puiſſe rendre raiſon de cette détermination, car la diſtance eſt ici inſuffiſante, puiſqu'elle eſt la même pour l'un & l'autre globe.

Cette cauſe paroît être la maſſe du corps central.

Il eſt aiſé, en examinant les corps qui compoſent notre ſyſtême planétaire, de ſoupçonner que cette loi eſt celle des maſſes ; le Soleil autour duquel tournent tous les corps céleſtes nous paroît beaucoup plus gros qu'aucun d'eux, Saturne & Jupiter ſont beaucoup plus gros que leurs ſatellites, & notre terre l'eſt plus que la Lune qui tourne autour d'elle.

Mais pour s'en aſſurer, il falloit connoître les maſſes des différentes planetes.

Or, comme la groſſeur & la maſſe ſont deux choſes différentes, pour être aſſuré que la gravité des corps céleſtes ſuit la loi des maſſes, il étoit donc néceſſaire de connoître ces maſſes.

Mais comment connoître la maſſe des différentes planetes, c'eſt ce que la théorie de M. *Newton* nous apprend.

## X X.

Voici le chemin qu'il a ſuivi pour parvenir à cette découverte.

Puiſque l'attraction de tous les corps céleſtes ſur les corps qui les environnent ſuit la proportion inverſe du quarré des diſtances, il eſt bien vraiſemblable que les parties dont ils ſont composés s'attirent dans la même proportion.

Chemin que M. *Newton* a ſuivi pour parvenir à cette découverte.

La force attractive totale d'une planete eſt composée de la force attractive de ſes parties; car ſi l'on conçoit que pluſieurs petites planetes s'uniſſent pour en former une groſſe, la force de cette groſſe planete ſera composée des forces de toutes ces petites planetes, & M. *Newton* a prouvé dans les Prop. 74, 75 & 76. que ſi les particules dont une ſphére eſt composée s'attirent mutuellement en raiſon inverſe du quarré des diſtances, ces ſphéres entieres attireront les corps qui leur ſont extérieurs, à quelque diſtance qu'ils ſoient placés, dans cette même raiſon inverſe du quarré de leurs diſtances; & de toutes les loix d'attraction examinées par M. *Newton*, il n'a trouvé que celle en raiſon inverſe du quarré des diſtances, & celle qui ſuivroit la raiſon de la ſimple diſtance dans leſquelles les ſphéres entieres attirent les corps qui leur ſont extérieurs dans la même raiſon que leurs parties s'attirent l'une l'autre.

On voit par-là la force du raiſonnement qui a fait conclure à M. *Newton* (Cor. 3. Prop. 74.) que puiſqu'il eſt prouvé d'un côté par la théorie, que lorſque les particules d'une ſphére s'attirent réciproquement dans la raiſon inverſe du quarré des diſtances, la ſphere entiere attire les corps extérieurs dans la même raiſon, & que de l'autre les obſervations font voir que les corps céleſtes attirent dans cette proportion les corps qui leur ſont extérieurs: il eſt bien ſimple de conclure que les parties dont les corps céleſtes ſont composés s'attirent réciproquement dans cette même raiſon.

Il a commencé par trouver les poids du même corps sur les différentes planetes, à égale distance.

M. *Newton* cherche dans la Prop. 8. du Liv. 3. ce que peseroit le même corps sur les différentes planetes, & il le trouve en faisant usage du Cor. 2. de la Prop. 4. dans lequel il a fait voir que les poids des corps égaux qui circulent dans des cercles, sont comme les diamétres de ces cercles directement, & comme le quarré de leurs tems périodiques inversement ; donc connoissant les tems périodiques de Vénus autour du Soleil, des satellites de Jupiter autour de cette planete, des Lunes de Saturne autour de Saturne, & de la Lune autour de la Terre, & la distance de ces corps aux centres autour desquels ils tournent ; & supposant que ces corps décrivent des cercles dans leur révolution, ce qui peut se supposer dans le cas dont il s'agit, on trouve quel seroit le poids du même corps transporté successivement à la même distance du centre du Soleil, de Jupiter, de Saturne & de la Terre.

Et il a fait voir ensuite que la quantité de matiere est proportionnelle aux poids du même corps sur les différentes planetes, à égale distance du centre.

Le poids du même corps sur les différentes planetes, à égale distance de leur centre, étant connu, M. *Newton* en conclut la quantité de matiere que chacune d'elles contient, car l'attraction dépendant de la masse & de la distance, à égale distance les forces attractives sont comme les quantités de matiere des corps qui attirent ; donc les masses des différentes planetes sont comme les poids du même corps supposé à égale distance de leurs centres.

## XXI.

D'où il a tiré leur densité.

On peut connoître par le même moyen la densité du Soleil & des planetes qui ont des satellites, c'est-à-dire, la proportion qui est entre leur diametre & la quantité de matiere qu'elles contiennent, car M. *Newton* (Prop. 72. Liv. 1.) a prouvé que les poids des corps égaux placés sur les surfaces des sphéres homogénes & inégales, sont comme les diamétres de ces sphéres ; donc si ces sphéres étoient hétérogénes & égales, les poids des corps à leurs surfaces seroient comme leur densité, en supposant qu'il n'entre dans la loi d'attraction que la distance & la masse du corps attirant ; donc aux surfaces des sphéres hétérogénes & inégales, les poids des corps égaux feront en raifon compofée de la denfité de ces fphéres & de leur diamétre ; donc les denfités feront comme les poids des corps divifés par les diamétres.

## XXII.

Les planetes les plus petites & les plus denfes, font les plus voifines du Soleil.

On connoît par-là que les plus petites planetes font les plus denfes, & qu'elles font placées le plus près du Soleil ; car on vû dans le Chap. I. où l'on a donné toutes les proportions de notre fyftême, que la terre qui eft plus petite & plus près du Soleil que Jupiter & Saturne, eft plus denfe que ces planetes.

## XXIII.

Quelle en eft la raifon fuivant M. *Newton*.

M. *Newton* tire de-là la raifon de l'arrangement des corps céleftes de notre fyftême planétaire, qui eft tel que le requéroit la denfité de leur matiere, afin que chacun fut plus ou moins échauffé du Soleil à proportion de fa denfité & de fon éloignement ; car on fçait que plus un corps eft denfe, & plus il s'échauffe difficilement, d'où M. *Newton* conclut que la matiere de Mercure doit être fept fois plus denfe que celle de la terre, afin que la végétation puiffe y avoir lieu ; car on fçait que l'illumination à laquelle, toutes chofes égales, la chaleur eft proportionnelle, eft comme le quarré des approchemens : or, on connoît la proportion de la diftance de Mercure & de la Terre au Soleil, & par cette proportion on fçait que Merçure eft fept fois plus éclairé & par conféquent fept fois plus échauffé que la Terre ; & M. *Newton* dit avoir trouvé par fes expériences que la chaleur de notre été, augmentée fept fois, fait bouillir l'eau ; donc fi la terre étoit placée où eft Mercure, toute notre eau s'évaporeroit : fi elle l'étoit où eft Saturne, elle feroit toujours gelée, dans l'un & l'autre cas toute végétation cefferoit, & tout le genre animal périroit.

## XXIV.

On voit qu'il n'y a que les planetes qui ont des fatellites dont

On ne connoît toutes les proportions que dans les planetes qui ont des satellites.

Il faut cependant en excepter la Lune.

on puisse connoître la masse & la densité, puisque pour y parvenir, il faut comparer entr'eux les tems des révolutions des corps qui tournent autour de ces planetes, il faut cependant en excepter la Lune dont je parlerai dans la suite.

## X X V.

On voit par-là pourquoi le Soleil est le centre des révolutions célestes.

La masse des planetes étant connue, on voit que les corps qui ont moins de masse tournent autour de ceux qui en ont plus, & que plus un corps a de masse, plus il a de force attractive, toutes choses égales; ainsi toutes les planetes tournent autour du Soleil parce que le Soleil a beaucoup plus de masse qu'aucune planete, car la masse du Soleil est à celles de Jupiter & de Saturne, à peu près comme 1 à 1100, & 3000 respectivement; donc ces deux planetes étant celles de notre systême qui ont le plus de masse, il suit que le soleil doit être le centre des mouvemens de notre systême.

## X X V I.

Les altérations que Saturne & Jupiter se causent mutuellement dans leur cours, suivent la raison de leurs masses.

Si l'attraction se proportionne aux masses, l'altération causée par l'action de Jupiter sur l'orbe de Saturne dans leur conjonction, doit être beaucoup plus grande que celle qui est causée alors dans l'orbe de Jupiter par l'action de Saturne, puisque Jupiter a beaucoup plus de masse que Saturne, & c'est aussi ce qui arrive; l'altération de l'orbe de Jupiter dans sa conjonction avec Saturne, quoique sensible, est cependant beaucoup moindre que celle qu'on remarque dans l'orbe de Saturne.

## X X V I I.

Mais si l'effet de l'attraction, ou le chemin que fait le corps attiré, dépend de la masse du corps attirant, pourquoi ne dépendra-t-il pas aussi de la masse du corps attiré, c'est ce qui mérite assurément qu'on l'examine.

On sçait que tous les corps d'ici-bas tombent également vîte vers la terre, quand on ôte la résistance de l'air; car dans la machine de *Boyle*, quand on en a pompé l'air, de l'or & des plumes arrivent en même tems au fond.

M. *Newton* a confirmé cette expérience par une autre où les plus petites différences deviennent ſenſibles, même à la groſſiereté de nos organes; il rapporte qu'il a fait pluſieurs pendules de matiere très-différente, comme d'eau, de bois, d'or, de verre, &c. & que les ayant ſuſpendus à des fils d'égale longueur, ils ont fait des oſcillations ſenſiblement yſochrones pendant un très-long tems. Prop. 24. Liv. 2. & Prop. 6. Liv. 3.

## XXVIII.

Il eſt donc hors de doute que la force attractive de notre terre ſe proportionne à la maſſe des corps qu'elle attire, & qu'à la même diſtance elle dépend uniquement de leur maſſe, c'eſt-à-dire, de leur quantité de matiere. Ainſi ſi on ſuppoſe les corps d'ici-bas tranſportés à l'orbe de la Lune, puiſqu'on a prouvé ci-deſſus que la même force agit ſur la Lune & ſur ces corps & qu'elle décroît comme le quarré des diſtances, les diſtances alors étant égales, il ſuit qu'en ſuppoſant que la Lune perdit ſon mouvement projectile, ces corps & le globe de la Lune arriveroient en même tems à la ſurface de la terre & parcoureroient les mêmes eſpaces, en ſuppoſant la réſiſtance de l'air nulle.

L'attraction ſe proportionne aux maſſes ſans égard à la forme ni à l'eſpéce des corps qui s'attirent.

## XXIX.

La même choſe eſt prouvée pour les planetes qui ont des ſatellites telles que Jupiter & Saturne. Si l'on ſuppoſoit que les ſatellites de Jupiter, par exemple, fuſſent tous placés à la même diſtance du centre de cette planete, & qu'ils fuſſent tous privés de leurs fixes projectiles, ils tomberoient tous vers elle, & arriveroient à la ſurface dans le même tems. Cette propoſition eſt une ſuite de la proportion qui eſt entre les diſtances des ſatellites & les tems de leurs révolutions.

## XXX.

On prouve de même, par la raiſon qui eſt entre les tems périodiques

& les diſtances des planetes principales au Soleil, que cet aſtre agit ſur chacune d'elles proportionnellement à ſa maſſe, car à des diſtances égales leurs tems périodiques ſeroient égaux, & ſi dans cette ſuppoſition les planetes perdoient toutes leur force projectile, elles arriveroient toutes en même tems au Soleil; donc le Soleil attire chaque planete en raiſon directe de ſa maſſe.

## XXXI.

La régularité de l'orbe des ſatellites de Jupiter autour de cette planete eſt encore une preuve de cette vérité, car M. *Newton* a prouvé, Prop. 65. Cor. 3. que lorſqu'un ſyſtême de corps ſe meut dans des cercles ou dans des ellipſes régulieres, il faut que ces corps n'éprouvent d'action ſenſible que de la force attractive qui leur fait décrire ces courbes; or les ſatellites de Jupiter décrivent autour de cette planete des orbes circulaires ſenſiblement réguliers & concentriques à cette planete, les diſtances des ſatellites de Jupiter, & celle de Jupiter lui-même, au Soleil doivent être regardées comme égales, vû la petite proportion qui eſt entre les différences de leurs diſtances & la diſtance totale; donc ſi quelqu'un des ſatellites de Jupiter, ou Jupiter lui-même, étoit plus attiré par le Soleil qu'un autre ſatellite à raiſon de ſa maſſe, alors cette attraction plus forte du Soleil dérangeroit l'orbe de ce Satellite; & M. *Newton* dit, Prop. 6. Liv. 3. que ſi cette action du Soleil ſur un des ſatellites de Jupiter étoit plus ou moins grande à raiſon de ſa maſſe, que celle qu'il exerce ſur Jupiter à raiſon de la ſienne, ſeulement d'un millieme de ſa gravité totale, la diſtance du centre de l'orbe de ce ſatellite au Soleil, ſeroit plus ou moins grande que la diſtance du centre de Jupiter au Soleil, de $\frac{1}{2000}$ de ſa diſtance totale, c'eſt-à-dire, de la cinquiéme partie de la diſtance du ſatellite le plus éloigné de Jupiter à Jupiter, ce qui rendroit ſon orbe ſenſiblement excentrique; donc puiſque ces orbes ſont ſenſiblement concentriques à Jupiter, les gravités accélératrices du

Soleil

Soleil sur Jupiter & sur ses satellites sont comme leur quantité de matiere.

On peut faire le même raisonnement sur Saturne & sur ses satellites dont les orbes sont sensiblement concentriques à Saturne.

Les expériences & les observations nous portent donc à conclure que l'attraction des corps célestes est proportionnelle aux masses, tant dans le corps attirant que dans le corps attiré; que c'est la masse qui détermine un corps à tourner autour d'un autre; qu'on peut considérer indifféremment tout corps comme attirant & comme attiré; qu'enfin l'attraction est toujours réciproque entre deux corps, & que c'est la proportion qui est entre leurs masses qui décide si cette double attraction peut être sensible.

L'attraction est toujours réciproque.

## XXXII.

L'attraction a encore une propriété, c'est d'agir également sur les corps en mouvement & sur les corps en repos, & de produire des accélérations égales en tems égaux, d'où il suit que son action est continue & uniforme. C'est ce que prouve la maniere dont la gravité accélére les corps qui tombent ici-bas, & ce qui suit du mouvement des planetes qui ne sont, comme nous l'avons fait voir, que de plus grands projectiles, mais toujours soumis aux mêmes loix.

L'attraction agit uniformément & continuellement, & produit des accélérations égales en tems égal, soit que les corps sur lesquels elle agit se meuvent, soit qu'ils soient en repos.

## XXXIII.

Puisque la proportion qui est entre les masses des corps qui s'attirent décide du chemin que l'un fait vers l'autre, on voit que le Soleil ayant beaucoup plus de masse que les planetes, l'attraction qu'elles exercent sur lui ne doit pas être sensible. Cependant l'attraction des planetes sur le Soleil, quoique trop peu considérable pour être sensible, n'est cependant pas nulle; & en la considérant, on voit que le centre autour duquel chaque planete tourne n'est pas le centre du Soleil, mais le point où se trouve placé le centre commun de gravité du Soleil & de l'astre dont on considére la

Effet de l'attraction des planetes sur le Soleil.

révolution. Ainsi, comme on a vu dans le Chapitre I. §. 19. que la matiere du Soleil est à celle de Jupiter, par exemple, comme 1 à $\frac{1}{1067}$. & la distance de Jupiter au Soleil étant au demi diamétre du Soleil dans une raison un peu plus grande, il suit que le centre commun de gravité de Jupiter & du Soleil tombe dans un point fort près de la surface du Soleil.

Par le même raisonnement on trouve que le centre de gravité de Saturne & du Soleil tombe dans la superficie du Soleil, & en faisant le même calcul pour toutes les planétes, M. *Newton* dit, que si la terre & toutes les autres planetes étoient placées du même côté, le centre commun de gravité du Soleil & de toutes les planetes seroit à peine éloigné du centre du Soleil d'un de ses diamétres. Car bien qu'on ne connoisse pas la masse de Vénus, de Mercure ni de Mars, cependant comme ces planetes sont beaucoup plus petites que Saturne & que Jupiter, qui ont elles-mêmes infiniment moins de masse que le Soleil, on peut conclure que leur masse ne dérange pas cette proportion.

Prop. 12. Liv. 3.

## XXXIV.

Cet effet est de le faire osciller autour du centre commun de gravité de notre systême planétaire.

C'est autour de ce centre commun de gravité que les planetes tournent, & le Soleil lui-même oscille autour de ce centre commun de gravité selon les proportions de l'attraction des planetes sur lui. Ainsi c'est improprement que lorsqu'on considére le mouvement de deux corps dont l'un tourne autour de l'autre, on regarde le corps central comme fixe. Les deux corps, c'est-à-dire, le corps central & celui qui tourne autour de lui, tournent tous deux autour de leur centre de gravité commun, mais le chemin qu'ils font autour de ce centre de gravité étant en raison réciproque de leur masse, la courbe que décrit le corps qui a beaucoup plus de masse est presque insensible : c'est pourquoi l'on ne considére que la courbe décrite par le corps dont la révolution est sensible, & on néglige ce petit mouvement du corps central qu'on regarde comme fixe.

## XXXV.

La Terre & la Lune tournent donc autour de leur centre commun de gravité, & ce centre tourne lui-même autour du centre de gravité de la Terre & du Soleil. Il en est de même de Jupiter & de ses Lunes, de Saturne & de ses satellites, & enfin du Soleil & de toutes les planetes. Ainsi le Soleil, selon les différentes positions des planetes, doit se mouvoir successivement de tous les côtés autour du commun centre de gravité de notre systême planétaire.

## XXXVI.

Ce centre commun de gravité est en repos.

Ce commun centre de gravité est en repos. Car les différentes parties de ce systême répondent toujours aux mêmes étoiles fixes; or, si ce centre n'étoit pas en repos, & qu'il se mût uniformément en ligne droite, on auroit remarqué, depuis le tems qu'on observe, des changemens dans les rapports des différentes parties de notre systême planétaire aux étoiles fixes; or, comme on n'y remarque aucun changement, on doit en conclure que le centre commun de gravité de notre systême planétaire est en repos.

Ce centre est le point dans lequel tous les corps qui composent notre systême planétaire viendroient se réunir s'ils perdoient leur mouvement projectile.

Ainsi ce centre ne peut être le centre du Soleil lequel se meut perpétuellement.

Le centre de gravité de notre systême planétaire étant en repos, le centre du Soleil ne peut être ce centre commun de gravité, puisqu'on vient de voir qu'il se meut selon les différentes positions des planetes, quoiqu'il ne se dérange jamais sensiblement de sa place, à cause du peu de distance qui est entre le centre de gravité commun de notre monde planétaire, & le centre du Soleil.

## XXXVII.

Puisque l'attraction se proportionne à la masse du corps attirant, & à celle du corps attiré, on en doit conclure qu'elle appartient à chaque partie de la matiere, & que toutes les parties dont

L'attraction appartient à chaque particule de la matiere.

un corps est composé s'attirent mutuellement : car si l'attraction n'appartenoit pas à chaque partie de la matiere, elle ne suivroit pas la raison des masses.

## XXXVIII.

Réponse à l'objection qu'on tire de ce que l'attraction des corps d'ici-bas n'est pas sensible.

Cette propriété de l'attraction, d'être proportionnelle aux masses, fournit une réponse à l'objection qu'on a coutume de faire contre l'attraction mutuelle des corps. Si tous les corps ont cette propriété de s'attirer mutuellement, pourquoi, dit-on, ne s'apperçoit-on pas de l'attraction qu'ils exercent ici-bas les uns sur les autres ? mais on sent aisément que l'attraction étant proportionnelle aux masses des corps qui s'attirent, l'attraction que la terre exerce sur les corps d'ici-bas, est beaucoup plus forte que celle qu'ils exercent mutuellement les uns sur les autres, & que par conséquent ces attractions partiales sont absorbées & rendues insensibles par celle de la terre.

## XXXIX.

Elle le devient dans de certains cas, comme dans la déviation du fil à plomb au pied de Chimboraço.

Les Académiciens qui ont été mesurer un degré du méridien au Pérou, ont cru s'appercevoir que l'attraction de la montagne de Chimboraço, la plus haute qu'on connoisse, causoit une déviation sensible dans le fil à plomb ; & il est certain, par la théorie, que l'attraction de cette montagne doit faire un effet sur le fil & sur tous les corps : mais il reste à sçavoir si la quantité de la déviation observée, est celle qui doit résulter de la grosseur de la montagne. Car outre que ces observations ne donnent pas exactement la quantité de la déviation, à cause des erreurs inévitables dans la pratique, il y a encore cet inconvénient, que la théorie ne donne pas de moyen d'aprétier exactement la quantité dont cette déviation doit être, parce qu'on ignore la figure totale de la montagne, sa densité, &c.

## XL.

La même raison qui empêche qu'on ne s'apperçoive des attractions des corps d'ici-bas, fait que les attractions mutuelles des corps céleſtes ſont très-rarement ſenſibles. Car l'attraction beaucoup plus puiſſante que le Soleil exerce ſur eux, empêche cette attraction mutuelle de paroître. Il y a cependant des cas où l'on s'en apperçoit, comme dans la conjonction de Saturne & de Jupiter qui dérangent alors réciproquement d'une maniere ſenſible leurs orbes, parceque l'attraction de ces deux planetes eſt trop forte pour être abſorbée par celle du Soleil.

## X L I.

Les attractions de l'aiman & de l'électricité ont des cauſes différentes, & ne ſuivent pas les mêmes proportions que l'attraction univerſelle des corps.

A l'égard des attractions ſenſibles de quelques corps d'ici-bas, telles que celles de l'aiman & de l'électricité, elles ſuivent d'autres loix, & ont vraiſemblablement d'autres cauſes que l'attraction univerſelle de la matiere dont on parle ici.

M. *Newton* a prouvé Prop. *66.* que les attractions mutuelles de deux corps qui tournent autour d'un troiſiéme, troublent moins la régularité de leurs mouvemens lorſque le corps autour duquel ils tournent eſt mû par leurs attractions, que s'il étoit en repos; ainſi le peu d'altération qu'on remarque dans le mouvement des planetes, eſt encore une preuve de la mutualité de l'attraction.

## X L I I.

Prop. 14. Liv. 3. & Prop. 1 & 11. Liv. 1.

Les aphélies des planetes ſont en repos.

Les aphélies des planetes, ainſi que leurs nœuds, & les plans dans leſquels elles ſe meuvent ſont en repos, en faiſant abſtraction de l'action des planetes les unes ſur les autres.

Quelles exceptions les actions mutuelles des planetes les unes ſur les autres apportent à cette régle.

Mars, Vénus, Mercure & la Terre étant de très-petites planetes, elles ne cauſent aucune altération ſenſible dans leurs mouvemens reſpectifs : ainſi leurs aphélies & leurs nœuds ne peuvent être dérangés que par l'action de Jupiter & de Saturne. M. *Newton* conclut de ſa théorie que par cette cauſe, les aphélies de ces quatre planetes ſe meuvent un peu en conſéquence par rapport aux étoiles fixes, & il prétend que ces mouvemens ſuivent la proportion ſeſquiplée des diſtances de ces planetes au Soleil; d'où il tire, Prop. 14. Liv. 3. qu'en ſuppoſant que l'aphélie de Mars, dans lequel ce mouvement eſt plus ſenſible, faſſe en cent ans 33′ 20″ en conſéquence, les aphélies de la Terre, de Vénus & de Mercure feront 17′ 40″, 10′ 53″, & 4′ 16″ reſpectivement dans le même tems.

Suivant M. *Newton* les aphélies allant en conſéquence, les nœuds rétrogradent, & en ſuppoſant le plan de l'écliptique en repos, il dit que cette régreſſion eſt au progrès de l'aphélie dans un orbe quelconque, comme 10 à 21 à peu près. (*c*)

A l'égard de Jupiter & de Saturne, ils dérangent l'un l'autre à tout moment le mouvement de leurs aphélies, mais il en réſulte cependant un mouvement dans le même ſens, dont M. *Newton* n'a point aſſigné la proportion.

## XLIII.

On néglige ces altérations dont même pluſieurs Aſtronomes ne conviennent pas.

Le repos ſenſible des aphélies eſt une nouvelle preuve que l'attraction agit en raiſon doublée inverſe des diſtances.

On néglige ces mouvemens inſenſibles des aphélies & des nœuds qui ſont ſi peu remarquables, que même pluſieurs Aſtronomes en nient l'exiſtence, & on regarde les aphélies, ainſi que les nœuds des planetes, comme en repos; d'où il ſuit une nouvelle preuve de ce que la gravité qui agit ſur elles ſuit la proportion inverſe doublée des diſtances. Car M. *Newton* a fait voir, Cor. 1. Prop. 45. que ſi la proportion de la force centripéte s'éloignoit de la proportion doublée pour s'approcher de la triplée, ſeulement d'une 60 ^eme^ partie, les apſides avanceroient au moins de trois dégrés dans une révolution; donc, puiſque le mouvement des apſides, ſi elles ſe meuvent, eſt preſqu'inſenſible, la gravité ſuit ſenſiblement la proportion doublée inverſe des diſtances.

## XLIV.

Les planetes ont encore un mouvement dont je n'ai point parlé dans ce Chapitre, parce qu'il ne paroît pas dépendre de leur gravité, c'eſt leur rotation ſur leur axe.

On a vû dans le Chapitre I. qu'on n'eſt aſſuré de cette rotation que pour le Soleil, la Terre, Mars, Jupiter & Vénus, & que les

(*c*). *De mundi Syſtemate*, pag. 36. édition de 1731.

Astronomes ne sont pas même encore d'accord sur le tems de la révolution de cette derniere planete sur elle-même, bien qu'ils conviennent tous qu'elle y tourne. Mais quoiqu'on n'ait pas encore pû s'assurer par les observations que Mercure, Saturne & les satellites de Jupiter & de Saturne tournent sur leur centre, il est bien vraisemblable, par l'uniformité que la nature observe dans ses opérations, que ces planetes ont aussi ce mouvement de rotation autour de leur axe, & que tous les corps célestes de notre systême éprouvent cette révolution.

On ne connoît point la cause ni la raison du mouvement rotatoire des planetes.

Ce mouvement des planetes autour de leur axe est le seul des mouvemens célestes qui soit uniforme ; ce mouvement, comme je l'ai dit, ne paroît pas dépendre de leur gravité, & l'on n'en connoît point encore la cause.

## X L V.

La gravité mutuelle des parties qui composent les planetes, les empêche de se dissiper par la rotation.

La gravité mutuelle des parties qui composent les planetes les empêche de se dissiper par cette rotation : car on sçait que tout corps mû en rond acquiert une force centrifuge par laquelle il tend à s'éloigner du centre de sa révolution ; ainsi sans la gravité mutuelle des parties de la matiere, la rotation des planetes devroit dissiper leurs parties. Car si la gravité d'une partie quelconque de la surface d'un corps qui tourne étoit détruite, cette partie, au lieu de tourner avec le corps, s'échapperoit par la tangente ; donc si la gravité ne s'opposoit pas à l'effort de la force centrifuge que les parties des corps célestes acquiérent en tournant sur leur axe, cette force sépareroit leurs parties.

## X L V I.

Si cette tendance des parties des corps célestes, les unes vers les autres, s'oppose à l'effet de la force centrifuge, elle ne la détruit pas, & l'effet que produit cette force est de rendre inégaux les diamétres des corps révoluans supposés fluides. Car les planetes étant composées de matiere dont les parties tendent également vers leur centre à égale distance, elles seroient sphériques si elles étoient en repos. Mais le mouvement rotatoire fait que leurs parties tendent par leur force centrifuge, à s'éloigner de leur centre avec d'autant plus de force, qu'elles sont placées plus près de l'équateur de la sphére révoluante : car on sçait par la théorie des forces centrifuges, que cette force, en supposant les tems égaux, augmente en même raison que le rayon du cercle que le corps décrit ; donc, en supposant fluide la matiere dont les corps célestes sont composés, la rotation augmentera le diamétre de leur équateur, & diminuera par conséquent celui de leurs pôles.

Le mouvement rotatoire doit élever l'équateur des planetes.

### XLVII.

On s'apperçoit, par le moyen des télescopes, de cette différence des diamétres dans Jupiter, & on en a déterminé la quantité pour la terre par la mesure des dégrés.

M. *Newton* a tiré de ces principes la proportion des axes de la terre.

On va voir dans le Chapitre suivant comment M. *Newton* s'y est pris pour déduire la figure de la terre de sa théorie, & ce que les observations ont enseigné sur cette matiere.

## CHAPITRE TROISIÉME.

### *De la détermination de la figure de la Terre, selon les principes de M. Newton.*

### I.

La force centrifuge éleve les régions de l'équateur dans la rotation diurne.

Puisque la force centrifuge des corps qui circulent augmente en raison du cercle décrit lorsque le tems de la révolution est le même, le mouvement rotatoire doit élever les régions de l'équateur. Car en supposant que la terre ait été sphérique & composée de matiere homogéne & fluide, avant d'avoir acquis le mouvement

rotatoire,

rotatoire, il faut, afin que la matiere qui la compose conserve son équilibre dans cette rotation, & que la forme de la terre soit constante, que la colonne dont la pesanteur est diminuée par la force centrifuge, soit plus longue que celle dont la force centrifuge n'a point altéré la pesanteur : ainsi l'axe de la terre, qui passe par son équateur, doit être plus grand que celui qui passe par ses pôles.

## I I.

Méthode de M. *Newton* pour trouver la figure de la terre.

M. *Newton*, dans la Prop. 19. de son troisiéme Livre, a déterminé la quantité dont la colonne de l'équateur doit être plus longue que celle de l'axe, en supposant comme dans tout le reste de son Ouvrage, que la gravité qu'éprouvent les corps d'ici-bas n'est autre chose que le résultat des attractions de toutes les particules dont est composée la terre qu'il regarde comme homogéne. Il employe pour données dans ce Problême, 1°. la grandeur du rayon de la terre prise d'abord pour sphérique, & déterminé par M. *Picard* de 19615800. 2°. la longueur du pendule qui bat les secondes à la latitude de Paris, laquelle est de 3 pieds 8 $\frac{1}{2}$ lignes.

Il est prouvé par la théorie des oscillations, & par cette mesure du pendule à secondes, qu'un corps à la latitude de Paris parcourt dans une seconde 2174 lignes, en faisant la correction nécessaire pour la résistance de l'air.

Un corps qui fait sa révolution dans un cercle à la distance de 19615800 pieds du centre, qui est le demi diamétre de la terre, en $23^h\ 56'\ 4''$, qui est le tems exact de sa révolution diurne, parcourt en une seconde, en supposant son mouvement uniforme, un arc de 1433, 46 pieds, dont le sinus verse est, 0, 0 523656 pieds, ou 7, 54064 lignes; donc la force qui fait descendre les graves à la latitude de Paris, est à la force centrifuge que les corps acquiérent à l'équateur par la rotation de la terre, comme 2174 à 7, 54064. Ajoutant donc à la force de la gravité qui fait descendre les graves à la latitude de Paris, ce que la force centrifuge diminue de cette force à cette latitude, afin d'avoir la force entiere qui porte les graves vers le centre de la terre à la latitude de Paris, M. *Newton* prouve que cette force totale est à la force centrifuge sous l'équateur, comme 289 à 1, ensorte que sous l'équateur la force centrifuge diminue la force centripéte de $\frac{1}{289}$.

M. *Newton* a donné dans la Prop. 91. Cor. 2. la proportion qui est entre l'attraction exercée par un sphéroïde sur un corpuscule placé sur le prolongement de son axe, & celle qui seroit exercée sur le même corpuscule par une sphére dont le diamétre seroit le petit axe du sphéroïde. Employant donc cette proportion, & supposant la terre homogéne & privée de tout mouvement, il trouve (Prop. 19. Liv. 3.) que si sa forme est celle d'un sphéroïde dont le petit axe soit au grand comme 100 à 101, la gravité au pôle de ce sphéroïde doit être à la gravité au pôle d'une sphére décrite sur le petit axe du sphéroïde, comme 126 à 125.

Par la même raison, imaginant un sphéroïde dont le rayon de l'équateur seroit l'axe de révolution, la gravité à l'équateur, qui seroit alors le pôle de ce nouveau sphéroïde, seroit à la gravité de la sphére à ce même point, cette sphére étant supposée avoir le même axe de révolution, comme 125 à 126.

M. *Newton* suppose ensuite que la moyenne proportionnelle entre ces deux gravités, exprime la gravité des parties de la terre au même lieu, c'est-à-dire, à l'équateur, & qu'ainsi la gravité des parties de la terre à l'équateur est au même lieu à la gravité des parties de la sphére qui auroit le même axe de révolution, comme $125\frac{1}{2}$ à 126; & en employant ce qu'il a démontré prop. 72. que les sphéres homogénes attirent à leur surface en raison directe de leurs rayons, il conclut que les attractions qu'exerce la terre au pôle & à l'équateur dans la supposition du sphéroïde précédent, sont en raison composée de 126 à 125, 126 à $125\frac{1}{2}$, & 100 à 101, c'est-à-dire, comme 501 à 500.

Mais il avoit démontré, Cor. 3. Prop. 91. que si on suppose le corpuscule placé dans l'intérieur du sphéroïde, il sera alors attiré en raison de la simple distance au centre; donc les gravités, dans les deux colonnes répondantes à l'équateur & au pôle, seront comme les distances au centre des corps qui y sont placés; donc, en supposant ces colonnes ou canaux communiquans partagés par des plans transversaux qui passent à des distances proportionnelles à ces canaux, les poids de chacune des parties dans l'un de ces canaux seront aux poids de chacune des parties dans l'autre canal, comme les grandeurs de ces canaux; & par conséquent, ces poids seront entr'eux comme chacune de ces parties, & comme leurs gravités accélératrices conjointement, c'est-à-dire, comme 101 à 100, & comme 500 à 501, c'est dire comme 505 à 501; donc si la force centrifuge d'une partie quelconque dans le canal qui passe par l'équateur, est au poids absolu de la même partie comme 4 à 505, c'est-à-dire, si la force centrifuge ôte du poids d'une partie quelconque dans la colonne qui passe par l'équateur $\frac{4}{505}$ parties, les poids de chacune des parties de l'un & de l'autre canal deviendront égaux, & le fluide sera en équilibre. Mais on vient de voir que la force centrifuge d'une partie quelconque sous l'équateur de la terre est à son poids comme 1 à 289, & non pas comme 4 à 505; il faut donc prendre pour les axes un autre rapport que celui de 100 à 101, & en prendre un tel, qu'il en résulte que la force centrifuge sous l'équateur ne soit que la 289$^{e}$ partie de la gravité.

Or, c'est ce qu'une simple régle de trois donne tout de suite: car si le rapport de 100 à 101 dans les axes a donné celui de 4 à 505 pour la proportion de la force centrifuge à la gravité, il est clair qu'il faudra celui de 229 à 230 pour donner le rapport 1 à 289 de la force centrifuge à la gravité. D'où il a conclu le rapport des axes de la terre de 229 à 230.

## III.

Cette conclusion de M. *Newton*, c'est-à-dire, la quantité de l'applatissement qu'il a déterminé, est fondée sur son principe de la gravité mutuelle des parties de la matiere: mais l'applatissement résulteroit toujours de la théorie des fluides & de celle des forces centrifuges, quand même on n'admettroit pas les découvertes de L'applatissement de la terre doit toujours résulter de la théorie des forces centrifuges & de celle des fluides, quelque hypothèse de pesanteur qu'on prenne.

M. *Newton* sur la pesanteur, à moins qu'on ne fît des hypothéses bien peu vraisemblables sur la gravité primitive.

## IV.

Cependant les mesures prises en France avoient jetté du doute sur la figure de la terre.

Malgré l'autorité de M. *Newton*, & quoique M. *Hughens* fut arrivé à la même conclusion de l'aplatissement en prenant une autre hypothése de pesanteur que celle de M. *Newton*; quoique d'ailleurs les expériences faites sur les pendules dans les différentes régions de la terre eussent toutes donné la diminution de la pesanteur vers l'équateur, & favorisé par conséquent l'aplatissement des pôles; on sçait assez que les mesures prises en France, & qui donnoient les dégrés plus petits en allant vers le nord, avoient jetté du doute sur la figure de la terre. On faisoit des hypothéses sur la pesanteur primitive qui donnoient à la terre, supposée en repos, une forme dont l'altération s'accordoit avec la théorie des forces centrifuges, & avec la figure allongée vers les pôles qui résultoit des mesures actuelles.

Car cette grande question de la figure de la terre dépend de la loi selon laquelle la pesanteur primitive agit, & il est certain, par exemple, que si cette force dépendoit d'une cause qui la fit tirer tantôt d'un côté & tantôt d'un autre, qui augmentât & diminuât sans régle, la théorie ni la pratique ne pourroient jamais déterminer cette figure.

## V.

Les mesures prises par les Académiciens Français au cercle polaire & au Pérou, ont confirmé la forme applatie.

Enfin on a été obligé d'aller mesurer un dégré sous l'équateur, & un autre sous le cercle polaire, pour décider cette question; nous avions jetté dans l'erreur, mais nous avons réparé notre faute, & les mesures des Académiciens Français ont justifié la théorie de M. *Newton* sur la figure de la terre, dont l'aplatissement vers les pôles est à présent généralement reconnu.

Les mesures prises en Laponie & au Pérou donnent un plus grand aplatissement que celui qu'on vient de voir qui résulte de la théorie de M. *Newton*, car ces mesures donnent le rapport des axes de 173 à 174.

## V I.

En déterminant le rapport des axes de la terre, M. *Newton* outre la gravité mutuelle des parties de la matiere, a encore supposé que la terre étoit un sphéroïde éliptique, & de plus que sa matiere étoit homogéne. M. *Clairaut*, dans son Livre de la figure de la terre, a fait voir que la premiere supposition étoit légitime, ce que M. *Newton* avoit négligé de faire, quoique cela soit fort important pour s'assurer qu'on a le vrai rapport des axes de la terre.

Deux suppositions faites par M. *Newton* en déterminant l'applatissement de la terre.

M. *Clairaut* a vérifié la premiere de ces suppositions, ce que M. *Newton* avoit négligé.

Il n'en est pas de même de la seconde supposition sur l'homogénéïté de la matiere de la terre, car il est très-possible (& M. *Newton* l'a lui-même soupçonné Prop. 20. Liv. 3.) que la matiere qui compose la terre soit d'autant plus dense qu'on approche plus du centre; or, les différentes densités des couches de matiere qui composent la terre, doivent changer la loi suivant laquelle les corps qui la composent gravitent, & altérer par conséquent le rapport de ses axes.

Il est très-possible que l'autre supposition soit fausse.

## V I I.

M. *Clairaut* a fait voir, dans sa théorie de la figure de la terre dont je viens de parler, que dans toutes les hypothéses les plus vraisemblables qu'on puisse faire sur la densité des parties intérieures de la terre, il y a toujours, en supposant l'attraction, une telle liaison entre la fraction qui exprime la différence des axes, & celle qui exprime la diminution de la pesanteur du pôle à l'équateur, que si l'une des deux fractions surpasse $\frac{1}{230}$. l'autre doit être moindre précisément de la même quantité; ensorte qu'en supposant, par exemple, que l'excès de l'équateur sur l'axe soit de $\frac{1}{173}$, ce qui est assez conforme aux mesures actuelles, on aura $\frac{1}{173}-\frac{1}{230}$ ou $\frac{1}{698}$ pour la quantité dont il faut diminuer $\frac{1}{230}$ afin d'avoir le raccourcissement total du pendule en allant du pôle à l'équateur, c'est-à-dire,

M. *Clairaut* a prouvé que le rapport des axes doit diminuer à mesure que la pesanteur au pôle est plus grande.

que ce raccourciſſement ou, ce qui eſt la même choſe, la diminution totale de la peſanteur, ſera de $\frac{1}{230}-\frac{1}{698}$, c'eſt-à dire, d'environ $\frac{1}{343}$.

Or comme toutes les expériences ſur le pendule font voir que la diminution de la peſanteur du pôle à l'équateur, loin d'être plus petite que $\frac{1}{230}$ comme il le faudroit pour s'accorder avec cette théorie, eſt au contraire plus grande, il ſuit que les meſures actuelles ne s'accordent pas en ce point avec la théorie.

## VIII.

M. *Newton* avoit tiré une concluſion toute différente.

Il ne faut pas diſſimuler que M. *Newton* avoit tiré une concluſion toute différente de la ſuppoſition, que les parties de la terre étoient d'autant plus denſes, qu'on approche plus du centre; il croyoit qu'en ce cas, le rapport des axes devoit augmenter.

Paroles de M. *Newton* à ce ſujet, dans la deuxiéme édition des principes.

Voici comme il s'exprime pag. 386. de la deuxiéme édition des Principes : *Ce retardement du pendule à l'équateur prouve la diminution de la gravité dans ce lieu, & plus la matiere y ſera légere, plus elle devra être haute afin de faire équilibre avec celle du pôle.*

M. *Newton* croyoit que la denſité augmentant vers le centre, la peſanteur augmentoit de l'équateur au pôle dans une plus grande raiſon que dans le cas de l'homogénéïté, ce qui eſt vrai. Mais il penſoit que la peſanteur à chaque point du ſphéroïde étoit en raiſon renverſée des diſtances au centre du ſphéroïde, ſoit que le ſphéroïde fût homogéne, ou que ſa denſité variât d'une maniere quelconque; d'où il avoit conclu, que dans le cas de la denſité augmentée de la circonférence au centre, la peſanteur augmentant dans une plus grande raiſon que dans l'homogénéïté, l'aplatiſſement ſeroit plus grand, ce qui eſt faux; n'étant fondé que ſur une ſuppoſition qui n'a lieu que dans le ſphéroïde homogéne.

En quoi il s'eſt trompé.

## IX.

Il ſuit de la théorie de M. *Clairaut*, qu'en admettant les ſuppoſitions qu'il fait ſur l'intérieur de la terre les plus naturelles de celles qui se présentent à l'esprit, que l'aplatissement ne peut jamais être plus grand que de 229 à 230, puisque ce rapport est celui qu'on trouve dans la supposition de l'homogénéïté de la terre, & qu'il résulte de cette théorie, que dans tous les autres cas la pesanteur augmentant, l'aplatissement doit être moindre.

## X.

Après avoir déterminé le rapport des axes de la terre dans la supposition de l'homogénéïté, M. *Newton* cherche de la maniere suivante dans la Prop. 20. du Liv. 3. quel doit être le poids des corps dans les différentes régions de la terre. Puisqu'on a vû que les colonnes de matiere qui répondent au pôle & à l'équateur, étoient en équilibre lorsque leurs longueurs étoient entr'elles comme 229 à 230, & que les poids des parties égales & placées de même dans ces deux colonnes, doivent être en raison réciproque de ces colonnes, ou comme 230 à 229 ; on voit, par un raisonnement semblable, que dans toutes les colonnes de matiere qui composent le sphéroïde, les poids des corps doivent être en raison renversée de ces colonnes, c'est-à-dire, de leurs distances au centre : donc en supposant qu'on connoisse la distance d'un lieu quelconque de la surface de la terre au centre, on aura la pesanteur en ce lieu, & par conséquent la quantité dont la gravité augmente ou diminue en allant vers le pôle ou vers l'équateur : or comme la distance d'un lieu quelconque au centre décroît à peu près comme le quarré du sinus droit de la latitude, ainsi que l'on peut s'en convaincre par le calcul, on voit comment M. *Newton* a formé la table de la Prop. 20. du Liv. 3. où il a donné la diminution de la pesanteur depuis le pôle jusqu'à l'équateur.

Quel est le poids des corps dans les différentes régions de la terre.

## X I.

La gravité étant la seule cause des oscillations des pendules, le ralentissement de ces oscillations prouve la diminution de la pesanteur, & leur accélération prouve que la gravité agit plus fortement ;

Ils sont en raison des longueurs des pendules.

or on sçait que la vîtesse des oscillations des pendules est en raison inverse de la longueur du fil auquel ils sont suspendus; donc lorsque pour rendre les vibrations d'un pendule dans une région, ysochrones à ses vibrations dans une autre, il faut le raccourcir ou l'allonger, on doit conclure que la pesanteur est moindre ou plus grande dans cette région que dans l'autre : on connoît depuis M. *Hugkens* le rapport qui est entre la quantité dont on allonge ou raccourcit le pendule, & la diminution ou l'augmentation de la gravité; ainsi cette quantité étant proportionnelle aux augmentations ou aux diminutions des poids, M. *Newton* a donné dans sa table les longueurs des pendules au lieu des poids.

## XII.

Les dégrés de latitude sont dans la même proportion.

Les dégrés de latitude diminuant dans le sphéroïde de M. *Newton* en même proportion que les poids, la même table donne la grandeur des dégrés de latitude en commençant à l'équateur où la latitude est 0°. jusqu'au pôle où elle est de 90°.

## XIII.

La table de M. *Newton* donne une diminution un peu moins grande de la pesanteur vers l'équateur, que celle qui résulte des mesures actuelles, mais cette table n'est formée que pour le cas de l'homogénéïté; & il avertit à la fin de la Proposition où il la donne, que dans le cas où la densité des parties de la terre croît de la circonférence au centre, il faut augmenter aussi le décrement de la pesanteur du pôle à l'équateur.

Par les expériences la pesanteur est un peu moindre vers l'équateur que la table de M. *Newton* ne la donne.

## XIV.

Il attribue cette différence à la chaleur des régions de l'équateur qui allonge le pendule dans ces régions.

Quoique M. *Newton* paroisse porté à croire, par les observations qu'il rapporte dans cette même Prop. 20. sur l'allongement du pendule causé par les chaleurs dans les régions de l'équateur, que ces différences viennent de la différente température des lieux où l'on a fait les observations, l'attention qu'on a eu à conserver le même dégré

Mais les dernieres expériendégré de chaleur par le moyen du thermométre dans les expériences qu'on a fait depuis M. *Newton* ſur la longueur des pendules dans les différentes régions de la terre, prouve que ces différences ne doivent point être attribuées à cette cauſe, & qu'il y a réellement un décroiſſement de peſanteur du pôle à l'équateur plus grand que celui que M. *Newton* a donné dans ſa table.

ces ont fait voir que l'allongement produit par la chaleur de ces régions, ne peut cauſer ces différences.

## X V.

M. *Newton* apprend à la fin de la Prop. 19. Liv. 3. à trouver le rapport des axes d'une planete quelconque dont on connoît la denſité & le tems de la révolution diurne, en ſe ſervant du rapport trouvé entre les axes de la terre pour terme de comparaiſon; car ſoit qu'une planete fut plus grande ou moindre que la terre, ſi ſa denſité étoit la même & que le tems de ſa révolution diurne fut égal à celui de la terre, il y auroit la même proportion entre la force centrifuge & ſa gravité, & par conſéquent entre ſes diamétres, que celle qu'on a trouvé pour ceux de la terre : mais ſi ſon mouvement diurne eſt plus ou moins prompt que celui de la terre dans une raiſon quelconque, la force centrifuge, & par conſéquent la différence des diamétres, ſera plus ou moins grande dans la raiſon doublée de cette viteſſe, ce qui ſuit de la théorie des forces centrifuges; & ſi la denſité de cette planete eſt plus grande ou moindre que celle de la terre dans une raiſon quelconque, la gravité ſur cette planete augmentera ou diminuera dans la même raiſon, & la différence des diamétres augmentera en raiſon de la gravité diminuée, & diminuera en raiſon de la gravité augmentée, ce qui ſuit de la théorie de l'attraction telle que M. *Newton* l'admet dans la matiere.

Méthode donnée par M. *Newton* pour trouver les axes d'une planete quelconque.

## X V I.

Donc la différence des diamétres de Jupiter, par exemple, dont on connoît la révolution diurne & la denſité ſera, à ſon petit diamétre en raiſon compoſée des quarrés des tems de la révolution

Détermination des axes de Jupiter par cette méthode.

diurne de la Terre & de Jupiter, des denſités de Jupiter & de la Terre, & de la différence des diamétres de la terre comparée au petit axe de la terre, c'eſt-à-dire, comme $\frac{29}{5} \times \frac{400}{94\frac{1}{2}} \times \frac{1}{229}$ à 1. c'eſt-à-dire, comme 1 à $9\frac{1}{3}$ à peu près : donc le diamétre de Jupiter de l'Orient à l'Occident eſt à ſon diamétre entre ſes pôles comme $10\frac{1}{3}$ à $9\frac{1}{3}$ à peu près. M. *Newton* ajoute qu'il a ſuppoſé dans cette détermination que la matiere qui compoſe Jupiter étoit d'une denſité uniforme, mais que comme il eſt très-poſſible que par la chaleur du Soleil il ſoit plus denſe vers les régions de l'équateur que vers les régions du pôle, ſes diamétres peuvent être entr'eux comme 12 à 11, 13 à 12, ou même 14 à 13, & qu'ainſi ſa théorie s'accorde avec les obſervations, puiſque les obſervations apprennent que Jupiter eſt aplati, & que cet aplatiſſement eſt moindre que de $10\frac{1}{3}$ à $9\frac{1}{3}$, & qu'il eſt entre 11 à 12, & 13 à 14.

## XVII.

Raiſon bien peu vraiſemblable donnée par M. *Newton*, de ce que l'applatiſſement de Jupiter eſt moindre que celui qui réſulte de la théorie.

Ce moyen que M. *Newton* prend pour expliquer un aplatiſſement moindre que celui que donne l'homogénéïté, paroît bien peu vraiſemblable, & l'on doit être étonné qu'en expliquant l'aplatiſſement de Jupiter, il ait eu recours à une cauſe dont l'effet ſeroit bien plus ſenſible ſur la Terre que ſur Jupiter, puiſque la Terre eſt beaucoup plus près du Soleil que Jupiter.

S'il avoit connu la Propoſition de M. *Clairaut*, je veux dire, que la denſité augmentant au centre l'aplatiſſement diminue, il auroit trouvé une cauſe toute naturelle du Phénoméne qu'il vouloit expliquer, en ſuppoſant Jupiter plus denſe au centre qu'à ſa ſuperficie, ce qui eſt une hypothéſe qui s'accorde avec toutes les loix de la méchanique.

## XVIII.

Dans la premiere édition des principes, M. *Newton* avoit donné à Jupiter

Dans la premiere édition des Principes, M. *Newton* n'avoit pas fait entrer la denſité dans la proportion des diamétres de Jupiter, & il avoit conclu le rapport de ſes axes de 40 à 39. en n'y faiſant entrer que la révolution diurne, & le rapport des axes de la terre.

un aplatiſſement beaucoup moindre, & pourquoi?

## XIX.

Comme ce n'eſt que dans la Terre, Jupiter, & le Soleil qu'on connoît à la fois les deux élémens néceſſaires pour déterminer les axes, c'eſt-à-dire la révolution diurne, & la denſité, on ne peut connoître le rapport des axes que de ces trois corps céleſtes. On vient de voir celui des axes de la Terre & de Jupiter; le rapport des axes du Soleil ſe trouveroit en prenant la raiſon compoſée du quarré de $27\frac{1}{2}$ à 1, de la denſité de la Terre à celle du Soleil, & de 229 à 230: ce qui donneroit, pour le rapport des axes du Soleil, une quantité beaucoup trop petite pour pouvoir être obſervée.

Pourquoi on ne peut connoître la proportion des axes que de Jupiter, de la terre & du Soleil.

La proportion des axes du Soleil eſt trop médiocre pour pouvoir être ſenſible.

# CHAPITRE QUATRIÉME.

## *Comment M. Newton a expliqué la préceſſion des Equinoxes.*

## I.

On a ſuppoſé longtems que l'axe de la terre gardoit toujours la même poſition pendant qu'elle fait ſa révolution dans ſon grand orbe, & cette ſuppoſition étoit bien ſimple: car la théorie fait voir que ce parallèliſme doit réſulter des deux mouvemens qu'on connoît à la terre, je veux dire le mouvement annuel & le mouvement diurne; & effectivement ce parallèliſme ſe conſerve ſenſiblement pendant un aſſez longtems.

On a cru longtems que l'axe de la terre conſervoit toujours ſon parallèliſme.

Mais la continuité & l'exactitude des obſervations, ont fait découvrir que les pôles de la terre ne répondoient pas toujours aux mêmes fixes, & que par conſéquent ſon axe ne reſtoit pas toujours parallèle à lui-même.

## I I.

*Hipparque* s'eſt apperçu le premier de la révolution des pôles de la terre.

*Hipparque* fut le premier, au rapport de *Ptolomée*, qui ſoupçonna le mouvement de l'axe de la terre. *Ptolomée* examina ce ſoupçon d'*Hipparque*, & l'ayant vérifié, il fixa ce mouvement à un dégré en cent ans, ce qui donnoit 36500 ans pour la révolution entiere de la ſphére des étoiles fixes, qu'il ſuppoſoit être la cauſe de cette apparence; & on croyoit du tems de *Ptolomée* qu'après cette révolution, qu'on appelloit *la grande année*, tous les corps céleſtes retournoient à leur premiere poſition.

*Ptolomée* a fixé la durée de cette révolution.

On appelloit cette révolution du tems de *Ptolomée*, *la grande année*.

*Ulughbeig* Arabe corrigea le tems que *Ptolomée* avoit déterminé pour la révolution des Pôles de la terre.

Les Aſtronomes des derniers tems l'ont trouvée comme *Ulughbeig* de 51″ par an, & qu'elle s'acheve en 25920 ans.

Les Arabes s'apperçurent que *Ptolomée* avoit fait ce mouvement plus lent qu'il ne l'eſt en effet, *Ulughbeig* le fit d'un dégré en 72 ans, & les Aſtronomes du dernier ſiécle en le fixant à 51″ environ par an, ont confirmé la découverte d'*Ulughbeig*; ainſi cette révolution des pôles de la Terre n'eſt que de 25920 années.

## I I I.

Ce mouvement de l'axe de la terre fait rétrograder les points équinoctiaux, & c'eſt ce qu'on appelle *la préceſſion des équinoxes*.

Les points équinoctiaux changent en même tems & de la même quantité que les pôles du monde, & c'eſt ce mouvement des points équinoctiaux qui s'appelle *la préceſſion des équinoxes*.

## I V.

Et cette régreſſion cauſe un mouvement apparent dans les étoiles fixes.

Quoique les étoiles fixes ſoient immobiles, du moins pour nous, comme la commune interſection de l'équateur & de l'écliptique rétrograde, il eſt néceſſaire que les étoiles qui répondent à ces points paroiſſent changer continuellement, & qu'elles paroiſſent avancer vers l'Orient; d'où il arrive que leurs longitudes, qu'on a coutume de compter dans l'écliptique du commencement d'*Aries*, c'eſt-à-dire, du point d'interſection de l'équateur & de l'écliptique au printems, augmentent continuellement, & les fixes paroiſſent avancer *en conſéquence*; mais ce mouvement n'eſt qu'apparent & vient de la régreſſion en ſens contraire du point de l'équinoxe du printems.

## V.

Cette régreſſion eſt la cauſe pour laquelle toutes les conſtellations du zodiaque ont changé de place depuis les obſervations des premiers Aſtronomes. Car la conſtellation d'*Aries*, par exemple, qui au tems d'*Hipparque* répondoit à l'interſection de l'équateur & de l'écliptique au printems, & qui a donné ſon nom à cette portion de l'écliptique, eſt à préſent dans le ſigne du *Taureau*, le *Taureau* eſt dans les *Gémeaux*, &c. ainſi elles ont pris la place l'une de l'autre; mais les parties de l'écliptique où elles étoient placées autrefois, ont toujours retenu le même nom qu'elles avoient du tems d'*Hipparque*.

**Elle eſt cauſe que l'interſection de l'écliptique & de l'équateur ne répond plus aux mêmes étoiles, & que les conſtellations du Zodiaque ont changé de place.**

## V I.

On ignoroit avant M. *Newton* la cauſe phyſique de la préceſſion des équinoxes, & on va voir comment il a déduit ce mouvement, de ſes principes ſur la gravitation.

On a vu dans le Chapitre de la figure de la terre, que cette figure eſt celle d'un ſphéroïde aplati vers les pôles & élevé vers l'équateur.

M. *Newton* pour expliquer la préceſſion des équinoxes, commence par donner trois Lemmes dans ſon troiſiéme Livre, pour préparer à la démonſtration qu'il donne dans la Prop. 39. de ce troiſiéme Livre, que cette révolution des points équinoctiaux eſt cauſée par l'attraction réunie du Soleil & de la Lune ſur la protubérance de la terre à l'équateur.

**Lemmes d'où M. *Newton* part pour trouver ce mouvement.**

## V I I.

Il ſuppoſe dans le premier de ces Lemmes, que toute la matiere dont la terre conſidérée comme un ſphéroïde excéderoit le globe inſcrit à ce ſphéroïde, ſoit reduite à un ſeul anneau qui envelopperoit l'équateur, & il prend la ſomme de tous les efforts du Soleil ſur cet anneau, pour le faire tourner autour de l'axe qui eſt la commune ſection du plan de l'écliptique avec le plan qui paſſeroit par le centre de la Terre, & seroit perpendiculaire à la droite tirée de ce centre à celui du Soleil. Il cherche dans le second Lemme le rapport qui est entre la somme de toutes ces forces, & la somme de celles que le Soleil exerce sur toute la partie de la terre qui environne le globe. Dans le troisiéme il compare la quantité de mouvement de cet anneau placé à l'équateur, avec celle de toutes les parties de la Terre.

## VIII.

Pour déterminer la force du Soleil sur cette protubérance de l'équateur de la terre, M. *Newton* prend pour hypothése, que si la terre étoit annihilée, & qu'il ne restât que cet anneau qui décrivit seul autour du Soleil l'orbe annuel, & qui tournât en même tems par le mouvement diurne autour de son axe incliné à l'écliptique de $23^\circ \frac{1}{2}$, le mouvement des points équinoctiaux seroit le même, soit que cet anneau fût fluide, soit qu'il fût composé de matiere solide.

M. *Newton*, après avoir cherché en quel rapport la matiere de cet anneau supposé, c'est-à-dire, de la protubérance de l'équateur, est à toute la matiere qui compose la terre, & avoir trouvé, en prenant le rapport des axes de la terre de 229 à 230, que cette matiere est à celle de la terre, comme 459 à 52441, fait remarquer que si la terre & cet anneau tournoient ensemble autour du diamétre de cet anneau, le mouvement de l'anneau seroit au mouvement du globe intérieur, c'est-à-dire, au mouvement de la terre autour de son axe, comme 4590 à 485223, & que par conséquent le mouvement de l'anneau seroit à la somme du mouvement de l'anneau & du globe, dans la raison de 4590 à 489813.

Il avoit trouvé Prop. 32. du 3[e] Liv. que le moyen mouvement des nœuds de la Lune dans un orbe circulaire, est de $20^\circ; 11', 46''$ *en antécédence* dans une année sidérale; & il avoit remarqué dans le Cor. 16. de la Prop. 66. que s'il y avoit plusieurs Lunes, le mouvement des nœuds de chacune de ces Lunes seroit comme leurs tems périodiques. Delà il conclut que le mouvement des nœuds d'une Lune qui feroit sa révolution près la surface de la terre en $23^h\ 56'$, seroit à $20^\circ\ 11'\ 46''$, qui est le mouvement des nœuds de notre Lune dans une année, comme $23^h\ 56'$, qui est la révolution diurne de la terre, à 27 jours $7^h\ 43''$, qui est le tems périodique de la Lune, c'est-à-dire, comme 1436 à 39343 ; & ce seroient les mêmes proportions selon les Cor. de la Prop. 66. pour les nœuds d'un assemblage de Lunes qui entoureroit la terre, soit que ces Lunes ne fussent pas contigues, soit qu'elles le devinssent en supposant qu'elles se liquefiassent, & qu'elles formassent un anneau continu & fluide, soit enfin que cet anneau se durcit & devint inflexible.

*M. Newton* considére la protubérance de la terre à l'équateur, comme un anneau de Lunes adhérent au globe de la terre.

Il tire de cette supposition la maniere dont l'attraction du Soleil sur l'élévation de la terre à l'équateur cause la précession des équinoxes.

Donc, en considérant l'élévation de la terre à l'équateur comme un anneau de Lunes adhérent à la terre, & révoluant avec elle, puisque la révolution des nœuds d'un tel anneau est à celle des nœuds de la Lune, comme 1436 à 39343, selon le Cor. 16. de la Prop. 66. & que le mouvement de l'anneau est à la somme des mouvemens de l'anneau & du globe auquel il adhére, comme 4590 à 489813, par la Prop. 39. du Liv. 3. le mouvement annuel des points équinoctiaux d'un corps composé de l'anneau & du globe auquel il adhére, seroit au mouvement annuel des nœuds de la Lune, c'est-à-dire, à $20^\circ\ 11'\ 46''$, en raison composée des deux raisons ci-dessus trouvées, c'est-à-dire, comme 100 à 292369.

Mais M. *Newton* a trouvé dans le Lemme 2. du troisiéme Liv. que nous venons de citer, que si la matiere de l'anneau supposé étoit répandue sur toute la superficie du globe pour produire vers l'équateur la même élévation que celle de l'équateur de la terre, la force de toutes les particules de cette matiere pour mouvoir la terre, seroit moindre que celle de l'anneau supposé à l'équateur dans la raison de 2 à 5 : il faut donc que la régression annuelle des points équinoctiaux ne soit à celle des nœuds de la Lune, que comme 10 à 73092, & par conséquent elle seroit de $9''\ 56'''\ 50^{iv}$ dans une année sidérale, sans l'inclinaison de l'axe à l'écliptique, laquelle fait que ce mouvement doit encore être diminué en raison du cosinus de cette inclinaison (qui est de $23° \frac{1}{2}$) au rayon. Ce mouvement ne doit donc être que de $9''\ 7'''$ $20^{iv}$, & cela en ne considérant que l'action du Soleil.

## I X.

Quantité dont l'action du Soleil contribue, suivant M. *Newton*, à la régression des points équinoctiaux.

M. *Newton* donne ainsi la quantité moyenne du mouvement des points équinoctiaux. Mais ce n'est pas sans examiner les différentes variétés de l'action du Soleil sur la protubérance de la terre à l'équateur, toujours en employant la considération de cet anneau.

Il fait voir dans les Cor. 18. 19. & 20. de la même Prop. 66. que par l'action du Soleil les nœuds d'un anneau qui seroit supposé entourer un globe comme la terre, seroient en repos dans les sysigies, qu'ils se mouvroient en *antécédence* dans les autres lieux, & qu'ils iroient le plus vîte dans les quadratures, que l'inclinaison de cet anneau varieroit, que son axe oscilleroit pendant chaque révolution annuelle du globe, qu'au bout de chaque révolution il reviendroit à sa premiere position, mais que ses nœuds ne reviendroient pas au même lieu, & qu'ils iroient toujours en *antécédence*.

## X.

La plus grande inclinaison de l'anneau doit se trouver lorsque ses nœuds sont dans les sysigies, ensuite dans le passage des nœuds aux quadratures cette inclinaison diminuera, & par l'effort que fait alors l'anneau pour changer son inclinaison, il imprime un mouvement au globe, & ce globe doit retenir ce mouvement jusqu'à ce que l'anneau ou la protubérance de l'équateur (car c'est la même chose suivant M. *Newton*) par un effort contraire le lui ôte, & lui en imprime un nouveau dans le sens opposé.

Cette action du Soleil sur la protubérance à l'équateur, doit causer la nutation annuelle de l'axe de la Terre.

On voit par-là que l'axe de la terre doit changer sa position par rapport à l'écliptique, deux fois dans son cours annuel, & revenir deux fois à la même position.

## X I.

A chaque révolution de la Lune autour de la terre, l'axe de la la terre doit éprouver une pareille nutation, c'est-à-dire, qu'à chaque mois périodique de la Lune, l'axe de la terre doit éprouver les mêmes variations que dans son orbe annuel.

L'axe de la terre doit avoir aussi chaque mois une nutation par l'action de la Lune.

## XII.

M. *Newton* a fait voir dans le Cor. 21. de la Prop. 66. que l'exubérance de la matiere de la terre vers l'équateur faisant rétrograder les nœuds, plus cet excès de matiere vers l'équateur seroit grand, plus cette régression seroit grande, & qu'elle doit diminuer quand cette protubérance diminue; ainsi s'il n'y avoit aucune élévation vers l'équateur, la régression des nœuds n'auroit pas lieu, & les nœuds d'un globe, qui au lieu d'être élevé à l'équateur y seroit abaissé, & qui auroit par conséquent sa matiere protubérante vers les pôles, se mouvroient en *conséquence*.

Si la terre étoit élevée vers les pôles au lieu de l'être à l'équateur, les points équinoctiaux avanceroient au lieu de rétrograder.

## XIII.

Et dans le Cor. 22. de la même Prop. 66. il ajoute, que par la même raison que la forme du globe fait juger du mouvement des nœuds, aussi on peut conclure du mouvement des nœuds la forme du globe; & par conséquent, si les nœuds vont en *antécédence*, le globe sera élevé vers l'équateur, & il y sera abaissé au contraire, s'ils vont en *conséquence*, ce qui est encore une preuve de l'aplatissement de la terre vers les pôles.

Ce qui prouve l'aplatissement des pôles de la terre.

## XIV.

On n'a considéré jusqu'à présent que l'action du Soleil en expliquant la précession des équinoxes, & on a vu que par cette action les points équinoctiaux ne feroient que 9″ 56‴ 54$^{iv}$ en une année. Mais la Lune agit sur la terre par sa gravité, & cette action est très-sensible dans le phénoméne que nous examinons ici. M. *Newton* trouve, par sa théorie, que l'action de la Lune sur les points équinoctiaux, est à celle du Soleil comme 4. 4815. à 1. environ; & en suivant cette proportion, on trouve que la Lune fait

Que la Lune contribue au mouvement des points équinoctiaux.

Que l'action de la Lune sur l'élévation de la terre à l'équateur, est plus puissante que celle du Soleil.

Et en quelle proportion.

Quantité totale dont les actions du Soleil & de la Lune, font rétrograder, selon la théorie de M. *Newton*, les points équinoctiaux dans une année.

rétrograder les nœuds dans le tems d'une révolution dans le grand orbe de 40″ 52‴ 54$^{iv}$, & que par conséquent la précession annuelle des équinoxes, causée par les deux forces réunies de la Lune & du Soleil, est de 50″ 0‴ 12$^{iv}$, ce qui est à peu près, comme on voit, la quantité dont les meilleurs observateurs l'ont déterminée.

## XV.

Cette quantité s'accorde avec celle qui a été déterminée par les observations.

Ainsi les points équinoctiaux après une révolution entiere de la terre dans le grand orbe, au lieu de revenir au même point, s'en éloignent de 51″ environ, & ils ne reviennent à ce même point qu'après avoir parcouru le cercle entier, ce qui compose leur révolution de 25920 années, comme on l'a dit ci-dessus.

## XVI.

Quelque Astronomes ont soupçonné que l'angle que l'axe de la terre fait avec l'écliptique diminuoit continuellement.

Quelques Astronomes ont soupçonné qu'indépendament de la nutation de l'axe de la terre dont j'ai parlé, & par laquelle son inclinaison à l'écliptique change & se rétablit deux fois chaque année, cet axe s'éloignoit continuellement de l'écliptique par un mouvement imperceptible. Et l'on ne sçait pas si le mouvement des nœuds, celui des apsides, l'excentricité de la terre, celle de la Lune, les actions des autres planetes sur la terre, tous élémens qui n'entrent point dans la détermination des changemens qui arrivent dans la position de l'axe de la terre pour causer la précession des équinoxes, ne pourroient apporter quelque changement dans l'angle que l'axe de la terre fait avec l'écliptique.

Elémens qui peuvent entrer dans la cause de cette diminution.

## XVII.

Le Chevalier de *Louville* croyoit que cette diminution étoit d'une minute en cent ans.

Le Chevalier de *Louville* prétendoit que cet angle diminuoit d'une minute en cent ans, & l'opinion de cette diminution paroît justifiée par les différences qui se trouvent entre les observations que d'habiles Astronomes ont fait de cette obliquité. Mais on est bien loin de pouvoir prononcer en faveur de ce savant. Car si cette diminution de l'angle que fait l'axe de la terre avec l'écliptique a lieu, on ſent, par la lenteur dont elle s'opére, qu'il faut un plus grand nombre d'obſervations que celui qu'on a juſqu'à préſent. Et dans les choſes qui dépendent de différences ſi fines, on ne peut rien ſtatuer ſur les obſervations des Aſtronomes qui ont précédé la perfection qu'on a donné aux inſtrumens aſtronomiques dans le dernier ſiécle.

On ne pourra rien décider ſur ce mouvement ſoupçonné dans l'axe de la terre, que lorſqu'on eu aura un très-grand nombre d'obſervations très-exactes.

# CHAPITRE V.

## *Du flux & reflux de la mer.*

### I.

On ſent aiſément quelle liaiſon doit avoir le flux & le reflux de la mer avec la préceſſion des équinoxes. M. *Newton* déduit ſon explication du flux & reflux des mêmes Cor. de la Prop. 66. d'où l'on a vû qu'il a tiré ſon explication de la préceſſion des équinoxes; ces deux phénoménes ſont, l'un & l'autre, une ſuite néceſſaire des attractions de la Lune & du Soleil ſur les parties qui compoſent la terre.

L'explication du flux & du reflux ſe tire comme celle de la préceſſion des équinoxes de la Prop. 66. du premier Livre des Principes & de ſes Corolaires.

### I I.

*Galilée* penſoit que les phénoménes des marées pouvoient s'expliquer par le mouvement de rotation de la terre, & par ſon mouvement de tranſlation autour du Soleil. Mais ſi ce grand homme avoit fait plus d'attention aux circonſtances qui accompagnent le flux & le reflux, il auroit vû que par le mouvement diurne les eaux doivent à la vérité s'élever vers l'équateur, ce qui doit faire prendre à la terre la forme d'un ſphéroïde déprimé vers les pôles, mais que jamais ce mouvement rotatoire ne pourroit cauſer aux eaux de la mer aucun mouvement de réciprocation, ainſi que M. *Newton* l'a démontré Cor. 19. Prop. 66. M. *Newton* fait voir auſſi dans ce même Cor. en employant ce qu'il a démontré dans les

Erreur de *Galilée* ſur les cauſes du flux & reflux.

Cor. 5. & 6. des loix du mouvement, que la tranſlation de la terre dans ſon grand orbe ne doit rien changer à tous les mouvemens qui s'éxécutent à ſa ſurface, & que par conſéquent le mouvement tranſlatif de la terre autour du Soleil, ne peut cauſer le mouvement de flux & de reflux qu'ont les eaux de la mer.

III.

Le flux & le reflux ſont une ſuite de l'action du Soleil & de la Lune ſur les eaux de la mer.

M. *Newton* a fait voir que c'eſt par leur attraction que le Soleil & la Lune agiſſent ſur la mer.

Il étoit aiſé de s'appercevoir, en faiſant attention aux circonſtances qui accompagnent le flux & le reflux, que ces phénoménes dépendent de la poſition de la terre par rapport au Soleil & à la Lune, mais il ne l'étoit pas de connoître la maniere dont ces deux aſtres les produiſent, & la quantité dont chacun y contribue. On ne voit que les effets dans leſquels ces actions ſont tellement confondues, que ſans les principes de M. *Newton* on n'auroit pû parvenir à les démêler l'une de l'autre, ni à aſſigner leur quantité. Il étoit réſervé à ce grand homme de trouver les véritables cauſes du flux & du reflux, & de ſoumettre ces cauſes au calcul. Voici le chemin qu'il a ſuivi pour y parvenir.

IV.

Chemin qu'il a ſuivi pour parvenir à aſſigner la quantité dont chacun de ces aſtres contribue à ces Phénoménes.

Il commence par examiner dans la Prop. *66.* les principaux phénoménes qui doivent réſulter du mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement en raiſon réciproque du quarré des diſtances, les petits tournans autour du plus grand.

Après avoir vû dans les 17 premiers Cor. de cette Prop. quels ſont, dans un tel ſyſtême, les dérangemens que doit cauſer le plus grand corps dans le mouvement du plus petit qui tourne lui-même autour du troiſiéme, & donné par ce moyen les fondemens de la théorie de la Lune, il conſidére dans le Cor. 18. pluſieurs corps fluides qui tournent autour du troiſiéme, & il ſuppoſe enſuite que ces corps fluides deviennent contigus & forment un anneau qui tourne autour du corps qui lui ſert de centre, & il fait voir que cet anneau doit ſubir dans ſon mouvement, par l'action du plus grand corps, les mêmes dérangemens que le corps unique dont il suppose que cet anneau a pris la place ; enfin Cor. 19. il suppose que le corps autour duquel tourne cet anneau s'étende jusqu'à lui, que ce corps qui est solide contienne l'eau de cet anneau dans un canal creusé autour de lui, & qu'il tourne autour de son axe d'un mouvement uniforme, & il fait voir qu'alors le mouvement de l'eau contenue dans ce canal, sera accéléré & retardé tour à tour par l'action du plus grand corps, & que ce mouvement sera plus prompt dans les sysigies de cette eau, & plus lent dans ses quadratures, & enfin que cette eau devra éprouver un flux & reflux comme notre mer.

Dans la Prop. 24. du Liv. 3. M. *Newton* applique cette Prop. *66.* & ses Cor. aux phénoménes de la mer, & il y fait voir qu'ils sont une suite de l'attraction combinée du Soleil & de la Lune sur les parties qui composent la terre.

## V.

Il cherche ensuite à déterminer la quantité dont chacun de ces astres contribue à ces phénoménes. Comme cette quantité dépend de leurs distances à la terre, plus ils en sont près, plus les marées doivent être grandes, toutes choses égales quand leurs actions conspirent : & suivant le Cor. 14. de la Prop. *66.* ces effets doivent être en raison triplée des diamétres apparens de ces astres.

Proportions trouvées par M. *Newton*, pour déterminer cette quantité.

M. *Newton* démontre Prop. 25. Liv. 3. que la force qui porte la Lune vers le Soleil est à la force centripéte qui porte la Lune vers la terre, en raison doublée des tems périodiques de la terre autour du Soleil, & de la Lune autour de la terre, c'est-à-dire, comme 1 à $178\frac{29}{40}$. selon le Cor. 17. de la Prop. *66.* d'où il conclut que la force centripéte des parties de la terre vers le Soleil qui est proportionnelle au rayon de la terre, est à la force centripéte de la Lune vers la terre, en raison directe du rayon de la terre au rayon de l'orbe de la Lune, & en raison inverse doublée du tems périodique de la terre autour du Soleil, au tems périodique de la Lune autour de la terre ; ainsi la force du Soleil pour troubler le mouvement des corps près de la surface de la terre est à la force avec laquelle il trouble les mouvemens de la Lune, comme le rayon de la terre est au rayon de l'orbe de la Lune, c'est-à-dire, comme 1 à $60\frac{1}{2}$. mais par cette même Prop. 25. Liv. 3. la force du Soleil sur la Lune pour altérer ses mouvemens dans les quadratures, est à la gravité à la surface de la terre comme 1 à 638092, 6 ; d'où M. *Newton* tire, Prop. 36. Liv. 3. que puisque ces forces en descendant à la surface de la terre diminuent dans la raison de $60\frac{1}{2}$ à 1. la force du Soleil pour déprimer les eaux de la mer dans les quadratures, c'est-à-dire à 90°. sera à la force de la gravité à la surface de la terre, comme 1 à 38604600 ; mais cette force est double dans les sysigies de ce qu'elle est dans les quadratures, & de plus agit dans un sens opposé, c'est-à-dire, pour élever les eaux ; la somme de ces deux forces du Soleil sur les eaux de la mer dans les quadratures & les sysigies, sera donc à la force de la gravité, comme 3 à 38604600, ou comme 1 à 12868200 : ces deux forces réunies composent la force totale du Soleil pour mouvoir les eaux de la mer, car on peut considérer leur effet comme si elles étoient toutes employées à élever les eaux dans les sysigies, & qu'elles n'eussent aucun effet dans les quadratures.

## VI.

Mais ce n'est là la force du Soleil sur les eaux de la mer, qu'en supposant le Soleil dans le zenith du lieu qu'on considére, & dans sa moyenne distance à la terre.

Maniere d'évaluer l'action du Soleil sur les eaux de la mer, dans un lieu quelconque.

Or dans un lieu quelconque le plus grand abaissement & la plus grande élévation de l'eau causés par l'action du Soleil, sont en raison directe du sinus verse du double de la hauteur du Soleil sur l'horison, & en raison triplée inverse de la distance du Soleil à la terre.

L'élévation & la dépression des eaux diminuent peu à peu à mesure que le Soleil s'éléve de l'horison ou s'abaisse vers lui, & elles s'opérent plus lentement quand le Soleil commence à abandonner le point de sa culmination & de l'horison; mais quand il est vers le milieu de ces deux points extrêmes, alors le mouvement de l'eau est le plus vîte.

## VII.

On a vû ci-dessus que par le calcul de M. *Newton*, la force du Soleil sur les eaux de la mer est à la force de la gravité ici-bas, comme 1 à 12868200; & on a vû dans le Chapitre qui traite de la figure de la terre, que la force centrifuge acquise par la révolution de la terre sur son axe étant à la gravité comme 1 à 289, cette force éleve l'équateur de 85472 pieds de Paris: donc puisque la force du Soleil est à la force centrifuge sous l'équateur, comme 289 à 12868200, ou comme 1 à 44527, cette force élevera l'eau aux régions sous le Soleil, & opposées au Soleil de deux pieds de Paris environ.

M. *Newton* conclut de sa théorie que le Soleil éléve l'eau de la mer de deux pieds.

## VIII.

Quant à la force de la Lune pour élever l'eau de la mer, on ne peut la conclure que par les phénoménes qui accompagnent les marées; & M. *Newton* a employé pour la déterminer, la comparaison des plus grandes & des moindres hauteurs des marées dans les syzigies & dans les quadratures: car dans les syzigies leur plus grande hauteur est l'effet de la somme des forces du Soleil & de la Lune, & dans les quadratures leur moindre hauteur est l'effet de la différence de ces forces.

Comment M. *Newton* est parvenu à évaluer l'action de la Lune dans les marées.

M. *Newton* se sert pour cette détermination, des observations faites par *Sturminus* au-dessous de Bristol. Cet Auteur rapporte qu'au Printems & à l'Automne l'eau dans la conjonction & l'opposition du Soleil & de la Lune monte environ à 45 pieds, & que dans les quadratures elle ne monte qu'à 25.

Or, la premiere hauteur est produite par les forces réunies du Soleil & de la Lune, & la derniere par leur différence; donc la somme des forces du Soleil & de la Lune sur la mer, lorsque ces deux astres sont dans l'équateur & dans leur moyenne distance à la terre, eſt à leur différence, comme 45 à 25, ou comme 9 à 5.

Les diamétres de l'orbe dans lequel la Lune ſe mouveroit ſans égard à ſon excentricité, ont été trouvés Prop. 28. Liv. 3. par M. *Newton* dans la raiſon de 69 à 70 : donc la diſtance de la Lune à la terre dans les ſyſigies eſt à ſa diſtance dans les quadratures, comme 69 à 70, toutes choſes d'ailleurs égales ; mais les forces de la Lune pour mouvoir la mer, ſont par le Cor. 14. de la Prop. 66. en raiſon triplée inverſe de ſes diſtances à la terre, d'où M. *Newton* tire que la hauteur de l'eau cauſée par la ſomme des forces du Soleil & de la Lune, étant à leur hauteur cauſée par la différence de ces forces, comme 9 à 5, la force du Soleil ſur les eaux de la mer eſt à celle de la Lune, comme 1 à $4\frac{1}{2}$ environ. Or on vient de voir que la force du Soleil ſur la mer eſt à la force de la gravité ici-bas, comme 1 à 12868200 : donc la force de la Lune ſur la mer ſera à la force de la gravité, comme 1 à 12871400 ; & puiſque la force du Soleil éléve l'eau à la hauteur de deux pieds environ, la Lune l'élévera à neuf pieds environ, (on prend les nombres ronds) & ces deux forces réunies la feront monter, ſelon M. *Newton*, environ à 10 p. $\frac{1}{2}$, ce qui même pourra aller à 12 pieds lorſque la Lune ſera dans ſon périgée. M. *Newton* ajoute, Prop. 37. Liv. 3. qu'une telle force ſuffit pour produire toutes les marées, & qu'elles y répondent aſſez exactement, ſurtout aux rivages qui ſont fort voiſins de la grande mer, & où elle peut s'élever & s'abbaiſſer ſans qu'aucune cauſe externe altére ſes mouvemens.

Cette action eſt à celle du Soleil, comme 4 & demi à 1.

Les deux forces réunies du Soleil & de la Lune élevent l'eau à 10 p & demi, & même à 12 p. lorſque la Lune eſt dans ſon périgée.

## IX.

M. Bernoulli croit que ces forces ſont beaucoup plus grandes, que ne les fait M. Newton.

M. *Daniel Bernoulli* dans ſa Diſſertation ſur les marées, qui a remporté le prix de l'Académie de l'an 1738. penſe que les forces abſolues du Soleil & de la Lune pour cauſer les marées, ſont beaucoup plus grandes que M. *Newton* ne les ſuppoſe ; & au lieu de regarder à ſon exemple la terre comme compoſée de parties homogénes, il s'imagine que la denſité des couches de la terre augmente

augmente de la circonférence au centre, ce qui est très-probable par plusieurs raisons physiques, & il prétend que par cette supposition on peut augmenter les forces du Soleil & de la Lune sur la mer autant que les phénoménes le requéreront.

## X.

Ce qui a déterminé M. *Bernoulli* à s'éloigner en cela du sentiment de M. *Newton*, c'est que par la théorie qu'il a donnée dans sa piéce de 1738. il trouve dans l'hypothése de l'homogénéïté des parties de la terre que le Soleil ne peut élever les eaux de plus de deux pieds, & la Lune de plus de cinq : or ces deux forces combinées ensemble ne composeroient dans les quadratures qu'une force absolue capable de faire varier les eaux en pleine mer d'une hauteur verticale de trois pieds pendant une marée, ce qui lui paroît insuffisant pour expliquer tous les phénoménes des marées dans les quadratures.

Ce qui a déterminé M. *Bernoulli* à s'éloigner en cela du sentiment de M. *Newton*.

M. *Bernoulli* ajoute que les hauteurs des marées dans les ports où l'on fait les observations, dépendent de tant de circonstances accidentelles, qu'elles ne peuvent être exactement proportionnelles aux hauteurs des marées dans la pleine mer; c'est ce qui fait que l'on trouve le rapport moyen entre les plus grandes & les plus petites marées, très différens dans les différens ports. Il en rapporte pour exemple une observation qu'on lui envoya de S. Malo lorsqu'il composoit sa dissertation ; la plus grande & la plus petite hauteur de l'eau étoient entr'elles par cette observation, comme 10 à 3, & par l'observation de *Sturmius* au-dessous de Bristol, elles n'étoient entr'elles que comme 9 à 5; cependant c'est sur cette observation de *Sturmius*, que M. *Newton* a déterminé le rapport entre les forces du Soleil & de la Lune pour opérer les marées; & M. *Bernoulli* prétend qu'outre ces différences qui se trouvent entre les observations des plus grandes & des moindres hauteurs des marées dans les différens ports, la méthode d'estimer les forces qui les causent par ces plus grandes & ces moindres hauteurs, est encore très fautive en ce que les marées sont des espéces d'oscillations qui se ressentent toujours des oscillations précédentes, ce qui diminue les variations des marées ; d'où M. *Bernoulli* conclut qu'il seroit plus sûr d'évaluer les forces respectives du Soleil & de la Lune sur les marées par leur durée & leurs intervales que par leurs hauteurs, & en se servant de cette méthode, il trouve que la force de la Lune est dans une moindre proportion à celle du Soleil que celle que M. *Newton* a trouvé.

M. *Bernoulli* prétend qu'il seroit plus sûr d'évaluer les forces du Soleil & de la Lune par la durée & l'intervale des marées, que par leurs hauteurs.

On doit d'abord être étonné que la force de l'attraction du Soleil sur la terre étant assez puissante pour la forcer à tourner autour de lui, tandis que celle de la Lune cause dans son orbite des altérations à peine sensibles, cependant la Lune ait beaucoup plus d'influence que le Soleil sur les mouvemens de la mer. Mais si l'on fait attention que les mouvemens de la mer viennent de ce que ses parties sont attirées différemment de celles du reste du globe, parce que leur fluidité fait qu'elles cédent beaucoup plus facilement aux causes qui agissent sur elles, on verra que l'action du Soleil, qui est très forte sur la terre entiere, attire toutes ses parties presque également à cause de sa grande distance de la terre, au lieu que la Lune étant beaucoup plus près de la terre, doit agir plus inégalement sur les différentes parties de notre globe, & que cette inégalité doit être beaucoup plus sensible.

Comment il se peut faire que l'attraction de la Lune ait tant d'influence sur les eaux de la mer, & dérange si peu le mouvement de la Terre.

Après avoir fait voir que l'attraction combinée du Soleil & de la Lune sur les eaux de la mer, est la cause des marées, & avoir déterminé la quantité dont chacun de ces deux astres y contribue, M. *Newton* entre dans l'explication des circonstances qui accompagnent les phénoménes de la mer.

On a reconnu de tout tems trois especes de mouvement dans la mer, son mouvement journalier qui fait qu'elle s'éleve & s'abaisse deux fois par jour, les altérations régulieres que reçoit ce mouvement à chaque mois, & qui suivent les positions où se trouve la Lune par rapport à la terre, & enfin celles qui ont lieu chaque année, & qui sont causées par la plus grande proximité où la terre est du Soleil dans de certains tems de l'année.

On distingue trois sortes de variations dans le mouvement de la mer.

La circonſtance la plus remarquable qui accompagne les marées, c'eſt que l'élévation & l'abaiſſement des eaux arrivent toujours deux fois dans un jour lunaire, c'eſt-à-dire, dans l'intervale de tems qui s'écoule entre le paſſage de la Lune au méridien, & ſon retour au même méridien; car la plus grande force de cet aſtre ſur la mer ayant lieu lorſqu'il culmine, & que ſon action eſt perpendiculaire, elle doit être égale deux fois dans 24 h quand la Lune paſſe au méridien du lieu au-deſſus & au-deſſous de l'horiſon; ainſi il doit y avoir à chaque révolution de la Lune autour de la terre deux flux diſtans entr'eux, du même intervale de tems que la Lune employe à aller du méridien de deſſus l'horiſon à celui de deſſous; & cet intervale eſt de 12 h 24′.

Les variations diurnes s'abaiſſent & s'élevent deux fois par jour.

Cette élévation & cette dépreſſion des eaux deux fois en 24 h, ſuit de ce que M. *Newton* a démontré Cor. 19. & 20. Prop. *66.* car cette eau ſe trouve deux fois dans cet eſpace de tems dans ſes ſyſigies, & deux fois dans ſes quadratures; ainſi ſon mouvement doit être deux fois accéléré, & deux fois retardé.

## XIII.

La plus grande élévation de l'eau devroit être préciſément dans le mouvement du paſſage de la Lune au méridien, ſi les eaux étoient ſans inertie, & qu'elles n'éprouvaſſent aucun frottement du lit dans lequel elles coulent; mais ces deux raiſons font que cette hauteur arrive ordinairement deux heures & demie ou trois heures après le paſſage de la Lune au méridien dans les ports de l'océan où la mer eſt libre : c'eſt que l'inertie de l'eau fait qu'elle ne reçoit pas tout d'un coup le mouvement, & qu'elle conſerve pendant quelque tems le mouvement acquis, enſorte que le mouvement de la mer eſt perpétuellement accéléré pendant les ſix heures qui précédent le paſſage de l'aſtre au méridien, par l'action de l'aſtre ſur les eaux qui augmente à meſure que l'aſtre s'éloigne de l'horiſon, & par le mouvement diurne de la terre qui conſpire alors avec celui de l'aſtre: ce mouvement imprimé à l'eau conſerve pendant quelque tems ſon accélération, enſorte qu'elle s'éléve de plus en plus juſqu'à

La plus grande élévation de l'eau ne ſe fait pas dans le moment du paſſage de la Lune par le Méridien.

Quelle en eſt la raiſon.

ce que le mouvement diurne qui devient contraire après le paſſage de la Lune au méridien, ainſi que l'action de l'aſtre qui s'affoiblit ſucceſſivement, diminue peu à peu la viteſſe des eaux, & les force à s'abaiſſer. On ne s'apperçoit de cet abaiſſement qu'environ trois heures après la culmination de l'aſtre, par les mêmes raiſons qui font que leur élévation retarde ſur le paſſage de l'aſtre au méridien.

On ſent aiſément que le frottement des eaux contre le fond de la mer doit auſſi contribuer à retarder ces effets.

M. *Culler*, de la diſſertation duquel j'ai emprunté beaucoup de choſes dans ce Chapitre, dit, que ſi l'on ne conſidéroit que le mouvement vertical de l'eau, ſa plus grande élévation devroit avoir lieu dans le moment même du paſſage de la Lune au méridien, & même quelquefois plutôt à cauſe de l'action du Soleil, & il attribue la plus grande partie du retardement de l'élévation de l'eau à ſon mouvement horiſontal par lequel elle frotte contre le lit dans lequel elle coule.

Dans les régions où la mer ne communique pas avec l'océan, les marées retardent beaucoup davantage, enſorte que ce retardement va quelquefois juſqu'à 12 heures, & on a coutume de dire dans ces lieux que la marée précède le paſſage de la Lune au méridien: au Port du Havre, par exemple, où la marée retarde de neuf heures, on croit qu'elle précède de trois heures le paſſage de la Lune au méridien; mais la vérité eſt que cette marée eſt l'effet de la précédente culmination.

## XIV.

On vient de voir que l'effet de la Lune ſur les marées, eſt à celui du Soleil comme $4\frac{1}{2}$ à 1 environ. Or on n'a fait attention en déterminant le tems auquel arrivent les marées qu'à l'action de la Lune, ſi on ne faiſoit de même attention qu'à l'action du Soleil, les marées devroient ſuivre immédiatement le paſſage du Soleil au méridien, en faiſant abſtraction des cauſes externes qui les retardent; mais la mer, en obéiſſant à ces deux aſtres ſelon la quantité de leur action sur elle, acquiert sa plus grande hauteur par une force composée de ces deux forces, ainsi cette plus grande hauteur arrive dans un tems intermédiaire à celui dans lequel elle auroit lieu en considérant l'effet de chacune de ces forces séparément, & ce tems répond plus exactement au mouvement de la Lune qu'à celui du Soleil, parce que la force de la Lune sur la mer est, comme on l'a vû précédemment, plus grande que celle du Soleil.

Le plus grand abaissement des eaux doit arriver quand la Lune est dans l'horison, puisque c'est alors que son action sur la mer est la plus oblique, c'est pourquoi il n'y a pas un espace égal entre deux élévations de l'eau, comme cela devroit arriver; mais la plus grande élévation qui suit est d'autant plus près de celle qui l'a précédée, que l'élévation du pôle du lieu qu'on considére sera plus grande, & que la Lune aura plus de déclinaison, c'est-à-dire, d'autant plus qu'il y aura plus d'intervale entre le lever & le coucher de la Lune, & le cercle horaire de six heures après sa culmination.

## X V.

Voila les principaux phénoménes qui accompagnent les marées, & qui dépendent des positions des différentes parties de la terre par rapport au Soleil & à la Lune dans son cours journalier.

Il se trouve des différences tous les mois dans les marées qui dépendent des changemens de position de la Lune par rapport à la terre, car on sçait que la Lune fait sa révolution autour de la terre dans l'espace d'un mois.

Les variations qui ont lieu dans les mois.

## X V I.

Les marées sont plus grandes deux fois chaque mois lorsque la Lune est pleine & nouvelle, c'est-à-dire, dans la conjonction & l'opposition, & cela parce qu'alors les actions du Soleil & de la Lune conspirent à élever les eaux. Dans les quadratures, ces forces étant contraires l'une à l'autre, on a alors les plus petites marées.

Les marées sont plus grandes deux fois chaque mois à la nouvelle & à la pleine Lune.

Et plus petites dans les quadratures.

## XVII.

Les plus grandes & les plus petites marées n'arrivent cependant pas précisément dans ce tems.

Et cela à cause de l'inertie de l'eau.

Les plus grandes & les plus petites marées n'arrivent cependant pas précisément dans les syfigies & dans les quadratures, mais ce sont quelquefois les troisiémes ou quatriémes après, & la raison en est dans la conservation du mouvement par l'inertie; si la mer étoit dans un parfait repos quand le Soleil & la Lune agissent sur elle de concert dans les syfigies pour élever les eaux, elle ne prendroit pas d'abord sa plus grande vitesse ni par conséquent sa plus grande hauteur, mais elle l'acquéreroit petit à petit: or comme les marées qui précédent les syfigies ne sont pas les plus grandes, elles augmentent petit à petit, & les eaux n'ont acquis leur plus grande hauteur que quelque tems après que la Lune a passé les syfigies. Il en est de même des plus petites marées qui suivent les quadratures, car le mouvement se perd par dégré de même qu'il s'acquiert, & ce phénoméne a la même cause que le retardement des plus grandes marées diurnes sur le moment de l'appulse de l'astre au méridien.

La plus grande élévation de l'eau arrive plutôt dans le passage des syfigies aux quadratures après le passage de la Lune par le méridien, & plus tard dans le passage des quadratures aux syfigies.

On a déja dit que dans les syfigies le flux devroit précéder le passage de la Lune au méridien, à cause que le Soleil est alors presque dans l'horison; mais comme l'inertie retarde le mouvement des eaux, le flux doit suivre plutôt le passage de la Lune au méridien après, que dans les syfigies, & c'est ce que les observations confirment; il arrive le contraire dans le passage des quadratures aux syfigies, parce qu'alors le flux est perpétuellement retardé par le Soleil.

## XVIII.

Elles sont plus grandes, toutes choses égales dans le périgée de la Lune que dans l'apogée.

Enfin, toutes choses égales, les marées sont toujours plus grandes dans les mêmes aspects du Soleil & de la Lune, & lorsqu'ils ont la même déclinaison, lorsque la Lune est dans son périgée, que lorsqu'elle est dans son apogée, & cela doit être ainsi par la théorie.

puiſque les forces de la Lune ſur la mer décroiſſent en raiſon triplée de ſes diſtances à la terre.

## X I X.

Les variations annuelles. Les marées ſont plus grandes en hiver qu'en été à cauſe de la plus grande proximité du Soleil.

Les différences annuelles des marées dépendent de la diſtance de la terre au Soleil, ainſi les marées ſont plus fortes, toutes choſes égales, en hyver dans les ſyſigies, & moindres dans les quadratures qu'en été, parce qu'en hyver le Soleil eſt plus près de la terre.

## X X.

Les marées dépendent encore de la déclinaiſon du Soleil & de la Lune.

Les effets de la Lune & du Soleil ſur les marées dépendent encore de la déclinaiſon de ces aſtres, car ſi l'aſtre étoit placé dans le pôle, il attireroit d'une maniere conſtante chaque particule d'eau, & ſon action étant toujours égale, elle n'exciteroit dans cette eau aucun mouvement de réciprocation; ainſi il n'y auroit ni flux ni reflux; donc l'action du Soleil & de la Lune, pour exciter ce mouvement, deviennent plus foibles à meſure qu'ils s'éloignent de l'équateur; & M. *Newton*, Prop. 37. Liv. 3. dit, que la force de l'aſtre ſur la mer décroît à peu près en raiſon doublée du ſinus de complément de ſa déclinaiſon; c'eſt-là la raiſon pour laquelle les marées ſont moindres dans les ſyſigies ſolſtitiales, que dans les équinoctiales: & elles doivent être plus grandes dans les quadratures ſolſtitiales, que dans les équinoctiales; parce que dans le premier cas la Lune fait un plus grand effet que le Soleil.

Les plus grandes marées arrivent donc dans les ſyſigies, & les plus petites dans les quadratures des deux aſtres vers l'équinoxe, & la plus grande marée dans les ſyſigies eſt toujours accompagnée de la plus petite dans les quadratures, & le Soleil étant plus près de la terre en hyver qu'en été, fait que les plus grandes & les moindres marées précédent plus ſouvent l'équinoxe du printems, qu'elles ne la ſuivent, & ſuivent plus ſouvent celle d'automne, qu'elles ne la précédent.

Les deux plus grandes marées n'arrivent pas dans deux ſyſigies continues, parce que s'il arrive que la Lune dans l'une des syfigies soit dans son périgée, elle sera la syfigie suivante dans son apogée : or, dans le premier cas, son action étant la plus grande & conspirant avec celle du Soleil, elle fera monter l'eau à sa plus grande hauteur ; mais comme dans la syfigie suivante, où elle est dans son apogée, son action est la moindre, alors la marée ne sera plus si forte.

## XXI.

Le tems & la hauteur des marées dépendent de la latitude des lieux.

Le flux & le reflux dépendent encore de la latitude du lieu. Car en distinguant toute la mer en deux flots hémisphériques, l'un boréal & l'autre austral, ces deux flots qui sont opposés l'un à l'autre, arrivent tour à tour au méridien de chaque lieu à douze heures lunaires d'intervale ; mais comme les régions boréales participent plus du flux boréal, & les australes du flux austral, les flux seront alternativement plus grands & plus petits dans chaque lieu hors de l'équateur ; le plus grand flux, quand la déclinaison de la Lune sera vers le lieu qu'on considére, arrivera environ trois heures après le passage de la Lune au méridien, & le flux, quand la Lune changera sa déclinaison, du plus grand deviendra le plus petit, & la plus grande différence de ces flux sera vers le tems des solstices. Ainsi l'hyver le flux du matin doit être plus grand, & l'été ce doit être celui du soir ; & l'on apprend dans la Prop. 24. du Liv. 3. qu'à *Plimouth*, selon l'observation de *Colopressus*, cette différence va à un pied, & à *Bristol*, selon celle de *Sturnius*, à 15 pouces. M. *Newton* (dans le Livre *De Mundi Systemate*, pag. 58.) dit, que la hauteur des marées diminue dans chaque lieu, en raison doublée des sinus de complément de la latitude de ce lieu : or, on vient de voir que dans l'équateur elles diminuent en raison doublée du sinus de complément de la déclinaison de l'astre ; donc hors de l'équateur la moitié de la somme de la hauteur à laquelle montent les marées le matin & le soir, c'est-à-dire, l'ascension moyenne diminue dans la même raison à peu près, ainsi on peut connoître par ce moyen

Leur hauteur diminue en raison doublée des sinus de complément de la latitude.

la

la diminution des marées causée par la latitude des lieux & la déclinaison de l'astre.

## XXII.

La grandeur du flux & du reflux dépend aussi de l'étendue des mers dans lesquelles ils arrivent, soit que les mers soient entierement séparées de l'océan, ou qu'elles n'y communiquent que par un canal très-étroit; car si les mers ont 90° en longitude, le flux & le reflux doit être le même que s'il venoit de l'océan, parce que cet espace suffit pour que le Soleil & la Lune produisent sur les eaux de la mer leur plus grand & leur moindre effet; mais si ces mers sont si étroites, que chacune de leurs parties soient élevées & déprimées avec la même force, il ne pourroit y avoir d'effet sensible; car l'eau ne peut s'élever dans un lieu, qu'elle ne s'abaisse dans un autre; c'est ce qui fait que dans la mer Baltique, la mer Noire, la mer Caspienne, & dans d'autres mers ou lacs plus étroits encore, il n'y a ni flux ni reflux.

La grandeur du flux dépend de l'étendue des mers.

## XXIII.

La mer Méditerranée qui n'a que soixante dégrés en longitude, éprouve des flux à peine sensibles, & M. *Euler* a donné une méthode pour déterminer leur grandeur; ces marées peu sensibles peuvent encore être diminuées par les vents & par les courants qui sont très considérables dans cette mer; c'est ce qui fait que dans beaucoup de ses ports il n'y a presque pas de flux réglé. Il en faut excepter cependant la mer Adriatique qui a plus de profondeur, ce qui rend son élévation beaucoup plus sensible; c'est ce qui fait, dit M. *Euler*, que les Vénitiens sont les premiers qui ayent fait des observations sur le flux de la Méditerranée.

Les flux dans la Méditerranée sont à peine sensibles.

Il n'y a que dans la mer Adriatique où ils soient sensibles.

## XXIV.

Ainsi, outre les causes assignables par lesquelles on peut rendre compte des phénoménes de la mer, il y en a encore plusieurs qui

Il entre dans les phénoménes du flux & du reflux plusieurs causes qui ne sont pas assignables.

causent des inégalités dans ses mouvemens, qui ne sont réductibles à aucune loi, parce qu'elles dépendent d'élémens qui changent à chaque lieu ; tels sont les lits sur lesquels passent les eaux, les détroits, les différentes profondeurs des mers, leur largeur, les embouchures des fleuves, les vents, &c. toutes causes qui peuvent altérer la quantité du mouvement de l'eau, & par conséquent retarder le flux, l'augmenter, ou le diminuer, & qui ne peuvent être soumises au calcul ; c'est pourquoi il y a des lieux où le flux arrive trois heures après la culmination de l'astre, & d'autres où il n'arrive que douze heures après ; & en général, plus les marées sont grandes, plus elles arrivent tard, & cela doit être ainsi, puisque les causes qui les retardent agissent pendant un tems d'autant plus long.

Si le flux étoit infiniment petit, il auroit lieu précisément dans le moment même de la culmination, parce que les obstacles qui le retardent agiroient infiniment peu ; c'est en partie pourquoi les plus grandes marées qui arrivent vers la nouvelle & la pleine Lune, suivent plus tard le passage de la Lune au méridien, que celles qui arrivent vers les quadratures ; car ces dernieres marées sont les plus petites.

## XXV.

M. *Euler* rapporte qu'à S. *Malo*, dans le tems des sysigies, le flux arrive la sixiéme heure après le passage de la Lune au méridien, & la retardation augmente de plus en plus, jusqu'à ce qu'enfin à *Dunkerque* & à *Ostende* il n'arrive qu'à minuit. On peut par cette retardation connoître la vitesse de l'eau, & M. *Euler* trouve par ces observations, & par d'autres encore, qu'elle fait huit milles environ en une heure ; mais on sent que cette détermination ne peut être générale.

Vitesse des eaux de la mer.

## XXVI.

Ces marées sont toujours plus grandes vers les côtes, & pourquoi.

Les marées sont toujours plus grandes vers les côtes qu'en pleine mer, & plusieurs raisons y contribuent ; premierement, l'eau frappe contre les rivages, ce qui doit par la réaction augmenter sa hauteur ;

secondement, elle y arrive avec la vitesse qu'elle avoit dans l'océan où sa profondeur est très grande, & elle arrive en grande quantité, ce qui fait que par la grande résistance que lui opposent les rivages, elle s'éléve beaucoup davantage; enfin quand elle passe par des détroits, sa hauteur augmente beaucoup, parce qu'étant repoussée par les rivages, elle vient avec la force qu'elle a acquis par l'effort qu'elle a fait pour les inonder, c'est pourquoi à *Bristol* elle monte à une si grande hauteur vers les sysigies; car sur cette côte le rivage est plein de sinuosités & de bancs de sable contre lesquels l'eau frappe avec une grande force, & desquels elle ne peut s'échapper aussitôt qu'elle feroit si le rivage étoit uni.

## XXVII.

C'est par ces principes qu'on peut rendre raison des flux énormes qui ont lieu dans quelques ports, comme à *Plimouth*, au mont S. *Michel*, & à *Avranches*, où M. *Newton* assure (*De Systemate mundi*) que l'eau monte jusqu'à 40 & 50 pieds, & quelquefois plus.

Il peut arriver que le flux vienne au même port par plusieurs chemins, & qu'il passe par quelques-uns de ces chemins plus vîte que par les autres, alors le flux paroîtra partagé en plusieurs flux successifs, qui auroient des mouvemens différens, & qui ne ressembleroient point aux flux ordinaires: supposons, par exemple, que de tels flux soient partagés en deux flux égaux, dont l'un précéde l'autre de six heures, & qu'il arrive trois heures ou vingt sept heures après l'appulse de la Lune au méridien, si la Lune étoit alors dans l'équateur, il y auroit à six heures d'intervale des flux égaux qui seroient détruits par des reflux de la même grandeur, & l'eau stagneroit pendant vingt-quatre heures ce jour là. Explication de plusieurs phénoménes du flux & du reflux.

Si la Lune déclinoit, ces flux seroient dans l'océan alternativement plus grands & plus petits, ainsi dans ce port il y auroit alternativement deux plus grands & deux plus petits flux; les deux plus grands feroient acquérir à l'eau une plus grande hauteur qui se trouveroit dans le milieu de ces deux flux, & par les deux plus petits, elle acquéreroit sa moindre hauteur au milieu de ces deux plus petits flux, & l'eau acquéreroit dans le milieu de sa plus grande & de sa moindre hauteur une hauteur moyenne; ainsi dans l'espace de vingt quatre heures, l'eau, dans ce port, ne s'éleveroit pas deux fois, comme elle fait ordinairement, mais elle n'acquéreroit qu'une fois sa plus grande, & une fois sa plus petite hauteur.

Si la Lune décline vers le pôle élevé sur l'horison, sa plus grande hauteur sera la $3^e$, la $6^e$, ou la $9^e$ heure après l'appulse de la Lune au méridien; & si la Lune décline vers l'autre pôle, le flux se changera en reflux.

## XXVIII.

Explication des circonstances qui accompagnent le flux & le reflux à *Batsham*, dans le Royaume de *Tunquin*.

Tout cela a lieu à *Batsham*, dans le royaume de *Tunquin*, à 20° 50′ de latitude boréale, il n'y a ni flux ni reflux le jour qui suit le passage de la Lune par l'équateur; ensuite quand elle décline vers le nord, le flux & le reflux recommencent & n'arrivent pas deux fois par jour, comme dans les autres ports, mais une fois seulement.

L'eau arrive de l'océan dans ce port de deux côtés, l'un par la mer de la Chine par un chemin plus droit & plus court entre l'isle de *Leuconie* & le rivage de *Kanton*, & l'autre de la mer des Indes entre la *Cochinchine* & l'isle de *Borneo*, par un chemin plus long & plus tortueux. Or, l'eau arrive plutôt par le chemin le plus court, ainsi elle arrive de la mer de la Chine en six heures, & de celle des Indes en 12. donc l'eau arrivant la $3^e$ & la $9^e$ heure après l'appulse de la Lune au méridien, il en résulte les phénoménes dont je viens de parler.

## XXIX.

Aux embouchures des fleuves le reflux dure plus longtems que le flux, & pourquoi.

Aux embouchures des fleuves, le flux & le reflux sont encore différens, car le courant du fleuve qui entre dans la mer résiste au mouvement du flux de la mer, & aide son mouvement de reflux, & cette cause doit par conséquent faire durer le reflux plus longtems que le flux, & c'est aussi ce qui arrive; car *Sturnius* rapporte qu'au-dessus de *Bristol*, à l'embouchure du fleuve de l'*Oundale*, le flux dure cinq heures & le reflux sept; c'est pourquoi encore, toutes choses égales d'ailleurs, les plus grands flux arrivent plus tard aux embouchures des fleuves qu'ailleurs.

## XXX.

On a dit ci-dessus que le flux & le reflux dépendoient de la déclinaison de l'astre & de la latitude du lieu, ainsi sous les pôles il ne doit y avoir ni flux ni reflux diurne, car la Lune étant à la même élévation sur l'horison pendant 24 heures, elle ne passe point au méridien du lieu, & par conséquent elle ne peut y élever les eaux; mais dans ces régions, la mer a le flux & reflux qui dépendent de la révolution de la Lune autour de la terre chaque mois, ainsi la plus petite marée y arrive quand la Lune est dans l'équateur, parce qu'alors elle est toujours dans l'horison pour les pôles; ensuite le flux & le reflux commence peu à peu à mesure que la Lune décline vers le nord ou vers le midi, & quand sa déclinaison est la plus grande, elle n'éléve l'eau que de 10 pouces au pôle vers lequel elle décline, & comme cette élévation se fait par un mouvement très lent, la force d'inertie l'augmente très peu, ainsi il est à peine sensible.

Sous les pôles il n'y a ni flux ni reflux diurne, mais seulement ceux qui dépendent de la révolution de la Lune autour de la terre.

## XXXI.

Ce n'est que sous le pôle que l'eau n'éprouve aucun mouvement diurne; mais dans la zône glaciale, il y a un flux chaque jour au lieu des deux qui ont lieu chaque jour dans la zône torride, & dans nos zônes tempérées; & il est aisé de faire voir que ce passage de deux flux à un ne se fait pas subitement, mais qu'il s'opére par dégré comme tous les effets de la nature. Car on doit se souvenir qu'on a dit ci-dessus que les deux flux diurnes de nos zônes tempérées ne sont pas égaux: or, dans ce cas, il est certain que les plus petits flux seront plus voisins l'un de l'autre, lorsque les deux flux successifs seront inégaux, non-seulement quant à la hauteur des eaux, mais aussi quant au tems de leur durée; or, plus le lieu est éloigné de l'équateur, plus il y a d'inégalité entre deux flux successifs, tant pour leur grandeur que pour le tems pendant lequel ils durent, car le plus grand flux doit durer plus longtems que le plus petit, & cependant tous deux cessent en 12 heures 24' à peu près. Donc dans les régions où la Lune passe dans cet intervale au méridien de dessus & au méridien de dessous, le plus petit flux doit dis-

Mais si n'y a que sous les pôles où il ne se fait aucun flux diurne, car dans la Zone glaciale, il y en a un, Pourquoi il n'y en a pas deux comme dans les autres climats?

paroître entierement, & il ne doit rester que le plus grand flux qui remplira seul l'intervale de 12 heures 24'; d'où il est clair que la Lune déclinant, l'inégalité des deux flux successifs doit devenir plus grande à mesure qu'on approche des pôles, & enfin s'évanouir entierement sous les pôles, & alors les deux flux n'en feront plus qu'un.

## XXXII.

Pourquoi le Soleil & la Lune faisant des effets si sensibles sur les marées, ils ne font point d'autre effet sensible ici bas?

Les forces du Soleil & de la Lune, telles qu'on a vû que M. *Newton* les a déterminées, suffisent pour causer les marées, mais elles ne peuvent produire d'autre effet sensible sur la terre. Car la force du Soleil pour élever la mer étant à la gravité ici-bas comme 1 à 12868200, & la somme des plus grandes forces réunies, que le Soleil & la Lune exercent sur la mer, étant à cette même gravité comme 2032890 à 1, on voit que ces forces réunies ne pourroient pas déranger les pendules de leur situation verticale d'un angle égal à la dixiéme partie d'une seconde, & ne changeroient pas la longueur du pendule à secondes de $\frac{1}{700}$ de ligne; elles ne produiroient pas un effet plus sensible sur le barométre, ni n'auroient enfin aucun effet sensible ici-bas.

## XXXIII.

Conjectures sur le flux & reflux des mers de Jupiter & de ses Satellites.

Les effets de la Lune sur notre mer, doivent nous faire juger que si Jupiter a des mers, ses satellites dans leurs conjonctions & dans leurs oppositions doivent y exciter de grands mouvemens, supposé que ces satellites ne soient pas beaucoup plus petits que notre Lune. Car le diamétre de Jupiter a une beaucoup plus grande raison à la distance du satellite qui est le plus loin de lui, que celle du diamétre de la terre à la distance de la Lune à la terre, & on a vû que l'action de la Lune sur la mer dépend de cette proportion. Peut-être les changemens qu'on remarque dans les taches de Jupiter viennent-elles en partie des mouvemens que ses satellites excitent dans les eaux de cette planete, & si on observoit que ces changemens eussent avec les aspects de ces satellites l'analogie qui suit de cette théorie, on auroit une preuve que c'en est la véritable cause.

## *Comment M. Newton explique les Phénoménes des planetes secondaires, & principalement ceux de la Lune.*

### I.

LE premier phénoméne que les planetes secondaires présentent aux Physiciens, c'est la tendance qu'elles ont vers leur planete principale, en suivant la même loi que les planetes principales vers le Soleil. Nous avons suffisamment établi cette tendance dans le second Chapitre, à l'occasion des planetes principales, en négligeant, comme il le faut d'abord pour simplifier la quéstion, toutes les inégalités que les planetes produisent entr'elles, ou qu'elles peuvent recevoir de la part du Soleil. Mais il est maintenant à propos d'examiner ces inégalités, pour voir d'une maniere plus satisfaisante l'universalité du principe de l'attraction, & l'harmonie du systême dont il est la base. La Lune est de toutes ces planetes celle dont on connoît le mieux les variations, & celle dont la marche peut être le plus facilement soumise à la théorie.

Il nous manque pour l'entier examen des autres planetes secondaires, un élément auquel il paroît comme impossible de suppléer, la connoissance de leurs masses, laquelle est nécessaire pour mesurer leurs actions réciproques, & les dérangemens de leurs orbites qui en résultent. Et quand même, abandonnant l'espérance de calculer par la seule théorie les mouvemens de ces astres, l'on se proposeroit seulement de faire voir *à posteriori* que les phénoménes n'ont rien de contraire au principe de l'attraction, on n'en seroit pas maintenant plus avancé, parce que les phénoménes mêmes, considérés astronomiquement, ne sont pas assez bien déterminés. Tout se réduit donc pour la théorie de ces planetes, à avoir vû que les forces avec lesquelles elles agissent les unes sur les autres, ou celle avec laquelle le Soleil agit sur elles pour déranger leurs orbites, sont très petites en comparaison de l'attraction qu'elles éprouvent vers leurs planetes principales, & que cette attraction est comme toutes les autres inversement proportionnelle aux quarrés des distances.

Les différentes sortes de mouvemens qu'on avoit remarqué depuis longtems dans la Lune, & les loix de ces mouvemens trouvées par de célébres Astronomes, ont fourni à M. *Newton* des moyens d'appliquer avec succès sa théorie à cette planete. Ce grand homme qui avoit déja tant fait de découvertes dans les autres parties du Systême du Monde, a voulu encore perfectionner celle-là; & quoique la méthode qu'il ait suivie en cette occasion soit moins claire & moins satisfaisante que celle qu'il avoit employée dans les autres phénoménes, on ne peut pas s'empêcher de lui devoir beaucoup de reconnoissance de s'y être appliqué.

Nous allons donner une légere idée de la méthode qu'il a suivie dans cette recherche.

## I I.

On voit aisément que si le Soleil étoit à une distance de la terre & de la Lune qui fut infinie par rapport à celle qui sépare ces deux planetes, il ne troubleroit en aucune maniere les mouvemens de la Lune autour de la terre; puisque des forces égales & dont les directions sont paralléles, qui agissent sur deux corps quelconques, ne sauroient altérer leurs mouvemens relatifs. Mais comme l'angle que font les lignes tirées de la Lune & de la terre au Soleil, quoique très petit, ne sauroit être regardé comme nul, il faut donc y avoir égard, & en déduire l'inégalité de l'action du Soleil sur les deux corps à considérer.

Maniere d'avoir égard à l'inégalité de la force du Soleil sur la terre & sur la Lune.

Prop. 66. Liv. 1.

Prenant donc, ainsi que M. *Newton*, sur la ligne tirée de la Lune au Soleil une droite pour représenter la force avec laquelle le Soleil l'attire, soit regardé cette droite comme la diagonale d'un parallélograme dont un côté seroit sur la ligne tirée de la Lune à la terre, & l'autre une paralléle menée de la Lune à la droite qui

qui joint le Soleil & la terre. Il eſt clair que ces deux côtés du même parallélograme, repréſenteront deux forces qu'on peut ſubſtituer à la force du Soleil ſur la Lune, & que la premiere de ces deux forces, celle qui pouſſe la Lune vers la terre, ne troublera en aucune maniere l'obſervation de la régle de *Kepler* des aires proportionnelles aux tems, mais qu'elle changera ſeulement la loi de la force avec laquelle la Lune tendra vers la terre, & altérera en conſéquence la forme de ſon orbite. Quant à la ſeconde force, celle qui agit ſuivant la paralléle au rayon de l'orbite de la terre, ſi elle étoit égale à la force avec laquelle le Soleil agit ſur la terre, on voit aiſément qu'elle ne produiroit aucun dérangement à l'orbite de la Lune; mais cette égalité ne peut arriver que dans les points où la Lune eſt à une diſtance du Soleil égale à celle où en eſt la terre dans le même tems, ce qui arrive vers les quadratures. Dans tout autre point, ces deux quantités étant inégales, c'eſt leur différence qui exprime la force perturbatrice du Soleil ſur la Lune, tant pour déranger la deſcription égale des aires en tems égaux, que pour empêcher la Lune de ſe mouvoir toujours dans le même plan.

La force du Soleil ſe décompoſe en deux autres.

L'une pouſſe la Lune vers la terre.

L'autre agit ſuivant la ligne tirée de la terre au Soleil.

## III.

On ne trouve dans la Propoſition du premier Livre que je viens de citer, que l'expoſition générale de cette maniere d'eſtimer les forces perturbatrices du Soleil ſur la Lune: mais dans le troiſiéme on trouve le calcul qui meſure leur quantité; on y apprend que la partie de la force du Soleil qui pouſſe la Lune vers la terre, eſt dans ſa médiocre quantité, la $\frac{1}{178\frac{29}{40}}$ de celle par laquelle la terre agit ſur elle dans ſes moyennes diſtances.

Prop. 25. Liv. 3.

Meſure des forces perturbatrices du Soleil.

On voit enſuite que l'autre partie de la même force du Soleil, celle qui agit parallélement au rayon de l'orbite de la terre, eſt à la premiere, comme eſt au ſinus total, le triple du coſinus de l'angle que font entr'elles les droites tirées de la Lune & de la terre au Soleil.

## I V.

Accélération des aires dérivée de cette force.

M. *Newton* employe cette détermination des forces perturbatrices, dans les Prop. 26. 27. 28. 29. du même Livre, à calculer celle des inégalités de la Lune qu'on appelle sa variation, & dont la découverte est dûe à *Tycho*.

M. *Newton*, pour déterminer cette inégalité, fait abstraction de toutes les autres : il regarde même la Lune comme si elle devoit parcourir un cercle parfait autour de la terre sans l'action du Soleil, & il cherche l'accélération que l'aire doit recevoir par celle des deux forces perturbatrices qui agit parallélement au rayon tiré de la terre au Soleil. Il trouve que l'aire décrite dans chaque instant supposé égal, est toujours à peu près proportionelle à la somme du nombre 219, 46, & du sinus verse du double de la distance de la Lune à la prochaine quadrature (le rayon étant l'unité); ensorte que la plus grande inégalité de la description des aires se trouve dans les octans où ce sinus verse est dans son maximum.

## V.

Pour déterminer ensuite l'équation que doit donner au mouvement de la Lune cette accélération de l'aire, il a égard au changement de figure que recevroit l'orbite par la force perturbatrice.

L'action du Soleil rend l'orbite de la Lune plus étroite entre les syzigies, qu'entre les quadratures.

Il cherche la quantité dont la force perturbatrice doit rendre la ligne qui passe par les quadratures plus longue que celle qui traverse les syzigies. Les données qu'il employe en résolvant ce Problême, sont les vitesses qu'il a montré à déterminer pour ces deux points dans la proposition précédente, & les forces centripétes aux mêmes points, lesquelles sont composées l'une & l'autre de la force vers la terre, & des forces perturbatrices du Soleil qui agissent alors toutes deux dans le même sens que le rayon de l'orbite de la Lune. Or, les courbures devant être alors directement comme les attractions, & inversement comme les quarrés des vitesses, il a par ce moyen le rapport des courbures, & il en déduit les axes de l'orbite en prenant pour hypothèse que cette courbe soit une ellipse dont la terre est le centre, si le Soleil est supposé fixe pendant que la Lune va de la sysigie à la quadrature, & qu'elle soit, lorsqu'on a égard au mouvement du Soleil, une courbe dont les rayons sont les mêmes que ceux de l'ellipse pendant que l'on augmente les angles qu'ils contiennent dans la raison du mouvement périodique de la Lune à son mouvement synodique. Le premier de ces mouvemens étant celui dans lequel on rapporte la Lune à un point fixe du Ciel; l'autre étant celui où on la compare au Soleil. Par ces suppositions M. *Newton* parvient à trouver que l'axe qui passe par les quadratures, doit être plus grand que celui qui traverse les sysigies de $\frac{1}{69}$.

## VI.

Calcul de la variation de la Lune.

Il calcule ensuite dans la même hypothèse l'équation ou correction, au mouvement moyen de la Lune, qui doit résulter tant de l'accélération trouvée dans le problême précédent, en ne regardant l'orbite que comme circulaire, que celle qui viendroit de la nouvelle figure de cette orbite, par le principe des aires proportionnelles aux tems. La combinaison de ces deux causes lui donne une équation qui se trouve la plus grande dans les octans, & qui monte alors à 35′ 10″. Dans les autres cas, elle est proportionnelle au sinus du double de la distance de la Lune à la prochaine quadrature. Cette quantité se trouve être celle qui convient avec les observations, & forme celle des équations du mouvement de la Lune que l'on appelle variation ou réflexion. Il est bon d'ajouter, avec M. *Newton*, que la variation des octans, n'est de cette quantité, que dans le cas où l'on suppose la terre dans sa moyenne distance; & que dans les autres cas, il faut prendre une quantité qui soit à cet angle de 35′ 10″ en raison renversée du cube de la distance au Soleil. La raison en est que l'expression de la force perturbatrice du Soleil, laquelle est la cause de toutes les inégalités de la Lune, est divisée par le cube de la distance au Soleil.

## VII.

Prop. 30 & 31. Liv. 3.

Calcul du mouvement des nœuds de la Lune.

M. *Newton* passe de l'examen de la variation de la Lune à celui du mouvement de ses nœuds. Dans cette recherche il néglige, ainsi que dans la précédente, l'excentricité de l'orbite de la Lune. Il suppose qu'elle se mouvroit dans un cercle sans la force perturbatrice du Soleil, & n'attribue à cette force d'autre effet que de changer l'orbite circulaire en une ellipse dont la terre est le centre, ou plutôt dans la courbe dont nous venons de donner la construction par le moyen d'une ellipse.

Quelle est celle des deux forces du Soleil qu'il faut employer.

Des deux forces perturbatrices du Soleil, il n'a besoin de considérer que celle qui agit parallélement à la ligne tirée de la terre au Soleil : l'autre, c'est-à-dire, celle qui pousse la Lune vers la terre agissant dans l'orbite même, ne peut être la cause du mouvement qu'a le plan de cette orbite. N'ayant donc que cette force à considérer, & ayant trouvé qu'elle étoit proportionnelle au cosinus de l'angle que font les lignes tirées de la Lune au Soleil & à la Lune, voici comme il employe cette force.

A l'extrémité du petit arc que la Lune a décrit dans un instant quelconque, il en prend un égal, qui seroit celui que la Lune parcourcroit sans la force perturbatrice ; & par l'extrémité de ce nouvel arc, il méne une petite droite paralléle à la distance de la terre au Soleil, & il détermine la longueur de cette droite, par la mesure déja determinée de la force qui agit dans le même sens qu'elle. Cela fait, la diagonale du petit côté que la Lune auroit décrit sans la force perturbatrice, & du côté que feroit décrire cette force si elle étoit seule, donne le vrai petit arc que doit décrire la Lune. Il ne s'agit donc plus que de voir combien le plan qui passeroit par ce petit arc & par la terre, différe du plan qui passe par le premier côté, & de même par la terre.

Les deux petits côtés dont nous venons de parler étant prolongés jusqu'à ce qu'ils rencontrent le plan de l'orbite de la terre, & ayant tiré de leur rencontre avec ce plan deux droites à la terre, l'angle que font ces deux droites, eſt le mouvement du nœud pendant l'inſtant que la Lune met à parcourir ce nouveau petit arc que l'on vient de conſidérer. Mais comme nous ne pouvons pas ſuivre ici le calcul par lequel M. *Newton* détermine ce petit angle, nous nous contenterons de dire qu'il établit d'une maniere très claire, que ſa meſure & partant la viteſſe ou le mouvement inſtantané du nœud eſt proportionnel au produit des ſinus des trois angles qui expriment les diſtances de la Lune à la quadrature, de la Lune au nœud, & du nœud au Soleil. Loix du mouvement des nœuds.

## VIII.

Il ſuit de-là une remarque ſinguliere ſur le mouvement des nœuds de la Lune : c'eſt que lorſque l'un de ces trois ſinus ſe trouve négatif, le nœud, de rétrograde qu'il eſt auparavant, devient direct. Ainſi lorſque la Lune eſt entre la quadrature & le nœud voiſin, le nœud avance ſuivant l'ordre des ſignes. Dans les autres cas il rétrograde, & comme l'eſpace fait, en rétrogradant, eſt plus conſidérable que celui qui eſt parcouru d'un mouvement direct, il arrive que dans chaque révolution de la Lune, le nœud s'eſt mû réellement contre l'ordre des ſignes. Régreſſion & progreſſion des nœuds dans chaque révolution. A la fin de chaque révolution les nœuds ſe ſont mûs en arriere.

Lorſque la Lune eſt dans les ſyſigies & le nœud dans les quadratures, c'eſt-à-dire à 90 dégrés du Soleil, le mouvement horaire eſt de 33'' 10''' 37$^{iv}$ 12$^{v}$. Pour avoir donc ſon mouvement horaire dans toutes les autres ſituations, il faut prendre un angle qui ſoit à celui-là, comme le produit des trois ſinus dont je viens de parler eſt au cube du rayon. Formule qui donne le mouvement horaire quelconque.

## IX.

Prenant le Soleil & le nœud pour fixe pendant que la Lune ſe trouve ſucceſſivement à toutes les diſtances du Soleil, M. *Newton* cherche le mouvement horaire du nœud qui eſt le milieu entre tous les différens mouvemens que donneroit la formule précédente, & ce mouvement moyen, qu'il appelle le mouvement médiocre du nœud, eſt de 16'' 33''' 16$^{iv}$ 36$^{v}$, lorſque l'on ſuppoſe l'orbite circulaire, & que Prop. 32. Liv. 3. Détermination du mouvement moyen des nœuds.

l'on prend le cas où les nœuds sont en quadrature avec le Soleil. Dans les autres positions il est à cette quantité comme le quarré du sinus de la distance du Soleil au nœud est au quarré du sinus total.

Si on suppose que l'orbite soit l'ellipse employée déja à l'article de la variation dont la terre est le centre, le mouvement médiocre dans les quadratures n'est plus que 16″, 16‴, 37$^{iv}$, 42$^{v}$. & dans les autres positions il dépend également du quarré du sinus de la distance au Soleil.

Afin de parvenir à déterminer pour un tems quelconque proposé le lieu moyen du nœud, M. *Newton* prend un milieu entre tous les mouvemens médiocres considérés comme nous venons de le dire: & il se sert pour cette recherche de la quadrature des courbes & de la méthode des séries. Par ce moyen il trouve que le mouvement des nœuds dans une année sydérale doit être de 19° 18′ 1″ 23‴ ce qui ne s'écarte que d'environ 3′ des déterminations faites par les Astronomes.

## X.

Prop. 33. Liv. 3. Détermination du lieu vrai du nœud pour un tems donné.

La même courbe qui par la quadrature de son espace entier donne le milieu entre toutes les vitesses médiocres du nœud, sert aussi par la quadrature de ses parties quelconques à trouver le lieu vrai du nœud pour l'instant proposé.

Voici le résultat de son calcul en négligeant ce qui peut être négligé. Ayant fait un angle égal au double de celui qui exprime la distance du Soleil, au lieu moyen du nœud, on rendra les deux côtés de cet angle tels que le plus grand soit au plus petit, comme le mouvement moyen annuel des nœuds qui est de 19° 49′ 3″, 55‴ est à la moitié de leur mouvement vrai médiocre, lorsqu'ils sont dans les quadratures, laquelle est de 0° 31′ 2″ 33‴ c'est-à-dire comme 38, 3 à 1. Cela fait, & ayant achevé le triangle donné par cet angle & par ses deux côtés, l'angle de ce triangle qui sera opposé à ce petit côté représentera assez exactement l'équation ou correction qu'il faut faire au mouvement moyen pour avoir le vrai,

## XI.

De la recherche du mouvement des nœuds, M. *Newton* passe à la détermination des changemens que subit l'inclinaison de l'orbite de la Lune. Cet examen est nécessairement lié avec le premier, & est tout aussi indispensable, puisque la connoissance de la latitude de la Lune dépend également de ces deux élémens. En employant, comme nous l'avons vû tout-à-l'heure pour le mouvement des nœuds, celle des deux parties de la force perturbatrice du Soleil qui n'agit pas dans le plan de l'orbite de la Lune, M. *Newton* parvient facilement à mesurer le changement horaire qu'éprouve l'inclinaison de l'orbite de la Lune, & ce changement, lorsque l'on suppose l'orbite circulaire, se trouve en diminuant premiérement le mouvement horaire des nœuds, lequel est de $33'' \, 10''' \, 33^{iv} \, 12^{v}$ (les nœuds étant dans les quadratures & la Lune dans les syfigies) dans la raison du sinus de l'inclinaison de l'orbite de la Lune au rayon, & en prenant ensuite une quantité qui soit au nombre donné par cette opération comme le produit du sinus de la distance de la Lune à la quadrature voisine, par le sinus de la distance du Soleil au nœud & par le sinus de la distance de la Lune au nœud, est au cube du rayon. Ce changement horaire de l'obliquité de l'écliptique de la Lune n'est calculé que dans la supposition que son orbite soit circulaire, mais si l'on veut qu'il convienne à l'orbite elliptique que M. *Newton* a tiré de la force perturbatrice du Soleil sans égard à l'excentricité, il faut le diminuer de $\frac{1}{69}$.

Prop. 34. Du changement dans l'inclinaison de l'orbite.

Variation horaire de l'inclinaison.

## XII.

Après avoir déterminé ainsi le changement horaire de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, M. *Newton* employant la même méthode & les mêmes suppositions par laquelle il avoit trouvé le lieu vrai du nœud dans un instant quelconque proposé, parvient à déterminer l'inclinaison de l'orbite pour un moment quelconque. Voici le résultat de son calcul.

Prop. 35. Maniere d'avoir l'inclinaison pour un tems donné.

Soient prises sur une base à compter d'un même point trois parties en progression géométrique, dont la premiére représente la plus petite inclinaison & la troisiéme la plus grande. Soit ménée ensuite par l'extrémité de la seconde une droite qui fasse avec la base un angle égal au double de la distance du Soleil au nœud pour le mouvement proposé. Soit prolongée cette droite jusqu'à ce qu'elle rencontre le demi cercle décrit sur la différence de la premiere & de la troisiéme des lignes couchées sur la base. Cela fait l'intervale compris entre la premiere extremité de la base & la perpendiculaire abbaissée de la commune section du cercle & du côté de l'angle dont on vient de parler, exprimera l'inclinaison pour le tems proposé.

## XIII.

Ce que Mr. *Newton* dit sur les autres inégalités de la Lune.

M. *Newton*, après avoir exposé la méthode par laquelle il calcule celle des inégalités de la Lune appellée sa variation, & la méthode qu'il suit en déterminant le mouvement des nœuds & la variation de l'obliquité de l'écliptique, rend compte de ce qu'il dit avoir tiré de sa théorie de la gravitation par rapport aux autres inégalités de la Lune. Mais il s'en faut bien que ce qu'il donne alors puisse être aussi utile aux géometres, que ce qu'il a dit auparavant par rapport aux inégalités dont je viens de parler.

Dans l'examen des premieres inégalités, quoique le lecteur ne soit pas extrémement satisfait à cause de quelques suppositions & de quelques abstractions faites pour rendre le problême plus facile, il a du moins cet avantage, qu'il voit la route de l'Auteur & qu'il acquiert de nouveaux principes avec lesquels il peut se flatter d'aller plus loin. Mais quant à ce qui regarde le mouvement de l'apogée & la variation de l'excentricité, & toutes les autres inégalités du mouvement de la Lune, M. *Newton* se contente des résultats qui conviennent aux Astronomes pour construire des tables du mouvement de la Lune, & il assure que sa théorie de la gravité l'a conduit à ces résultats,

XIV.

## XIV.

M. *Horox*, célébre astronome Anglois avoit prévenu M. *Newton* sur la partie la plus difficile des mouvemens de la Lune, sur ce qui régarde l'apogée & l'excentricité. On est étonné que ce sçavant dénué du secours que fournissent le calcul & le principe de l'attraction, ait pû parvenir à réduire des mouvemens si composés sous des loix presque semblables à celles de M. *Newton*, & ce dernier si respectable d'ailleurs paroît d'autant plus blamable en cette occasion d'avoir caché sa méthode, qu'il s'exposoit à faire croire que ses théorémes étoient comme ceux des Astronomes qui l'avoient précédé, le résultat de l'examen des observations, au lieu d'être une conséquence qu'il eut tirée de son principe général.

Mr. *Horox* avoit trouvé les loix de l'apogée & de l'excentricité.

C'est dans le scholie de la proposition 35 du 3^e^. livre que M. *Newton* a donné ces théorémes qui font presque tout le fondement des tables du mouvement de la Lune. Voici à peu-près en quoi ils consistent.

## XV.

Le mouvement moyen de la Lune doit être corrigé par une équation dépendante de la distance du Soleil à la terre. Cette équation appellée annuelle est la plus grande dans le périgée du Soleil & la plus petite dans son apogée. Son maximum est de 11′ 51″ & dans les autres cas elle est proportionelle à l'équation du centre du Soleil. Elle est additive dans les six premiers signes à comter de l'apogée du Soleil, & soustractive dans les six autres signes.

Equations annuelles du mouvement de la Lune de l'apogé & du nœud.

Les lieux moyens de l'apogée & du nœud doivent être aussi corrigés chacun par une équation de même espece, c'est-à-dire, dépendante de la distance du Soleil à la terre & proportionelle à l'équation du centre du Soleil. Celle de l'apogée est 19′ 43″ dans son maximum & est additive du périhélie à l'aphélie de la terre. L'équation est soustractive de l'aphélie au périhélie pour le nœud. Elle n'est que de 9′ 24″ & est prise dans un sens contraire à la premiere.

## XVI.

Premiere équation semestre du mouvement moyen de la Lune.

Le mouvement moyen de la Lune doit ensuite souffrir une autre correction, dépendante à la fois de la distance du Soleil à la terre & de la situation de l'apogée de la Lune par rapport au Soleil. Cette équation qui est inversement comme le cube de la distance du Soleil à la terre, & directement comme le sinus du double de l'angle qui exprime la distance du Soleil, à l'apogée de la Lune, s'appelle équation semestre. Elle est de 3′ 45″ lorsque l'apogée de la Lune est en octans avec le Soleil, pendant que la terre est dans sa moyenne distance. Elle est additive quand l'apogée de la Lune va de sa quadrature avec le Soleil à sa sysigie : & soustractive, lorsque l'apogée va de la sysigie à la quadrature.

## XVII.

Seconde équation semestre.

Le même mouvement moyen de la Lune demande une troisiéme correction, dépendante de la situation du Soleil par rapport au nœud, ainsi que de la distance du Soleil à la terre. Cette correction ou équation que M. *Newton* appelle la seconde équation semestre, est inversement proportionelle au cube de la distance de la terre au Soleil, & directement proportionnelle au sinus du double de la distance du nœud au Soleil, elle est de 47″ lorsque le nœud est en octans avec le Soleil, & que la terre est dans ses moyennes distances. On l'ajoute lorsque le Soleil s'écarte en antécédence du nœud le plus proche, & au contraire, on la rétranche lorsqu'il s'en éloigne en conséquence.

## XVIII.

Après ces trois premieres corrections du lieu de la Lune, suit celle qu'on appelle son équation du centre. Mais cette équation ne sauroit être prise comme celle des autres planetes dans une seule & même table, parceque son excentricité varie à tout moment,

& que le mouvement de son apogée est fort irrégulier. Afin donc de parvenir à l'équation du centre de la Lune, il faut commencer par déterminer l'excentricité & le vrai lieu de l'apogée de la Lune, ce que l'on fait par le moyen de tables fondées sur la proposition suivante.

Détermination du vrai lieu de l'apogée & de l'excentricité.

Ayant pris une droite quelconque pour exprimer la moyenne excentricité de l'orbite de la Lune laquelle est de 5505 parties, dont la moyenne distance de la Lune à la terre est environ 100000, on fait à l'extrémité de cette droite que l'on prend pour base un angle égal au double de l'argument annuel ou de la distance du Soleil au lieu moyen de la Lune corrigé une premiere fois comme on l'a déja enseigné.

On fixe ensuite la longueur du côté de cet angle en le faisant égal à la moitié de la différence, entre la plus petite & la plus grande excentrité, laquelle est de 1172 $\frac{3}{4}$. Fermant alors le triangle, l'autre angle à la base exprime l'équation ou correction à faire au lieu de l'apogée déja corrigé une fois pour avoir son lieu vrai, & l'autre côté du triangle, c'est-à-dire, celui qui est opposé à l'angle fait égal au double de l'argument annuel, exprimera l'excentricité pour le moment proposé. Ajoutant alors l'équation de l'apogée à son lieu déja corrigé, si l'argument annuel est moindre de 90, ou entre 180 & 270, & la retranchant dans les autres cas on aura le vrai lieu de l'apogée que l'on retranchera du lieu de la Lune, corrigé par les trois équations déja rapportées, afin d'avoir l'anomalie moyenne de la Lune. Ensuite avec cette anomalie & l'excentricité, on aura facilement par les méthodes ordinaires l'équation du centre, & partant le lieu de la Lune, corrigé pour la quatriéme fois.

Usage de l'équation du centre ou quatriéme correctoin du lieu de la Lune.

## XIX.

La cinquiéme équation de la Lune est la variation.

Le lieu de la Lune, corrigé pour la cinquiéme fois, se trouve en appliquant au lieu de la Lune, corrigé pour la quatriéme fois l'équation appellée variation, dont nous avons déja parlé, laquelle est toujours en raison directe du sinus du double de l'angle, qui exprime la distance de la Lune au Soleil, & en raison inverse du cube de la distance de la terre au Soleil. Cette équation qui est additive dans le premier, & le troisiéme quart de cercle, (en comtant du Soleil) & négative dans le deuxiéme & quatriéme, est de 35′ 10″ quand la Lune est en octans avec le Soleil & la terre dans ses moyennes distances.

## XX.

Sixiéme équation.

La sixiéme équation du mouvement de la Lune est proportionnelle au sinus de l'angle que l'on a en ajoutant la distance de la Lune au Soleil à la distance de l'apogée de la Lune à celui du Soleil. Son maximum est de 2′ 20″ & elle est positive lorsque la somme est moindre que 180° & négative, si la somme est plus grande.

## XXI.

Septiéme équation.

La septiéme & derniere équation qui donne le lieu vrai de la Lune dans son orbite, est proportionnelle à la distance de la Lune au Soleil; elle est de 2′ 20″ dans son maximum.

## XXII.

On ne voit guéres pour retrouver le chemin qui peut avoir conduit M. *Newton* à toutes ces équations, que quelques corollaires de la proposition 66 du premier livre, où il donne la maniere d'estimer les forces perturbatrices du Soleil, que j'ai exposé dans ce Chapitre. On sent bien à la vérité que celle des deux forces qui agit dans le sens du rayon de l'orbite de la Lune, se joignant à la force de la terre, altére la proportion inverse du quarré des distances, & doit changer tant la courbure de l'orbite, que le tems dans lequel la Lune le parcoure: mais comment M. *Newton* a-t'il employé ces altérations de la force centrale, & quels principes a-t'il suivi pour éviter ou pour vaincre la complication extrême, & les difficultés du calcul que présente cette récherche? c'est ce qu'on n'a pas encore pû découvrir du moins d'une maniere satisfaisante.

On trouve, je l'avoue, dans le premiere Livre des Principes, une proposition sur le mouvement des apsides en général, qui promet d'abord de grands usages pour la théorie des apsides de la Lune, mais quand on vient à s'en servir, on voit bientôt qu'elle ne mene pas fort avant dans cette récherche.

La proposition dont je parle apprend que si à une force qui agit inversement comme le quarré des distances, on en ajoute une inversément proportionnelle au cube, cette nouvelle force ne changera pas la nature de la courbe décrite par la premiere force, mais donnera un mouvement circulaire au plan sur lequel elle est décrite, je veux dire que l'addition de la nouvelle force qui suit la raison renversée du cube, fait que le corps au lieu de décrire autour du centre des forces une ellipse sur un plan immobile, comme il l'auroit décrite par la seule force inversement proportionnelle au quarré, décrira la courbe que trace un point mû dans une ellipse, pendant que le plan de cette ellipse tourne lui-même autour du centre des forces. Dans des coroll. de cette proposition, M. *Newton* applique sa conclusion au cas où la force ajoutée à celle qui suit la loi du quarré de la distance, n'est pas restrainte à agir comme le cube, mais comme toute autre quantité dépendante de la distance.

Si donc la force perturbatrice du Soleil se trouvoit dépendre de la seule distance de la Lune à la terre, on iroit tout de suite à la théorie du mouvement des apsides de la Lune, par cette seule proposition: mais comme il entre dans l'expression de cette force l'élongation ou distance de la Lune au Soleil, & qu'outre cela il n'y à qu'une seule partie de la force perturbatrice du Soleil qui agisse suivant la distance de la Lune, on ne peut sans des artifices nouveaux & peut-être aussi difficiles à trouver que la détermination entiere de l'orbite de la Lune, employer la proposition de M. *Newton* sur les apsides en général au cas de la Lune. Aussi sur cet article comme ſur tout le reſte de la théorie de la Lune, les plus grands Géometres de ce ſiécle ont abandonné la route battue juſqu'a préſent par les commentateurs de M. *Newton*, & ont crû qu'ils arriveroient plutôt au but en reprenant tout le travail dès ſa premiere origine. Ils ont cherché à déterminer directement les chemins & les viteſſes de trois corps quelconques qui s'attirent. On ſe flatte de voir dans peu le ſuccès de leur travail: la méthode analytique qu'ils ſuivent, paroit la ſeule qui puiſſe vraiment ſatisfaire dans une recherche de cette nature.

# DES COMETES.

## I.

QUoique les cométes ayent attiré dans tous les tems l'attention des Philosophes, ce n'est que depuis le siécle dernier & même depuis M. *Newton*, que l'on peut se flatter d'avoir quelque connoissance de leur nature. *Séneque* sembloit avoir pressenti ce qu'on devoit découvrir un jour sur ces astres; mais le germe des vrais principes qu'il avoit semé fut étouffé par la doctrine des Péripatéticiens, qui transmettant de siécle en siécle, les erreurs de leur maître, soutenoient que les cométes étoient des météores & des feux passagers.

Les Péripatéticiens prenoient les cométes pour des météores.

## II.

Quelques Astronomes à la tête desquels on doit mettre *Tycho*, reconnurent la fausseté de cette opinion en faisant voir par leurs observations, que ces astres étoient beaucoup par de-là l'orbe de la Lune.

*Tycho* reconnut qu'elles étoient par de-là la Lune.

Ils détruisirent en même tems les cieux solides, imaginés par les mêmes philosophes scholastiques, & proposérent des vues sur le Systême du Monde, qui convenoient beaucoup mieux à la raison & aux observations: mais leurs conjectures étoient encore bien loin du but, auquel la géométrie de M. *Newton* pouvoit seule atteindre.

## III.

Descartes à qui les sciences sont si redevables, n'avoit pas mieux réussi que ses prédécesseurs dans l'examen des cométes, il ne pensai ni à employer les observations qu'il lui auroit été aisé de rassembler, ni la géométrie à laquelle il auroit dû si naturellement avoir

Descartes en faisoit des planetes errantes de tourbillons en tourbillons.

recours, lui qui l'avoit portée à un si grand point de perfection. Il se contenta de raisonnemens vagues & regarda les cometes comme des astres qui flottoient entre les différens tourbillons, qui composoient suivant lui l'univers, & il n'imagina pas qu'elles suivissent aucune loi dans leurs mouvemens.

## IV.

Mr. *Newton* reconnut que les cometes tournoient autour du Soleil & étoient soumises aux mêmes loix que les planetes.

M. *Newton*, éclairé par sa théorie des planetes & par les observations qui lui apprenoient, que les cometes descendoient dans notre Systême solaire, vit bien-tôt que ces astres devoient être des corps de même nature que les planetes, & qu'elles étoient soumises aux mêmes regles.

Tout corps placé dans notre Systême planétaire doit, suivant la théorie du M. *Newton*, être attiré vers le Soleil, par une force réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances, laquelle combinée avec une impulsion primitive, donne un orbite qui est toujours une des sections coniques, ayant le Soleil à son foyer. Il falloit donc pour confirmer cette théorie que les cometes n'eussent aucun autre mouvement que ceux que l'on peut rapporter à ces courbes, & que les aires parcourues par elles autour du Soleil, fussent proportionnelles aux tems de leur description.

## V.

Il détermina l'orbite d'une cométe quelconque par trois observations.

Le calcul & les observations, guides fideles de ce grand homme, lui aiderent facilement à vérifier cette conjecture. Il résolut ce beau probléme astronomico-géométrique : trois lieux d'une cométe, que l'on suppose se mouvoir dans une orbe parabolique, en décrivant autour du Soleil des aires proportionnelles aux tems, étant donnés avec les lieux de la terre pour les mêmes tems, trouver la position de l'axe, du sommet & le paramétre de la parabole, ou, ce qui revient au même trouver l'orbite de la cométe.

Ce probléme, déja très difficile dans l'orbite parabolique, auroit été

été si embaraſſant dans le cas de l'ellipſe & de l'hyperbole, qu'i étoit à propos de le réduire à ce dégré de difficulté. D'ailleurs l'hypothèſe de l'ellipſe, la ſeule vraiſemblable, revenoit pour la pratique à peu près au même que celle de la parabole, parceque les cométes n'ayant qu'une petite partie de leurs orbites à portée de nos obſervations, doivent ſuivre des ellipſes fort allongées, & on ſait que de telles courbes peuvent dans la partie la plus voiſine de leur foyer être priſes ſans erreur ſenſible pour des paraboles.

## VI.

M. *Newton* ayant donc réſolu le problême dont nous venons de parler, l'appliqua à toutes les cométes obſervées, & il en tira la confirmation compléte de ſa conjecture. Car tous les lieux déterminés par le calcul d'après trois longitudes & latitudes de l'aſtre, ſe trouvérent ſi proches des lieux trouvés immédiatement par les obſervations, qu'on eſt étonné de leur accord quand on connoit la difficulté d'atteindre à la préciſion des obſervations de cette nature.

Il vérifia ſon calcul par les obſervations d'un grand nombre de cométes.

## VII.

Quant à la durée des périodes des cométes, elle ne peut pas ſe tirer du même calcul, parceque comme nous venons de le dire, leurs orbites étant ſi allongées qu'on peut les prendre ſans erreur conſidérable pour des paraboles, des différences exceſſives dans leur durée ne produiroient preſque pas le moindre changement à leurs apparences, dans l'arc de leur orbite que nous connoiſſons. Mais il n'en eſt pas moins ſatisfaiſant pour la théorie de M. *Newton*, de voir que dans cette partie où elles ſont viſibles, elles obſervent exactement la loi de *Kepler*, des aires proportionnelles aux tems, & que le Soleil les attire, ainſi que tous les autres corps céleſtes en raiſon renverſée du quarré de leur diſtance.

La durée de leur période ne ſe peut trouver qu'en trouvant dans l'hiſtoire des apparitions des cométes dans les mêmes circonſtances & à intervalles égaux.

## VIII.

M. *Halley*, à qui toutes les parties de l'aſtronomie doivent tant, & qui a porté ſi loin la doctrine des cométes, a fait à l'occaſion de la fameuſe Cométe de 1680, une recherche bien ſatisfaiſante pour M. *Newton*. Trouvant que trois obſervations de cométes dont l'hiſtoire fait mention, convenoient avec celle-ci dans des circonſtances remarquables, & qu'elles avoient reparû à la diſtance de 575 ans l'une de l'autre : il ſoupçonna que ce pouvoit être une ſeule & même cométe, faiſant ſa révolution autour du Soleil dans cette période. Il ſuppoſa donc la parabole changée en une ellipſe telle que la cométe qui la parcourroit mettroit 575 ans à la décrire, & que ſa courbure fut aſſez conforme avec la parabole dans la partie de ſon orbite voiſine du Soleil.

M. *Halley* a employé la période de celle de 1680 à rectifier l'orbite de cette cométe.

Ayant enſuite calculé les lieux de la cométe dans cette orbite elliptique, il les trouva ſi conformes avec ceux où la cométe fut obſervée, que les variations n'excédérent pas la différence qu'on trouve entre les lieux calculés des planétes & ceux que l'on a par obſervation, quoique le mouvement de ces dernieres ayent été l'objet des recherches des aſtronomes pendant des milliers d'années.

## IX.

La cométe de 1680 ayant une période d'une durée ſi conſidérable, ſon retour qui ne doit arriver que vers l'an 2255, ne fait pour nous qu'une prédiction peu intéreſſante. Mais il y a une autre cométe dont le retour eſt ſi prochain, qu'elle promet un ſpectacle bien agréable aux Aſtronomes de ce tems : c'eſt la cométe qui parut en 1682, laquelle offrit des circonſtances ſi ſemblables à celles de la cométe qui parut en 1607, qu'on ne ſauroit gueres s'empêcher de croire que ce ne ſoit une ſeule & même planéte, faiſant ſa révolution en 75 ans autour du Soleil. Si cette conjecture ſe trouve vérifiée, nous verrons reparoître la même cométe en 1758, & ce ſera un moment bien flateur pour les partiſans de M. *Newton*. Cette cométe ſemble être du nombre de celles qui s'éloignent le moins de notre Syſtême, car dans ſa plus grande diſtance du Soleil, elle ne s'écarte pas quatre fois plus de nous que Saturne, ſi elle eſt viſible lorſqu'elle repaſſera dans la partie inférieure de ſon orbite en 1758, on ne balancera pas à la compter au nombre des planétes.

La cométe de 1682 doit reparoître en 1758.

## X.

Les queues des cométes qui ont fait regarder autrefois l'apparition de ces astres comme des présages facheux, sont mises maintenant au nombre de ces phénoménes ordinaires, qui n'excitent l'attention que des seuls philosophes. Quelques-uns ont prétendu que les rayons du Soleil passant au travers du corps de la cométe, qu'ils supposoient transparent produisoient l'apparence de leurs queues, de même que nous appercevons l'espace que traversent les rayons du Soleil, passant par le trou d'une chambre obscure. D'autres ont imaginé que les queues étoient la lumiere de la cométe, réfractée en arrivant à nous & produisant une image allongée de la même maniere que le Soleil en produit par la réfraction du prisme. M. *Newton*, après avoir rapporté ces deux opinions & les avoir réfutées, rend compte d'une troisiéme qu'il a admise lui-même. Elle consiste à regarder la queue de la cométe comme une vapeur qui s'éleve continuellement du corps de la cométe vers les parties opposées au Soleil, par la même raison que les vapeurs ou la fumée s'élevent dans l'athmosphére de la terre, & même dans le vuide de la machine pneumatique. A cause du mouvement du corps de la cométe, la queue est un peu courbée vers le lieu où le noyau a passé, à peu près comme fait la fumée qui s'éleve d'un charbon ardent que l'on fait mouvoir.

Différentes opinions sur les queues des cométes.

Mr. *Newton* prétend qu'elles ne sont qu'une fumée qui s'exhale du corps de la cométe.

## X I.

Ce qui confirme encore cette opinion, c'est que les queues se trouvent toujours les plus grandes, lorsque la cométe sort de son périhélie, c'est-à-dire du lieu où elle est à sa moindre distance du Soleil, où elle reçoit le plus de chaleur & où l'athmosphére du Soleil est dans sa plus grande densité. La tête paroit après cela obscurcie par la vapeur épaisse qui s'en éleve abondamment, mais l'on découvre au centre une partie beaucoup plus lumineuse que le reste, qui est ce que l'on nomme le noyau.

Ce qui confirme cette opinion.

## XII.

Usage de ces queues suivant M. *Newton*.

Une grande partie des queues des cométes doit se répandre par cette raréfaction dans le Systême solaire : une portion par sa gravité peut tomber vers les planétes, se mêler avec leur athmosphére & remplacer les fluides qui se consument dans les opérations de la nature.

## XIII.

Les cométes pourroient subir de grandes altérations dans les extrémités de leurs orbes.

Si on considere tout ce qui peut agir sur les cométes dans les parties les plus éloignées de leurs orbites, où la force du Soleil sur elles devient extrêmement foible, & où elles peuvent être dans le voisinage d'autres corps célestes, on voit que la permanence de leur période n'est pas aussi indispensable que dans les planétes. Si donc il arrivoit que quelques-unes des cométes que nous attendons ne reparussent pas, cela feroit beaucoup moins de tort au Systême *Newtonien*, que ce Systême n'a tiré d'illustration par leur constance à suivre toutes la premiere regle de *Kepler*, celle des espaces proportionnels aux tems.

## XIV.

Quelques-unes des cométes pourroient bien tomber dans le Soleil.

La résistance que les cométes rencontrent en traversant l'athmosphére du Soleil, lorsqu'elles sont dans les parties inférieures de leurs orbites peut encore altérer leurs mouvemens, les ralentir de révolution en révolution, & les faire approcher de plus en plus du Soleil, jusqu'à ce qu'enfin elles soient englouties dans cet immense globe de feu.

La cométe de 1680, passa à une distance de la surface du Soleil, qui n'excedoit pas la sixiéme partie du diamétre de ce globe, il est vraisemblable qu'elle en approchera encore plus près dans la révolution suivante, & qu'elle tombera enfin tout-à-fait sur le Soleil.

## XV.

Conjectures de M. *Newton* sur des changemens considérables arrivés à des étoiles fixes.

M. *Newton* soupçonne que des étoiles dont la lumiere a paru quelquefois s'affoiblir considérablement, & qui ont ensuite paru brillantes, ont pû tirer leur nouvel éclat de la chute de quelque cométe qui est venue servir d'aliment à leur feu.

# SOLUTION
## *ANALYTIQUE DES PRINCIPAUX Problêmes qui concernent le Système du Monde.*

## SECTION PREMIERE.
### *Des Trajectoires dans toutes sortes d'hypothèses de pesanteur.*

I.

### PROPOSITION I. THEORÉME I.

*SI un corps part d'un point quelconque avec une vîtesse & une direction données, & qu'il soit continuellement sollicité vers un centre par une force qui agisse suivant une loi quelconque des distances à ce centre, tous les espaces renfermés entre deux rayons quelconques (qu'on appelle* rayons vecteurs) *& l'arc de la courbe qu'ils comprennent, sont égaux, lorsque les arcs qui les terminent sont parcourus en tems égal.*

Si le corps étant parti de $M$, se trouvoit en $m$ au bout du premier instant, & que la force qui le porte dans la ligne $Mmn$, agit seule sur lui, ce corps par son inertie seroit en $n$ à la fin du second instant égal au premier; car on suppose $Mm = mn$; mais le corps étant continuellement sollicité vers le centre $C$, obéira à chacune de ces deux forces selon la quantité de leur action sur lui : exprimant donc la force qui le porte vers $C$ par $n\mu$, le corps au lieu d'être en $n$ à la fin du second instant, sera en $\mu$, & parcourra la diagonale $m\mu$ du parallélogramme $mn\mu o$ fait sur les forces $mn$ & $n\mu$. Fig. I.

Les triangles $CMm$, $Cmn$ ayant des bases égales sont égaux :

les triangles $Cmn$, $Cm\mu$ qui ont la même base & qui sont entre mêmes paralléles sont aussi égaux; donc le triangle $CMm =$ le triangle $Cm\mu$: or comme on peut faire le même raisonnement sur tous les triangles ou secteurs que le corps peut décrire autour du centre $C$ dans des instans égaux, les sommes de ces petits triangles, ou les secteurs finis composés de ces petits secteurs seront proportionnels aux nombres des instans, ou aux tems entiers dans lesquels ils seront parcourus. *C. Q. F. D.*

Cette proposition est la premiere du Livre des Principes, & c'est ce qu'on appelle *la premiere analogie de Kepler.*

## I I.

## PROPOSITION II. THEORÉME II.

*Si un corps parcourt autour d'un centre des aires proportionnelles au tems, ses vîtesses aux différens points de la courbe qu'il décrit seront en raison réciproque des perpendiculaires tirées du centre sur les tangentes à ces points.*

Fig. 2. Les triangles ou secteurs $CMm$, $CNn$ décrits en tems égal, sont égaux par la Prop. 1. Ainsi $\frac{CH \times Mm}{2} = \frac{CI \times Nn}{2}$, d'où l'on tire $Mm : Nn :: CI : CH$; mais $Mm : Nn$ comme la vîtesse par $Mm$ est à la vîtesse par $Nn$, puisque ces petites portions de courbe sont parcourues en tems égal par l'hypothèse; donc les vîtesses sont entr'elles en raison inverse des perpendiculaires. *C. Q. F. D.*

## I I I.

## PROPOSITION III. THEORÉME III.

*Les forces par lesquelles le corps révolvant autour du centre* C *est attiré vers le centre en deux lieux quelconques* m *&* P *de la courbe* $MP\pi$ *sont entr'elles comme les petites fléches* $n\mu$ & $p\pi$, *lorsque les secteurs* $Cm\mu$, $CP\pi$ *sont égaux, & si ces secteurs ne sont pas de même superficie, les forces seront comme les fléches* $n\mu$, $p\pi$ *divisées par les quarrés des secteurs* $Cm\mu$, $CP\pi$.

La premiere partie de cette propoſition, ſçavoir que, quand les ſecteurs ſont égaux, on a $F : \varphi :: n\mu : p\pi$ eſt ſi claire par elle-même, & ſuit avec une telle évidence de la prop. 1. qu'elle n'a pas beſoin d'être démontrée. Fig. 3.

Quant à la ſeconde partie, c'eſt-à dire, que lorſque les ſecteurs ſont inégaux, on a $F : \varphi :: \frac{n\mu}{\overline{Cm\mu}^2} : \frac{p\pi}{\overline{CP\pi}^2}$, en voici la démonſtration.

Je fais le ſecteur $Cm\theta$ égal au ſecteur $CP\pi$, & alors on aura par la premiere partie de cette propoſition $F : \varphi :: t\theta : p\pi$; j'ai donc à prouver que $t\theta : p\pi :: \frac{n\mu}{\overline{Cm\mu}^2} : \frac{p\pi}{\overline{CP\pi}^2}$ ou $:: \frac{n\mu}{\overline{Cm\mu}^2} : \frac{p\pi}{\overline{Cm\theta}^2}$ c'eſt-à-dire, que $t\theta : n\mu :: \overline{Cm\theta}^2 : \overline{Cm\mu}^2$, ou enfin que $t\theta : n\mu :: \overline{m\theta}^2 : \overline{m\mu}^2$ : mais à cauſe des triangles ſemblables $on\mu$, $ht\theta$ on a $n\mu : t\theta :: o\mu . \theta h$, la ſeconde partie de cette propoſition ſera donc prouvée, ſi on fait voir que $o\mu : \theta h :: \overline{m\mu}^2 : \overline{m\theta}^2$, ce qui ſera facile en regardant $m\mu\theta$ comme un petit arc de cercle. Car les petits arcs $m\mu$, $m\theta$ étant pris pour leurs cordes, on ſçait que leurs quarrés doivent être entr'eux comme leurs ſinus verſes. *C. Q. F. D.*

## I V.

### *S C H O L I E.*

Les eſpaces étant proportionnels aux tems, la propoſition précédente peut encore s'énoncer ainſi. *Les forces en deux lieux différens d'une même courbe ſont entr'elles en raiſon directe des flêches qu'elles font parcourir, & inverſe des quarrés des tems dans leſquels elles ſont parcourues.* Sous cet énoncé la propoſition a cet avantage qu'elle convient également au cas où l'on compare les forces en deux lieux de la même courbe, & celui où il s'agit de les comparer dans deux points de différentes courbes. La démonſtration en eſt facile en combinant ces deux propoſitions : car ſi l'on prend les tems égaux dans les deux courbes, les forces ſont comme les flêches, &

si on les suppose inégaux dans la même courbe, les fléches divisées par les quarrés des tems représentent les forces.

## V.

## PROPOSITION IV. THEORÉME IV.

*Trouver l'expression générale des fléches* $n\mu$.

Je tire les tangentes $HM$, $hm$ aux points $M$ & $m$, & du centre $C$ j'abaisse sur les tangentes les perpendiculaires $CH$, $Ch$, ayant mené ensuite $\mu K$ perpendiculaire sur $mn$, décrit l'arc de cercle $Dd$ du rayon quelconque $CD$. Je fais $CH=p$. $ho=dp$. $AM=s$. $Mm=ds$. $CM=y$. $mR=dy$. $CD=1$. $Dd=dx$. Les triangles semblables $CHM$, $MRm$ donnent $CM : HM :: Mm. Rm$, c'est-à-dire, $y : HM :: ds : dy$, donc $\frac{ydy}{ds} = HM = om$ : D'un autre côté les triangles semblables $hom$, $mK\mu$ donnent $om : ho :: m\mu : K\mu$, c'est-à-dire, $\frac{ydy}{ds} : dp :: ds : \frac{dpds^2}{ydy} = K\mu$. Enfin l'on a par les triangles semblables $MRm$, $Kn\mu$; $MR : Mm :: K\mu : n\mu$, c'est à-dire, $ydx : ds :: \frac{dpds^2}{ydy} : \frac{dpds^3}{y^2dydx} = n\mu$. *C. Q. F. T.*

## VI.

## *COROLLAIRE I.*

Les triangles semblables $CHM$, $MRm$ donneront la valeur de $p$ ou de $CH$ : car on aura $Mm : MR :: CM : CH$, c'est-à-dire $ds : ydx :: y : \frac{yydx}{ds} = p$, donc l'expression précédente $\frac{dpds^3}{yydxdy}$ peut s'écrire ainsi $\frac{dpds^2}{pdy} = n\mu$.

## VII.

## *COROLLAIRE II.*

On a trouvé (Art. 3.) que l'expression de la force centripéte aux

aux différens points de la même courbe est $\frac{\mu n}{Cm\mu^2}$, mais les secteurs $Cm\mu$ ont pour valeur $pds$, donc la force centripéte est proportionnelle à $\frac{\frac{dpds^2}{pdy}}{ppds^2}$ qui se réduit à $\frac{dp}{p^3dy}$ expression générale de la force centripéte à un point quelconque de la courbe décrite.

## VIII.

## *COROLLAIRE III.*

L'expression générale de la petite fléche $\mu n$ étant (art. 6.) $\frac{dpds^2}{pdy}$, puisqu'on a trouvé (Article 6.) que quand on veut comparer les forces dans les courbes différentes, lorsque les temps sont différens, ces forces sont entr'elles comme les fléches divisées par les quarrés des temps; l'expression générale pour comparer les forces dans deux courbes différentes, quand les tems sont inégaux, est $\frac{dpds^2}{pdydt^2}$.

## IX.

## PROPOSITION V. PROBLEME II.

*Trouver l'expression de la force centripéte dans l'ellipse, en prenant un des foyers pour centre des forces.*

L'équation polaire * de l'ellipse par rapport au foyer, est

* Voici comment on trouve cette équation. Soit l'ellipse $ABH$, je tire du foyer $C$ la ligne $CM$, j'abaisse $MQ$ perpendiculaire sur l'axe $AH$ & du Pôle $C$ comme centre, & du rayon $CO$ pris à volonté je trace l'arc de cercle $OP$, je fais ensuite les lignes $CO = 1$. $DQ = u$. $AD = a$. $DB = b$. $CM = y$. $CD = c$. $DE = \frac{aa}{c}$. $CQ = c + u$. On a par les sections coniques $CM : LM :: AC : AE$, c'est-à-dire $y : \frac{aa}{c} + u :: a - c : \frac{aa - ac}{c}$; donc $y = CM = \frac{aa + cu}{a}$, d'où on tire $u = \frac{ay - aa}{c}$: donc $\frac{CQ}{CM}$ sinus de l'angle $OCP$ que je nomme Fig. 5.

$dx = \frac{bdy}{y\sqrt{2ay-yy-bb}}$; ainsi dans ce cas $ds = \frac{dy\sqrt{2ay-yy}}{\sqrt{2ay-yy-bb}}$: donc la perpendiculaire $p$ ou $\frac{yydx}{ds}$ sera $= \frac{by}{\sqrt{2ay-yy}}$ & par conséquent $dp = \frac{abydy}{2ay-yy^{\frac{3}{2}}}$; donc $\frac{dp}{p^3dy}$ qui est (art. 7.) l'expression générale de la force centripéte devient en ce cas $\frac{a}{bbyy}$. *C. Q. F. T.*

On voit donc que dans cette courbe la force centripéte agit en raison inverse du quarré de la distance au centre des forces.

## X.

## PROPOSITION VI. THEORÉME IV.

*Si deux corps attirés par une même force centrale décrivent deux ellipses, leurs vîtesses dans leur moyenne distance du centre seront en raison renversée des racines de ces moyennes distances.*

Fig. 6. 7. Soient deux ellipses $ADB$, $A'D'B'$ ayant pour centres $C$ & $C'$ pour foyers $F$ & $F'$; $FD = AC$, $F'D' = A'C'$, pour moyennes distances à leur foyer $F$ & $F'$; $DK$, $D'K'$, pour rayons de la développée au point $D$ & $D'$ : on sçait que $eg$ est troisiéme proportionnelle à $DK$ & à $Dd$, de même que $e'g'$ à $D'K'$ & $D'd'$; faisant donc les lignes $FD = a$. $F'D' = a'$. $FL = b$. $F'L' = b'$. $Dd = ds$. $D'd' = ds'$. $DK = \frac{aa}{b}$. $D'K' = \frac{a'a'}{b'}$. on aura $eg = \frac{bds^2}{aa}$ & $e'g' = \frac{b'ds'^2}{a'a'}$: mais les triangles semblables $LFD$, $efg$ : $L'F'D'$,

$s$, aura pour valeur $\frac{ay-bb}{cy}$, donc $\frac{ds}{\sqrt{1-ss}}$ ou $dx$ sera $\frac{d\left(\frac{ay-bb}{cy}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{(ay-bb)^2}{c^2y^2}\right)}}$ ou $\frac{bdy}{y\sqrt{2ay-yy-bb}}$?

$e'f'g'$ donneront $eg : fg :: LF :: FD$ & $e'g' : f'g' :: L'F' : F'D'$, c'est-à-dire $\frac{bds^2}{aa} : fg :: b : a$, & $\frac{b'ds'^2}{a'a'} : f'g' :: b' : a'$, donc $fg = \frac{ds^2}{a}$ & $f'g' = \frac{ds'^2}{a'}$, ce qui donne $ds^2 : ds'^2 :: a \times fg : a' \times f'g'$; mais les fléches $fg$ & $f'g'$ proportionnelles aux forces sont entr'elles, par ce qu'on vient de trouver, dans la raison de $\frac{1}{aa}$ à $\frac{1}{a'a'}$, donc $ds^2 : ds'^2 :: \frac{1}{a} : \frac{1}{a'}$, ou, ce qui revient au même, $ds : ds' :: \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{a'}}$, & comme les petits espaces $ds$, $ds'$ sont entr'eux dans la même raison que les vîtesses qui les font parcourir, on aura donc, la vîtesse en $D$ : la vîtesse en $D'$ :: $\frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{a'}}$, c'est-à-dire en raison renversée des moyennes distances. *C. Q. F. D.*

## X I.

## PROPOSITION VII. THEORÊME V.

*Les tems périodiques dans deux courbes différentes sont entr'eux comme les racines quarrées des cubes des moyennes distances au centre, lorsque l'intensité des forces est la même.*

Gardant les mêmes dénominations que dans la proposition précédente, $\frac{1}{2bds}$ sera l'expression du petit triangle ou secteur $FDd$, & $\frac{1}{2abc}$ celle de l'aire entiere de l'ellipse ($c$ exprimant le rapport de la circonférence au rayon.) On aura donc en nommant $dt$ le temps par $Dd$, & $T$ le temps total; $dt : T :: \frac{1}{2}bds : \frac{1}{2}abc$; mais au lieu de $ds$ on peut mettre $udt$; donc $dt : T :: udt : ac$, d'où l'on tire $T = \frac{ac}{u}$, c'est-à-dire, les temps en raison directe des moyennes distances, & en raison renversée des vîtesses : mais (Article 10.) les vîtesses dans les ellipses en $D$ & $D'$ sont en raison renversée des racines des moyennes distances, lorsque l'intensité des forces est la même ; donc les temps périodiques sont comme les racines quarrées des cubes des moyennes distances, lorsque l'intensité des forces est la même. *C. Q. F. D.*

Cette proposition démontre ce qu'on appelle la seconde analogie de *Kepler*.

## XII.

## PROPOSITION VIII. PROBLÉME III.

*Comparer les vîtesses dans deux courbes, lorsque l'intensité des forces est différente.*

Fig. 8. 9. Je suppose d'abord l'ellipse $AM$ parcourue dans le cas où la force centrale a pour intensité $n$, c'est-à-dire, lorsque la force en $M$ est exprimée par $\frac{n}{yy}$ $(CM = y)$. Je suppose ensuite cette courbe parcourue dans le cas où la force seroit $\frac{n'}{yy}$, & je commence par chercher en quelle raison la vîtesse au point $M$ dans le premier cas, doit être à la vîtesse au même point dans le second cas.

L'expression $\frac{\mu n}{dt^2}$ qui désigne (Article 4.) en général la force centripéte, sera dans le premier cas $\frac{n}{yy}$, & dans le second $\frac{n'}{yy}$, ou, ce qui revient au même, à cause de $dt^2 = \frac{ds^2}{u^2}$ on aura $\frac{\mu n \times u^2}{ds^2} = \frac{n}{yy}$ ou $u^2 = \frac{n\, ds^2}{yy \times \mu n}$ dans le premier cas, & $u'^2 = \frac{n' ds'^2}{yy \times \mu n}$ dans le second ; mais $y$, $ds$, $\mu n$ étant les mêmes dans ces deux cas, puisque c'est la même courbe, on aura alors $u : u' :: \sqrt{n} : \sqrt{n'}$ : De plus on a vû (Prop. 6.) que dans deux ellipses différentes, la vîtesse $u$ en $M$ est à la vîtesse $u'$ en $M'$, lorsque l'intensité de la force est la même, comme $\frac{1}{\sqrt{CM}}$ à $\frac{1}{\sqrt{C'M'}}$,

composant

composant donc ces deux propositions ensemble, on verra que dans deux courbes différentes, & dans lesquelles l'intensité de la force est différente, on aura $u : u' :: \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{CM}} : \frac{\sqrt{n'}}{\sqrt{C'M'}}$ *C. Q. F. T.*

## XIII.

## PROPOSITION IX. PROBLÉME IV.

*Trouver les temps périodiques dans deux ellipses différentes, lorsque l'intensité des forces est aussi différente.* Fig. 8. 9.

Lorsque dans la même courbe l'intensité de la force est différente, on a ( Article 12. ) $u : u' :: \sqrt{n} : \sqrt{n'}$; or, puisque $dt = \frac{ds}{u}$, on aura $\frac{1}{\sqrt{n}} : \frac{1}{\sqrt{n'}} :: dt : dt'$, & par conséquent $:: t : t'$, c'est-à-dire que les temps périodiques sont inversement comme les racines des intensités des forces, lorsque les courbes sont les mêmes. Mais ( Article 11. ) lorsque les intensités sont les mêmes & les courbes différentes, les tems périodiques sont comme $CM^{\frac{3}{2}}$ & $C'M'^{\frac{3}{2}}$, composant donc ces deux raisons, on aura les tems périodiques dans la raison de $\frac{CM^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}}$ à $\frac{C'M'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n'}}$ lorsque les intensités & les ellipses sont différentes. *C. Q. F. T.*

## XIV.

## *COROLLAIRE.*

Puisque dans deux ellipses différentes, & avec des forces d'intensité différente, on a $T : T' :: \frac{CM^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n}} : \frac{C'M'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{n'}}$, on aura $CM : C'M' :: \sqrt[3]{T^2 n} : \sqrt[3]{T'^2 n'}$, c'est-à-dire, que les moyennes distances seront entr'elles, comme les racines cubes des quarrés des tems périodiques, multipliées par les racines cubes des masses. Fig. 8. 9.

## X V.

## PROPOSITION X. PROBLEME V.

*Trouver l'expression de la force centripéte dans l'hyperbole, en prenant un foyer pour centre des forces.*

L'équation polaire * de l'hyperbole est pour le foyer $dx = \frac{b\,dy}{y\sqrt{2ay+yy-bb}}$, ainsi dans ce cas $ds = \frac{dy\sqrt{2ay+yy}}{\sqrt{2ay+yy-bb}}$ & par conséquent $p$ ou $\frac{yy\,dx}{ds} = \frac{by}{\sqrt{2ay+yy}}$, ce qui donne $dp = \frac{aby\,dy}{\overline{2ay+yy}^{\frac{3}{2}}}$, donc $\frac{dp}{p^3\,dy}$ qui est l'expression générale de la force centripéte trouvée (Article 7.) devient lorsque la courbe est une hyperbole $\frac{a}{bbyy}$, c'est-à-dire que dans cette courbe comme dans l'ellipse, la force agit dans la raison inverse des quarrés des distances.

## X V I.

## PROPOSITION XI. PROBLEME VI.

*Trouver l'expression de la force centripéte dans la parabole, lorsque le foyer est le centre des forces.*

Fig. 10. * Voici comment on trouve cette équation. Soit l'hyperbole $CM$, je tire du foyer $F$ la ligne $FM$, j'abaisse $MQ$ perpendiculaire sur l'axe $AH$, & du pôle $F$ comme centre je trace l'arc de cercle $OP$, ensuite je fais les lignes $CQ = u$. $FM = y$. $AF = c$. $AC = a$. $AB = b$. $AE = \frac{aa}{c}$. $CF = c - a$. On a par les sections coniques, $FM : LM :: FC : CE$, c'est-à-dire, $y : \frac{ac+cu-aa}{c} :: c-a : \frac{ac-aa}{c}$, donc $y = FM = \frac{cu+ac-aa}{a}$, d'où on tire $u = \frac{ay-ac+aa}{c}$; donc $\frac{FQ}{FM}$, ou le sinus de l'angle $FMQ$ que je nomme $s$, sera $= \frac{ay-bb}{cy}$ qui donne $ds = \frac{bb\,dy}{cyy}$, $\sqrt{1-ss} = \frac{b}{cy}\sqrt{2ay+yy-bb}$, & partant $dx$ ou $\frac{ds}{\sqrt{1-ss}} = \frac{b\,dy}{y\sqrt{2ay+yy-bb}}$.

L'équation polaire * de la parabole est pour le foyer $dx = \frac{cdy}{y\sqrt{cy-cc}}$, ainsi dans ce cas $ds = \frac{dy\sqrt{cy}}{\sqrt{cy-cc}}$, & par conséquent $p$ ou $\frac{yydx}{ds}$ sera $= \sqrt{cy}$ qui donne $dp = \frac{cdy}{2\sqrt{cy}}$, donc $\frac{dp}{p^3 dy}$ qui est (Art. 7.) l'expression générale de la force centripéte à un point quelconque d'une courbe quelconque, devient ici $\frac{1}{cyy}$; donc la force centripéte dans la parabole, lorsque le centre des forces est dans le foyer, est encore en raison renversée du quarré de la distance. *C. Q. F. T.*

## XVII.

## PROPOSITION XII. PROBLÉME VII.

*Trouver la courbe décrite par un corps qu'on suppose parti d'un point donné avec une vîtesse & une direction données, lorsque ce corps est continuellement sollicité vers un centre par une force qui agit comme une fonction quelconque de la distance à ce centre, & dont l'intensité est donnée.*

On a trouvé (Art. 8.) que lorsqu'on veut comparer la force dans deux courbes différentes, l'expression est $\frac{dpds^2}{paydt^2}$. Lorsque les tems sont inégaux, il faut commencer par chasser l'élément $dt^2$ par les conditions du problême qu'on se propose actuelle-

* Voici comment on trouve cette équation. $AM$ représentant la parabole proposée, $FM$ une ligne tirée de son foyer à un de ses points quelconques $M$, $MQ$ une perpendiculaire abbaissée de $M$ sur l'axe $AH$, $OP$ un arc de cercle décrit d'un rayon quelconque, on fera les lignes $AQ = u$. $FM = y$. $AF = c$. $FO = 1$. & l'on aura $y$ ou $FM = u + c$, ou $u = y - c$, & par conséquent $\frac{FQ}{FM}$ ou le sinus de $FMQ$ que j'appelle $s$, sera $\frac{y-2c}{y}$, qui étant substitué dans l'équation $dx = \frac{ds}{\sqrt{1-ss}}$ donnera $dx = \frac{cdy}{y\sqrt{cy-cc}}$. *C. Q. F. T.* Fig. 11.

ment, qui sont, que la vîtesse & la direction du corps soient données au point d'où il part.

Fig. 12. Je fais les lignes $M\mu = ds$. $CR = p$. La vîtesse au point $P$ d'où part le corps $= f$. Le rayon vecteur en ce point $CP = h$. La perpendiculaire à la tangente au même point $CQ = l$. Par l'Art. 1. les secteurs sont proportionnels aux temps : ainsi on aura $CPp : CM\mu :: \frac{Pp}{f} : \frac{pds}{lf} =$ au temps par l'arc $M\mu = dt$, donc $\frac{dpds^2}{pdydt^2}$ devient $\frac{l^2f^2dp}{p^3dy}$. Il faut égaler à présent cette expression générale d'une force quelconque, à la fonction de $y$, qu'on suppose exprimer la force par les conditions du Problême.

Soit pris $Y$ pour représenter cette fonction, on aura pour l'équation de la courbe cherchée $\frac{l^2f^2dp}{p^3dy} = Y$, ou $Ydy = \frac{l^2f^2dp}{p^3}$ qu'il ne s'agit plus que d'intégrer, ce qui donne $\frac{2B - 2\int Ydy}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$, dans laquelle équation $B$ est une constante ajoutée ; or $p$ est $= \frac{yydx}{\sqrt{yydx^2 + dy^2}}$ & partant $\frac{1}{p^2} = \frac{yydx^2 + dy^2}{y^4dx^2}$, on aura donc $\frac{2By^4 - 2y^4\int Ydy}{l^2f^2} - yy = \frac{dy^2}{dx^2}$, ou $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Ydy}{l^2f^2} - 1}}$, équation différentielle par laquelle on construira la courbe, aussi-tôt qu'on connoîtra $Y$. C. Q. F. T.

## XVIII.

### COROLLAIRE * I.

On vient de trouver $\frac{pds}{lf}$ pour la valeur de l'instant, que le

corps

corps met à parcourir un arc infiniment petit $M\mu$, donc $\frac{\int p\,ds}{lf}$ ou $\frac{\int yy\,dx}{lf}$ sera la valeur du temps total employé à parcourir un arc fini quelconque $PM$; mettant donc dans cette valeur du temps total $\frac{\int yy\,dx}{lf}$ au lieu de $dx$, sa valeur trouvée dans cette présente proposition $\frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Ydy}{l^2f^2} - 1}}$,

on aura pour l'expression générale du temps employé à parcourir un arc fini quelconque l'integr. de $\frac{y\,dy}{\sqrt{2Byy - 2yy\int Ydy - l^2f^2}}$.

## X I X.

### *COROLLAIRE II.*

Pour déterminer la quantité $B$ par les conditions du Problême, on reprendra l'équation $\frac{2B - 2\int Ydy}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$, on mettra dans cette équation à la place de $\int Ydy$, la quantité qui vient aprés l'intégration qu'on aura fait d'abord qu'on aura connu la fonction des distances qu'exprime $Y$; ensuite on fera $l = p$ & $y = h$, & on aura par ce moyen une équation qui ne contiendra que $B$ & des constantes, & qui donnera par conséquent la valeur de $B$.

## X X.

### PROPOSITION XII. PROBLÊME VIII.

*Trouver la courbe que le corps décrira, en supposant* $Y = \frac{n}{yy}$.

On aura alors $\int Ydy = \frac{\int n\,dy}{yy} = -\frac{n}{y}$, ainsi l'équation gé- Fig. 12.

nérale $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2y^2\int Y dy}{l^2 f^2} - 1}}$ deviendra $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy + 2ny}{l^2 f^2} - 1}}$. Afin de pouvoir comparer la lettre $f$ qui marque la vîteſſe au point $P$ d'où part le corps, avec la lettre $n$ qui marque l'intenſité de la gravité dans la ſuppoſition préſente, ſuppoſons que cette vîteſſe $f$ ſoit celle que le corps, en partant du point donné $P$ où le corps eſt ſuppoſé en repos, a acquis en tombant de la hauteur $K$, étant pouſſé conſtamment par la force $\frac{n}{hh}$ que devient la force $\frac{n}{yy}$, lorſque $y = h$, alors en employant ce Théoréme * ſi connu, qu'un corps qui tombe de la hauteur $K$, & qui eſt pouſſé conſtamment par une force $\varphi$, acquiert la vîteſſe $\sqrt{2\varphi K}$, on aura dans le cas préſent où la force eſt $\frac{n}{hh}$, $f = \sqrt{\frac{2nK}{hh}}$.

Si l'on exécute à préſent l'Article dix-neuviéme pour avoir la valeur de $B$, l'équation $\frac{2B - 2\int Y dy}{l^2 f^2} = \frac{1}{p^2}$ dans la ſuppoſition préſente de la force $= \frac{n}{yy}$ deviendra $\frac{2B + \frac{2n}{y}}{l^2 f^2} = \frac{1}{p^2}$ mettant $p$ pour $l$, & $h$ pour $y$, on aura $2B + \frac{2n}{h} = f^2$, donc $2B = f^2 - \frac{2n}{h}$.

* Voici comme on démontre ce Théoréme. La force par l'inſtant $dt$ ou $\frac{dK}{u}$ ($u$ étant la vîteſſe) eſt égale à l'increment $du$ de la vîteſſe; donc $\frac{\varphi dK}{u} = du$, ou $\varphi dK = udu$, ou $2\varphi K = uu$ en ſuppoſant la vîteſſe $= o$, au point de départ $P$ : or de $2\varphi K = uu$, on tire $u = \sqrt{2\varphi K}$. C. Q. F. D.

Par ce moyen l'équation $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy+2ny}{l^2f^2}-1}}$ se changera, en y mettant pour $2B$ sa valeur $f^2 - \frac{2n}{h}$, en $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{\left(f^2-\frac{2n}{h}\right)y^2+2ny}{l^2f^2}-1}}$, mais on vient de voir que dans la supposition présente $f = \sqrt{\frac{2nK}{hh}}$, donc en mettant dans cette équation pour $f^2$ sa valeur $\frac{2nK}{hh}$, on aura $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(K-h)y^2+h^2y}{Kl^2}-1}}$ pour l'équation générale de toutes les trajectoires qui peuvent être décrites, lorsque la force centripéte agit en raison inverse du quarré des distances. *C. Q. F. T.*

## XXI.

## PROPOSITION XIII. THEORÉME VI.

*Réduction de l'équation* $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(K-h)y^2+h^2y}{Kl^2}-1}}$ *aux équations des sections coniques.*

On peut supposer $h >, =$ ou $< K$; dans le premier cas, le terme $(K-h)yy$ deviendra négatif, & alors l'équation exprimera une ellipse dont le grand axe sera $\frac{hh}{h-K}$, & le petit axe $\frac{2l\sqrt{K}}{\sqrt{h-K}}$ : dans le second, le terme $(K-h)yy$ sera zéro, & alors l'équation exprimera une parabole dont le paramétre sera $\frac{4Kl^2}{h^2}$ : dans le troisiéme enfin, $(K-h)y^2$ sera positif, &

l'équation exprime alors une hyperbole dont le grand axe sera $\frac{hh}{K-h}$, & le petit $\frac{2l\sqrt{K}}{\sqrt{K-h}}$.

*Démonstration de ces trois Cas.*

Fig. 5. *Premier Cas.* L'équation polaire de l'ellipse pour un de ses foyers, est $dx = \frac{bdy}{y\sqrt{2ay - yy - bb}}$ (suivant l'art. 9.) lorsque $a$ est le demi grand axe, & $b$ le demi petit axe : lui donnant cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2ay}{bb} - \frac{yy}{bb} - 1}}$, & la comparant à l'équation générale de la trajectoire dans le cas présent, c'est-à-dire, lorsque le terme $(K-h)yy$ est négatif, laquelle est alors

$$dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{-(h-K)yy + h^2y}{Kl^2} - 1}},$$

on aura $\frac{2a}{bb} = \frac{h^2}{Kl^2}$, & $\frac{1}{bb} = \frac{h-K}{Kl^2}$, d'où l'on tirera $b = \frac{l\sqrt{K}}{\sqrt{h-K}}$, $a = \frac{hh}{2\times\overline{h-K}}$. C. Q. F. 1°. D.

Donc le corps partant du point $P$ avec une vîtesse moindre que celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur $PC$, decrira une ellipse.

Fig. 11. *Second Cas.* L'équation polaire de la parabole pour son foyer, est $dx = \frac{cdy}{y\sqrt{cy - cc}}$, lorsque $c$ est la distance du sommet au foyer ; en lui donnant cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{y}{c} - 1}}$, & la comparant à l'équation générale de la trajectoire qui est dans la supposition

position de ce second cas, $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{h^2 y}{l^2 K} - 1}}$, on aura $\frac{1}{c}$

$= \frac{hh}{Kl^2}$, d'où on tire $c = \frac{Kl^2}{hh}$. *C. Q. F.* 2°. *D.*

Ainsi le corps en partant du point *P* avec une vîtesse égale à celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur *PC*, décrira une parabole.

*Troisiéme Cas.* L'équation polaire de l'hyperbole pour un de ses foyers est $dx = \frac{b\,dy}{y\sqrt{2ay + yy - bb}}$, lorsque le demi grand axe est *a*, & le demi petit axe *b*: en lui donnant cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2ay}{bb} + \frac{y^2}{bb} - 1}}$, & la comparant avec l'équation générale de la trajectoire qui est dans le cas présent $dx =$ Fig. 10.

$\frac{dy}{y\sqrt{\frac{(K - h)y^2 + h^2 y}{Kl^2} - 1}}$, on aura $\frac{2a}{bb} = \frac{hh}{Kl^2}$, &

$\frac{1}{bb} = \frac{K - h}{Kl^2}$, d'où l'on tirera $b = \frac{l\sqrt{K}}{\sqrt{K-h}}$, & $a = \frac{hh}{2 \times \overline{K-h}}$.

*C. Q. F.* 3°. *D.*

Donc le corps partant du point *P* avec une vîtesse plus grande que celle qu'il auroit acquise en tombant de la hauteur *PC*, décrira une hyperbole.

## XXII.

### *SCHOLIE.*

On voit par ces trois suppositions de $h >$, $=$ ou $< K$ qui sont les trois cas possibles, que lorsque la force agit en raison inverse du quarré des distances, les trajectoires ne peuvent être que des sections coniques, ayant le centre des forces dans un foyer, quelle que soit la force projectile.

XXIII.

## PROPOSITION XIV. PROBLÉME IX.

*Trouver la courbe que le corps décrira, en supposant* $Y = ny$.

Fig. 12. On aura $\int Y\,dy = \int ny\,dy = \frac{n}{2}yy$, & l'équation générale $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Y\,dy}{l^2f^2} - 1}}$ deviendra $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - ny^4}{l^2f^2} - 1}}$ : pour chasser $B$ je reprens l'équation $\frac{2B - 2\int Y\,dy}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$ qui devient en ce cas $\frac{2B - nyy}{l^2f^2} = \frac{1}{p^2}$, & mettant $l$ pour $p$, & $h$ pour $y$ dans cette équation, j'aurai $2B = f^2 + nhh$, & par conséquent $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(f^2 + nh^2)yy - ny^4}{l^2f^2} - 1}}$ ; supposant ensuite, comme dans l'Art. 20. que $K$ soit la hauteur d'où le corps devroit tomber lorsqu'il est poussé avec la force constante exercée à la distance $h$, on aura $f = \sqrt{2hnK}$, qui étant substituée dans cette équation, la changera en $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh + hh)y^2 - y^4}{2l^2hK} - 1}}$ qui est l'équation générale de toutes les courbes qui peuvent être décrites, lorsque la force centripéte agit en raison de la simple distance. *C. Q. F. T.*

## XXIV.

## PROPOSITION XV. THEORÉME VII.

*Réduction de l'équation générale* $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh+hh)y^2-y^4}{2l^2hK}-1}}$ *à l'équation de l'ellipse, ou maniere d'exprimer la force centripète dans l'ellipse, en prenant le centre de l'ellipse pour le centre des forces.*

L'équation polaire * de l'ellipse est pour le centre $dx = \frac{abdy}{y\sqrt{yy-bb}\times\sqrt{aa-yy}}$ : en lui donnant cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(aa+bb)y^2-y^4}{aabb}-1}}$, & la comparant à l'équation de la trajectoire $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh+hh)y^2-y^4}{2l^2hK}-1}}$, on aura $\frac{aa+bb}{aabb} = \frac{2Kh+hh}{2l^2hK}$ & $aabb = 2l^2hK$, d'où l'on tire $a =$

* Pour trouver cette équation soit l'ellipse $ABD$, je tire du centre $C$ la ligne $CM$, j'abaisse $MQ$ perpendiculaire sur l'axe $AD$, & du pôle $C$ comme centre, je trace l'arc de cercle $OP$, & je fais les lignes $CO = 1$. $CQ = u$. $QM = z$. $CM = y$. $AC = a$. $CB = b$. $CF = c$. Ayant alors dans l'ellipse $z = \frac{b}{a}\sqrt{aa-uu}$, on trouvera $CM = \sqrt{\frac{a^2u^2+a^2b^2-b^2u^2}{aa}} = y$, & par conséquent $u = \frac{a}{c}\sqrt{yy-bb}$. $\frac{CQ}{CM}$ sinus de l'angle $OCP$ que j'appelle $s$ sera $\frac{a}{cy}\sqrt{y^2-b^2}$ qui donne $ds = \frac{ab^2dy}{cy^2\sqrt{yy-bb}}$, & $\sqrt{1-ss} = \frac{b}{cy}\sqrt{aa-yy}$ : or $\frac{ds}{\sqrt{1-ss}} = dx$, donc $dx = \frac{abdy}{y\sqrt{yy-bb}\times\sqrt{aa-yy}}$. C. Q. F. T. Fig. 13.

$\sqrt{\frac{2Kh+hh}{2}+\sqrt{\left(\frac{2Kh+hh}{2}\right)^2-2l^2hK}}$, & $b=\sqrt{\frac{2Kh+hh}{2}-\sqrt{\left(\frac{2Kh+hh}{2}\right)^2-2l^2hK}}$. *C. Q. F. F.* Ainſi quelque ſoit la vîteſſe projectile, la trajectoire ne pourra jamais être qu'une ellipſe dans cette ſuppoſition de la force centripéte en raiſon directe de la diſtance au centre.

## XXV.

### *SCHOLIE.*

Si le corps dans cette hypothêſe au lieu d'être attiré vers le centre $C$ en étoit repouſſé, en ce cas la lettre $n$ qui marque l'intenſité de la force ſeroit négative, ou, ce qui en eſt une ſuite, la lettre $K$ qui exprime la hauteur d'où le corps auroit dû tomber vers $C$ pour acquérir la vîteſſe $f$, devroit être faite négative dans l'équation précédente $dx=\frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh+hh)y^2-y^4}{2l^2hK}-1}}$, laquelle ſe changeroit par conſéquent en celle-ci $dx=\frac{dy}{y\sqrt{\frac{(hh-2Kh)y^2-y^4}{-2l^2hK}-1}}$, ou $dx=\frac{dy}{y\sqrt{\frac{(2Kh-hh)y^2+y^4}{2l^2hK}-1}}$ & exprimeroit toujours une hyperbole quelle que fut la vîteſſe projectile, & cette hyperbole auroit ſon centre de figure dans le centre des forces : car l'équation polaire de l'hyperbole pour ſon centre eſt * $dx=\frac{abdy}{y\sqrt{yy+bb}\times\sqrt{yy-aa}}$, le demi grand axe étant $a$, & le demi petit axe $b$.

Fig. 14. * Voici comment on trouve cette équation. Soit l'hyperbole $CM$, je tire du centre $A$ la ligne $AM$, j'abaiſſe $MQ$ perpendiculaire ſur l'axe $AC$, & du pôle $A$ comme centre, je décris l'arc de cercle $OP$, & je fais les lignes $AO=1$. $AQ=u$. $QM=z$. $AM=y$. $AC=a$. $AB=b$. $AF=c$. L'équation

On

On peut douner à cette équation cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{bb-aa}{aabb}\right)yy+\frac{y^4}{a^2b^2}-1}}$, & la comparant à l'équation générale de la trajectoire dans la supposition présente, on aura $\frac{bb-aa}{aabb} = \frac{-hh+2Kh}{2l^2Kh}$ & $aabb = 2l^2Kh$; d'où l'on tire $b = \sqrt{\frac{-hh+2Kh}{2}+\sqrt{\frac{(hh-2Kh)^2}{2}+2Kl^2h}}$ & $a = \sqrt{\frac{hh-2Kh}{2}+\sqrt{\frac{(hh-2Kh)^2}{2}+2l^2Kh}}$: ainsi dans cette loi de force centripéte, en supposant que la force attractive vers le centre se change en force repulsive, le corps ne pourra jamais décrire qu'une hyperbole, quelle que soit la vîtesse projectile.

## XXVI.

## PROPOSITION XVI. THEORÊME VIII.

*Dans toutes les ellipses, lorsque la force attractive tend au centre, les tems périodiques sont égaux si les intensités des forces sont les mêmes.*

On a vû dans l'Article 4. que quand les arcs sont parcourus en temps égal, les forces sont comme les fléches; donc lorsque les fléches seront comme les distances, les temps dans lesquels

de l'hyperbole étant $uu - aa = \frac{aazz}{bb}$ j'en tire $AM$, ou $\sqrt{uu+zz} = \frac{\sqrt{a^2u^2-a^2b^2+b^2u^2}}{a^2}$, qui étant égalée à $y$, donne $u = \frac{a}{c}\sqrt{yy+bb}$; donc $\frac{AQ}{AM}$ sinus de l'angle $BAP$ que j'appelle $s$ sera $= \frac{a}{cy}\sqrt{yy+bb}$, ce qui donne $ds = \frac{ab^2dy}{cy^2\sqrt{yy+bb}}$ & $\sqrt{1-ss} = \frac{b}{cy}\sqrt{yy-aa}$, ou $\frac{ds}{\sqrt{1-ss}} = dx$, donc $dx = \frac{abdy}{y\sqrt{yy+bb}\,.\sqrt{yy-aa}}$. *C. Q. F. T.*

elles ſont parcourues ſeront égaux. La queſtion eſt donc réduite à prouver que ſi dans chaque ellipſe on prend deux ſecteurs infiniment petits qui ſoient chacun en même raiſon avec l'aire entiere de l'ellipſe, les fléches dans chacun de ces ſecteurs ſeront proportionnelles aux diſtances.

*Premier Cas.* Il eſt aiſé de voir la vérité de cette propoſition dans les ellipſes ſemblables, car toutes les lignes ſont proportionnelles dans ces courbes.

Fig. 15. *Second Cas.* Quant aux ellipſes qui ne ſeroient pas ſemblables, pour les mieux conſidérer on commencera par ſuppoſer qu'elles ayent un axe de commun, tandis que l'autre varieroit dans une raiſon quelconque ; or on ſçait qu'alors toutes les ordonnées de ces ellipſes ſeront proportionnelles à l'axe qu'on rend variable ; donc les ſecteurs $CM\mu$, $CM'\mu'$ ($CMM'$ eſt élevé perpendiculairement à $CP$) qui ſont entr'eux comme les ordonnées $\mu P$, $\mu' P$ ſeront auſſi comme les demi axes $CM$, $CM'$, & ſeront par conſéquent des parties ſemblables de leurs ellipſes totales. Mais dans ces ſecteurs les fléches $m\mu$, $m'\mu'$ ſont viſiblement comme les diſtances $C\mu$, $C\mu'$ ; donc les ellipſes $AMB$, $AM'B$ ſeront parcourues dans le même temps, puiſqu'on avoit réduit la queſtion à trouver deux ſecteurs proportionnels à ces ellipſes, dans leſquels les fléches fuſſent comme les diſtances. Mais ſi deux ellipſes qui ont un axe de commun ſont parcourues en temps égaux, & que deux ellipſes qui n'ont point d'axe commun, mais qui ſoient ſemblables, ſoient auſſi parcourues dans le même temps, il eſt clair que toutes les ellipſes imaginables le ſeront auſſi, puiſqu'on n'aura qu'à faire ſur l'axe de l'une une ellipſe ſemblable à l'autre. *C. Q. F. D.*

## XXVII.

## PROPOSITION XVII. PROBLÉME X.

*Trouver la courbe que le corps décrira, en supposant* $Y = \frac{n}{y^3}$:

On aura dans cette supposition $\int Y dy = \frac{\int n dy}{y^3}$, & en intégrant $\int Y dy = \frac{-n}{2yy}$, donc alors l'équation générale $dx =$

$$\frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Y dy}{l^2 f^2} - 1}}$$

deviendra en substituant pour $\int Y dy$ sa valeur présente $\frac{-n}{2yy}$, $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy + n}{l^2 f^2} - 1}}$;

on a trouvé (Art. o.) $\frac{2B - 2\int Y dy}{l^2 f^2} = \frac{1}{p^2}$ qui devient dans la supposition présente $\frac{2B + \frac{n}{yy}}{l^2 f^2} = \frac{1}{p^2}$; d'où je tire (en mettant $l$ pour $p$ & $h$ pour $f$) $2B = f^2 - \frac{n}{hh}$, & mettant cette valeur de $2B$ dans l'équation précédente, elle devient $dx =$

$$\frac{dy}{y\sqrt{\frac{\left(f^2 - \frac{n}{hh}\right) y^2 + n}{l^2 f^2} - 1}}$$

: mais dans le cas présent la force $\varphi$ supposée agir uniformément sur le corps pour lui donner la vîtesse $f$, en tombant de la hauteur $K$ est $\frac{n}{h^3}$; donc en employant le même Theoréme dont on a fait usage (Art. 21.) on aura $f = \sqrt{\frac{2nK}{h^3}}$, & mettant pour $f^2$ sa valeur dans l'équation précédente, elle sera $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{2nK}{h^3} - \dfrac{n}{h^2}\right)y^2 + n}{\dfrac{2nKl^2}{h^3}} - 1}}$

ou $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{\left(\dfrac{1}{l^2} - \dfrac{h}{2Kl^2}\right)yy + \dfrac{h^3}{2Kl^2} - 1}}$, équation générale de toutes les trajectoires qui peuvent être décrites, lorsque la force agit en raison inverse du cube des distances.

## XXVIII.

## PROPOSITION XVIII. THEORÉME IX.

*Cas où l'équation* $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{\left(\dfrac{1}{l^2} - \dfrac{h}{2Kl^2}\right)y^2 + \dfrac{h^3}{2Kl^2} - 1}}$ *se réduit à celle de la logarithmique spirale.*

Si dans dans cette équation on suppose $\dfrac{1}{l^2} = \dfrac{h}{2Kl^2}$, le premier terme du signe radical sera zéro, & alors l'équation se réduira à $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{\dfrac{h^3}{2Kl^2} - 1}}$ qui donne $ydx$ à $dy$ dans la raison constante de 1 à $\sqrt{\dfrac{h^3}{2Kl^2} - 1}$, ce qui est la propriété de la spirale logarithmique d'où l'on tire son équation : car tous les rayons de cette courbe faisant un angle constant avec les arcs qui les terminent, $ydx$ est toujours à $dy$ en raison constante ; donc dans cette hypothèse, c'est-à-dire lorsque la vîtesse projectile sera telle que $1 = \dfrac{2K}{h}$, la trajectoire sera toujours une spirale logarithmique.

XXIX.

## XXIX.

## PROPOSITION XX. THEORÊME X.

*Réduction de l'équation* $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{1}{l^2} - \frac{h}{2Kl^2}\right)y^2 + \frac{h^3}{2Kl^2} - 1}}$ *dans le cas où l'on suppose que le corps part du point* P *perpendiculairement à la ligne* CP, *& dans lequel par conséquent* $l = h$.

Cette équation deviendra donc alors $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2Kh}\right)y^2 + \frac{h}{2K} - 1}}$, qu'on peut écrire ainsi $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{-\left(\frac{h}{2K} - 1\right)\frac{y^2}{hh} + \frac{h}{2K} - 1}}$, d'où l'on tire $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{1 - \frac{h}{2K}} \times \sqrt{\frac{yy}{hh} - 1}}$

ou $dx = \dfrac{dy}{y\sqrt{\frac{h}{2K} - 1} \times \sqrt{1 - \frac{yy}{hh}}}$, selon que $\frac{h}{2K}$ sera $<$ ou $>$ que 1. Le premier de ces deux cas, celui de $\frac{h}{2K} < 1$ se construit par l'arc de cercle, & le second celui de $\frac{h}{2K} > 1$ par le secteur hyperbolique.

*Premier Cas.* Ayant tracé le cercle $AVP$ dont le rayon $CP = h$, tirant une tangente $TV$ à l'un de ses points quelconques $V$, & prolongeant l'axe $CP$ jusqu'en $T$, où il rencontre la tangente $TV$, on aura la trajectoire cherchée en prenant toutes les $CM = CT$, & faisant les angles $MCT$ aux angles $PCV$ comme $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{2K}}}$ est à 1. Fig. 16.

Pour le prouver faisant les lignes $CQ = u$. $QV = z$. $CP = h$. $CT = \frac{hh}{u} = CM = y$, on a pour la valeur de l'angle $VCP \int \frac{du}{\sqrt{hh - uu}}$, mais puisqu'on $\frac{hh}{u} = y$, on aura $du = \frac{-hhdy}{yy}$ & $\sqrt{hh - uu} = \frac{h\sqrt{yy - hh}}{y}$, & $\frac{du}{\sqrt{hh - uu}} = \frac{hdy}{y\sqrt{yy - hh}}$; donc puisque l'angle $PCM$ est à l'angle $PCV$ comme $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{2K}}}$ est à 1, on aura $dx : \frac{hdy}{y\sqrt{yy - hh}} :: \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{2K}}} : 1$, d'où l'on tire $dx = \frac{hdy \times \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{h}{2K}}}}{y\sqrt{yy - hh}}$ ou $dx = \frac{dy}{y\sqrt{1 - \frac{h}{2K}} \times \sqrt{\frac{yy}{hh} - 1}}$, qui est l'équation qu'on se proposoit de construire.

Fig. 17. *Second Cas.* Pour avoir maintenant la courbe que le corps décrit, lorsque $\frac{h}{2K} > 1$, on trouve l'hyperbole équilatere $PV$, dont $CP = h$ soit le demi axe transversal : on menera une tangente quelconque $VT$ à l'un de ses points quelconques $V$ ainsi que le rayon $CV$, & la trajectoire cherchée se construira en prenant les $CM = CT$, & en faisant les angles $MCT$ aux rapports $\frac{CPV}{CP^2} :: \frac{1}{\sqrt{\frac{h}{2K} - 1}} : 1$.

Pour les trouver je fais les lignes $CQ = u$. $QV = z$. $CP = h$. $CT = \frac{hh}{u} = CM = y$. On aura le secteur $CPV =$

$\frac{1}{2}\int u\,dz - \frac{1}{2}\int z\,du$ ; mais $z = \sqrt{uu - hh}$ & $dz = \frac{u\,du}{\sqrt{uu - hh}}$, donc le secteur $VCP = \frac{1}{2}\int\frac{uu\,du}{\sqrt{uu - hh}} - \frac{1}{2}\int du\sqrt{uu - hh} = \frac{1}{2}\int\frac{hh\,du}{\sqrt{uu - hh}}$ ; mais puisque $\frac{hh}{u} = y$, on aura $\sqrt{uu - hh} = \frac{h}{y}\sqrt{hh - yy}$ & $du = \frac{-hh\,dy}{yy}$, & par conséquent le secteur $\frac{CPV}{CP^2} = -\int\frac{h\,dy}{y\sqrt{hh - yy}}$, d'où l'on tirera $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{h}{2K} - 1} \times \sqrt{1 - \frac{yy}{hh}}}$ qui est la courbe qu'on se proposoit à construire. *C. Q. F. D.*

## XXX.

### *COROLLAIRE.*

Au reste il est aisé de voir que la construction donnée dans ces deux cas, est la même que celle de M. *Newton*, Corol. 3. Prop. 41. qu'on trouve à la page 136. de cet Ouvrage, Tom. I.

## XXXI.

### *SCHOLIE.*

Si on supposoit que la force fut centrifuge au lieu d'être centripéte, la lettre *n* qui désigne la quantité de la force devroit être négative, & par conséquent la lettre *K* le seroit aussi, ce qui donneroit à l'équation précédente $dx = \frac{dy}{y\sqrt{1 - \frac{h}{2K}} \times \sqrt{\frac{yy}{hh} - 1}}$, la forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{1 + \frac{h}{2K}} \times \sqrt{\frac{yy}{hh} - 1}}$, laquelle ne peut être construite, comme il est aisé de le voir, que par l'opération du cas premier, où l'on a vû par la nature de la courbe, ainsi que par celle du Problême, que le corps en partant du point $P$ s'éloignera de plus en plus du centre.

## XXXII.

## PROPOSITION XXI. PROBLÊME XI.

*Trouver la trajectoire que le corps décrira en supposant* $Y = \frac{n}{yy} + \frac{mn}{y^3}$.

On aura dans ce cas $\int Y dy = -\frac{n}{y} - \frac{mn}{2yy}$ en intégrant : alors l'équation générale trouvée (Article 17.) $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Y dy}{l^2 f^2} - 1}}$ se changera en $dy = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy + 2ny + nm}{l^2 f^2} - 1}}$. Mais on a trouvé dans ce même article, $\frac{2B - 2\int Y dy}{l^2 f^2} = \frac{1}{p^2}$, donc on aura $2B + \frac{2n}{h} + \frac{nm}{hh} = f^2$ (en mettant $h$ pour $y$ & $l$ pour $p$) d'où on tire $2B = f^2 - \frac{2n}{h} - \frac{nm}{hh}$; donc $dx =$

$$\frac{lfdy}{y\sqrt{\left(f^2 - \frac{2n}{h} - \frac{nm}{hh}\right)yy + 2ny + nm - l^2 f^2}}.$$

Pour essayer de réduire cette équation aux équations polaires des sections coniques, je lui donne cette forme $dx =$

$$\frac{\frac{lfdy}{\sqrt{l^2 f^2 - mn}}}{y\sqrt{\frac{\left(f^2 - \frac{2n}{h} - \frac{nm}{hh}\right)yy}{l^2 f^2 - nm} + \frac{2ny}{l^2 f^2 - nm} - 1}};$$

d'où l'on tire

tire $dx = \dfrac{\dfrac{dy}{\sqrt{1 - \dfrac{nm}{l^2f^2}}}}{y\sqrt{\dfrac{f^2 - \dfrac{2n}{h} - \dfrac{mn}{hh}yy}{l^2f^2 - mn} + \dfrac{2ny}{l^2f^2 - mn} - 1}}.$

Mais on a vû (note de l'Art. 20.) que $f^2 = 2\varphi K$, or dans la présente supposition $Y$ ou $\varphi = \dfrac{n}{hh} + \dfrac{mn}{h^3}$ (car on a supposé $y$ ou la distance $= h$) on aura donc $\varphi = \dfrac{n}{h^3}(m + h)$, & par conséquent $f^2 = 2\dfrac{nK}{h^3}(h + m)$. Substituant à présent cette valeur de $f^2$ dans la derniere équation $dx =$

$$\frac{\dfrac{dy}{\sqrt{1 - \dfrac{nm}{l^2f^2}}}}{y\sqrt{\dfrac{f^2 - \dfrac{2n}{h} - \dfrac{nm}{hh}yy}{l^2f^2 - mn} + \dfrac{2ny}{l^2f^2 - mn} - 1}},$$ on aura $dx =$

$$\frac{\dfrac{dy}{\sqrt{1 - \dfrac{mh^3}{2l^2K(h+m)}}}}{y\sqrt{\dfrac{2K(h+m) - 2h^2 - mh}{2Kl^2(h+m) - mh^3}y^2 + \dfrac{2h^3y}{2Kl^2(m+h) - mh^3} - 1}};$$

or on voit par cette équation, en la comparant avec l'équation polaire des sections coniques, qu'elle peut leur être comparée exactement ; à l'exception du coëfficient de $dy$, lequel apprend seulement que cette équation exprime une section conique dont on augmente ou diminue les angles en raison constante, & on construira ainsi cette trajectoire.

Soit décrite la section conique $AQP$ exprimée par l'équation $dx =$ Fig. 18. & 19.

$$\frac{dy}{y\sqrt{\frac{2K(h+m)-2h^2-mh}{2Kl^2(h+m)-mh^3}yy+\frac{2h^3y}{2Kl^2(m+h)-mh^3}-1}},$$

ſoient pris enſuite les angles $PCM$ aux angles $PCQ$ dans la raiſon de 1 à $\sqrt{\frac{mh^3}{2Kl^2(h+m)}}$, & la courbe qui paſſera par tous les points $M$, ſera la trajectoire cherchée. *C. Q. F. T.*

## XXXIII.

### *SCHOLIE.*

Fig. 18. & 19. On verra aiſément que ſi l'on ſuppoſe que pendant que le corps marche dans l'ellipſe $AQP$ de $P$ en $Q$, cette courbe elle-même avance d'un mouvement angulaire qui ſe faſſe autour du centre $C$ dans le même ſens, & que le mouvement angulaire ſoit de la quantité $PCH = QCM$ le corps étant arrivé au point $Q$ de l'ellipſe ſe trouvera au point $M$ par le mouvement de l'ellipſe même, donc la courbe qui paſſera par tous les points $M$ ſera la courbe cherchée.

Cette conſtruction s'exécutera donc en ſuppoſant ſimplement un mouvement angulaire dans les apſides de cette ſection conique, qui ſoit de la quantité que donnera le coëfficient de $dy$, & qui ſe fera dans le même ſens que le mouvement du corps ou en ſens contraire, c'eſt-à-dire du côté de $Q$ ou du côté oppoſé, ſelon que l'angle $PCM >$ ou $< PCQ$, c'eſt-à-dire, ſelon que la quantité qui eſt ſous le ſigne du coëfficient de $dy$, ſera $>$ ou $<$ 1.

*Remarque.* On a commencé par examiner dans le Problême précédent, ce qui arrive dans le cas où $Y$ exprimant la force en raiſon inverſe du quarré des diſtances, on y ajoute une force inverſement proportionnelle au cube des diſtances exprimée par $\frac{mn}{y^3}$, parce que le cas de la force en raiſon inverſe du quarré des diſtances étant celui qui a lieu dans le Syſtême du Monde, eſt le plus important à connoître, & on a supposé de plus, dans cet Article précédent, que le corps partoit du point donné avec une vîtesse & une direction données. Examinons à présent ce qui arriveroit dans toutes sortes d'hypothèses de pesanteur, par la même addition de force.

## XXXIV.

### PROPOSITION XXI. PROBLEME XII.

*On demande les trajectoires décrites dans toutes sortes d'hypothèses de pesanteur, en ajoutant à la force quelconque la force* $\frac{m}{y^3}$. Fig. 12.

Dans ce cas $Y$ où la force totale seroit $Y + \frac{m}{y^3}$, donc on auroit alors au lieu de $\int Y dy$ la quantité $\int Y dy + \int \frac{m\,dy}{y^3}$, c'est-à-dire $\int Y dy - \frac{m}{2yy}$. Prenant à présent l'équation générale $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2By^2 - 2y^2\int Y dy}{l^2f^2} - 1}}$ de toutes les trajectoires, & y substituant pour $\int Y dy$ sa valeur dans la supposition présente, on aura alors l'équation $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2Byy - 2yy\int Y dy + m}{l'^2f'^2} - 1}}$, dans laquelle je substitue au lieu des constantes $B, l, f$ de la solution précédente, d'autres constantes $B', l', f'$, afin de n'être pas restraint à faire partir le corps avec la même vîtesse & la même direction, & de pouvoir déterminer au contraire la relation des nouvelles constantes aux premieres, la plus propre à comparer les courbes que l'on a dans ces deux hypothèses.

L'équation précédente peut avoir cette forme $dx = \frac{dy}{y\sqrt{\frac{2B'}{l'^2f'^2 - m}yy - \frac{2yy}{l'^2f'^2 - m}\int Y dy - 1}}$, & on aura alors $\frac{2B'}{l'^2f'^2-m}=\frac{2B}{l^2f^2}$ & $\frac{1}{l'^2f'^2-m}=\frac{1}{l^2f^2}$, ou $l'^2f'^2-m=l^2f^2$, d'où l'on voit qu'en donnant au corps au point de départ une vîteſſe & une direction convenables, on décrira cette trajectoire en ſuppoſant un mouvement d'apſides dans la courbe que l'équation de l'art. 17. a donnée : il ne s'agira donc plus que de déterminer les $l$ & $f$, c'eſt-à-dire de donner au corps en partant de $P$ une certaine direction, car alors on connoîtra $B$; reprenant donc la valeur générale de $B$ trouvée $\frac{2B-2\int Ydy}{l^2f^2}=\frac{1}{p^2}$, elle deviendra dans le cas préſent $\frac{2B'-\int Ydy+\frac{m}{2yy}}{l'^2f'^2}=\frac{1}{p^2}$, & mettant $l'$ pour $p$ & $h$ pour $y$, comme dans l'Art. 20. elle deviendra $2B'-\int Ydy+\frac{m}{2hh}=f'^2$, & ſuppoſant que $\int Ydy=H$ lorſque $y=h$, on aura $2B'=f'^2-\frac{2hh}{m}+H$: ſuppoſant en même tems que l'on ait fait dans l'Article 20. $\int Ydy=H$ lorſque $y$ a la même valeur $h$, la valeur de $B$ dans cette ſuppoſition deviendra $2B=f^2+H$. Mettant donc dans l'équation ci-deſſus $\frac{2B'}{l'^2f'^2-m}=\frac{2B}{l^2f^2}$ pour $B'$, & pour $B$ les deux valeurs qu'on vient de trouver, on aura $\frac{f'^2-\frac{m}{2hh}+H}{l'^2f'^2-m}=\frac{f^2+H}{l^2f^2}$. Ayant ainſi les deux équations $\frac{f'^2-\frac{m}{2hh}+H}{l'^2f'^2-m}=\frac{f^2+H}{l^2f^2}$, & $l'^2f'^2-m=l^2f^2$ leſquelles ne renferment plus que les deux inconnues $l'$ & $f'$, on en tirera les valeurs de ces deux quantités, leſquelles ſeront $f'=\sqrt{f^2+\frac{m}{2hh}}$ & $l'=$

$\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{(l^2f^2+m)2h^2}{h^2f^2+m}}$ ; mais $l$ & $f$ donnent la direction & la vîtesse que doit avoir le corps au point $P$ afin qu'il décrive la même trajectoire que celle que l'équation de l'Art. 17. a donnée ; donc en donnant à cette courbe le mouvement d'apsides déterminé par le coëfficient de $dy$, elle deviendra celle qui résulte de la force $Y+\frac{m}{y^3}$ supposée ici. *C. Q. F. T.*

## XXXV.

### *SCHOLIE.*

Cette Proposition contient la démonstration des Propositions 44 & 45 de la section 9 du premier Livre qui traite du mouvement des apsides. Après avoir vû dans les Propositions précédentes le temps & la vîtesse des corps dans les courbes que différentes forces centripétes leur feroient décrire, on ne sera peut-être pas fâché de trouver ici le temps & la vîtesse des corps à différentes distances du centre, lorsqu'ils y tombent en ligne droite, ce qui arrive lorsqu'on ne leur donne aucune impulsion à leur point de départ, ou lorsque celle qu'on leur donne tend au centre.

## XXXVI.

### PROPOSITION XXII. PROBLÉME XIII.

*On demande le temps & la vîtesse d'un corps qui tombe vers un centre vers lequel il est attiré par une force quelconque, ce corps étant placé à une distance quelconque de ce centre.*

Faisant d'abord $AC=a$. $CP=y$. $AP=a-y$. $Pp=dy$, la vîtesse acquise de $A$ en $P=u$, l'instant employé à parcourir $Pp$ sera $-\frac{dy}{u}$, & multipliant cet instant par la force $Y$ on aura $du=-\frac{Ydy}{u}$, ou $udu=-Ydy$ dont l'intégrale est Fig. 20.

$A - \int Y dy = \frac{1}{2} uu$. Quant à la constante $A$ elle se détermine par cette condition, que si $y = a$, $u$ soit $= o$, c'est-à-dire, qu'au point de départ le corps n'ait aucune vîtesse (s'il en avoit une vers le centre, on feroit $A$ tel que $u$ feroit égal à cette vîtesse lorsqu'on feroit $y = a$): de $u^2 = 2A - 2\int Y dy$, on tire $u = \sqrt{2A - 2\int Y dy}$; donc $dt = \frac{-dy}{u}$, devient $dt = \frac{-dy}{\sqrt{2A - 2\int Y dy}}$. *C. Q. F. T.*

## XXXVII.

## *COROLLAIRE I.*

Supposant à présent le cas où $Y = \frac{n}{y^2}$, on aura $- \int Y dy = \int \frac{n\,dy}{yy} = -\frac{n}{y}$, mettant donc dans les équations précédentes $-\frac{n}{y}$ pour $-\int Y dy$, on aura $2A + \frac{2n}{y} = u^2$; or quand $y = a$, $u = o$ (*hyp*), donc on aura dans cette supposition $2A + \frac{2n}{a} = o$; donc alors $A = -\frac{n}{a}$, & mettant à la place de $A$ cette valeur dans l'équation $2A - 2\int Y dy = u^2$, on aura $-\frac{2n}{a} + \frac{2n}{y} = u^2$ qui donne $u = \sqrt{\frac{2n}{y} - \frac{2n}{a}}$ ou $\sqrt{2n} \times \sqrt{\frac{a-y}{ay}}$, ou $\sqrt{\frac{2n}{a}} \times \sqrt{\frac{a-y}{y}}$; $dt = \frac{-dy}{\sqrt{2A - 2\int Y dy}}$ deviendra par les mêmes substitutions $dt = \frac{dy}{\sqrt{\frac{2n}{a}} \times \sqrt{\frac{a-y}{y}}}$ ou $dt = \frac{-dy\sqrt{y} \times \sqrt{\frac{a}{2n}}}{\sqrt{a-y}}$, & le temps total par $AP$ sera l'intégrale de cette quantité, & pourra être déterminé par cette construction.

Ayant décrit sur la ligne $AC$ le demi cercle $AMVC$, le temps de la chute par $AP$ sera proportionnel au produit du secteur $ACM$ par $\sqrt{AC}$. Fig. 21.

La raison de cette construction est aisée à trouver. Faisant les lignes $AC = a$. $PM = \sqrt{ay - yy}$. $CM = \sqrt{ay}$. $mo = \frac{-ady}{2\sqrt{aa - ay}}$. $AM = \sqrt{aa - ay}$. $CP = y$. $AP = a - y$. pour s'accorder avec les dénominations précédentes. On voit d'abord que le petit secteur $Mcm$ différentielle du secteur $ACM$ a pour valeur le produit de $CM$ par $mo$ différentielle de $AM$, c'est-à-dire $\sqrt{ay} \times \frac{-ady}{2\sqrt{aa - ay}}$; donc le secteur $ACM = \frac{-a\int dy\sqrt{y}}{4\sqrt{a - y}}$, qui étant multiplié par $\sqrt{\frac{8}{an}}$ deviendra l'expression précédente du temps par $Pp$, ou $dt = \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{a - y}} \times \sqrt{\frac{a}{2n}}$, donc le temps par $AP$ sera égal au secteur $\frac{ACM}{\sqrt{AC}} \times \sqrt{\frac{8}{n}}$ quand la force est comme le quarré.

## XXXVIII.

### COROLLAIRE II.

Et le temps total de la chute par $AC$ sera $\frac{APCVM}{\sqrt{AC}} \times \sqrt{\frac{8}{n}}$, ou $\frac{1}{4} c \times AC^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{2}{n}}$, en mettant à la place du demi cercle $APCVM$ sa valeur $\frac{1}{8} c. AC^2$, on voit par cette expression que dans la loi de pesanteur en raison renversée du quarré de la distance, le temps des chutes depuis un point quelconque jusqu'au centre des forces, est comme la racine quarrée du cube de l'espace parcouru en tombant. On devoit bien s'attendre à l'accord de cette Prop. avec celle qui est entre le temps périodique des planetes & leur moyenne distance, puisqu'on peut regarder un corps qui tombe vers un centre, comme s'il décrivoit une ellipse infiniment étroite dont le grand axe seroit hauteur de la chute, & qu'en ce cas la chute ou l'espace *AC* est le double de la moyenne distance; c'est ainsi que M. *Newton* a considéré les chutes rectilignes des corps (Prop. 36.)

Si on vouloit comparer le temps de la révolution d'une planete avec celui qu'elle mettroit à tomber dans le Soleil, rien ne seroit plus facile par ce qu'on vient de donner: car le temps de la chute par le rayon pouvant être regardé comme la demie révolution dans une planete qui auroit ce rayon pour grand axe, il n'est question que de prendre la moitié de la partie $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ du temps de la révolution même de la planete pour avoir le temps de sa chute, en supposant qu'elle commençât à tomber du lieu où elle est dans sa moyenne distance.

Si elle tomboit d'un autre lieu, le temps total de sa chute seroit à ce qu'il seroit en partant de la moyenne distance, en raison sesquiplée de la raison qui est entre le rayon par lequel on la supposeroit tomber & la moyenne distance. Si on veut comparer le temps qu'une planete mettroit à tomber vers le Soleil avec celui qu'un satellite mettroit à tomber vers la planete qui lui sert de centre, il faudra prendre les rapports qu'auroient les mêmes temps, si on regardoit le satellite comme une planete principale qui seroit à la même distance du Soleil que le satellite de sa planete principale, & diviser la raison de ces temps par celle qui est entre les racines quarrées des masses centrales, c'est-à-dire de la masse ou planete qui attire le satellite, à la masse du Soleil.

XXXIX.

## XXXIX.

### *COROLLAIRE III.*

Si au lieu d'avoir supposé $Y = \frac{n}{yy}$ on l'avoit supposé $= ny$, on auroit eu $\int Y dy = \int ny\, dy$, & en intégrant $\int Y dy = \frac{nyy}{2}$, mettant ensuite cette valeur dans l'équation $2A - 2\int Y dy = u^2$, & supposant de même que quand $y = a$, $u = o$, on aura $2A = naa$, & on aura en substituant $u = \sqrt{naa - nyy}$, ou $\sqrt{n} \times \sqrt{aa - yy}$. Et $dt = \frac{-dy}{\sqrt{2A - 2\int Y dy}}$ devient en ce cas $dt = \frac{-dy}{\sqrt{n} \times \sqrt{aa - yy}}$, d'où l'on voit qu'en faisant sur $AC$ comme rayon un quart de cercle, & élevant au point $P$ la perpendiculaire $PM$, le temps employé à parcourir la droite $AP$ aura pour valeur l'arc $ACM \times \frac{1}{\sqrt{n}}$, car cet arc est $\frac{-dy}{\sqrt{aa - yy}}$. Fig. 22.

Si on suppose dans cette équation $dx = \frac{-dy}{\sqrt{n} \times \sqrt{aa - yy}}$ $y = a$, on aura alors pour l'expression du temps par $AC$ le produit de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ par le nombre qui exprime l'angle droit, ou ce qui revient au même par le rapport du quart de cercle au rayon.

Ce qui fournit cette remarque singuliere que le corps central étant le même dans cette hypothèse de pesanteur, de quelque distance que ce corps parte, il arrivera dans le même temps au point $C$, puisque la hauteur n'entre pas dans l'expression du temps.

## X L.

### SCHOLIE.

Il en eſt donc des chutes rectilignes comme des mouvemens dans les orbes elliptiques, & la hauteur totale dans le premier cas, répond à l'axe tranſverſal dans l'autre, ce qu'il eſt aiſé de voir en conſidérant la hauteur *A C* comme la derniere ellipſe qu'on peut décrire ſur elle, & c'eſt ainſi que M. *Newton* l'a conſidérée dans la Section 7^e^. de ſon premier Livre des Principes.

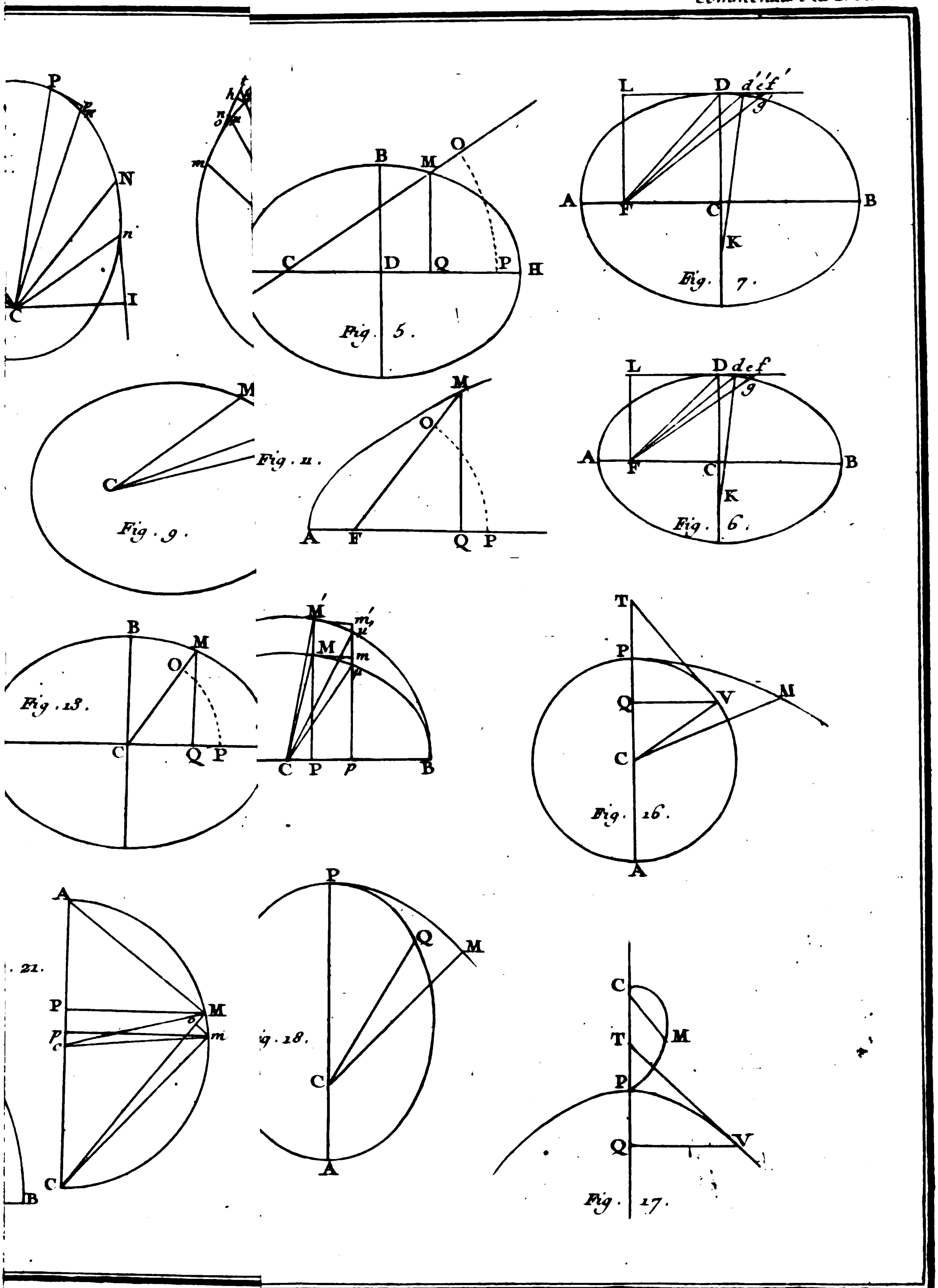


Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 6.
Fig. 13.
Fig. 16.
21.
g. 18.
Fig. 17.

# SECTION II.

## *DE L'ATTRACTION DES CORPS en ayant égard à leurs figures.*

### PREMIERE PARTIE.

*De l'attraction des Corps sphériques.*

I.

### PROPOSITION I. PROBLÉME I.

*Trouver l'attraction de la surface sphérique dont le diamétre seroit* A B *sur un corpuscule* P *placé sur le prolongement de ce diamétre, en supposant que toutes les parties de cette surface sphérique attirent comme une puissance quelconque* n *de la distance.*

On imaginera la surface sphérique $ACB$ composée d'une infinité de petits cones tronqués produits par la révolution des élémens $IHQq$ autour de l'axe $AB$, & on commencera par chercher l'attraction de toutes les petites zones ou surfaces coniques $HI$. Fig. 1.

Ayant donc fait les lignes $PI = z$. $PS = f$. $AS = g$. $SE = u$. je commence par chercher la valeur du cosinus de l'angle $IPQ$ pour le rayon 1. elle est $\frac{PE}{PS} = \frac{z^2 + f^2 - g^2}{2zf}$, & le sinus du même angle pour le rayon $PI$ est $PQ = \frac{z^2 + f^2 - g^2}{2f}$, donc $dPQ = Qq = \frac{zdz}{f}$.

La valeur de la petite zone ſphérique $HI$ eſt $HI \times IQ$, ou $Qq \times AS = \frac{gzdz}{f}$; donc l'expreſſion de l'attraction de la petite zone $HI$ ſur le corpuſcule $P$, laquelle eſt en général $\frac{c}{r}\left(IH \times IQ \times \overline{IP}^{n} \times Cos.\, IPQ\right)$ aura pour valeur $\frac{c}{r}\left(\frac{gzdz \times z^{n} \times \overline{zz+ff-gg}}{2zff}\right)$ qui ſe réduit à $\frac{c}{r}\left(\frac{gz^{n+2}dz + g(f^{2}-g^{2})z^{n}dz}{2ff}\right)$ dont l'intégrale eſt $\frac{c}{r}\left(\frac{gz^{n+3}}{2(n+3)ff} + \frac{g(ff-gg)z^{n+1}}{2(n+1)ff}\right)$: pour la completter je fais enſorte qu'elle s'évanouiſſe lorſque $z$ ou $PI$ devient $IA = f - g$. J'ai alors $\frac{cg}{2rf^{2}}\left(\frac{1}{n+3}\left(z^{n+3} - \overline{f-g}^{n+3}\right) + \frac{f^{2}-g^{2}}{n+1}\left(z^{n+1} - \overline{f-g}^{n+1}\right)\right)$ qui eſt l'attraction de la zone $AI$. je fais enſuite $PI$ ou $z = f+g$, & il vient par ce moyen $\frac{2rf^{2}}{cg}\left(\frac{1}{n+3}\left(\overline{f+g}^{n+3} - \overline{f-g}^{n+3}\right) + \frac{f^{2}-g^{2}}{n+1}\left(\overline{f+g}^{n+1} - \overline{f-g}^{n+1}\right)\right)$ pour l'attraction de la ſurface ſphérique totale.

## II.

## PROPOSITION II. PROBLEME II.

*Trouver l'attraction de la ſphere ſolide entiere* ACBD *ſur le corpuſcule* P *placé dans le prolongement de ſon axe.*

Fig. 2. Je fais comme dans la Propoſition précédente les lignes $PI = z$. $PS = f$. $AS = g$. Puiſqu'on vient de voir dans cette Propoſition, que la ſurface ſphérique $ACB$ attire le corpuſcule $P$ avec une

une force exprimée par $\frac{cg}{2rff}\left(\frac{1}{n+3}\left(\overline{f+g}^{\,n+3}-\overline{f-g}^{\,n+3}\right)\right.$ $\left.+\frac{f^2-g^2}{n+1}\left(\overline{f+g}^{\,n+1}-\overline{f-g}^{\,n+1}\right)\right)$ il est clair qu'en multipliant cette expression par la petite épaisseur $Aa=dg$, on aura l'expression de l'attraction que le petit orbe $abcd\,ABCD$ exerce sur le même corpuscule $P$, & en intégrant, on aura l'attraction cherchée de la sphére solide. *ABCD. C. Q. F. T.*

III.

## PROPOSITION III. PROBLÉME III.

*Trouver l'attraction de la surface sphérique entiere* ACB *sur le corpuscule P, en supposant que toutes ses parties l'attirent par une force qui agisse en raison inverse du quarré de la distance.*

On aura dans ce cas $n=-2$; reprenant donc l'expression générale de l'attraction de cette surface sphérique laquelle a été trouvée dans l'Article premier, & mettant pour $n$ sa valeur $-2$ dans la présente supposition, on aura $\frac{cg}{2rff}\left(2g-\overline{ff-gg}\times\frac{-2g}{ff-gg}\right)$ ou en réduisant $\frac{cg}{2rf^2}\times 4g=\frac{2cg^2}{rff}$, qui exprime l'attraction de la surface sphérique lorsque $n=-2$. *C. Q. F. T.* Fig. 1.

IV.

## *COROLLAIRE I.*

Pour avoir l'attraction de l'orbe $abcd\,ABCD$ dans cette hypothêse, il suffira de multiplier cette expression $\frac{2cg^2}{rff}$ par $dg=Aa$, & en intégrant cette expression de l'attraction du petit orbe, on aura $\frac{2cg^3}{3rff}$ pour l'expression de l'attraction de la sphére solide entiere $ABCD$, dans cette même hypothêse de Fig. 2.

$n = -2$ & comme $\frac{2cg^3}{3r}$ eſt l'expreſſion de la ſolidité de la ſphére, on voit que dans cette hypothèſe l'attraction eſt comme la maſſe diviſée par le quarré de la diſtance de ſon centre au corpuſcule attiré.

## V.

### *COROLLAIRE II.*

Dans cette hypothèſe de l'attraction réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance, deux ſphéres s'attirent de même que ſi leurs maſſes étoient réunies à leur centre.

Fig. 3. Pour le prouver, ſuppoſons d'abord qu'au centre *A* il y ait un corpuſcule de même maſſe que la ſphére *A* elle-même, on a vu (Article précédent) que la ſphére *B* exercera ſur ce corpuſcule *A* la même attraction que ſi elle étoit elle-même toute réunie à ſon centre *B*; mais on doit voir auſſi, par la même raiſon, qu'elle ſera attirée par le corpuſcule *A* de la même maniere, ſoit qu'elle ſoit toute réunie à ſon centre *B*, ſoit qu'elle ait conſervée ſa forme réelle.

De plus, (même Article) la ſphére entiere *A* attire toutes les particules *M* de la ſphére *B* de la même maniere, que ſi elle étoit toute réunie à ſon centre *A*; donc il eſt indifférent pour l'attraction de deux ſphéres l'une vers l'autre dans l'hypothèſe de la raiſon inverſe des quarrés des diſtances, qu'elles gardent leur forme ou qu'elles ſoient ſuppoſées réunies à leur centre, pourvû qu'elles conſervent la même maſſe.

## VI.

### *SCHOLIE.*

On voit par l'expreſſion de l'attraction de la ſphére ſolide totale, que dans l'hypothèſe en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, il en eſt des ſphéres entieres comme de leurs plus petites parties, & qu'elles attirent de même que ces parties en raiſon de la maſſe diviſée par le quarré de la diſtance.

## VII.

## PROPOSITION IV. PROBLÉME IV.

*Trouver l'attraction de la surface sphérique entiere* ABCD *sur le corpuscule* P, *en supposant que toutes les parties de la sphére attirent ce corpuscule par une force qui agisse en raison de la simple distance.*

On aura dans ce cas $n = 1$, reprenant donc l'expression trouvée (Art. 1.) & en y mettant pour $n$ sa valeur 1 dans l'hypothèse présente, on aura $\frac{cg}{2rff}\left(\frac{1}{4}(8f^3g+8fg^3)+\frac{f^2-g^2}{2}(4fg)\right)$ qui se réduit à $\frac{cg}{2rf^2}\times 4f^3g = \frac{2cg^2f}{r}$, valeur de l'attraction de la surface sphérique $ACB$ lorsque $n = 1$.

## VIII.

## *COROLLAIRE I.*

Pour avoir l'attraction de l'orbe $abcd\,ABCD$ dans cette hypothèse, il faut multiplier comme dans l'Art. 4. l'expression $\frac{2cfg^2}{r}$ par $dg$, & l'expression de l'attraction de cet orbe sera $\frac{2cfg^2dg}{r}$, & en intégrant on aura $\frac{2cg^3f}{3r}$ qui exprime l'attraction de la sphére solide entiere dans cette hypothèse.

## IX.

## *COROLLAIRE II.*

Et comme cette expression n'est autre chose que le produit de la masse par la distance, l'on voit que dans l'hypothèse de la simple distance comme dans celle de la raison inverse du quarré de la distance, la sphére totale attire suivant la même loi que les particules qui la composent.

## X.

### COROLLAIRE III.

Dans cette même loi de l'attraction proportionnelle à la diſtance, les corps de figure quelconque ont les mêmes propriétés que les ſphéres, d'attirer ſuivant leur force totale, ſuivant la même loi que leurs particules.

Fig. 4. Pour la démontrer, ſoit tiré par $C$ où l'on ſuppoſe le corpuſcule attiré, une droite $CBP$ qui paſſe par le centre de gravité du corps attirant $X$, & ſoit décompoſée l'attraction de chaque particule $M$ dans le ſens de cette ligne $CP$, il eſt clair que l'attraction de la particule $M$ étant comme $CM$, la partie, ſuivant $CBP$, ſera $CP$; donc le produit de toutes les particules $M$ du ſolide propoſé par les diſtances $CP$ ſont l'attraction totale : mais il eſt clair par les principes de la Statique, que la ſomme de ces produits eſt égale au produit de la maſſe totale par la diſtance au centre de gravité, & quant aux forces qui agiroient dans le ſens $PM$, on verroit aiſément qu'elles ſe détruiſent réciproquement; donc l'attraction d'un corps de figure quelconque dans l'hypothèſe qu'on vient d'examiner eſt comme la diſtance du corpuſcule au centre de gravité.

## X I.

### PROPOSITION V. PROBLÉME V.

*Trouver l'attraction de la ſurface ſphérique* ABC *ſur le corpuſcule* P, *en ſuppoſant que toutes les parties de cette ſphère l'attirent par une force qui agiſſe en raiſon renverſée de la quatrième puiſſance.*

Fig. 1. Alors $n = -4$. Reprenant donc l'expreſſion générale de l'Article 1. & ſubſtituant à $n$ ſa valeur $-4$, elle deviendra

$$\frac{cg}{2rff}\left(\frac{-1}{+1}\left(\overline{f+g}^{\,-1} - \overline{f-g}^{\,-1}\right) + \frac{ff-gg}{-3}\left(\overline{f+g}^{\,-3} - \overline{f-g}^{\,-3}\right)\right)$$

qui ſe réduit à $\frac{cg}{2rff}$

—

$\left( \frac{2g}{f^2 - g^2} - \frac{1}{3} \frac{\overline{f-g}^3 - \overline{f+g}^3}{(ff - gg)^2} \right)$ ou $\frac{c}{3rf^2}$ $\times \frac{6f^2g^2 - 2cg^4}{(f^2 - g^2)^2}$ qui exprime l'attraction de la petite surface infiniment mince *ABCD* lorsque $n = -4$.

## XII.

### *COROLLAIRE.*

Pour avoir l'attraction de l'orbe *ABCD abcd* il faut multiplier cette expression par la petite épaisseur *Aa* ou *dg*, ainsi on aura $\frac{6f^2g^2dg - 2g^4dg}{(f^2 - g^2)^2} \times \frac{c}{3rf^2}$, dont l'intégrale $\frac{c}{3rf^2}$ $\left(\frac{2g^3}{f^2 - g^2}\right)$ est l'expression de l'attraction de la sphére entiere solide *ABDS* sur le corpuscule *P* dans cette hypothèse de $n = -4$.

## XIII.

### PROPOSITION VI. PROBLÉME VI.

*Trouver l'attraction d'une surface sphérique* AI *sur un corpuscule placé en* P *dans l'intérieur de cette surface, en supposant que toutes les parties de cette surface agissent comme une puissance quelconque* n *de la distance.*

Je fais les lignes $AP = g$. $PS = f$. $PI = z$. $SE = v$. & j'ai par conséquent $PE = \sqrt{f^2 - v^2}$, & $IP + PE = z + \sqrt{f^2 - v^2}$, d'un autre côté $IP + PE$ ou $IE$ doit avoir pour valeur $\sqrt{gg - vv}$; on a donc l'équation $zz + 2z\sqrt{f^2 - v^2} + f^2 - v^2 = g^2 - v^2$ de laquelle on tire $\frac{g^2 - z^2 - f^2}{2z} = \sqrt{ff - vv}$, & partant $\frac{PE}{PS}$ ou le cosinus de l'angle $IPQ$ sera $= \frac{g^2 - z^2 - f^2}{2zf}$; Fig. 5.

mais par l'Art. ▓ l'attraction de la petite portion de surface sphérique produite par la révolution de $IH$, a pour valeur $\frac{c}{r}(IH \times IQ \times IP^n \times Cos.$ de $IPQ)$ ; donc à cause que $IH \times IQ = AS \times Qq = \frac{gzdz}{f}$ on aura $\frac{c}{r} z^n \times \frac{gzdz}{f}$ $\left(\frac{g^2 - f^2 - z^2}{2fz}\right)$ ou $\frac{cg}{2rf^2}\left(\left(g^2 - f^2\right) z^n dz - z^{n+2} dz\right)$ ce qui sera l'expression de l'attraction de la petite tranche $IH$ de surface sphérique laquelle attirera le corps vers $B$, tant que $IP$ fera un angle aigu avec $AP$.

En intégrant cette différentielle on aura $\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{\left(g^2 - f^2\right) z^{n+1}}{n+1} - \frac{z^{n+3}}{n+3}\right)$, laquelle étant complettée par cette condition que tout se détruit quand $z$ ou $PI = PA$ ou $g - f$, donne pour expression de l'attraction de la zone $AI$, $\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{\left(g^2 - f^2\right) z^{n+1}}{n+1} - \frac{z^{n+3}}{n+3} - \frac{\left(g^2 - f^2\right) \times (g-f)^{n+1}}{n+1} + \frac{(g-f)^{n+3}}{n+3}\right)$.

Afin d'avoir ensuite l'attraction de toute la surface sphérique $AIBA$, il faut faire dans la valeur précédente $z = g + f$, & alors elle deviendra $\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{g^2 - f^2}{n+1} \times \left(\overline{g+f}^{\,n+1} - \overline{g-f}^{\,n+1}\right) + \overline{g-f}^{\,n+3} - \overline{g+f}^{\,n+3}\right)$, qui exprimera l'attraction de toute la surface sphérique $AIBA$ sur le corpuscule placé en $P$. *C. Q. F. T.*

## XIV.

### *SCHOLIE.*

Dans les cas où cette valeur sera positive, l'attraction se fera vers $A$ & au contraire.

## X V.

## PROPOSITION VII. PROBLEME VII.

*Trouver l'attraction de la même surface sphérique, en supposant* $n = -2$.

Conservant les dénominations de la Proposition précédente, & substituant dans l'expression qu'on y a trouvée à la place de $n$ sa valeur $-2$, on verra que tous les termes disparoissent, & que par conséquent dans cette loi d'attraction un corps placé dans l'intérieur d'une sphére creuse n'éprouveroit aucune attraction.

## X V I.

## PROPOSITION VIII. PROBLÉME VIII.

*Trouver l'attraction de la surface sphérique* AIBA, *en supposant* $n = 1$.

Gardant les mêmes dénominations que ci-dessus, on aura dans cette hypothèse $\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{\overline{g-f}^4 - \overline{g+f}^4}{4} - \frac{g^2-f^2}{2}\left(\overline{f+g}^2 - \overline{f-g}^2\right)\right)$ qui se réduit à $\frac{cg}{2rf^2} \times -4f^3g$ ou $-\frac{2cfg^2}{r}$ pour l'attraction de la surface $AI$, laquelle tirera le corps vers $S$ puisque l'expression est négative. Fig. 5.

## X V I I.

## *COROLLAIRE.*

Multipliant cette quantité par $dg$, on aura $-\frac{2cfg^2dg}{r}$ Fig. 6. pour l'attraction de l'orbe infiniment mince $AIi$ sur le corpuscule $P$ vers $S$, & son intégrale $\frac{2cfg^3}{3r}$ exprimera l'attraction de l'orbe *API* fur *P*, pourvu qu'on retranche le terme $\frac{2cf^4}{3r}$ que devient cette quantité lorfque $f=g$.

Donc alors $\frac{2cfg^3-2cf^4}{3r}$ fera l'attraction de l'orbe *API* fur *P* vers *S*; mais l'attraction de la fphére *PS* fur le même corpufcule *P* laquelle fe feroit auffi vers *S*, feroit $\frac{2cf^4}{3r}$ (felon l'Art. 9.) lorfque $f=g$, donc $\frac{2cfg^3}{3r}$ exprime l'attraction de la fphére pleine entiere *AI* fur le corpufcule *P* placé au dedans d'elle, cette attraction fe faifant toujours vers *S* & en raifon directe de la diftance. *C. Q. F. T.*

## XVIII.

## PROPOSITION IX. PROBLÉME IX.

*Trouver l'attraction qu'exerce vers* A *la furface fphérique* AIa *fur le corpufcule placé dans l'intérieur de cette fphère, en fuppofant* $n=-4$.

Fig. 5. Confervant toujours les mêmes dénominations & reprenant la formule générale, (Art. 1.) & y fubftituant — 4 pour $n$, on aura

$$\frac{cg}{2rf^2}\left(\frac{g^2-f^2}{-3(f+g)^3}-\frac{g^2-f^2}{3(f-g)^3}+\frac{\frac{1}{g-f}-\frac{1}{g+f}}{-1}\right)$$

qui fe réduit à $\frac{cg}{2rf^2}\times\frac{8f^3}{3(g^2-f^2)^2}$ ou $\frac{4cgf}{3r(g^2-f^2)^2}$ pour l'attraction cherchée de la furface fphérique *AIA*, dont la direction fera vers *A*.

## XIX.

## *COROLLAIRE I.*

Fig. 6. Multipliant cette derniere quantité par $dg$, on aura $\frac{4cfgdg}{3r(g^2-f^2)^2}$ pour

pour l'attraction de l'orbe infiniment mince *AIai* sur le corps *P* vers *A*, & en intégrant cette quantité, on aura $\frac{-2cf}{3r(g^2-f^2)}$ qui exprime l'attraction d'un orbe fini lorsqu'on aura ajouté à cette quantité la constante relative à l'épaisseur de cet orbe.

Supposant que cette constante soit *A* lorsque l'orbe au lieu d'être terminé à la surface *AI* dont le rayon est *g*, l'est à la surface *BL* dont le rayon est *h*, on aura alors $\frac{-2cf}{3r(h^2-f^2)}$ $= A$ : retranchant cette expression de celle-ci $\frac{-2cf}{3r(g^2-f^2)} + A$, on aura le reste $\frac{2cf}{3r(g^2-f^2)} - \frac{2cf}{3r(h^2-f^2)}$ pour l'attraction de l'orbe fini *BLAI* sur le corpuscule *P* vers *B*.

## XX.

### *COROLLAIRE II.*

Si on faisoit $g = f$ alors l'intégrale deviendroit $\frac{2cf}{3r(o)}$ $\frac{-2cf}{3r(h^2-f^2)} = \infty$, ce qui apprend que dans une sphére creuse le corpuscule qui seroit adhérent à la surface intérieure de la croute solide de cette sphére éprouveroit une attraction infinie dans cette supposition de $n = -4$.

## XXI.

### *COROLLAIRE III.*

Pour avoir l'attraction qu'un corpuscule *P* placé au-dedans d'une sphére *AI* éprouve de la part de cette sphére, il faut prendre la différence de l'attraction de l'orbe *API* vers *A* sur le corpuscule, & de la sphére *PQ* vers *S* sur le même corpuscule; mais comme ces deux attractions sont infinies, l'attraction cherchée se trouveroit dépendre de deux infinis; recherche qui Fig. 8.

demande beaucoup de circonſpection pour ne s'y pas tromper. Je vais donner le moyen de la déterminer.

On voit d'abord par le raiſonnement ſuivant que cette différence de deux quantités infinies ne peut dans ce cas être que finie.

Fig. 9. Soit imaginée la ſphére $AV$ au dedans de la ſphére $AI$, & que cette ſphére $AV$ ait le corpuſcule $P$ placé à ſon centre, & $AP$ pour rayon, il eſt clair que toute la matiere compriſe dans cette ſphére intérieure, n'exerce aucune attraction ſur le corpuſcule placé en $P$ ; donc la matiere compriſe dans le ſolide concavo-convexe $AIBLOD$ eſt la ſeule partie de la ſphére propoſée qui attire : mais toutes les parties de ce ſolide étant à des diſtances finies du corpuſcule $P$, leur force totale ſur lui ne peut être que finie.

Pour trouver enſuite l'expreſſion du ſolide concavo-convexe $AIBLOD$ ſur le corpuſcule placé en $P$ centre de $AoD$, on ſuppoſera ce ſolide partagé en une infinité de tranches $IVLlui$ par des ſphéres qui ont toutes $P$ pour centre, & on cherchera l'attraction qu'exercent tous ces orbes ſur le corpuſcule $P$.

Dans cette recherche il faudra commencer par trouver l'attraction qu'une calotte $IVL$ exerce ſur un corpuſcule placé à ſon centre.

Fig. 10. Pour cela, ayant fait le rayon $HP$ de cette calotte $= a$, l'abciſſe $PQ$ qui répond au point $I = x$, on aura $Iz = \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$ & le petit anneau produit par la révolution de $Iz$, lequel eſt l'élément de la calotte propoſée, ſera $\frac{c}{r}\sqrt{aa-xx} \times \frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$ $= \frac{cadx}{r}$, multipliant ce petit anneau par $\frac{1}{a^4}$ qui exprime l'attraction réciproquement proportionnelle à la quatriéme puiſſance de la diſtance $IP$ des particules $Iz$ au corpuſcule placé en $P$, & décompoſant enſuite cette force de $IP$ ſuivant $PQ$, c'eſt-à-dire

la multipliant par $\frac{PQ}{IP}$ ou $\frac{x}{a}$, on aura $\frac{cxdx}{ra^4}$ pour l'attraction de l'anneau ſur $P$, donc en intégrant on aura $\frac{cx^2}{2ra^4}$ pour l'attraction de l'anneau $IF$; donc celle de la calotte $HI$ ſera $\frac{c}{2r}$ $\left(\frac{aa-xx}{a^4}\right)$ c'eſt-à-dire $\frac{c}{2r}$ $\left(\frac{QI^2}{PI^4}\right)$ ou $\frac{c}{2r}$ $\frac{(Sin.\, QPI)^2}{PI^2}$ laquelle tireroit vers $H$.

Celle de la calotte $VI$ ſera la même & tirera de l'autre ſens, puiſque les deux attractions jointes enſemble doivent ſe détruire, une ſurface ſphérique entiere n'exerçant point d'attraction ſur le corpuſcule placé à ſon centre.

Par ce moyen $\int \frac{c}{2r}$ $\frac{(Sin.\, QPI)^2\, Vu}{PI^2}$ ſera la valeur de l'attraction du ſolide cherché.

Pour exécuter les opérations qu'indique cette expreſſion, faiſons comme dans l'Article 1. $PI = z$. $AS = g$. $SP = f$. on aura comme dans cet Article, $Cos.\, IPQ = \frac{g^2-f^2-z^2}{2zf}$, & pour le quarré du ſinus du même angle $\left(1-\left(\frac{g^2-f^2-z^2}{2zf}\right)^2\right)$ qu'il faut ſubſtituer dans la formule précédente. Fig. 9.

Ainſi on aura à intégrer $\frac{cdz}{2rzz}$ $\left(\frac{(2gg+2ff)z^2-z^4-(g^2-f^2)^2}{4z^2f^2}\right)$, c'eſt-à-dire $\frac{c}{8f^2r}\left(\frac{2gg+2ff}{zz}dz-\frac{(gg-ff)^2}{z^4}dz-dz\right)$: l'intégration faite il vient $\frac{c}{8rf^2}\left(-\frac{2gg+2ff}{z}+\frac{(gg-ff)^2}{3z^3}-z\right)$ à une conſtante près qu'il faut déterminer par cette condition que $z$ devenant $AP$ ou $g-f$ tout ſe détruiſe.

Par ce moyen l'intégrale complette cherchée ſera $\frac{c}{8f^2r}$

$$\left(-\frac{2gg+2ff}{z}+\frac{(g^2-f^2)^2}{3z^3}-z+\frac{2ff+2gg}{g-f}-\frac{(gg-ff)^2}{3(g-f)^3}+g-f\right)$$

qui ſe réduit à $\frac{c}{8f^2r}\left(-\frac{2ff+2gg}{z}+\frac{(g^2-f^2)^2}{3z^3}-z+\frac{8gg+8ff-8fg}{3(g-f)}\right)$ & c'eſt-là la valeur de l'attraction du ſolide *AVIODL*.

Faiſant enſuite dans cette valeur $z = PB = f + g$, on aura $\frac{cf}{3r(g^2-f^2)}$ pour l'attraction du ſolide propoſé concavo-convexe *ABILO* ſur *P*, ou, ce qui revient au même, pour celle de la ſphére entiere *AIBA* ſur le même corpuſcule.

# SECTION II.

## SECONDE PARTIE.

### *De l'attraction des Corps de figure quelconque.*

### XXII.

### PROPOSITION X. PROBLÉME X.

*Trouver l'attraction d'un cercle ſur un corps qui répond perpendiculairement à ſon centre.*

Fig. 11. Soit le cercle *MBO*, il faut commencer à trouver l'attraction d'une particule quelconque *M* de ce cercle ſur le corps *A*.

Suppoſant donc que la particule *M* attire le corps *A* ſuivant une puiſſance *n* de la diſtance, ſon attraction ſuivant la direction *AM* ſera proportionnelle à $AM^n$; mais l'attraction ſuivant la direction *AM* ſe décompoſe ſuivant les directions *MP* & *AP*, celle ſelon *MP* n'eſt pas à compter, parce qu'elle eſt détruite par l'attraction de la particule qui tireroit dans la direction oppoſée *OP*. On ne compte donc que l'attraction ſuivant *AP* qui ſera $\frac{AP}{AM} \times AM^n = AP \times AM^{n-1}$.

Pour

Pour mettre cette expression en valeurs analytiques, soit fait $AP = a$. $PM = x$. $AM = \sqrt{a^2 + x^2}$. $Mm = dx$, la valeur de la circonférence $Mo$ dont le rayon est $x$ sera $\frac{cx}{r}$, donc l'attraction $AP \times AM^{n-1}$ de la particule $M$ sera $a(aa+xx)^{\frac{n-1}{2}}$ donc celle de la circonférence entiere $Mo$ sur le corpuscule $A$, suivant $AP$ sera $\frac{acx}{r} \times (aa+xx)^{\frac{n-1}{2}}$; car toutes les particules qui composent cette circonférence agissent de la même maniere sur le corpuscule $A$, puisqu'il répond perpendiculairement à son centre, & qu'elles sont par conséquent toutes placées de même par rapport à ce corpuscule. Donc l'attraction de la petite couronne $AmoD$ sera $\frac{acxdx}{r} \times (a^2+x^2)^{\frac{n-1}{2}}$, & $\frac{ac}{r} \times \frac{(aa+xx)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}$ sera l'attraction du cercle entier $MBO$ sur le corpuscule $A$, lorsqu'on aura ajouté la constante convenable, on trouvera ce qu'est cette constante en faisant $x = o$, car alors comme le cercle sera nul, son attraction devra être nulle aussi.

Or, lorsque $x = o$ la quantité $\frac{ac}{r} \times \frac{(aa+xx)^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}$ devient $\frac{ac}{r}(a^2)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{ca^{n+2}}{r(n+1)}$, donc $\frac{ac}{r(n+1)}(aa+xx)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{ca^{n+2}}{r(n+1)}$ ou $\frac{c}{r(n+1)}(AP \times AM^{n+1} - AP^{n+2})$ sera l'attraction du cercle $BMO$ sur le corpuscule $A$ dans la direction $AP$. *C. Q. F. T.*

## XXIII.

### *COROLLAIRE.*

Si l'attraction se faisoit en raison renversée de la distance, c'est-à-dire si on avoit $n = -1$, l'intégration précédente ne donneroit rien, & la valeur cherchée ou l'attraction du cercle dépendroit des logarithmes. On la trouveroit ainsi.

La différentielle $\frac{acxdx}{r} \times (aa+xx)^{\frac{n-1}{2}}$ feroit $\frac{acxdx}{r(aa+xx)}$ dont l'intégrale est $\frac{ac}{2r} L(aa+xx)$, laquelle devient $\frac{ac}{2r} L(a^2)$ ou $\frac{ac}{r} La$ lorsque $x = o$; donc cette intégrale complette sera $\frac{ac}{2r} L(aa+xx) - \frac{ac}{r} La$, ou $\frac{c}{r} AP \times l\, AM - \frac{c}{r} AP \times l\, AP$, qui est par conséquent l'attraction du cercle $BMO$ dans cette hypothèse.

## XXIV.

## PROPOSITION XI. PROBLEME XI.

*Trouver l'attraction du solide produit par la révolution de la courbe quelconque* BM *autour de son axe* BP, *sur le corpuscule* A *placé sur cet axe.*

Fig. 12. Je commence par faire les lignes $AB = a$. $BP = x$. $PM = y$. $AM = \sqrt{(a+x)^2 + y^2}$. $Pp = dx$. L'attraction du cercle dont $PM$ est le rayon, est, selon la formule de l'Art. 22. $\frac{c}{r(n+1)}$ $(AP \times AM^{n+1} - AP^{n+1})$; donc dans les dénominations présentes l'attraction du cercle dont le rayon est $PM$ sera $\frac{c}{r(n+1)} \left(\overline{a+x} \times \overline{\overline{a+x}^2 + y^2}^{\frac{n+1}{2}} - \overline{a+x}^{n+1}\right)$; donc l'attraction du petit cilindre $MmPp$ sera $\frac{c}{r(n+1)} \left(\overline{a+x} \times dx \times \overline{\overline{a+x}^2 + y^2}^{\frac{n+1}{2}} - \overline{a+x}^{n+1} \times dx\right)$, dont l'intégrale est l'attraction du solide $PBM$, produit par la révolution de $BM$ autour de l'axe $PB$.

Ainsi lorsque $y$ sera donnée en $x$ par l'équation de la courbe proposée, on la substituera dans cette valeur qui étant alors toute en $x$ & en constantes s'intégrera par les méthodes ordinaires, ou se réduira aux quadratures.

## XXV.

### COROLLAIRE.

Dans le cas où $n = -1$, l'attraction du cercle $BMO$ étant (Article 23.) $\frac{c}{r} AP \times l\,AM - \frac{c}{r} AP \times l\,AP$, on aura, en employant les dénominations de cette Proposition

$$\frac{c}{r}\left(\overline{a+x} \times dx\, L\sqrt{\overline{a+x}^2 + yy} - \overline{a+x} \times dx \times L\,\overline{a+x}.\right)$$

celle du solide entier $MBH$ dans la même hypothèse sera

$$\int \frac{c}{r}\left(\overline{a+x} \times dx \times L\sqrt{\overline{a+x}^2 + yy} - \overline{a+x} \times dx \times L\,\overline{a+x}.\right)$$

## XXVI.

### PROPOSITION XII. PROBLÈME XII.

*Trouver l'attraction qu'un cylindre* OKMN *exerce sur un corpuscule placé en* A *dans son axe de révolution* ABP.

Je fais les lignes $PM = b$. $AB = a$. $BP = x$. $AM = \sqrt{(a+x)^2 + bb}$. $AO = \sqrt{aa + bb}$, & alors l'expression de l'Article 24. c'est-à-dire, l'attraction du petit cylindre deviendra dans les dénominations présentes $\frac{c}{r(n+1)}\left(\overline{a+x} \times dx \times \overline{\overline{a+x}^2 + bb}^{\frac{n+1}{2}} - \overline{a+x}^{n+2} \times dx\right)$, dont l'intégrale est Fig. 13.

$$\frac{c}{r(n+1)}\left(\frac{\left(\overline{a+x}^2 + bb\right)^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} - \frac{\overline{a+x}^{n+3}}{n+3}\right),$$ pour com-

pletter cette intégrale je fais $x = o$, & j'ai alors $\frac{c}{r(n+1)}$ $\left(\frac{\overline{aa+bb}^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} - \frac{a^{n+3}}{n+3}\right)$ : donc $\frac{c}{r(n+1)}\left(\frac{\left(\overline{a+x}^{2}+bb\right)^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}\right.$ $\left. - \frac{\overline{aa+bb}^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} + \frac{a^{n+3}}{n+3}\right)$ ou $\frac{c}{r(n+1)}\left(\frac{1}{n+3}\left(AM^{n+3}\right.\right.$ $\left.\left. - AP^{n+3} - AO^{n+3} + AB^{n+3}\right)\right)$ sera l'attraction du cilindre $OKMN$ sur le corpuscule $A$ placé à la distance donnée de ce cilindre. *C. Q. F. T.*

## XXVII.

## PROPOSITION XIII. PROBLÉME XIII.

*Trouver l'attraction du cilindre* OKMN *sur le corpuscule* A, *en supposant* $n = -1$.

Fig. 13. Pour avoir dans ce cas l'attraction du cilindre il faut intégrer $\frac{c}{r}\left(\overline{a+x}\,dx \times L\sqrt{\overline{a+x}^{2}+bb}\right) - \frac{c}{r}\left(\overline{a+x}\,dx\,L\,\overline{a+x}\right)$ qui est ce que devient l'expression générale trouvée, (Art. 25.) lorsque $n = -1$ comme dans cette supposition, & que $y = b$ par la nature du cilindre.

Pour intégrer la premiere partie je fais $\sqrt{\overline{a+x}^{2}+bb} = z$, ce qui donne $\overline{a+x}\,dx = z\,dz$, & transforme par conséquent $\left(\overline{a+x} \times dx \times L\sqrt{\overline{a+x}^{2}+bb}\right)$ en $z\,dz \times Lz$ dont l'intégrale est $\frac{1}{2}zzLz - \int\frac{1}{2}zz\,dLz$ ou $\frac{1}{2}zzLz - \frac{1}{4}zz$ : donc en remettant $AM$ pour $z$ qu'il représente, l'intégrale de la premiere partie $\frac{c}{r}\left(\overline{a+x} \times dx \times L\sqrt{\overline{a+x}^{2}+bb}\right)$ de la la quantité à intégrer sera $\frac{c}{2r} AM^2 \times l\, AM - \frac{c}{4r} AM^2$ à une constante près qu'on déterminera ensuite.

L'intégrale de la seconde partie $\overline{a+x} \times dx \times L\, \overline{a+x}$ sera $\frac{1}{2}\overline{a+x}^2\, L\, \overline{a+x} - \int \frac{1}{2}\overline{a+x}\, dx$, ou $\frac{1}{2}\overline{a+x}^2\, L\, \overline{a+x} - \frac{1}{2}\overline{a+x}^2$ ou en remettant les valeurs en lignes $\frac{1}{2} AP^2\, l\, AP - \frac{1}{2} AP^2$.

Donc l'intégrale totale sera $\frac{c}{2r} AM^2 \times l\, AM - \frac{c}{4r} AM^2 - \frac{c}{2r} AP^2 \times l\, AP + \frac{c}{4r} AP^2$ ou $\frac{c}{2r}\left(AM^2 \times l\, AM - AP^2 \times l\, AP - \frac{1}{2} BO^2\right)$, & on la complettera en faisant ensorte que tout se détruise lorsque $x$ est égal à zéro.

L'intégrale complette sera ainsi $\frac{c}{2r}\left(AM^2 \times l\, AM - AP^2 \times l\, AP - AO^2 \times l\, AO + BA^2 \times l\, AB - \frac{1}{2} BO^2\right)$ qui est l'expression de l'attraction totale du cylindre *OKMN* sur le corpuscule *A* dans la supposition de $n = -1$. *C. Q. F. T.*

## XXVIII.

## PROPOSITION XIV. PROBLÊME XIV.

*Trouver l'attraction du cylindre* OKMN *sur le corpuscule* A, *en supposant* $n = -3$.

Dans cette supposition de la valeur de $n$, l'intégration faite dans l'Art. 26. ne sçauroit avoir lieu, & il faut reprendre alors la différentielle $\frac{c}{r(n+1)}\left(\overline{a+x}\, dx \times \left(\overline{a+x}^2 + b^2\right)^{\frac{n+1}{2}} - \overline{a+x}^{n+2} \times dx\right)$ de l'attraction cherchée, qui devient Fig. 131.

dans ce cas $-\frac{c}{2r}\left(\frac{\overline{a+x}\,dx}{\overline{a+x}^2+b^2}-\frac{dx}{a+x}\right)$ ou $\frac{c}{2r}\left(\frac{dx}{a+x}\right.$ $\left.-\frac{\overline{a+x}\,dx}{\overline{a+x}^2+bb}\right)$, dont l'intégrale est $\frac{c}{2r}\left(Log.\,\overline{a+x}-Log.\right.$ $\left.\left(\overline{a+x}^2+bb\right)\right)$, ou $\frac{c}{2r}(l\,AP-l\,AM)$ laquelle étant complettée donne $\frac{c}{2r}(l\,AP-l\,AM-l\,AB+l\,AO)$ ou $\frac{c}{2r}\left(l\,\frac{AO\times AP}{AB\times AM}\right)$ pour l'attraction cherchée dans la présente hypothése.

## XXIX.

## PROPOSITION XV. PROBLÉME XV.

*Supposant que la particule* M *attire en raison inverse du quarré de la distance, trouver l'attraction du cylindre* OKMN *sur le corpuscule* A *placé sur le prolongement de son axe.*

Fig. 13. Dans cette supposition de $n=-2$ la quantité $\frac{c}{r(n+1)}$ $\left(\frac{1}{n+3}AM^{n+3}-\frac{AP^{n+3}}{n+3}-\frac{AO^{n+3}}{n+3}+\frac{AB^{n+3}}{n+3}\right)$ qui est l'expression générale de l'attraction du cylindre $BPM$, devient $-\frac{c}{r}(AM-AP-AO+AB)$ ou $\frac{c}{r}(BP-AM+AO)$ laquelle, en décrivant l'arc $OH$ du centre $A$ & du rayon $AO$, peut s'écrire ainsi, $-\frac{c}{r}(OM-HM)$ ou $\frac{c}{r}OL$ en décrivant l'arc $HL$ du centre $M$ & du rayon $MH$; donc $\frac{c}{r}OL$ est l'attraction du cylindre $OKMN$ sur le corpuscule $A$, en supposant que ses parties attirent en raison renversée du quarré des distances à ce corpuscule. *C. Q. F. T.*

XXX.

PROPOSITION XVI. PROBLÈME XVI.

*Supposant que l'attraction agisse dans une proportion plus grande que la raison inverse du cube des distances, & que cet excès soit marqué par l'indéterminée* m, *on demande quelle sera l'attraction du cylindre* OKMN *sur le corpuscule* A *placé sur son axe.*

On aura dans ce cas $n = -3 - m$, & l'expression générale Fig. 131

$$\frac{c}{r(n+1)(n+3)}\left(AM^{n+3} - AP^{n+3} - AO^{n+3} + AB^{n+3}\right)$$

sera $\frac{c}{mr(2+m)}\left(\frac{1}{AM^m} - \frac{1}{AP^m} - \frac{1}{AO^m} + \frac{1}{AB^m}\right)$, valeur de l'attraction du cylindre $OKMN$ dans le cas de la Proposition présente.

XXXI.

*COROLLAIRE I.*

Supposant à présent $m = 1$, on aura $n = -4$, & par conséquent l'expression générale ci-dessus devient $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AP} - \frac{1}{AO} + \frac{1}{AB}\right)$.

XXXII.

*COROLLAIRE II.*

En supposant $AP = \infty$, on aura $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} - \frac{1}{AO} + \frac{1}{AB}\right)$ ou $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{AO}\right)$, par laquelle on apprend que lorsque la distance $AB$ est très-petite, l'attraction est très-grande, & que si cette distance étoit infiniment petite, l'attraction seroit infiniment grande.

## XXXIII.

### COROLLAIRE III.

Si le cylindre eſt infini dans le ſens $BO$ & qu'on ait par conſéquent $BO = \infty$, l'attraction ſera alors exprimée par $\frac{c}{3r}$ $\left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{c}{3r} \times \frac{1}{AB}$, c'eſt-à-dire qu'elle ſera en raiſon inverſe de la diſtance.

## XXXIV.

### SCHOLIE I.

On voit par ces deux cas, que lorſque le ſolide eſt infini & la diſtance $AB$ finie, non ſeulement ſon attraction n'eſt pas infinie ſur le corpuſcule hors de lui, mais qu'elle diffère peu de ce qu'elle ſeroit dans la ſuppoſition des dimenſions finies, mais beaucoup plus grandes que la diſtance $AB$.

Pour en donner un exemple, ſuppoſons le cylindre tel que la baſe $AP = 101\ AB$, & ſa hauteur $BO = 50\ AB$; l'expreſſion générale $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{AP} - \frac{1}{AO} + \frac{1}{AB}\right)$ deviendra alors $\frac{c}{3r}\left(\frac{1}{113\,AB} - \frac{1}{101\,AB} - \frac{1}{50\,AB} + \frac{1}{AB}\right)$ dont les trois premiers termes ſe réduiſent à $-\frac{0{,}02105}{AB}$, c'eſt-à-dire, que dans ce cas l'attraction ne diffère de ce qu'elle ſeroit ſi les dimenſions étoient infinies que d'une fraction qui eſt entre $\frac{1}{47}$ & $\frac{1}{48}$.

## XXXV.

### SCHOLIE II.

Lorſque $m$ eſt poſitif & que par conſéquent $n$ eſt négatif & plus

plus grand que 3, on voit que dans le cas où le corps a des dimensions très-grandes par rapport à la distance du corpuscule, son attraction sera sensiblement la même que s'il étoit infini, & dans ce cas l'expression de son attraction pourra toujours être réduite à

$$\frac{c}{r(2+m)}\left(\frac{1}{m AB^m}\right).$$

## XXXVI.

### *SCHOLIE III.*

Si le corpuscule *A* est placé sur l'axe au dedans du cylindre en prenant $Ab = AB$, & menant le plan *OBK* paralléle aux faces *OBK*, *MPN* du cylindre, il seroit aisé de remarquer que la partie *OBKoK* du cylindre ne sçauroit exercer aucune attraction sur le corpuscule *A*, parce que les forces de toutes ses parties se détruisent mutuellement; ainsi le Problême est en ce cas le même que lorsque le corpuscule est au dehors du cylindre, à la même distance de la surface extérieure *OBK*, toute la différence c'est que le cylindre attractif qui est alors *obKMN* est plus petit; mais si les dimensions du cylindre sont infinies comme dans le cas qu'on vient de considérer, l'attraction d'un corpuscule placé au dedans ou au dehors sera précisément la même, pourvu que la distance du corpuscule à la surface extérieure soit la même. Fig. 14.

# SECTION II.

## TROISIEME PARTIE.

*De l'attraction des sphéroïdes en particulier.*

### XXXVII.

### PROPOSITION XVII. PROBLÊME XVII.

*Trouver l'attraction qu'un sphéroïde* BMO *exerce sur un corpuscule* A *placé sur son axe de révolution dans l'hypothèse que ses parties attirent en raison renversée du quarré de la distance.*

Fig. 15. Je commence par faire les lignes $AB = f$. $BC = a =$ au demi axe du sphéroïde. $PB = x$. $PM = y$. $CD = b =$ au rayon de l'équateur, on aura par la propriété de l'ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - xx}$; donc $AM = \sqrt{(f+x)^2 + yy} = \sqrt{\frac{bb}{aa}(2ax - xx) + ff + 2fx + xx}$.

Faisant à présent $n = -2$ dans la valeur $\frac{c}{r(n+1)}$ $(AP \times AM^{n+1} - AP^{n+2})$ de l'attraction du cercle $PM$ sur le corpuscule $A$ trouvée (Article 22.) lorsque l'attraction est supposée agir comme une puissance $n$ de la distance : on aura $\frac{c}{r}\left(1 - \frac{AP}{AM}\right)$ pour l'attraction du cercle $PM$ dans la supposition présente, c'est-à-dire, que $\int\left(\frac{c\,dx}{r} - \frac{c(f+x)\,dx}{r\sqrt{\frac{bb}{aa}(2ax - xx) + ff + 2fx + xx}}\right)$ sera l'attraction cherchée.

Pour intégrer cette quantité au lieu de $\frac{bb}{aa}(2ax - xx)$ $+f^2 + 2fx + xx$, j'écris $f^2 + 2\left(f + \frac{bb}{a}\right)x + \left(1 - \frac{bb}{aa}\right)$ $xx$, & des 2 cas que renferme cette valeur dans la suppoſition de $\frac{bb}{aa} >$ ou $<$ que 1, je choiſis d'abord celui ou $\frac{bb}{aa} > 1$, c'eſt-à-dire ou $b > a$, ou, ce qui revient au même, celui où le ſphéroïde eſt applati.

*Premier Cas.* Au lieu de $\frac{bb}{aa} - 1$, je mets $\frac{gg}{aa}$ & la partie ci-deſſus devient $f^2 + 2\left(f + \frac{bb}{a}\right)x - \frac{gg}{aa}xx$, ou (en faiſant $f + \frac{bb}{a} = h$), $f^2 + 2hx - \frac{gg}{aa}xx$.

Je fais enſuite $\frac{ha^2}{gg} - x = u$, & cette quantité ſe change en $\frac{gg}{aa}\left(\frac{aaff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu\right)$ : de $\frac{ha^2}{gg} - x = u$ on tire $-dx = du$.

L'autre partie de la différentielle, ſçavoir, $f + x$ devient par les mêmes ſubſtitutions $= f + \frac{ha^2}{gg} - u$, ce qui change la différentielle propoſée en

$$\frac{c}{r}\left(-du + \frac{\frac{a}{g}\left(f + \frac{ha^2}{gg} - u\right)du}{\sqrt{\frac{aaff}{gg} + \frac{hha^4}{g^4} - uu}}\right)$$

que l'on voit aiſément être en partie intégrable, & en partie réductible à un arc de cercle.

Je commence par mettre à part les termes $-du -$

$$\frac{\frac{a}{g}udu}{\sqrt{\frac{aaff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu}}$$ dont l'intégrale eſt $-u + \frac{a}{g} \times$

$\sqrt{\frac{aaff}{gg}+\frac{h^2a^4}{g^4}-uu}$. L'autre partie $\frac{\left(\frac{ha^3}{g^3}+\frac{af}{g}\right)du}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}+\frac{hha^4}{g^4}-uu}}$ de la même différentielle, aura pour intégrale le produit de $\frac{ha^3}{g^3}+\frac{af}{g}$ par l'angle dont le sinus est $u$ pour le rayon $\sqrt{\frac{a^2f^2}{g^2}+\frac{h^2a^4}{g^4}}$ : par conséquent l'intégrale entiere est $\frac{c}{r}$ $\left(-u+\frac{a}{g}\sqrt{\frac{a^2f^2}{g^2}+\frac{h^2a^4}{g^4}-uu}+\left(\frac{ha^3}{g^3}+\frac{af}{g}\right)\times \text{Ang. Sin.}\frac{u}{\sqrt{\frac{a^2f^2}{g^2}+\frac{h^2a^4}{g^4}}}\right)$, & en remettant pour $u$ sa valeur $\frac{ha^2}{g^2}-x$, l'intégrale proposée deviendra $\frac{c}{r}\left(-\frac{ha^2}{gg}+x+\frac{a}{g}\sqrt{\frac{aa}{ff}+\frac{2ha^2}{gg}x-xx}+\left(\frac{ha^3}{g^3}+\frac{af}{g}\right)\times \text{Ang. Sinus}\frac{\frac{ha^2}{gg}-x}{\sqrt{\frac{a^2ff}{gg}+\frac{h^2a^4}{g^4}}}\right)$, & faisant $x=o$ pour completter cette intégrale, on aura la quantité $\frac{c}{r}\left(x+\frac{a}{g}\sqrt{\frac{aaff}{gg}+\frac{2ha^2}{gg}x-xx}\right.$ $+\left(\frac{ha^3}{g^3}+\frac{af}{g}\right)\times \text{Ang. Sinus}\frac{\frac{ha^2}{g^2}-x}{\sqrt{\frac{a^2ff}{gg}+\frac{h^2a^4}{g^4}}}-\frac{ha^2}{gg}$ $\left.-\left(\frac{ha^3}{g}+\frac{af}{g}\right)\times \text{Ang. Sin.}\frac{\frac{ha^2}{gg}}{\sqrt{\frac{a^2f^2}{gg}+\frac{h^2a^4}{g^4}}}\right)$ : ce qui exprimera

exprimera l'attraction de la portion de sphéroïde *BMP* sur le corpuscule *A*.

En faisant dans cette valeur $x = 2a$, on aura la quantité $\frac{c}{r}\left(2a + \frac{aa}{gg} \times \overline{f + 2a} + \left(\frac{ha^3}{g^3} + \frac{af}{g}\right) \times \text{Ang. } Sinus \frac{ha^2 - 2agg}{\sqrt{a^2 ffgg + h^2 a^4}} - \frac{haa}{gg} - \left(\frac{ha^3}{g^3} + \frac{af}{g}\right) \times \text{Ang. } Sinus \frac{ha^2}{\sqrt{a^2 ffgg + h^2 a^4}}\right)$ : ce qui est l'expression de l'attraction du sphéroïde entier *BMO*, dont toutes les parties sont supposées attirer en raison inverse du quarré des distances, dans le cas de l'applatissement vers les pôles. *C. Q. F. T.*

*Second Cas.* Supposons à présent $\frac{bb}{aa} < 1$, ce qui rendroit le sphéroïde allongé, on voit qu'en ce cas la quantité $\frac{gg}{aa}$ sera négative ; & qu'ainsi, en supposant que $\frac{gg}{aa} = 1 - \frac{bb}{aa}$ au lieu de $\frac{bb}{aa} - 1$, le calcul précédent seroit le même, pourvu qu'on substituât $-\frac{gg}{aa}$ à la place de $+\frac{gg}{aa}$. Faisant donc cette substitution dans la différentielle $\frac{c}{r}\left(-du + \frac{\frac{a}{g}\left(f + \frac{haa}{gg} - u\right)du}{\sqrt{\frac{aaff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu}}\right)$,

on aura $\frac{c}{r}\left(-du + \frac{\frac{a}{\sqrt{-gg}}\left(f - \frac{haa}{gg} - u\right)du}{\sqrt{-\frac{aaff}{gg} + \frac{h^2a^4}{g^4} - uu}}\right)$,

ou $\frac{c}{r}\left(-du + \frac{\frac{a}{g}\left(f - \frac{haa}{gg} - u\right)du}{\sqrt{\frac{a^2ff}{gg} - \frac{hha^4}{g^4} + uu}}\right)$, ou enfin

$$\frac{c}{r}\left(-du-\frac{\frac{a}{g}udu}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}+uu}}+\frac{\frac{a}{g}\left(f-\frac{haa}{gg}\right)du}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}+uu}}\right),$$

dont l'intégrale eſt $\left(-u-\frac{a}{g}\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}+uu}+\frac{a}{g}\right.$ $\left(f-\frac{haa}{gg}\right)\times Log. \left.\frac{\left(u+\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}+uu}\right)}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}}}\right)$ qui én remettant pour $u$ ſa valeur $-\frac{haa}{gg}-x$ ſe change en

$$\frac{c}{r}\left(\frac{haa}{gg}+x-\frac{a}{g}\sqrt{x^2+\frac{2ha^2x}{gg}+\frac{aaff}{gg}}+\frac{a}{g}\left(f-\frac{a^2h}{gg}\right)\right.$$
$$\left.\times L\frac{\left(-\frac{ha^2g}{gg}-x+\sqrt{x^2+\frac{2ha^2x}{gg}+\frac{aaff}{gg}}\right)}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{h^2a^4}{g^4}}}\right).$$

C'eſt-là la valeur cherchée de l'attraction de la portion $BPM$ du ſphéroïde allongé ſur le corpuſcule $A$, à une conſtante près qu'on déterminera en faiſant $x = o$, & alors on aura

$$\frac{c}{r}\left(x-\frac{a}{g}\sqrt{xx+\frac{2ha^2x}{gg}+\frac{aaff}{gg}}+\frac{a}{g}\left(f-\frac{ha^2}{gg}\right)\times L\right.$$
$$\frac{\left(-\frac{haa}{gg}-x+\sqrt{xx+\frac{2haax}{gg}+\frac{aaff}{gg}}\right)+\frac{a^2f}{gg}}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{h^2a^4}{g^4}}}$$
$$\left.-\frac{a}{g}\left(f-\frac{haa}{gg}\right)\times L\frac{\left(-\frac{haa}{gg}-\frac{af}{g}\right)}{\sqrt{\frac{aaff}{gg}-\frac{hha^4}{g^4}}}\right)$$ : expreſſion qui

est celle de l'attraction de la portion *BPM* du sphéroïde allongé *BMO* sur le corpuscule *A*.

Qu'on fasse à présent dans cette expression $x = 2a$, elle deviendra

$$\frac{c}{r}\left(-\frac{2abb}{gg} + \left(\frac{af}{g} - \frac{ha^3}{g^3}\right) \times L \left(\frac{-\frac{ha^2}{gg} - 2a + \frac{a}{g} \times \overline{f-2a}}{\sqrt{\frac{aaff}{gg} - \frac{h^2a^4}{g^4}}}\right)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{af}{g} - \frac{ha^3}{g^3}\right) \times L \left(\frac{\frac{ha^2}{gg} - \frac{af}{g}}{\sqrt{\frac{aaff}{gg} - \frac{h^2a^4}{g^4}}}\right)\right)$$

: ce qui est l'attraction du sphéroïde entier *BMO* lorsque $\frac{bb}{aa} < 1$, ou que $b < a$, c'est-à-dire, lorsqu'il est allongé.

# SECTION III.

*Explication de la réfraction de la Lumiere, en employant le principe de l'attraction.*

I.

LEs effets que les corps exercent les uns sur les autres par leur attraction, ne sont sensibles que lorsqu'elle n'est pas absorbée par celle de la terre, & l'on a vu que cette attraction mutuelle des corps ne s'apperçoit sensiblement que lorsqu'ils sont presque contigus, & qu'alors elle agit dans un rapport plus que triplé des distances; or les corps agissant sur la lumiere d'une maniere sensible, il est certain que si l'attraction en est la cause, elle doit suivre ce rapport.

L'avantage du principe de l'attraction est de n'avoir besoin d'aucune supposition; mais seulement de la connoissance des phénoménes, & plus les observations & les expériences sont exactes, plus il est facile d'appliquer le principe attractif à leur explication.

II.

On sçait assez que la lumiere se détourne de son chemin en traversant obliquement des milieux de différente densité. *Snellius*, & depuis lui *Descartes*, ont trouvé par l'expérience que le sinus d'incidence & celui de réfraction sont toujours en raison constante.

M. *Newton* employe la quatorziéme & derniere Section de son premier Livre à faire voir la raison pour laquelle ces sinus doivent

être

être en raiſon conſtante, & à prouver que ce rapport dépend du principe attractif.

M. *Clairault* a éclairci & démontré cette théorie de M. *Newton* dans un mémoire donné à l'Académie en 1739. & dont je parlerai ci-après.

## I I I.

Tout rayon de lumiere qui pénétre obliquement dans un milieu quelconque, eſt dans le cas d'un mobile ſollicité en même temps par deux forces, & c'eſt ainſi qu'il faut conſidérer les rayons afin de pouvoir appliquer à leurs effets les principes de la méchanique.

*Deſcartes* & *Fermat* conſidérérent la lumiere comme un corps d'une grandeur ſenſible, & ſur lequel les milieux agiſſent de la même maniere qu'ils paroiſſent le faire ſur les autres corps : & trouvant que les milieux que la lumiere traverſe faiſoient ſur elle des effets contraires à ceux qui devoient réſulter des principes méchaniques, ils imaginérent chacun une hypothèſe pour accorder dans ce cas les loix de la méchanique dont on ne peut douter, & les effets phyſiques qui ſont preſque auſſi certains.

## I V.

On ſçait que plus les milieux ſont denſes, plus ils réſiſtent aux corps qui tendent à ſéparer leurs parties en les pénétrant ; or dans ce cas l'angle rompu eſt plus grand que l'angle d'incidence, parce que la vîteſſe verticale du corps étant diminuée par la réſiſtance du milieu, la vîteſſe horiſontale influe davantage dans la direction de la diagonale que le corps parcourt en obéiſſant à ces deux forces, dans leſquelles ſon mouvement ſe décompoſe.

C'eſt par ce principe que lorſque la réſiſtance du milieu eſt invincible, le corps au lieu de le pénétrer retourne ſur ſes pas par ſon élaſticité, & l'on pourroit donner telle proportion entre cette réſiſtance & la vîteſſe verticale du corps, que ce corps perdroit tout ſon mouvement vertical, & gliſſeroit ſur la ſurface du milieu, s'il étoit ſans reſſort & que cette ſurface fut un plan parfaitement poli.

V.

Or il arrive tout le contraire aux rayons de lumiere, plus le milieu qu'ils traverſent eſt denſe, plus le ſinus d'incidence ſurpaſſe célui de réfraction ; donc la vîteſſe verticale des rayons eſt augmentée dans ce cas, & il leur arrive alors tout le contraire de ce que les loix de la méchanique paroiſſent indiquer.

*Deſcartes* pour les accorder avec l'expérience qu'il ne pouvoit éluder, prétendoit que plus les milieux étoient denſes, plus ils ouvroient un paſſage facile à la lumiere. Mais c'étoit donner de ce phénoméne une raiſon plus capable de le faire révoquer en doute que l'expliquer.

V I.

*Fermat* trouvant l'explication phyſique de *Deſcartes* impoſſible à admettre, aima mieux avoir recours à la métaphyſique & aux cauſes finales. Il ſe retrancha donc à dire qu'il étoit convenable à la ſageſſe de l'auteur de la nature, de faire aller la lumiere d'un point à un autre par le chemin du plus court temps, puiſqu'elle n'y va pas par le chemin le plus court qui ſeroit la ligne droite. Ce principe admis, il ſuivoit que les ſinus d'incidence & de réfraction étoient entr'eux comme les facilités des milieux à être pénétrés.

V I I.

Il eſt aiſé de voir comment l'attraction donne le dénouement de cette difficulté ; car ce principe montre que le mouvement progreſſif de la lumiere n'eſt pas ſeulement moins retardé dans le milieu le plus denſe, comme le vouloit *Deſcartes*, mais qu'il eſt réellement accéléré, & cela par l'attraction du milieu plus denſe lorſqu'il le pénétre.

Ce n'eſt pas ſeulement lorſqne le rayon a atteint le milieu refringent & au point d'incidence, qu'il agit ſur lui ; l'incurvation du rayon commence un peu auparavant, & elle augmente à mesure qu'il approche du milieu refringent, & même dans l'intérieur de ce milieu jusqu'à une certaine profondeur.

L'attraction rend compte de tout ce qui arrive à la lumiere dans ce passage d'un milieu dans un autre : car le rayon augmente sa vîtesse verticale dans le milieu plus dense qu'il traverse jusqu'à ce qu'il soit parvenu au point où les parties supérieures & inférieures de ce corps agissent également sur lui. Alors il continue son chemin avec la vîtesse acquise, jusqu'à ce qu'étant prêt à en sortir, les parties supérieures de ce milieu l'attirent plus fortement que les parties inférieures. La vîtesse verticale du rayon est diminuée par-là, & la courbe qu'il décrit à son émergence est parfaitement égale & semblable à celle qu'il a décrit à son incidence (en supposant les surfaces qui terminent le milieu refringent parallèles) : & cette courbe est dans une position entierement opposée à la premiere qu'il avoit décrit : le rayon enfin passe par des dégrés de rétardation qui sont dans le même rapport & le même ordre inverse que les dégrés d'accélération qu'il a eu à son incidence.

## VIII.

L'illustre M. *Newton*, qui étoit aussi supérieur dans l'art de faire des expériences que dans celui de les employer, a trouvé en examinant la déviation du rayon dans les différens milieux, que l'attraction exercée sur les particules de la lumiere est en raison de la densité de ces milieux, si l'on en excepte ceux qui sont gras & sulphureux.

Puisque la différente densité de ces milieux est la cause de la réfraction de la lumiere, plus les corps seront homogénes, & plus ils seront transparens, & les plus hétérogénes seront les plus troubles ; car la lumiere en les traversant, étant perpétuellement détournée en des sens différens, dans l'intérieur de ces corps, il en reviendra d'autant moins de rayons vers nos yeux. C'est ce qui fait que par un ciel serain on distingue si bien les étoiles, au lieu que lorsque l'air est chargé de vapeurs, leurs rayons ne peuvent plus arriver jusqu'à nous.

## IX.

On déduit aussi du principe de l'attraction la cause pour laquelle la réfraction se change en réflection à une certaine obliquité d'incidence, lorsque le rayon va d'un milieu plus dense dans un moins dense ; car dans le passage du rayon d'un milieu plus dense dans un autre qui l'est moins, la courbe qu'il décrit est infléchie vers le milieu plus dense d'où il sort ; or la proportion entre son obliquité & la force qui le rappelle vers le corps, peut être telle qu'il arrive à la situation paralléle à la surface du milieu qu'il abandonne, avant d'être sorti des limites dans lesquelles l'attraction de ce corps agit sur lui, & l'on voit qu'alors il doit retourner vers le milieu refringent d'où il sortoit, en décrivant une branche de courbe égale & semblable à celle qu'il avoit décrit en sortant, & reprendre par conséquent après être rentré dans le milieu, la même inclinaison que celle qu'il y avoit avant d'en sortir.

## X.

L'action des milieux que la lumiere traverse, peut donner aux rayons l'obliquité qui leur manque pour être réfléchis, & comme plus les milieux contigus différent en densité, moins il faut d'obliquité d'incidence pour que la réflection commence ; le cas où les rayons se réfléchiront à la plus petite obliquité d'incidence, sera celui où l'espace contigu au milieu refringent sera purgé d'air, & où le vuide sera le plus parfait. C'est aussi ce qui arrive dans la machine pneumatique, dans laquelle plus on augmente le vuide, plus le rayon se réfléchit promptement de dessus un prisme qu'on y a placé.

La réfraction se change donc en réflection à différentes incidences selon la densité des différens milieux. Le diamant qui est le le corps le plus brillant que nous connoissons, opére une réflection totale quand l'angle d'incidence est seulement de 30°, & c'est selon cet angle que les Jouaillers taillent leurs diamans, afin de perdre la plus petite quantité possible de la lumiere qu'ils reçoivent.

On sent aisément que lorsque le rayon passe d'un milieu plus rare dans un plus dense, la refraction ne peut jamais se changer en réflection quelle que soit l'obliquité de l'incidence. Car lorsque la lumiere est prête d'abandonner le milieu moins dense, l'autre qui lui est contigu commence à agir sur elle, & augmente sa vîtesse verticale, ainsi elle ne peut jamais être détruite dans ce passage, puisqu'elle est au contraire perpétuellement augmentée.

M. *Clairault* a renfermé toute la théorie de la réfraction dans un seul Problême; comme je ne crois pas qu'on puisse n'en ajouter à l'élégance & à la clarté de sa démonstration, je me contenterai de la donner ici.

## X I.

## PROBLEME.

*Un corpuscule de lumiere partant du point A avec la vîtesse connue de la lumiere, & selon une direction donnée; on suppose qu'il est attiré vers une surface PS par une force qui agit comme une fonction quelconque de la distance à cette surface, & on demande la courbe qu'il décrit dans ce mouvement.*

Supposant le corps arrivé en $M$, & ayant tiré $MQ$, $mq$ per- Fig. 16.
pendiculaires à $SP$ ~~; soient faites les lignes $MQ = x$~~, $PQ = y$, & nommée $X$ la fonction de $x$ qui exprime la force qui agit au point $M$.

Soit de plus $\mu m$ la petite ligne parcourue par le corps en vertu de la force qui le porte vers $PS$, pendant le petit temps $dt$ qu'a employé la force impulsive à lui faire parcourir $Mm$.

Si les $Qq$ ou les $dy$ qui sont proportionnels au temps sont supposés constans, on aura $\mu m = ddx$, ce qui donne $X dt^2 =$

$-ddx$; car les petites fléches $\mu m$ sont comme les forces multipliées par les quarrés des temps. Je mets le signe $-$ à $ddx$ parce que la nature de la courbe est d'être concave vers son axe.

Multipliant cette équation par $dx$ afin de l'intégrer, on aura $Xdxdt^2 = -dxddx$ ou $-2Xdxdt^2 = 2dxddx$, dont l'intégrale est $adt^2 - 2dt^2\int Xdx = dx^2$. ($adt^2$ est une constante qu'il faut ajouter dans l'intégration.) Pour chasser maintenant le $dt^2$ de cette équation, je supposerai que le corps décrivant la trajectoire en question, aye pour premiere vîtesse, c'est-à-dire pour celle dont il est porté lorsqu'il commence à éprouver la force $X$, la vîtesse $f$, & que l'inclinaison qu'il a dans le lieu $A$, d'où on le suppose parti, soit telle que le sinus de l'angle $aAP$ soit $m$. On aura alors $\frac{dy}{mf} = dt$, puisque $\frac{dy}{m}$ sera dans cette supposition le premier petit côté de la trajectoire, & que l'espace divisé par la vîtesse donne le temps. Cela posé l'équation $adt^2 - 2dt^2\int Xdx = dx^2$ se changera en $\frac{ady^2}{m^2f^2} - \frac{2dy^2}{m^2f^2} \times \int Xdx = dx^2$, ou $\frac{ady^2}{m^2f^2} - \frac{2dy^2}{m^2f^2}[x] = dx^2$, en prenant $[x]$ pour représenter l'intégrale de $Xdx$.

De cette équation on tire $dy^2 = \dfrac{dx^2}{\frac{a}{m^2f^2} - \frac{2}{m^2f^2}[x]}$, donc

$$dx^2 + dy^2 = \frac{dx^2\left(1 + \frac{a}{m^2f^2} - \frac{2}{m^2f^2}[x]\right)}{\frac{a}{m^2f^2} - \frac{2}{m^2f^2}[x]} \;\&\; \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{a}{m^2f^2} - \frac{2}{m^2f^2}[x]}.$$ On déterminera ensuite la constante $a$ par cette condition que le sinus de l'angle $Mor$ devienne celui de l'angle $aAP$, c'est-à-dire $m$, lorsque $x$ ou $MQ$ est la distance $AP$ supposée $= b$, de laquelle distance on suppose le corps parti.

On a par ce moyen $m^2 = \dfrac{1}{1 + \frac{a}{m^2 f^2} - \frac{2}{m^2 f^2}[b]}$, par conséquent $\dfrac{a}{m^2 f^2} = \dfrac{1}{m^2} - 1 + \dfrac{2}{m^2 f^2}[b]$. Cette valeur de la constante $\dfrac{a}{m^2 f^2}$ étant substituée dans l'équation $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{\frac{a}{m^2 f^2} - \frac{2}{m^2 f^2}[x]}}$, on aura pour l'équation de la trajectoire cherchée, $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{\frac{1}{m^2} - 1 + \frac{2[b] - 2[x]}{m^2 f^2}}}$ qu'on pourra construire dès que l'on connoîtra $X$ ou la fonction de $x$, c'est-à-dire la loi de la pesanteur vers la surface $PS$. *C. Q. F. T.*

## XII.

### *COROLLAIRE.*

La valeur générale du sinus de l'angle $MOr$ qui est $\dfrac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ devient par la même substitution de la valeur $a$ à sa place, la quantité $\dfrac{m}{\sqrt{1 + \frac{2}{ff}[b] - \frac{2}{ff}[x]}}$, & si on compare le sinus de l'angle quelconque $MOr$ avec celui de l'angle $aAP$ qui est $m$, on verra que leur rapport est exprimé par celui de $1$ à $\sqrt{1 + \frac{2[b] - 2[x]}{f^2}}$ ; or comme ce rapport ne contient point la lettre $m$ qui marquoit l'inclinaison du projectile en partant, il suit que quelle que soit cette inclinaison, pourvu que la vîtesse au point de départ soit la même, les angles que ces trajectoires font avec la perpendiculaire à la surface refringente, ont des sinus qui sont en raison constante à même distance de cette surface.

## XIII.

### SCHOLIE.

Dans le cas de la lumiere, l'angle $aAP$ repréſente l'angle d'incidence, & l'angle $MOr$ devient l'angle rompu, lorſque le point $O$ devient le point $H$, où la puiſſance qui infléchit le rayon ceſſe d'agir : & comme, par ce qu'on vient de trouver par le calcul, le ſinus de $MOr$ eſt en raiſon conſtante à celui de $aAP$, quelle que ſoit ſa diſtance $Or$, pourvu qu'elle ſoit la même dans les différens projectiles qu'on compare, cette raiſon ſera conſtante en comparant l'angle $aAP$ où la force réfractive commence à agir, avec l'angle $hHL$ où elle n'a plus aucun effet, c'eſt-à-dire, en comparant l'angle d'incidence avec l'angle rompu.

## XIV.

On tirera très-facilement du Problême précédent l'équation de la courbe que le rayon de lumiere décrit, en ſuppoſant que l'attraction des parties du milieu refringent, agiſſe ſuivant une puiſſance quelconque $n$ de la diſtance. Car reprenant l'équation générale $dy = \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{m^2} - 1 + \frac{2[b] - 2[x]}{m^2 f^2}}}$, qui exprime toutes les courbes de cette nature, ſi on veut appliquer cette ſolution générale au cas où la force $X$ eſt le réſultat de toutes les attractions d'un corps dont toutes les particules attirent comme la puiſſance $n$ de la diſtance, on n'aura qu'à ſubſtituer pour $x$ la quantité $\frac{c}{r(2+m)} \times \frac{1}{mx^m}$, qu'on a trouvé pour l'attraction de ce corps (Art. 35. de la Sect. 2.) dans la ſuppoſition de $n = -3 - m$ : & alors $[x]$ ou $\int X dx$ ſera $\frac{cx^{1-m}}{r(2+m)m(1-m)}$, par conſéquent $[b] = \frac{cb^{1-m}}{r(2+m)m(1-m)}$, ainſi l'équation précédente de la courbe cherchée ſera $dy = \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{mm} - 1 + \frac{2cb^{1-m} - 2cx^{1-m}}{r(2+m)m(1-m)}}}$.

SECTION

# SECTION IV.

## DE LA FIGURE DE LA TERRE.

### PREMIERE PARTIE.

*Où l'on traite en général de l'équilibre des fluides dans toutes sortes d'hypothèses de gravité.*

I.

POur déterminer la figure de la terre, M. *Newton* ne s'est servi que de ce principe : *Que pour qu'une masse fluide soit en équilibre, il faut que le poids de deux colonnes* M C, N C *qui aboutissent de la circonférence au centre, soit égal.* Fig. 1.

M. *Hughens* a employé celui-ci : *Que pour qu'une masse fluide conservât une forme constante, il falloit que sa surface* P E p e, *fût dans chacun de ses points perpendiculaire à la direction de la pesanteur.*

M. *Bouguer* en examinant cette question, a le premier reconnu que chacun de ces principes employé séparément, étoit insuffisant pour s'assurer de l'équilibre d'une masse fluide ; il a fait voir qu'il y a une infinité de cas dans lesquels la figure que demande l'équilibre de toutes les colomnes qui vont de la surface au centre, ne seroit pas la même que celle qui suit de la perpendicularité de la direction de la pesanteur à tous les points de la surface ; mais il n'a pas examiné si une masse fluide dans laquelle ces deux principes s'accorderoient, seroit nécessairement en équilibre, ou du moins ; il ne paroît pas avoir cherché d'autres principes pour s'assurer de son équilibre.

## I I.

M. *Clairaut*, dont le voyage au Pole a néceſſairement tourné les vûes du côté de cette queſtion, a trouvé que ces deux principes réunis étoient encore inſuffiſans pour s'aſſurer de l'équilibre d'une maſſe fluide, au moins lorſque la réunion ne ſe fait qu'à la ſurface extérieure ; & qu'il y avoit telle hypothèſe de peſanteur où cet équilibre ſeroit impoſſible, & dans laquelle cependant la réunion de ces deux principes donneroit la même figure.

Il a donc cherché un principe par lequel on pût s'aſſurer ſi une loi de peſanteur eſt poſſible, c'eſt-à-dire, ſi l'équilibre du fluide dans lequel on la ſuppoſeroit pourroit en réſulter, & qui eût par conſéquent la généralité & la ſûreté qui manque à la réunion des deux principes qu'on employoit avant lui.

Le principe qu'il a trouvé, eſt celui-ci : *Une maſſe fluide ne ſçauroit être en équilibre, que lorſque les efforts de toutes les parties compriſes dans un canal de figure quelconque, qu'on ſuppoſe traverſer cette maſſe, ſe détruiſent mutuellement.*

La maſſe entiere fluide eſt en équilibre, c'eſt-à-dire, que toutes ſes parties ſont dans un parfait repos par l'hypothèſe ; mais ſi elle eſt en équilibre, toutes les parties de tous les canaux de figure quelconque dans leſquels je puis la ſuppoſer diviſée, doivent être en repos ; puiſque de tous ces canaux je puis n'en conſidérer
Fig. 1. qu'un *ORS*, & ſuppoſer que tout le reſte de la maſſe ſe durciſſe ; mais les parties de ce canal *ORS* ne peuvent être en repos, que les efforts que fait le fluide pour s'échapper par *O* & par *S* ne ſoient égaux : donc ſi la maſſe entiere *PEpe* eſt en équilibre, toutes les parties du canal *ORS* feront des efforts égaux, donc ils ſe détruiront mutuellement.

## I I I.

Ce principe renferme celui de M. *Hughens* & celui de M. *Newton*; & on fera voir dans la ſuite, qu'il eſt plus général, & d'une application plus ſûre, que ces deux principes réunis.

Je dis qu'il les renferme, car on voit clairement que celui de M. *Newton* y est renfermé, puisque le canal *O R S* aboutit, ainsi que les deux colomnes de M. *Newton*, à deux points de la surface, & que par conséquent dans toute masse fluide dans laquelle un canal quelconque est en équilibre, les colomnes tirées du centre à la circonférence seront de même poids, puisque ces deux colomnes composent un canal qui est un des cas du canal quelconque *O R S*.

Il renferme aussi le principe de M. *Hughens*; car en supposant le canal couché sur la surface du fluide, en sorte qu'il devienne le canal *F G D*, il ne sera encore alors qu'un cas particulier du principe général qu'on vient de poser, ainsi il devra toujours être en équilibre; mais comme dans ce cas la longueur de ce canal ne peut être déterminée, & qu'il n'y a point de raison suffisante pour décider l'équilibre de la partie *F G* avec *G D*, plutôt qu'avec telle autre partie qu'on voudra comme *G E*, par exemple; l'équilibre de ce canal ne peut donc avoir d'autre cause que la perpendicularité de la direction de la pesanteur à tous ses points, & par conséquent à tous ceux de la surface, ce qui est le principe de M. *Hughens*.

Au lieu de considérer un canal aboutissant à la surface du fluide, supposons que ce canal rentre en lui-même comme *I T L K*, Fig. 2. on voit clairement que ce cas n'est qu'un corollaire de l'équilibre d'un canal quelconque aboutissant à la surface; car en supposant que deux points quelconques *I* & *L* de ce canal communiquent à la surface par les canaux *I F*, *L G*, les deux branches *I T L*, *I K L* de ce canal rentrant en lui-même, formeront, avec les deux branches *I F*, *L G*, deux canaux aboutissans à la surface par les parties communes *I F*, *L G*; or puisque ces deux canaux aboutissans à la surface font des efforts égaux, ôtant les parties *I F*, *L G* Fig. 2. communes, les deux parties restantes *I T L*, *I K L* qui composent le canal rentrant qu'on considére, seront en équilibre.

## I V.

La loi de pesanteur étant donnée, c'est un Problême déterminé que de trouver la forme que doit avoir une masse fluide, afin que le principe de M. *Hughens*, ou celui de M. *Newton*, soit observé ; or la loi de pesanteur étant telle qu'un canal quelconque rentrant en lui-même soit en équilibre, en déterminant la forme de la masse fluide par cette loi de pesanteur, & par le principe de M. *Hughens*, par exemple, puisque cette loi est telle qu'un canal quelconque rentrant en lui-même est en équilibre, en supposant une partie de ce canal couché sur la surface, il sera encore en équilibre, puisque ce sera toujours un canal rentrant.

Fig. 3. Mais par le principe de M. *Hughens*, la partie *O E* de ce canal couchée sur la superficie est en équilibre ; donc l'autre partie qui devient le canal *O R S*, terminé par la superficie, est aussi en équilibre ; donc la loi de pesanteur étant telle qu'un canal rentrant en lui-même soit en équilibre, on pourra toujours trouver pour le fluide, une surface telle que tous les canaux qui la traverseront seront en équilibre, ce qui est l'inverse de la proposition qu'on vient de prouver précédamment.

On voit de même, que si on avoit déterminé la figure de la surface par le principe de M. *Newton*, l'équilibre de la masse entiere, ou, ce qui revient au même, d'un canal quelconque, aboutissant d'un point de la surface à l'autre, suivroit de celui d'un canal quelconque rentrant en lui-même ; car prenant *M H N C* pour ce canal ; & sçachant par l'observation du principe de M. *Newton*, que *M C N* est en repos, il suit que *M H N* y est aussi.

## V.

Mais comme la terre & toutes les planettes tournent sur elles-mêmes, il faut considérer cette rotation pour pouvoir déduire leur figure des principes qu'on vient de poser.

Considérons d'abord ce qui doit arriver à deux canaux de figure quelconque *abCB* qui tournent autour d'un axe *Pp*, & dont les extrémités *abCB* ſont à des diſtances reſpectivement égales de cet axe. Fig. 4.

Suppoſant ces canaux partagés en une infinité de petits cylindres par des lignes paralléles, à cauſe de la petiteſſe de ces cylindres, on peut regarder les forces centrifuges comme étant les mêmes dans chacune de leurs particules ; par exemple, en *m* & en *n* ; de plus, toutes les parties du fluide tournent en même temps, ainſi la force centrifuge ſera la même en *m* & en *μ*. Donc les forces par leſquelles le fluide renfermé dans ces petits cylindres tend à s'échapper par les extrémités *b* & *β*, ſeront égales ; car la maſſe eſt comme les longueurs *mn*, *μν*, & les parties des forces acquiſes par la rotation dans les directions *mn* & *μν*, ſont réciproquement comme ces longueurs ; or comme les canaux entiers *ab*, *aβ* ſont ſuppoſés être partagés en une infinité de ces petits cylindres, l'effort de tout le fluide renfermé dans le canal *ab* vers *b*, lequel effort vient de la rotation, eſt égal à l'effort de tout le fluide renfermé dans le canal *aβ* vers *β*, lequel vient de même de la rotation. Fig. 4.

D'où il ſuit qu'on peut faire abſtraction de l'effet de la force centrifuge, quand on examine ſi ſelon une loi de gravité donnée, le fluide peut avoir une forme conſtante ; car en partageant le canal rentrant en lui-même *abcd* dans les deux canaux *abc*, *cda*, on verra que les parties *ab*, *bc* du canal *abc*, faiſant des efforts égaux en *b* par la force centrifuge, & les parties *cd*, *ad* du canal *adc*, faiſant auſſi des efforts égaux vers *d* en vertu de leur force centrifuge, la rotation ne changera rien à l'équilibre du canal *abcd* rentrant en lui-même ; donc on peut faire abſtraction de la force centrifuge en conſidérant l'équilibre d'un tel canal, & par conſéquent celui de toute la maſſe fluide qui en réſulte. Fig. 5.

## VI.

On a conſidéré juſqu'à préſent l'équilibre d'un canal de figure quelconque rentrant en lui-même, & on a fait voir que de l'équilibre de ce canal, suivoit celui de la masse fluide entiere; pour simplifier cette démonstration & l'appliquer plus facilement aux planettes, il faut faire ensorte de n'avoir à considérer que l'équilibre d'un canal placé dans le plan d'un méridien du sphéroide, & d'en tirer l'équilibre d'un canal de figure quelconque rentrant en lui-même; car il est certain qu'alors la question sera simplifiée, & plus aisée à traiter.

Fig. 6. Commençons par considérer deux canaux *HI*, *KL* remplis d'un même fluide, & terminés par deux paralléles à l'équateur, & supposons-les placés sur la même surface de circonvolution *AFGB*, les poids de ces deux canaux seront les mêmes : car la pesanteur étant supposée la même dans tous les points d'un paralléle à l'équateur, un corps qui seroit placé en *M* & qui ne pourroit sortir de la surface *ABFG*, ne pourroit prendre d'autre direction que celle du méridien *Mr*, puisque ce méridien est la commune section du plan dans lequel se fait la gravité, & de la surface de circonvolution qu'on considére.

Supposons les deux canaux *HI*, *KL* partagés en une infinité de petits cylindres égaux *Nn*, *Mm*, coupés par des plans paralléles à l'équateur, les forces qui agiront sur ces petits cylindres seront égales, & dans la direction *Mr*, *Ns*, ces forces *Mr*, *Ns*, peuvent être décomposées dans deux forces, dont l'une seroit dans les directions *Mm*, *Nn* du fluide, & l'autre leur seroit perpendiculaire; les forces perpendiculaires à *Mm*, & à *Nn*, n'imprimeront aucun mouvement au fluide renfermé dans ces canaux, les forces restantes *Mm*, *Nn* seront en raison renversée des longueurs *Mm*, *Nn*; mais les masses sont comme ces longueurs : donc les poids de *Mm*, & de *Nn* seront égaux; donc les poids entiers des canaux *HI*, *KL* seront égaux entr'eux; donc le canal *AB* & le canal *HI*, seront du même poids.

Or, puisqu'on a réduit ci-dessus l'équilibre d'une masse fluide à celui d'un canal de figure quelconque rentrant en lui-même,

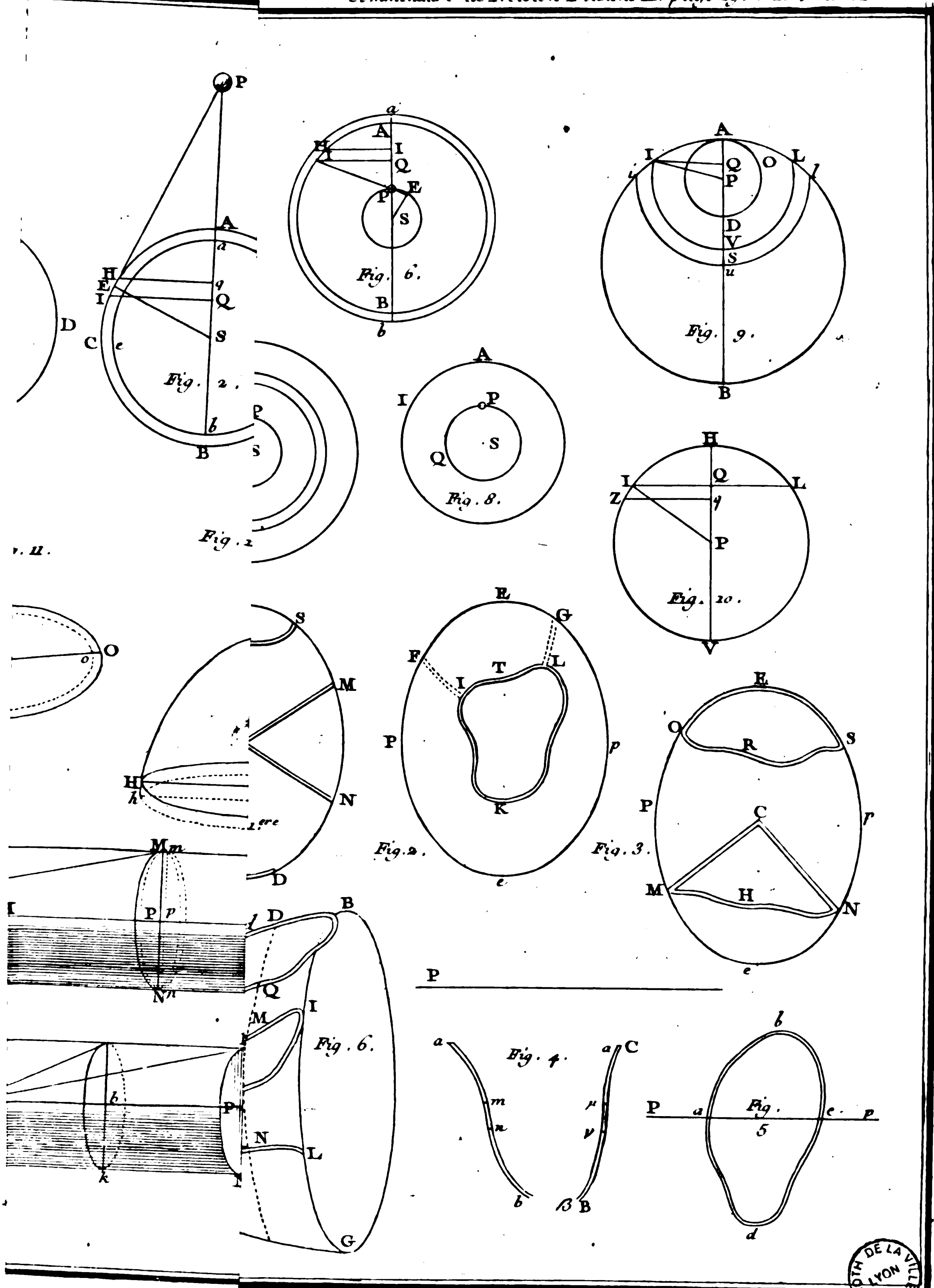


Fig. 2.
Fig. 6.
Fig. 9.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 6.
Fig. 4.
Fig. 5

il suit, de ce qu'on vient de dire, que ce même équilibre se réduit à celui d'un canal rentrant *AQBX*, & placé dans le plan d'un méridien; car tout canal *HOIV* à double courbure, peut être considéré comme composé des deux branches *HOI*, *HVI*, & chacune de ses branches est de même poids respectivement, par ce qui vient d'être dit, que les branches *AQB*, *AXB* du canal *AQBX* puisque les branches seront les communes sections du méridien, & des surfaces de révolution qui passent par les branches à double courbure *HOI*, *HVI*; donc si on a reconnu que *AQBX* est en équilibre, on verra que *HOVI* y sera aussi; donc pour qu'un sphéroïde soit en équilibre, il suffit qu'un canal quelconque placé dans le plan du méridien de ce sphéroïde soit en équilibre, en ne considérant que la seule force de la gravité; car on vient de faire voir qu'on peut faire abstraction de la force centrifuge.

On tirera de ce principe la méthode générale de déterminer toutes les hypothèses de pesanteur dans lesquelles un fluide peut être en équilibre; mais on va examiner auparavant celles de ces hypothèses, dont on se sert ordinairement, parce qu'elles n'ont besoin que de ce qui précède pour être traitées.

## VII.

## PREMIERE HYPOTHESE.

*Lorsque les parties du fluide ne tendent que vers un seul centre.*

On a vu qu'une masse fluide pourra avoir une forme permanente, si un canal quelconque rentrant en lui-même est en équilibre dans cette masse: supposons donc un tel canal comme *BMNA*, & que de plus, la gravité ne dépende que de la distance au centre; si du centre de tendance *C* on décrit une infinité d'arcs tels que *MN*, *mn*, ce canal sera alors composé de deux branches *BMA*, *BNA* qui auront chacune le même nombre de cylindres *Mm*, *Nn*; mais comme on suppose que Fig. 7.

la gravité ne dépend que de la diſtance, & que par conſéquent elle eſt la même en *M* & en *N*, & que de plus les petits cylindres *Mm*, *Nn* ont la même hauteur, il ſuit que les poids de ces cylindres ſont égaux ; donc les deux branches *BMA*, *BNA* auront des poids égaux, puiſqu'elles ſont compoſées d'un même nombre de ces cylindres ; donc le canal entier *BMNA* ſera en équilibre ; donc on n'aura qu'à déterminer la ſurface du ſphéroïde par le principe de M. *Newton*, ou par celui de M. *Hughens*, & l'on ſera ſûr que toute la maſſe fluide qui compoſe ce ſphéroïde, ſera dans un parfait repos.

## VIII.

## SECONDE HYPOTHESE.

*Lorſque les parties du fluide tendent vers pluſieurs centres.*

Fig. 8. Suppoſant un torrent de matiere fluide qui tourne autour d'un axe, & chaque particule de ce torrent pouſſée par deux forces, (ce qui eſt l'hypothèſe de M. de *Maupertuis*, pour expliquer la formation de l'anneau de Saturne) : que l'une de ces forces tende au centre placé hors du torrent, & l'autre au centre placé dans l'intérieur ; ces deux centres étant dans le plan d'un même méridien, on prouvera de même, que la peſanteur ne dépendant que de la diſtance au centre, la maſſe fluide doit être en équilibre ; car partageant le canal rentrant *BQMA* comme dans la premiere hypothéſe, en une infinité d'élémens par des cercles décrits du centre *C*, on aura deux branches de ce canal qui contiendront le même nombre de ſes élémens, & qui par conſéquent ſeront en équilibre ; le partageant encore en une infinité d'autres élémens par des cercles décrits du centre $\gamma$, il ſera encore partagé en deux branches qui contiendront le même nombre d'élémens, & dont par conſéquent les efforts ſe contre-balanceront ; donc le canal entier ſera en équilibre en vertu de ces deux forces, comme il y ſeroit par une ſeule, & ſi la figure annulaire ou ſphéroïdale que-

que doit prendre ce torrent, a été déterminée par l'un des deux principes ordinaires, toutes ses parties ayant cette double tendance seront en équilibre.

On sent que ce seroit la même chose, si on supposoit dans chaque méridien un nombre quelconque de centres de forces, au lieu d'en supposer deux.

## I X.

## TROISIÉME HYPOTHESE.

*Lorsque la gravité est le résultat de l'attraction de toutes les parties d'un corps central de figure quelconque.*

Si l'on considére la figure du corps central, c'est-à-dire, si au lieu de supposer, comme on a fait jusqu'à présent, chaque corps central comme un point, & n'agissant que dans le plan du méridien où il est placé, (ainsi que dans l'hypothèse de M. de *Maupertuis* pour la formation des anneaux) on suppose que la gravité de chaque particule du torrent, ou de la matiere destinée à former un sphéroïde, soit le résultat des attractions exercées sur elle en tout sens par toutes les parties du corps qui lui sert de centre, on détermineroit l'équilibre de la masse fluide, en considérant chaque partie du corps central qui attire comme un centre de tendance; or, on vient de voir que chacun de ces centres exercera sur chaque particule, des attractions dont les efforts se contre-balanceront dans la masse totale; donc les efforts de toutes les parties de ce corps central se contre-balanceront; donc la masse totale sera en équilibre.

Mais pour déterminer dans cette hypothèse de pesanteur la figure que doit prendre la matiere fluide, il faudroit employer un calcul plus difficile que celui que demandent les hypothèses dont on vient de parler, parce que chaque particule du corps central agit dans un méridien différent: ainsi il faudroit commencer par calculer la somme de toutes les attractions du corps central dont la forme est supposée donnée, sur un corpuscule placé hors de lui.

Ce Problême qui dépend des quadratures étant résolu, on déterminera aisément la figure du sphéroïde de l'anneau, en employant le principe de M. *Hughens.*

On a supposé le corps central de figure quelconque, parce qu'on s'assurera de même de l'équilibre des parties de l'anneau ou du sphéroïde, soit que la pesanteur soit le résultat de l'attraction de toutes les parties d'un cercle, ou d'un noyau solide qui ait la forme d'un sphéroïde, ou celle d'un anneau.

## X.

## QUATRIÉME HYPOTHESE.

*Lorsque la pesanteur est l'effet de l'attraction de toutes les parties du sphéroïde ou de l'anneau.*

On a eu égard dans cette hypothèse, non seulement à l'attraction de toutes les parties du corps central supposé de figure quelconque, mais encore à celle de toutes les parties du fluide même dont on cherche la figure ; dans ce cas, la détermination de la forme que la masse doit prendre, est infiniment plus difficile ; car alors la loi de la gravité dépend de la courbe qu'on cherche ; mais on voit qu'il existe une courbe, telle que l'attraction du solide qu'elle forme, jointe à celle du noyau, produit une gravité, qui, combinée avec la force centrifuge, donne pour force composée une force dont la direction est perpendiculaire à la surface du sphéroïde ou de l'anneau : prenant donc cette courbe pour donnée, on verra alors la nécessité de l'équilibre dans ce sphéroïde ou dans cet anneau, par la même raison par laquelle on a vu que le sphéroïde ou l'anneau dans lequel la pesanteur ne résulte que de l'attraction des parties du noyau, doit être en équilibre.

## X I.

## CINQUIÉME HYPOTHESE.

*Lorsque la gravité ne résulte que de l'attraction des parties du fluide même, sans considérer celle du noyau.*

On voit encore de même, que si la gravité étoit le résultat des attractions de la masse fluide seulement, il se formeroit toujours un sphéroïde dont toutes les parties seroient en équilibre, & on pourroit le déterminer en employant le principe de M. *Hughens*, ou celui de M. *Newton*.

Dans cette hypothèse on ne voit pas avec la même facilité, qu'il peut se former un anneau qui n'eut point d'anneau intérieur solide; il paroît même très-vraisemblable qu'un tel anneau qui entoureroit un corps central, n'arriveroit à l'équilibre que lorsque toutes ses parties seroient tombées sur le corps central avec lequel il ne feroit plus qu'une planette.

## X I I.

## SIXIÉME HYPOTHESE.

*Lorsque le noyau solide est composé de couches de densités différentes.*

On ne se serviroit pour s'assurer de l'équilibre du sphéroïde dans cette hypothèse, que des principes ci-dessus employés; on détermineroit l'attraction de chacune de ces couches, & ayant déterminé la loi que suivroit la gravité totale par l'opération de calcul intégral qui donne la somme des attractions de toutes ces différentes couches, on trouveroit la figure cherchée en employant le principe de M. *Hughens*, ou celui de M. *Newton*.

## X I I I.

Si en supposant l'attraction de toutes les parties d'une masse fluide ou d'une planette, on suppose sa figure donnée, on pourra trouver pour le noyau ſolide, une figure & une denſité telles que la figure donnée pour la maſſe entiere ſoit celle de l'équilibre, c'eſt-à-dire, que dans cette hypothèſe on peut expliquer comment une planette allongée ou applatie d'une maniere quelconque pourroit être en équilibre.

Fig. 9. Car on voit aiſément qu'on peut trouver un ſphéroïde *KLkl* tel que ſon attraction, étant ajoutée à celle de la matiere renfermée entre le ſphéroïde donné *PEpe* & le cherché *KLkl*, produiſe, étant combinée avec la force centrifuge, une force dont la direction ſoit perpendiculaire à la ſurface *PEpe*; or la courbe *KLkl* étant connue, on ſçait, par tout ce qu'on a dit précédemment, que toutes les parties du fluide qui l'entoure ſeront en équilibre.

## XIV.

Ce raiſonnement ne ſuffit pas pour faire voir qu'il ſeroit poſſible que la terre eût une figure donnée, allongée, par exemple; car après avoir trouvé la figure du noyau d'où réſulteroit l'allongement ſuppoſé, il faudroit encore faire voir que cette hypothèſe s'accorderoit avec les phénomênes qu'on connoît, comme, par exemple, celui du raccourciſſement du pendule en allant du nord au ſud; ainſi quand même les meſures qu'on vient de prendre au nord & ſous l'équateur, n'auroient pas appris que les dégrés vont en augmentant du ſud au nord, le raiſonnement précédent ne pourroit ſuffire ſeul pour admettre la poſſibilité de la figure allongée de la terre, comme il ſuffiroit pour admettre cette poſſibilité dans les autres planettes qui nous ſont moins connues; ainſi dans ce cas nos connoiſſances s'oppoſent à nos concluſions, & c'eſt ordinairement l'effet qu'elles font dans les ſciences qui ne peuvent s'éclairer du flambeau de la Géométrie.

## XV.

Après avoir fait voir que le principe de M. *Clairaut* ſuffit pour s'assurer de l'équilibre d'une masse fluide dans toutes les hypothèses de pesanteur, il faut faire voir que les principes qu'on a employés jusqu'à présent n'avoient pas cet avantage, & qu'il y a telle loi de pesanteur dans laquelle une masse fluide ne prendroit jamais une forme constante, quoique le principe de M. *Hughens*, & celui de M. *Newton*, s'accordassent à lui donner la même figure.

L'hypothèse dans laquelle la loi de pesanteur seroit telle que la gravité dépendroit de la distance au centre, & de quelqu'autre quantité, comme de l'angle du rayon & de l'axe, ou bien de, &c. seroit du nombre de celles où il y auroit un mouvement continuel dans les parties du fluide.

Car si on suppose dans le sphéroïde *PEpe*, un canal *abdc* compofé de deux arcs de cercles terminés par les deux petits cylindres *ac*, *bd*, dirigés vers le centre *c*, d'où on a tracé les arcs, on verra aisément que la gravité étant perpendiculaire aux deux branches circulaires, elle ne donnera aucun mouvement aux parties qui les composent; donc pour qu'il y ait équilibre, il suffira que les efforts des deux petits cylindres qui les terminent soient les mêmes : mais il faudroit pour cela que la pesanteur fut la même en *a* & en *b*, ce qui est contre l'hypothèse de la loi que nous examinons, puisqu'on l'a supposée différente à des distances égales; donc on peut conclure que dans toutes les hypothèses où la gravité dépendroit de la tendance vers un centre, & non pas uniquement de la distance à ce centre, il y auroit un mouvement perpétuel dans les parties du fluide. Fig. 10.

Or dans ces hypothèses l'équilibre des colonnes, & la perpendicularité de la direction de la pesanteur à la surface, pourroient s'accorder à donner la même figure au sphéroïde, & jetteroient par conséquent dans l'erreur ceux qui feroient dépendre la possibilité de l'équilibre de l'accord de ces deux principes; car soit *PME* un sphéroïde dont le centre soit *C*, supposant que *EK* exprime la force centrifuge en *E*, & prenant *MG* : *EK* :: Fig. 11.

*QM* : *CE*, *MG* exprimera la force centrifuge en *M*; ainsi tirant le rayon *MC* & la ligne *MH* perpendiculaire en *M* à la courbe, qu'on mene par le point *G* la ligne *GH* parallele à *MC*, & qu'on achève le parallélogramme *MGHI*, la ligne *MI* exprimera la force centrale en *M* telle que le principe de M. *Hughens* la demande, pour que le sphéroïde *PME* soit en équilibre ; or, on a vu que dans l'hypothèse d'une pesanteur qui ne dépend que de la distance au centre, les deux principes s'accordent à donner une forme constante au fluide ; supposant donc qu'on ait calculé la pesanteur à tous les points *M* du sphéroïde *EM*, on verra que si la pesanteur dépend, en allant de chaque point *M* de la circonférence vers *c*, de quelqu'autre quantité que de la distance, on pourra trouver une infinité de loix différentes de pesanteur qui donneront une même quantité pour le poids des colomnes *MC*; donc toutes ces colomnes *MC* qui étoient en équilibre dans la premiere supposition d'une gravité dépendante seulement de la distance au centre, y seront encore dans plusieurs des cas où la gravité dépendroit de la distance, & de quelqu'autre quantité : cependant on sçait, par ce qui vient d'être dit, qu'une telle loi de pesanteur ne donneroit jamais d'équilibre à la masse entiere du fluide ; donc l'accord de ces deux principes ne peut suffire pour s'assurer de la possibilité d'une loi de pesanteur.

## XVI.

Dans tout ce qui précéde pour appliquer les loix de l'hydrostatique à la détermination de la figure de la terre, on a été obligé de supposer la matiere qui la compose entierement homogéne, ce qui peut n'être pas ; il faut donc examiner ce qui seroit nécessaire pour que les parties d'un sphéroïde composé de différens fluides qui ne peuvent se mêler fussent en équilibre ; or dans une telle masse il faudroit que tous les points de toutes les surfaces qui terminent les différens fluides, fussent perpendiculaires à la direction de la pesanteur comme celle qui termine le fluide supérieur.

On voit d'abord que tous les points de la surface extérieure doivent être perpendiculaires à la direction de la pesanteur, puisque ce sphéroïde, pour être composé de fluides de différentes densités, n'en est pas moins dans le cas général d'une masse fluide quelconque qu'on sçait ne pouvoir être en équilibre sans que la direction de la pesanteur soit perpendiculaire à tous les points de sa surface.

Pour faire voir à présent que les surfaces intérieures qui terminent les différens fluides doivent aussi avoir cette condition, supposons un canal *O Q R S* dont les points *O* & *S* se terminent à la surface extérieure, & les points *Q* & *R* à la même surface intérieure sur laquelle la branche *Q R* soit couchée. Ce canal est en équilibre parce que la branche *Q R* ne pese point, car si elle pesoit, il est clair que ce canal *O Q R S* qui est en équilibre lorsque cette branche *Q R* est dans la couche *Q N H* que je suppose de vif argent, par exemple, n'y seroit plus, si *Q R* étoit dans la couche *L T G* que je suppose d'eau. Donc si la direction n'est pas perpendiculaire à tous les points de la surface *Q R H K*, elle pressera plus vers *Q* ou vers *R*; donc le canal *O Q R S* ne sera plus en équilibre, mais le fluide qui y est contenu s'échappera vers *O* ou vers *S*, selon que le canal *R Q* pesera plus vers *Q* ou vers *R*, afin que le sphéroïde entier puisse être en équilibre; il faut donc que la pesanteur soit perpendiculaire à tous les points de la surface interne *Q R H K*: on fera le même raisonnement sur toutes les surfaces qui séparent les différens fluides. Fig. 12.

Mais cette considération nouvelle ne rendra pas la détermination de la forme que doit prendre une masse fluide quelconque plus embarrassante ni plus compliquée, lorsque la pesanteur ne dépendra point de la forme de la planette, & il est aisé de faire voir que l'équilibre des planettes hétérogénes dépend des mêmes loix de pesanteur que celui des planettes homogénes; car dans les planettes hétérogénes les canaux rentrans en eux-mêmes & contenus dans une même couche seront en équilibre, puisqu'ils seront dans le même cas des canaux rentrans d'une sphére homogéne ; donc les canaux *GHLK* terminés par les deux surfaces d'une même couche, sont de même poids ; or, si les poids des tuyaux *FG*, *ML*, *GK*, *HL*, &c. sont respectivement égaux, un canal quelconque *FGKHLM* qui traversera tant de fluides qu'on voudra, sera toujours en équilibre ; ainsi la loi de pesanteur étant donnée, si on veut voir la forme que doit prendre une masse composée de fluides hétérogénes, il suffira de calculer par les principes ci-dessus donnés la figure que la même masse auroit en la supposant homogéne.

## XVII.

Mais si on vouloit avoir la figure *HKR* de la surface qui sépare deux fluides quelconques de la planette dans l'hypothèse de l'attraction, on ne trouveroit pas la même forme pour une planette hétérogéne & pour une planette homogéne, car alors la loi de pesanteur seroit différente.

Si on vouloit chercher la figure *KHR* d'une surface interne qui sépare deux fluides quelconques, il suffiroit, la loi de pesanteur étant donnée, de faire abstraction de toute la matiere supérieure à cette surface, & chercher ensuite la figure de la masse fluide restante, comme si elle étoit seule.

Mais dans l'hypothèse où la pesanteur est produite par l'attraction mutuelle de toutes les parties de la matiere, on ne pourroit plus faire abstraction de la couche supérieure ; car l'attraction de cette couche doit entrer dans l'expression de la pesanteur des parties de la masse restante.

## XVIII.

Sans connoître la forme d'un sphéroïde hétérogéne dans cette hypothèse de l'attraction mutuelle des parties de la matiere, c'est-à-dire, sans avoir déterminé la loi de pesanteur qui en résulte, on peut s'assurer que cette loi est une de celles dans lesquelles une masse fluide peut prendre une forme constante.

Car

Car il feroit aifé de voir par les raifons déja employées à l'égard des planettes homogénes, que les canaux rentrans en eux-mêmes, qui feroient renfermés dans une couche quelconque d'un même fluide, feroient en équilibre ; or, donnant à ces canaux une figure *LHGK* compofée de deux branches *LG*, *HK* qui joignent deux arcs *GK*, *HL* placés fur les deux furfaces extérieures de la couche, lefquelles auroient été déterminées par cette condition, que la gravité en chacun de leurs points feroit perpendiculaire au plan tangent de la furface en ce point, il eft clair que les branches *GK*, *HL* feroient néceffairement de même poids ; & comme on verroit de la même maniere que les branches *FG*, *ML*, *HVK* qu'il faudroit ajouter à ces premieres *GK*, *HK* pour former un canal qui traversât tant de couches que l'on voudroit du fluide, & qui aboutit à deux points de la furface extérieure du fphéroïde, feroient encore en équilibre, on en concluroit néceffairement que tous les canaux menés à volonté d'un point de la furface du fphéroïde à l'autre, feroient en repos, & par conféquent le fphéroïde entier.

## XIX.

Ce qu'on vient de dire fur l'équilibre des planettes hétérogénes, fait voir l'erreur où font tombés quelques auteurs, lefquels pour diminuer la grandeur du rayon de l'équateur que donnent les loix de l'hydroftatique, ont fuppofé que les colomnes des fluides du centre à la furface font d'autant plus denfes, qu'elles font plus près de l'équateur ; car on fçait que deux fluides de denfité inégale ne peuvent être dans la même couche, & que de plus ils doivent fe placer de maniere que le plus pefant foit le plus proche du centre ; & on vient de voir qu'il faut que la furface qui les fépare ait tous fes points perpendiculaires à la direction de la pefanteur, conditions qui s'oppofent toutes à la fuppofition de ces auteurs.

## X X.

Fig. 13. J'ai dit, Art. 7. que pour ſçavoir ſi une hypothèſe de gravité étoit propre à donner l'équilibre à une maſſe fluide $EMP$, il ſuffiſoit d'examiner ſi un canal quelconque $OSNK$ rentrant en lui-même, & placé dans le plan $ECP$ du méridien de cette maſſe fluide, étoit en équilibre lui-même, ou, ce qui revient au même, ſi le fluide renfermé dans un canal de courbure quelconque $ON$ qui aboutit à deux points pris à volonté $O$, & $N$, fait le même effort pour ſortir vers $O$ ou vers $N$ que le fluide renfermé dans tout autre canal $OKN$ qui aboutiroit aux mêmes points $O$, $N$. Pour faire voir l'uſage de ce principe, non ſeulement pour décider la poſſibilité de l'équilibre des fluides dans les hypothèſes de peſanteur dépendantes de l'attraction, telles que celles que je viens de conſidérer, mais encore dans toutes ſortes d'autres hypothèſes de gravité, je conſidérerai la queſtion plus en général de la maniere ſuivante.

Ayant abaiſſé d'un point $S$ & du point $s$ qui en eſt infiniment près, les ordonnées $SH$, $sh$ à la courbe $ON$, ſoient faites $CH = x$, $HS = y$, $Sr = dx$, $sr = dy$, $Ss = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; ſoient enſuite décompoſées toutes les différentes eſpéces de forces qu'on ſuppoſe agir ſur les particules du fluide propoſé en deux directions, les unes ſuivant $SH$ perpendiculaires à l'axe $CP$, & les autres ſuivant la paralléle à ce même axe; & ſoit pris $P$ pour déſigner la ſomme de toutes les forces qui agiſſent ſuivant $SH$, & $Q$ pour déſigner la ſomme de celles qui agiſſent dans la direction paralléles à $CP$.

Si l'on décompoſe enſuite la force $P$ pour avoir la partie de cette force qui agit dans la direction $Ss$ qui eſt celle du canal, on verra que la partie de cette force avec laquelle le fluide placé en $Ss$ fait effort pour ſortir de ce canal, ſoit vers $H$, ſoit vers $O$, doit être $\frac{P\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; on verra de même que la partie de la force $Q$ qui agit suivant la même direction doit être $\frac{Q\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, ensorte que leur somme, ou la force totale qui sollicite le fluide placé en $S$ à sortir vers $O$ ou vers $N$, doit être $\frac{P\,dy + Q\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$; multipliant donc cette force par la particule $Ss$ ou $\sqrt{dx^2+dy^2}$ qu'elle anime, on aura $P\,dy + Q\,dx$ pour le poids de $Ss$, c'est-à-dire, pour l'effort que fait cette particule pour sortir vers l'une des extrémités du canal $ON$; donc l'intégrale de $P\,dy + Q\,dx$ qu'on auroit commencé par completter par cette condition qu'elle soit nulle lorsqu'on fait $x = CG$ qui est l'abscisse qui répond au commencement $O$ du canal, & dans laquelle on auroit ensuite égalé $x$ à $CI$ (qui est l'abscisse qui répond à l'extrémité $N$ du même canal,) cette intégrale, dis-je, devroit donner une quantité qui fut toujours la même, quelque fut la courbure $ON$.

Il faut donc pour que l'équilibre des fluides soit possible dans une hypothèse de pesanteur, que les forces $P$ & $Q$ qui résultent de cette hypothèse soient telles, que la quantité $P\,dy + Q\,dx$ puisse s'intégrer sans connoître la relation de $x$ à $y$; ainsi $P\,dy + Q\,dx$ doit être en ce cas de ces sortes de différentielles que M. *Clairaut* a appellé *Complettes* dans un Mémoire qu'il a donné à l'Académie, & qui se trouve dans le Volume de 1740. p. 294.

## XXI.

$x\,dx + y\,dy$, $x\,dy + y\,dx$, $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$ sont de ces sortes de différentielles, parce qu'elles ont pour intégrales des fonctions de $x$ & de $y$, qui ne dépendent d'aucune relation entre $x$ & $y$, $y\,dx - x\,dy$, $yy\,dx + xx\,dy$ ne sont point de telles différentielles, parce qu'il n'y a aucune fonction de $x$ & de $y$ qui en puisse être les intégrales.

M. *Clairaut* a donné dans le Mémoire que je viens de citer, un Théoréme pour distinguer ces différentielles intégrales par quelque fonction de $x$ & de $y$ ; il a fait voir que si la différentielle de $P$ prise en faisant $y$ constante & $x$ variable, se trouvoit, après avoir été divisée par $dx$, égale à la quantité qui viendroit en divisant par $dy$, la différentielle de $Q$ prise en faisant $x$ constant & $y$ variable ; la différentielle $P\,dy + Q\,dx$ avoit toujours pour intégrale une fonction de $x$ & de $y$ indépendante de toute relation entre $x$ & $y$.

## XXII.

Pour donner une application de cette méthode, supposons qu'on Fig. 14. ait choisi, pour hypothèse de gravité, celle dans laquelle les particules $s$ d'une masse fluide qui tourneroit autour de son axe $CP$ tendroient toutes vers le centre $C$ par une force qui agiroit en raison composée de la raison renversée du quarré des distances $CS$ au centre, & de la raison directe du sinus de l'angle $SCH$: faisant les lignes $CH = x$. $HS = y$, la force qui anime chaque particule $S$ seroit donc une force poussant vers $C$, & exprimée par $\frac{y}{\sqrt{xx+yy}} \times \frac{1}{xx+yy}$, puisque $\frac{y}{\sqrt{xx+yy}}$ est le sinus de l'angle que feroit avec l'axe $CP$ la ligne tirée de $S$ au centre $C$.

Décomposant donc la force proposée $\frac{y}{xx+yy^{\frac{3}{2}}}$ suivant la direction $SH$ & la parallèle à $HC$, on aura $\frac{yy}{(xx+yy)^2}$ pour la force exprimée par $P$ & $\frac{yx}{(xx+yy)^2}$ pour celle exprimée par $Q$, & par ce qu'on vient de dire, l'équilibre du fluide dans cette hypothèse demande que $\frac{yy\,dy + yx\,dx}{(xx+yy)^2}$ soit une différentielle complette, c'est-à-dire, qu'elle ait pour intégrale quelque fonction de $x$ & de $y$ indépendante de la relation de $x$ à $y$.

Pour s'en assurer il faut différencier $P$ ou $\frac{yy}{(xx+yy)^2}$ en regardant $y$ comme constante, il viendra pour la différentielle $-\frac{2xyydx}{(xx+yy)^3}$, qui étant divisée par $dx$ donne $-\frac{2xyy}{(xx+yy)^3}$, différenciant de même $Q$ ou $\frac{xy}{(xx+yy)^2}$ & faisant $x$ constante, il viendra la différentielle $\frac{x^3dy-xyydy}{(xx+yy)^3}$, qui étant divisée par $dy$ donne $\frac{x^3-xyy}{(xx+yy)^3}$; maintenant on voit que la quantité $-\frac{2xy^2}{(xx+yy)^3}$ venue par la premiere opération, n'est point la même que $\frac{x^3-xyy}{(xx+yy)^3}$ venue par la seconde; donc la différentielle proposée n'est point intégrale en général, c'est-à-dire, quelle que soit la relation de $x$ à $y$; donc l'hypothèse de gravité qui a donné cette différentielle, est de celle dans lesquelles les fluides ne seroient point en équilibre.

## XXIII.

Pour donner un exemple d'une hypothèse qui réussisse, imaginons que les particules du fluide soient animées par des forces qui les fassent tendre à deux centres $A$ & $B$ placés dans l'axe de révolution : la premiere de ces forces agissant comme une puissance quelconque $m$ de la distance $AS$, & la seconde comme une puissance quelconque $n$ de la distance $BS$. Je commence par faire les lignes $HS=y$. $CA=a$. $CH=x$. $BC=b$. $AH=x-a$. $AS=\sqrt{\overline{x-a}^2+yy}$. $BH=b+x$. $BS=\sqrt{\overline{b+x}^2+yy}$. la force par laquelle la particule $S$ tendra vers $A$ sera donc $A\times AS^m$, ou $A\left(\overline{a-x}^2+yy\right)^{\frac{m}{2}}$, & la force par laquelle cette même particule $S$ tendra vers $B$, sera exprimée par $B\times BS^n$, ou $B\left(\overline{b-x}^2+yy\right)^{\frac{n}{2}}$, $CH$ & $HS$ Fig. 15.

étant les coordonnées répondantes au point $S$, $CA$ & $CB$, les droites qui marquent la position des points attractifs $A$ & $B$ par rapport à l'origine de $x$.

Il est évident que la force $P$ trouvée en décomposant les forces des points $A$ & $B$ suivant $SH$, sera $A\,(AS)^m \times \frac{HS}{AS} + B\,(BS)^n \times \frac{HS}{BS}$, c'est-à-dire, en termes analytiques $Ay\left(\overline{x-a}^2 + yy\right)^{\frac{m-1}{2}} + By\left(\overline{b+x}^2 + yy\right)^{\frac{n-1}{2}}$. La force $Q$ se trouvera de même exprimée par $A \times \overline{x-a}\left(\overline{x-a}^2 + yy\right)^{\frac{m-1}{2}} + B \times \overline{b+x}\left(\overline{b+x}^2 + yy\right)^{\frac{n-1}{2}}$; différenciant maintenant $P$ ou $Ay\left(\overline{x-a}^2 + yy\right)^{\frac{m-1}{2}} + By\left(\overline{b+x}^2 + yy\right)^{\frac{n-1}{2}}$, & faisant $y$ constante & divisant par $dx$ la différentielle venue, on aura $A \times \overline{m-1}\left(\overline{x-a}^2 + yy\right)^{\frac{m-3}{2}} \times y \times \overline{x-a} + B \times \overline{n-1}\left(\overline{b+x}^2 + yy\right)^{\frac{n-3}{2}} \times y \times \overline{b+x}$.

Différenciant de même $Q$ ou $A \times \overline{x-a}\left(\overline{x-a}^2 + yy\right)^{\frac{m-1}{2}} + B \times \overline{b+x}\left(\overline{b+x}^2 + yy\right)^{\frac{n-1}{2}}$ en supposant $x$ constant, & divisant la différentielle par $dy$, on aura $A \times \overline{x-a} \times \overline{m-1}\, y\left(\overline{x-a}^2 + yy\right)^{\frac{m-3}{2}} + B \times \overline{b+x} \times \overline{n-1}\, y\left(\overline{b+x}^2 + yy\right)^{\frac{n-3}{2}}$; or cette quantité étant visiblement la même que celle qu'on a eu en différenciant $P$; cette différentielle $Pdy + Qdx$, est une différentielle complette dans cette hypothèse, & l'équilibre y est possible.

Au reste, sans prendre la peine de différencier $P$ & $Q$, on pouvoit reconnoître facilement que la différentielle proposée, $Aydy\left(\overline{x-a}^2 + yy\right)^{\frac{m-1}{2}} + Bydy\left(\overline{b+x}^2 + yy\right)^{\frac{n-1}{2}}$, étoit complette : car son intégrale se trouve tout de suite, & est

$\frac{A}{m+1}\left(\overline{x-a}^{2}+yy\right)^{\frac{m+1}{2}}+\frac{B}{n+1}\left(\overline{b+x}^{2}+yy\right)^{\frac{n+1}{2}}$,
& je n'ai donné la maniere de reconnoître la possibilité de son intégration par l'opération précédente, que pour mieux faire voir l'usage du Théoréme de M. *Clairaut* dans d'autres cas où il seroit peut-être si difficile d'intégrer, qu'on abandonneroit l'intégration sans sçavoir si elle possible ou non.

## XXIV.

Après avoir reconnu qu'une hypothèse de gravité n'a rien de contraire à l'équilibre des fluides, on trouvera de la maniere suivante la figure que doit avoir, dans cette hypothèse, une planette dont le temps de la rotation est donné.

Soit imaginé que le canal $ON$ est prolongé d'une part jusqu'au centre $C$, & de l'autre jusqu'à la surface $M$, il est évident, par ce qu'on vient de dire, que l'intégrale de $Pdy + Qdx$ étant complettée par cette condition, qu'elle disparoisse quand $y$ & $x = o$, on n'aura qu'à retrancher de cette intégrale, laquelle exprime le poids total du canal $COM$ (en supposant que $x$ & $y$ soient les coordonnées $CQ$ & $QM$ du méridien) la somme des efforts centrifuges des parties de $CM$, & faire la différence égale à une constante. Fig. 13.

Comme la somme des efforts centrifuges de $CM$ doit être, par ce qu'on a vû, la même que celle des efforts d'un canal $QM$ placé dans le sens de l'ordonnée, la question est réduite à sommer les efforts de $QM$.

Soit donc nommée $f$ la force centrifuge produite à la distance $r$ par la rotation du sphéroïde, on aura $\frac{fy}{r}$ pour la force centrifuge à une distance quelconque $y$, & $\frac{fydy}{r}$ pour l'effort centrifuge de la particule $dy$; intégrant donc cette différentielle, on aura $\frac{fyy}{2r}$ pour l'effort centrifuge total des parties de $QM$

ou de $CM$; donc $\int (P\,dy + Q\,dx) - \frac{fyy}{2r}$ étant égalé à une constante, donnera l'équation cherchée du méridien de la planette dans l'hypothèse, où la pesanteur décomposée suivant les deux axes a donné les forces $P$ & $Q$.

Ainsi dans l'hypothèse que je viens de prendre d'une gravité produite par la tendance à deux points $A$ & $B$, la différentielle $P\,dy + Q\,dx$ ayant donné pour son intégrale $\frac{A}{m+1}$ $(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n+1}{2}}$, l'équation du sphéroïde dans cette hypothèse, doit être $\frac{A}{m+1}$ $(\overline{x-a}^2 + yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(\overline{b+x}^2 + yy)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{fyy}{2r} = C$, ($\frac{fyy}{2r}$ étant la somme de la force centrifuge sur une colomne comme $y$, & $C$ étant une constante qu'on suppose égale au poids des colomnes quelconques qui vont du centre à la surface.)

Si on suppose les centres attractifs $A$ & $B$ réunis, & qu'on prenne les origines des $x$ de ce centre, l'équation précédente seroit, en ce cas, $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}}$ $- \frac{fyy}{2r} = C$ qui exprime la figure d'une planette dans l'hypothèse que ses parties pesent vers un centre suivant une force composée de la somme de deux puissances différentes de la distance, cette force étant alors $Ad^m + Bd^n$, ($d$ exprimant la distance des particules au centre attractif.)

## XXV.

Pour montrer la maniere dont on doit faire usage de l'équation générale précédente dans des applications aux cas qui ont lieu

lieu dans la nature, je vais montrer comment on doit déterminer les coëficiens de l'équation $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{fyy}{2r} = C$ dans le cas où le sphéroïde est la terre, en supposant que la gravité y fut produite par une tendance vers un centre exprimée par $Ad^m + Bd^n$.

Supposant que le demi axe de révolution soit donné, & qu'il soit égal à $t$, je substitue cette valeur pour $x$ dans l'équation $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{fyy}{2r} = C$, je fais en même temps $y = o$ dans cette même équation, parce que l'ordonnée doit être au pole, & il me vient alors $\frac{A}{m+1}t^{m+1} + \frac{B}{n+1}t^{n+1} = C$, ce qui détermine la constante $C$.

Je suppose ensuite que $r$ soit le rayon de l'équateur, & je prends $\varphi$ pour exprimer le rapport de la force centrifuge à la gravité sous l'équateur, & dans le cas où le sphéroïde est la terre, $\varphi = \frac{1}{288}$ à peu près : comme dans l'hypothèse qu'on examine ici, la gravité à l'équateur, c'est-à-dire à la distance $r$, doit être $Ar^m + Br^n$; j'ai donc $\varphi Ar^m + \varphi Br^n$ à substituer à $f$ (ces quantités exprimant la force centrifuge absolue); je fais donc cette substitution dans l'équation $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}} - \frac{fyy}{2r} = C$, & j'ai $\frac{A}{m+1}(xx+yy)^{\frac{m+1}{2}} + \frac{B}{n+1}(xx+yy)^{\frac{n+1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\varphi Ar^{m-1} + \frac{1}{2}\varphi Br^{n-1}\right) yy = \frac{A}{m+1}t^{m+1} + \frac{B}{n+1}t^{n+1}$; pour déterminer ensuite le rapport de $t$ à $r$ je fais $x = o$, & $y = r$, car lorsque l'abscisse est nulle l'ordonnée devient le rayon de l'équateur, & j'ai par ce moyen l'équation $\frac{A}{m+1} r^{m+1} + \frac{B}{n+1} r^{n+1} - \frac{1}{2} A \varphi r^{m+1} - \frac{1}{2} B \varphi r^{n+1} = \frac{A}{m+1} t^{m+1} + \frac{B}{n+1} t^{n+1}$ par laquelle on voit bien qu'on ne peut pas manquer d'avoir le rapport cherché de $t$ à $r$, quel que soit le rapport $\varphi$ de la force centrifuge sous l'équateur, & quels que soient les nombres choisis pour $A$, $B$, $m$, $n$ dans l'hypothèse de gravité $A d^m + B d^n$.

Lorsque $\varphi$ est une très-petite quantité comme cela arrive dans le cas de la terre, le calcul peut se simplifier beaucoup.

Soit mis $r(1-\delta)$ à la place de $t$, & parconséquent $r^{m+1} \left(1 - \overline{m+1}\,\delta + \frac{\overline{m+1} + \overline{m+2}}{2} \delta^2 - \frac{\overline{m+1} \times \overline{m+2} \times \overline{m+3}}{2 \times 3} \delta^3 + \&c.\right)$ à la place de $t^{m+1}$ & $r^{n+1} \left(1 - \overline{n+1}\,\delta + \frac{\overline{n+1} \times \overline{n+2}}{2} \delta^2 - \frac{\overline{n+1} \times \overline{n+2} \times \overline{n+3}}{2 \times 3} \delta^3 + \&c.\right)$ à la place de $t^{n+1}$, & en substituant les quantités dans l'équation $\frac{A}{m+1} r^{m+1} + \frac{B}{n+1} r^{n+1} - \frac{1}{2} \varphi A r^{m+1} - \frac{1}{2} B \varphi r^{n+1} = \frac{A}{m+1} t^{m+1} + \frac{B}{n+1} t^{n+1}$ elle deviendra $\frac{A}{m+1} r^{m+1} + \frac{B}{n+1} r^{n+1} - \frac{1}{2} A \varphi r^{m+1} - \frac{1}{2} B \varphi r^{n+1} = \frac{A}{m+1} r^{m+1} \left(1 - \overline{m+1}\,\delta + \frac{\overline{m+1} + \overline{m+2}}{2} \delta^2 - \&c.\right) + \frac{B}{n+1} r^{n+1} \left(1 - \overline{n+1}\,\delta + \frac{\overline{n+1} + \overline{n+2}}{2} \delta^2 - \&c.\right)$ qui se réduit à $-\frac{1}{2} \varphi A r^{m+1} - \frac{1}{2} \varphi B r^{n+1} = \frac{A r^{m+1}}{m+1} \left(-\overline{m+1}\,\delta + \frac{\overline{m+1} \times \overline{m+2}}{2} \delta^2 - \&c.\right) + \frac{B}{n+1} r^{n+1} \left(-\overline{n+1}\,\delta + \frac{\overline{n+1} \times \overline{n+2}}{2} \delta^2 - \&c.\right)$ ou bien $+\frac{\varphi}{2} A r^{m+1} + \frac{\varphi}{2} B r^{n+1}$

$$= Ar^{m+1}\left(\delta - \frac{m+2}{2}\delta^2 + \frac{\overline{m+2}\times\overline{m+3}}{2\times 3}\delta^3 - \&c.\right)$$

$$+ Br^{n+1}\left(\delta - \frac{n+2}{2}\delta^2 + \frac{\overline{n+2}\times\overline{n+3}}{2\times 3}\delta^3 - \&c.\right).$$

$$= \left(Ar^{m+1} + Br^{n+1}\right)\delta - Ar^{m+1}\left(\frac{m+2}{2}\delta^2\right.$$

$$\left. - \frac{\overline{m+2}\times\overline{m+3}}{2\times 3}\delta^3 + \&c.\right) - Br^{n+1}\left(\frac{n+2}{2}\delta^2 + \right.$$

$$\left.\frac{\overline{n+2}\times\overline{n+3}}{2+3}\delta^3 + \&c.\right)$$ & en divisant les deux membres de cette derniere équation par $Ar^{m+1} + Br^{n+1}$, & transposant tous les termes où sont $\delta^2$, $\delta^3$, &c. on aura $\delta = \frac{\varphi}{2}$

$$+ \frac{Ar^{m+1}\left(\frac{m+2}{2}\delta^2 - \frac{\overline{m+2}\times\overline{m+3}}{2\times 3}\delta^3 + \&c.\right)}{Ar^{m+1} + Br^{n+1}}$$

$$+ \frac{Br^{n+1}\left(\frac{n+2}{2}\delta^2 - \frac{\overline{n+2}\times\overline{n+3}}{2\times 3}\delta^3 + \&c.\right)}{Ar^{m+1} + Br^{n+1}}.$$

Si on suppose maintenant que $\delta$ soit une très-petite quantité, ainsi qu'elle l'est en effet pour la terre, on peut négliger sans scrupule tous les termes qui suivent $\frac{\varphi}{2}$, desorte que (quels que soient $A$, $B$; $m$, $n$,) $\delta$ qui marque ce que l'excès de l'équateur sur l'axe est à l'équateur, se trouve, sans erreur sensible, la moitié de ce que la force centrifuge est à l'égard de la gravité; ainsi $\varphi$ étant pour la terre $= \frac{1}{289}$, ou à $\delta = \frac{1}{578}$, ou, ce qui revient au même, les axes sont en ce cas comme 578 à 577 quels que soient $A$, $B$, $m$, $n$.

On verroit de même que quelque fut le nombre de termes tels que $A\delta^m + B\delta^n + C\delta^p +$ &c. qu'on prendroit pour exprimer la gravité, & enfin que quelle que fut la loi de gravité, pourvû qu'elle tendit au centre, le rapport des axes ne feroit pas fenfiblement plus grand que celui de 578 à 577.

## XXVI.

M. *Clairaut* a démontré cette Propofition d'une autre maniere page 141. de fa Théorie de la figure de la terre, & il en a conclu que toutes les hypothèfes de pefanteur où la force tendroit vers le centre de la terre, devoient être exclues, quelle que fut la loi de cette tendance, puifque les obfervations ont appris que l'applatiffement de la terre eft plus confidérable que celui d'un fphéroïde dont les axes feroient entr'eux comme 578 à 577.

Il femble d'abord qu'on ne foit en droit de rejetter par ce calcul que les hypothèfes qui feroient dépendre la tendance vers un centre de la feule diftance à ce centre, mais fi l'on fe fouvient qu'on a vu Art. 15. que l'équilibre des fluides ne permet pas de fuppofer qu'il entre dans l'expreffion de la force qui tend vers un centre, autre chofe que la diftance à ce centre, on verra qu'on ne peut, fans être démenti par l'expérience journaliere de l'équilibre des eaux qui couvrent la terre, ou par les opérations faites au Nord, en France & à l'équateur pour déterminer la figure de la terre, recevoir aucune hypothèfe où la pefanteur ne tendit que vers un centre.

## XXVII.

Je ne ferai aucune autre application du Problème précédent à la théorie de la figure de la terre, parce que mon but étant de traiter les matieres relatives au Livre des Principes, je dois donner la préférence aux hypothèfes où la gravité fur la terre dépend de l'attraction de toutes les parties de la terre : la détermination de la figure de la terre eft bien plus embarraffante dans ces hypothèfes, & elle feroit peut-être d'une difficulté infurmontable fans les abréviations qu'apporte la fuppofition que fes axes different très-peu l'un de l'autre.

Je regarderai donc ces différences d'axes comme on regarde les différentielles dans le calcul infinitésimal ; ainsi plus elles seront petites, plus les axes seront déterminés exactement par la théorie suivante.

Si, par exemple, les axes ne déférent entr'eux que de $\frac{1}{200}$ e, ce qui est à peu près le cas de la terre ; les calculs suivans seroient exacts à $\frac{1}{(200)^2}$ ou $\frac{1}{40000}$ près, ou, ce qui revient au même, les erreurs qui pourroient s'y glisser seroient telles, qu'au lieu de trouver l'axe au diamétre de l'équateur comme 200 à 201, on le trouveroit peut-être comme 199 à 200, ou comme 201 à 202 ; on voit bien que de telles erreurs ne sont pas d'assez grande conséquence pour chercher à les éviter par des calculs très-pénibles.

# SECTION IV.

## SECONDE PARTIE.

*De la théorie de la figure de la Terre, en supposant que la gravité soit le résultat des attractions de toutes les parties de la Terre.*

### XXVIII.

### PROPOSITION I. PROBLÉME I.

*On demande l'attraction qu'exerce un sphéroïde elliptique* BEbe *sur un corpuscule* P *placé sur le prolongement de son axe de révolution.* Fig. 16.

Soient $BDbd$ la sphére inscrite à ce sphéroïde, $EC$ le diametre de l'équateur du sphéroïde, $Pmn$, $PMN$ deux droites quelconques partant de $P$ & faisant un angle infiniment petit entr'elles, $kmq$, $KMQ$, $LNR$, $lnr$ des plans élevés perpendiculairement à $PBb$.

Nous chercherons premierement l'attraction qu'exercent sur $P$, suivant $PC$, les deux petits anneaux produits par la révolution de $KMkm$, $LNln$ autour de $Bb$.

La petite couronne produite par la révolution de $KM$, aura pour valeur $KM \times QM \times c$ (en supposant que $c$ exprime le rapport de la circonférence au rayon,) & multipliant cette valeur par l'épaisseur $Qq$, $KM \times QM \times C \times Qq$ exprimera la solidité de l'anneau $KMKm$, & toutes les parties de l'anneau attirant également le corpuscule $P$, il faut multiplier cette expression $KM \times c \times QM \times Qy$ par $\frac{1}{PM^2} \times \frac{PQ}{PM}$ qui exprime l'attraction du corpuscule placé en $M$ sur $P$, décomposée suivant $PQ$, & le produit $c \times KM \times QM \times Qq \times \frac{PQ}{PM^3}$ exprimera l'attraction de l'anneau entier sur $P$ dans la direction $PQ$.

Remarquant maintenant qu'à cause de la propriété de l'ellipse $KM = QM \times \frac{DE}{CD}$, & que les triangles semblables $PCO$, $PQM$ donnent $\frac{PO}{PC} = \frac{PQ}{PM}$, & $\frac{CO}{PC} = \frac{MQ}{PM}$, l'expression précédente se changera en $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{PC^3} \times Qq$.

On verroit de même que l'attraction de l'anneau $NLln$ dans la même direction, seroit $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{PC^3} \times Rr$, ainsi la somme de ces deux attractions sera $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{PC^3} \times \overline{Qq + Rr}$ ou $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{PC^3} \times d(QR)$

Soit faites les lignes $CD = r$. $CP = e$. $OM = ON = u$.

& le rapport $\frac{ED}{CD} = \delta$, on aura $CO = \sqrt{rr - uu}$, & par conséquent $PO = \sqrt{PC^2 - CO^2} = \sqrt{ee - rr + uu}$, & $QR = \frac{2u\sqrt{ee - rr + uu}}{e}$; donc l'expression $c \times \frac{ED}{CD} \times CO^2 \times \frac{PO}{CP^3} \times \overline{Qq + Rr}$ deviendra $c\delta(rr - uu) \times \frac{\sqrt{ee - rr + uu}}{e^3} \times d\left(\frac{2u\sqrt{ee - rr + uu}}{e}\right) = c\delta(rr - uu) \times \frac{\sqrt{ee - rr + uu}}{e^3} \times \frac{\overline{2ee - rr}du + 4uudu}{e\sqrt{ee - rr + uu}}$ qui se réduit à $c\delta du\left(\frac{2e^2r^2 - 2r^4}{e^4}\right) + c\delta u^2 du\left(\frac{6r^2 - 2e^2}{e^4}\right) - \frac{4c\delta u^4 du}{e^4}$, dont l'intégrale $c\delta\left(\frac{2e^2r^2 - 2r^4}{e^4}\right)u + c\delta\left(\frac{6r^2 - 2e^2}{3e^4}\right)u^3 - \frac{4c\delta u^5}{5e^4}$ exprimera l'atttraction que le solide produit par la révolution de l'espace $KMNL$ autour de $Bb$ exerce sur $P$.

Si l'on fait dans cette valeur $u = r$, c'est-à-dire, $MO = NO = CD$, elle deviendra $\frac{4cr^3\delta}{3e^2} - \frac{4cr^5\delta}{5e^4}$ & exprimera l'attraction de tout l'espace compris entre la sphére & le sphéroïde: ainsi ajoutant à cette expression $\frac{2cr^3}{3ee}$, qui suivant l'Article quatriéme de la deuxiéme Section, exprime l'attraction de la sphére $BDbd$ sur le même corpuscule, on aura $\frac{4cr^3\delta}{3e^2} - \frac{4cr^5\delta}{5e^4} + \frac{2cr^3}{3e^2}$ pour l'attraction demandée du sphéroïde. *C. Q. F. T.*

## XXIX.

### *COROLLAIRE.*

Si on suppose $r = e$, c'est-à-dire, si on suppose que le corpuscule soit placé au pole du sphéroïde, l'expression précédente se réduira à $\frac{2cr}{3} + \frac{8}{15}cr\delta$.

## XXX.

## PROPOSITION II. LEMME I.

K o L *représentant un cercle ou une ellipse, ou toute autre courbe dont les diamétres sont partagés en deux parties égales par le centre* H, *je dis que l'attraction que cette figure exerce sur un corpuscule placé en* μ *dans la ligne* μ H *élevée perpendiculairement au-dessus de son centre, ne différe de celle qu'il exerceroit sur un corpuscule placé en* M *à même hauteur que* μ, *& à une distance infiniment petite de ce point* μ, *que d'une quantité infiniment petite du second ordre.*

Fig. 17. Tirant un diamétre quelconque $KL$ à la figure proposée, & joignant les lignes $KM$, $ML$, l'attraction suivant $\mu H$ que deux particules égales supposées en $K$ & en $L$ exercent sur $\mu$, sera exprimée par $\frac{H\mu}{K\mu^3} + \frac{H\mu}{\mu L^3}$; l'attraction de $K$ sur $\mu$ suivant $K\mu$ est $\frac{1}{K\mu^3}$, & $\frac{H\mu}{K\mu} \times \frac{1}{K\mu^2}$ est la partie de cette force qui agit suivant $H\mu$ en la décomposant; car on aura $K\mu : H\mu :: \frac{1}{\mu K^2} : \frac{H\mu}{K\mu^3}$, prenant 1 pour la masse de chaque particule supposée $K$ & en $L$.

L'attraction des mêmes particules sur $M$ suivant $MV$ abaissée perpendiculaire au plan $KL$, sera $\frac{MV}{KM^3} + \frac{MV}{LM^3}$ abaissant ensuite $VX$ perpendiculaire à $KL$, & faisant les lignes $HL = KH = b$. $\mu H = MV = a$. $K\mu = \sqrt{aa + bb} = c$. $HX = \alpha$. $XV = \beta$, on aura $KX = b + \alpha$, $XL = b - \alpha$, $HV = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $HM = \sqrt{a^2 + \alpha^2 + \beta^2}$, $KM = \sqrt{cc + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha b}$, $ML = \sqrt{cc - 2\alpha b + \alpha^2 + \beta^2}$.

Si on substitue maintenant ces valeurs dans les expressions $\frac{\mu H}{K\mu^3} + \frac{\mu H}{L\mu^3}$ & $\frac{MV}{KM^3} + \frac{MV}{ML^3}$, elles se changeront en $\frac{2a}{c^3}$ &

& $\frac{a}{(cc+\alpha^2+\beta^2+2\alpha b)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a}{(c^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha b)^{\frac{3}{2}}}$. Si l'on éleve maintenant, par le binome de *Newton*, les quantités qui sont au dénominateur, & qu'on néglige les secondes, troisiémes, &c. puissances des quantités infiniment petites $\alpha$, $\beta$, le terme $\frac{a}{(c^2+\alpha^2+\beta^2+2\alpha b)^{\frac{3}{2}}}$ se changera en $a \times c^{-3} - \frac{3}{2}c^{-5} \times 2b\alpha$ ou $\frac{a}{c^3} - \frac{3ab\alpha}{c^5}$, & le terme $\frac{a}{(cc-2b\alpha+\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$ deviendra $\frac{a}{c^3} + \frac{3ab\alpha}{c^5}$, & ajoutant ces deux termes, on aura pour leur somme $\frac{2a}{c^3}$; donc les deux corpuscules placés en $K$ & en $L$ exercent en $\mu$ & en $M$ suivant $\mu H$ & $MV$, la même force à un infiniment petit près du second ordre.

L'attraction que les corpuscules $K$ & $L$ exercent en $M$, ne se faisant pas dans l'exacte rigueur suivant $MV$, il faut, outre cette attraction suivant $MV$, en prendre deux nouvelles, dont l'une agit dans la direction $XV$ perpendiculaire à $KL$, & l'autre suivant $KL$. L'attraction suivant $XV$, seroit de même exprimée par $\frac{XV}{KM^3} + \frac{XV}{ML^3}$, celle suivant $KL$ le seroit par $\frac{KX}{KM^3} - \frac{LX}{ML^3}$; mais comme ces deux attractions sont infiniment petites, & qu'elles agissent dans des directions perpendiculaires à $MV$, on voit qu'elles ne produiront jamais par leur composition avec la force suivant $VM$ qu'une somme qui ne différera de la premiere qu'on a trouvé avant de faire attention à ces forces, que d'un infiniment petit du second ordre, par la même raison que l'hipoténuse d'un triangle, dont un côté est fini & l'autre infiniment petit, ne différe de son côté fini que d'un infiniment petit du second ordre.

Dès qu'on est donc assuré que deux corpuscules égaux placés en $K$ & en $L$ attirent également les corps placés en $\mu$ & en $M$, on voit qu'il en doit être de même d'une figure quelconque $KoL$, pourvu que *H* soit le centre de cette figure, c'est-à-dire, pourvu que toutes les lignes qui la traversent soient partagées en deux parties égales lorsqu'elles passent par *H*.

L'attraction absolue que les corpuscules égaux placés en *K* & en *L* exercent sur *M*, se faisant suivant une direction qui diffère infiniment peu de *HM*, il est clair que leur attraction, suivant cette direction, ne différera de leur attraction absolue, que d'une quantité infiniment petite du second ordre, & que par conséquent la figure *KoL* exercent en $\mu$ suivant $H\mu$, & en *M* suivant *HM* des attractions qui peuvent être prises l'une pour l'autre, en négligeant les différences du second ordre. *C. Q. F. D.*

## XXXI.

## PROPOSITION III. LEMME II.

P E p e *représentant un sphéroïde elliptique infiniment peu différent d'une sphère dont* P p *est l'axe de révolution*, E e *le diamètre de l'équateur*, N n *un diamètre quelconque de ce sphéroïde*, & M *un corpuscule placé sur le prolongement de ce diamètre; je dis que l'attraction exercée par le sphéroïde sur ce corpuscule suivant la direction* M N, *sera la même que celle qu'exerceroit un autre sphéroïde dont* N n *seroit l'axe de révolution, & dont la quantité de matiere seroit la même que celle du premier.*

Fig. 18. Pour le démontrer soit imaginé le sphéroïde *PEpe* coupée en une infinité de tranches *LlKk* par des plans perpendiculaires au méridien *PEpe* sur les ordonnées *LK*, *lk* au diamètre *Nn*; *H* étant le centre de ces tranches, leurs attractions sur *M* seront les mêmes par l'Article 30. que celles qu'elles exerceroient dans le cas où l'on feroit mouvoir toutes ces tranches autour des points *H*, jusqu'à ce qu'elles devinssent perpendiculaires à *NHn*, à cause que supposant l'ellipsoïde infiniment peu différent d'une sphère, les diamètres *HN* ne peuvent faire avec leurs ordonnées *LK* que des angles infiniment peu différens de l'angle droit.

Le ſolide qu'on auroit par le mouvement infiniment petit ſuppoſé aux tranches $LK$, $lk$ qui les mettroit dans une ſituation perpendiculaire à l'axe $Nn$, ne différeroit en ſolidité du ſphéroïde $PEpe$ que d'un infiniment petit du ſecond ordre.

De plus, l'attraction de chacune des tranches elliptiques qui le compoſeroient, pourroient être regardée comme égale à celle que produiroit des cercles de même ſuperficie, car ces ellipſes différent infiniment peu de ces cercles par la ſuppoſition ; or les cercles qui les égalent en ſuperficie étant ſuppoſés placés ſur le même plan qu'elles, & avoir le même centre, les différences de leurs attractions ſur le corpuſcule, ne pourroient être attribuées qu'au plus ou au moins de diſtance des parties qui compoſeroient les eſpéces de lunulles qui marqueront l'excédent des deux figures l'une ſur l'autre ; or ces lunulles étant infiniment petites, le plus ou le moins de diſtance de leurs parties au corps attiré ne produira qu'un infiniment petit du ſecond ordre dans l'attraction. *C. Q. F. D.*

## XXXII.

## PROPOSITION IV. LEMME III.

*PE étant une ellipſe infiniment peu différente du cercle,* $PC = 1$ *étant ſon petit axe,* $1 + \delta = CE$ *ſon ſecond axe,* $S =$ *ſinus de l'angle* $MCP$, *le rayon* $CM$ *aura pour valeur* $1 + \delta SS$ *en négligeant le quarré de* $\delta$ *& ſes puiſſances plus élevées.*

Ayant décrit ſur l'axe $PC$ le quart de cercle $PD$, on verra, par la propriété de l'ellipſe, que $MO : QO :: ED : CD$, c'eſt-à-dire, que $MO = QO \times \delta$; mais à cauſe que $MO$ eſt infiniment petite par l'hypothèſe, $MIO$ pourra être pris pour un triangle, lequel ſera ſemblable au triangle $OCQ$ ; on aura donc $OC : OQ :: MO : MI$, c'eſt-à-dire, $1 : OQ :: OQ \times \delta : MI$; donc $MI = OQ^2 \times \delta$; donc $CM = CO + MI = OC + (QO^2) \times \delta$, ou $1 + (QO^2) \times \delta$, ou bien $CO + \left(\frac{MQ^2}{MC^2}\right) \times \delta$; car Fig. 19.

puiſque $OC = 1$, $\frac{MQ}{MC}$ ne différe de $\frac{OQ}{OC} = QO$ que d'une grandeur infiniment petite; donc $\delta \times (OQ^2)$ déja infiniment petit, ne peut différer de $\delta \times \left(\frac{MQ^2}{MC^2}\right)$ ou $\delta SS$ que d'un infiniment petit du ſecond ordre; donc on aura $CM = 1 + \delta SS$.

## XXXIII.

## PROPOSITION V. LEMME IV.

### *Préparation du Lemme 4.*

On a vu par les Propoſitions 2 & 3 de cette Section, l'attraction qu'un ſphéroïde quelconque, compoſé d'une infinité de couches de denſités & d'ellipticités différentes, exerce ſur les corpuſcules placés à ſa ſurface dans la direction du rayon; mais comme cette direction n'eſt pas celle ſuivant laquelle ſe fait l'attraction du ſphéroïde, on va chercher les moyens d'avoir la véritable direction. On voit bien, à cauſe de la différence infiniment petite qui eſt ſuppoſée entre le ſphéroïde & la ſphére, que la vraie direction de l'attraction ne peut s'écarter que d'un angle infiniment petit de la direction du rayon, & qu'ainſi la force de l'attraction eſt telle qu'on vient de la trouver quant à la quantité, & que quant à la direction, elle n'en différe que d'un infiniment petit du ſecond ordre; mais on a beſoin, pour la figure de la terre, d'avoir, outre la quantité abſolue de l'attraction à un point quelconque, la vraie direction de l'attraction à ce point.

Fig. 20. *Lemme 4.* L'attraction qu'un cercle $RIr$ exerce ſur un corpuſcule $M$ placé perpendiculairement au-deſſus du point $H$, lequel eſt infiniment peu écarté du centre $Y$, étant décompoſée ſuivant $HY$, la partie de cette force réſultante de cette décompoſition ſera exprimée par $\frac{\frac{1}{2}c \times HY \times RH^2}{MR^3}$ ($RHY$ étant le diamétre qui paſſe par le point $H$) en négligeant les quantités infiniment petites du ſecond ordre.

Ayant élevé $IHi$ perpendiculaire à $Rr$, & transporté le segment $IRi$ en $iZI$, il est évident que l'espace lunulaire $iZIr$ sera la seule partie du cercle $RIri$ qui attirera le corpuscule $M$ dans la direction $Rr$, puisque les deux segmens $IRi$, $IZi$ ont des attractions qui se détruisent.

Supposons l'espace $IriZ$ partagé en une infinité d'élémens par les lignes $QTS$, $qts$ perpendiculaires à $Ii$, il est évident que l'attraction absolue de chaque élément $TtSs$ sur $M$, sera cet espace même divisé par le quarré de la distance $TM$; donc $\frac{TtSs}{TM^2}$ est cette force; mais il faut la décomposer suivant $HY$, ou sa parallèle $QT$; or cette décomposition la diminuera dans la raison de $QT$ à $MT$, donc $\frac{TtSs}{TM^3} \times QT$ est l'attraction de l'élément $TtSs$ suivant la direction $HY$.

Mais la valeur de $TtSs$ est $TS \times Qq$ & $TS = 2HY$ par la construction; donc l'attraction de l'élément $TtSs$ est $\frac{2HY \times Qq \times QT}{MT^3}$, ou $\frac{2HY \times Qq \times QT}{MR^3}$, en négligeant les infiniment petits du second ordre.

Pour intégrer cette quantité dans laquelle $HY$ & $MR$ sont des constantes, je remarque que $Qq \times QT$ est la différentielle du segment $HQTZ$; donc $\frac{2HY}{MR^3} \times HQTZ$ est l'attraction que l'espace $TZVS$ exerce sur $M$ suivant $HY$.

Supposant ensuite $HQ = Hi$, on aura $\frac{2HY}{MR^3} \times HiZ$ pour l'attraction de l'espace $iTZrS$, dont le double $\frac{4HY}{MR^3}$ $(HiZ)$ sera l'attraction de $IZiSr$, ou, ce qui revient au même, l'attraction du cercle entier.

Si on regarde dans cette valeur l'espace $iHZI$ comme un demi cercle dont le rayon seroit $RH$, ce qui ne peut apporter qu'une erreur infiniment petite du ſecond ordre, cette expreſſion $\frac{4HY}{MR^3}(HiZ)$ ſe changera en $\frac{\frac{1}{2}c \times HY \times RH^2}{MR^3}$.

## XXXIV.

### *COROLLAIRE.*

Si la courbe *RirI* au lieu d'être un cercle étoit une autre courbe qui s'en écartât infiniment peu, telle qu'une ellipſe dont *Rr* ſeroit l'un des axes, & dont l'autre axe différeroit infiniment peu de celui-ci, l'attraction pourroit toûjours, ſans erreur ſenſible, être exprimée par $\frac{\frac{1}{2}c \times HY \times RH^2}{MR^3}$; car on voit bien que ſi l'on faiſoit entrer dans le calcul la différence des axes de cette ellipſe, elle ne pourroit produire dans une quantité, déja infiniment petite par elle-même, qu'une quantité infiniment petite du ſecond ordre.

## XXXV.

### PROPOSITION VI. LEMME V.

*Soit* KLkl *un ſphéroïde dont l'axe de révolution* Kk *diffère infiniment peu du diamétre de l'équateur* Ll, *ſoient de plus* M *un corpuſcule placé hors du ſphéroïde*, PMEpe *l'ellipſe ſemblable à* KLkl *laquelle paſſeroit par le corpuſcule* M, MX *la perpendiculaire en* M *à cette ellipſe, laquelle perpendiculaire eſt terminée par la ligne* CX *élevée perpendiculairement ſur* CM; *je dis que l'attraction que le ſphéroïde* KLkl *exercera ſur* M *dans la direction* CX, *aura pour expreſſion* $\frac{2}{5}c \times \frac{CN^5}{CM^5} \times CX$.

Fig. 21. Soient *MRS*, *M*ρΣ, deux droites partant de *M* & rencontrant le ſphéroïde : *R*ρ*r*ρ, *S*Σ*s*σ les deux tranches de ce ſphéroïde que retranchent les plans élevés perpendiculairement ſur *MC*, & paſſant par les points *R*, ρ, Σ, *S*, ſoit de plus μ*YZ* la droite qui coupe en deux parties égales toutes les perpendiculaires

ou ordonnées $Rr$, $P\rho$, $Ss$, $\Sigma\sigma$, ou, ce qui revient au même, le diamétre de ces ordonnées.

Il eſt évident que la différentielle de l'attraction que la tranche quelconque $RrSs$ du ſphéroïde exerce ſur $M$ dans la direction $CX$, ſera l'attraction de la tranche infiniment petite $RrP\rho$, moins celle de la tranche $Ss\Sigma\sigma$, parce que la premiere attire dans la direction $HY$, & la ſeconde dans la direction oppoſée $IZ$, toutes deux paralléles à $CX$.

Par la Propoſition précédente $\frac{\frac{1}{2}c \times HY \times RH^2 \times Hh}{MR^3}$ ſera l'attraction de la tranche $RPrS$, & par le même Lemme $\frac{\frac{1}{2}c \times IZ \times SI^2 \times Ii}{MS^3}$ ſera l'attraction de la tranche $Ss\Sigma\sigma$; donc $\frac{\frac{1}{2}c \times HY \times RH^2 \times Hh}{MR^3} - \frac{\frac{1}{2}c \times IZ \times SI^2 \times Ii}{MS^3}$ eſt la différentielle de l'attraction cherchée.

Je remarque maintenant qu'on peut prendre, ſans erreur ſenſible l'angle $CMX$ pour le même que l'angle $C\mu x$, car le point $\mu$ ne peut être qu'infiniment peu écarté de $M$ à cauſe de l'infiniment petite différence qui eſt entre l'ellipſe $PEpe$ & le cercle; mais l'angle $C\mu x$ ſeroit le même que l'angle $\mu CM$, puiſque $C\mu$ étant le diamétre des ordonnées $Rr$, &c. la tangente en $\mu$ eſt paralléle à $Rr$, ou perpendiculaire à $CHM$; donc l'angle $MC\mu$ peut être ſuppoſé ſans erreur ſenſible $= CMX$.

Cela poſé, on aura $CH : HY$ & $CI : ZI :: CM : CX$; ſubſtituant donc $CH \times \frac{CX}{CM}$ à $HY$ & $CI \times \frac{CX}{CM}$ à $ZI$, l'expreſſion précédente $\frac{\frac{1}{2}c \times HY \times RH^2 \times Hh}{MR^3} - \frac{\frac{1}{2}c \times IZ \times SI^2 \times Ii}{MS^3}$ ſe changera en $\frac{1}{2}c \times \frac{CX}{CM}\left(\frac{RH^2 \times CH \times Hh}{MR^3} - \frac{SI^2 \times CI \times Ii}{MS^3}.\right)$

Pour réduire cette expreſſion, je remarque encore que ſi la courbe $KLkl$ étoit un cercle, & que par conſéquent $CH^2 + RH^2$ fut égal à la conſtante $CR^2$, on auroit $CH \times Hh$

$+ RH \times dRH = 0$; mais comme la courbe $KLkl$ diffère infiniment peu du cercle, cette équation n'a qu'une erreur infiniment petite, lorsqu'on en fera usage dans la valeur de l'attraction cherchée déja infiniment petite par elle-même; donc on pourra mettre, sans erreur sensible, dans l'expression précédente $- RH \times dRH$ à la place de $CH \times Hh$ & $- SI \times dSI$, à la place de $CI \times Ii$.

Cela fait, l'expression précédente se changera en $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{CM} \left(- \frac{RH^3}{MR^3} \times d(RH) + \frac{SI^3}{MS^3} \times d(SI)\right)$, qui deviendra $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{CM} \left(- \frac{CG^3}{MC^3} d(RH) + \frac{CG^3}{MC^3} d(SI)\right)$, ou $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{CM^4} \times \left(CG^3 \times d(SI - RH)\right)$ en mettant $\frac{CG}{MC}$ à la place de $\frac{RH}{MR}$ & de $\frac{SI}{MS}$, $CG$ étant une perpendiculaire abaissée de $C$ sur $MS$.

Pour intégrer maintenant cette différentielle, je fais les lignes $CM = e$. $CN = r$. $RG = u$, & j'ai $CG = \sqrt{rr - uu}$, $RS = 2u$; $SI - RH = 2u\sqrt{rr - uu}$; soient donc substituées ces valeurs dans la formule $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{CM^4} \times CG^3 d(SI - RH)$, & elle deviendra $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{e^4} (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} \times d\left(\frac{2u\sqrt{rr - uu}}{e}\right)$; mais $d\left(\frac{2u\sqrt{rr - uu}}{e}\right) = \frac{2r^2 du - 4uudu}{e\sqrt{rr - uu}}$; donc $\frac{1}{2} c \times \frac{CX}{e^4} (r^2 - u^2)^{\frac{3}{2}} \times d\left(\frac{2u\sqrt{rr - uu}}{e}\right) = \frac{1}{2} c \times \frac{CX}{e^5} \times \overline{r^2 - u^2} \times \overline{2r^2 - 4u^2} \times du$ ou $c \times \frac{CX}{e^5} (r^4 du - 3r^2u^2 du + 2u^4 du)$ dont l'intégrale est $c \times \frac{CX}{e^5} \left(r^4 u - r^2 u^3 + \frac{2}{5} u^5\right)$ valeur de

l'attraction

l'attraction de la tranche quelconque $RrSs$, & faisant dans cette valeur $u = r$, c'est-à-dire, $RS = Nn$, on aura $c \times \frac{CX}{e^5}\left(\frac{2}{5} r^5\right)$ $= \frac{2}{5} c \times \frac{CX}{CM^5} \times CN^5$ pour l'attraction du sphéroïde entier $KLkl$ sur $M$ suivant $CX$. *C. Q. F. D.*

## XXXVI.

## PROPOSITION VII. PROBLÉME II.

*Trouver l'attraction qu'un sphéroïde elliptique* PMEKT, *composé d'une infinité de couches telles que* BbFfOo *toutes de densités & d'ellipticités * différentes, exerce sur un corpuscule placé en un point quelconque* M *de sa surface.*

Ayant fait les lignes $PC = e$. $CE = e(1 + \delta)$ = rayon de l'équateur : $CB$ demi axe de la couche quelconque $BNFO = r$, $CF$ rayon de l'équateur de cette couche $= r(1 + \gamma)$, le sinus de l'angle $PCM = s$. On commencera par chercher l'attraction que le sphéroïde $BFO$, supposé homogéne, exerceroit sur le corpuscule placé en $M$ ; on a vû ci-dessus (Article 33.) que le sphéroïde $BFO$ exercera sur $M$ la même attraction qu'un sphéroïde dont $NO$ seroit l'axe de révolution, & dont la solidité seroit la même ; il faut donc chercher quel doit être le second axe de ce nouveau sphéroïde supposé égal en quantité de matiere à $BFO$, & qui a pour premier axe de révolution la droite $NO$. Fig. 22.

La solidité du sphéroïde $BNFO$ dont l'axe de révolution $BC = r$, & le second $= r(1 + \gamma)$ doit être $\frac{2}{3} cr^3 \cdot (1 + \gamma)^2$ ($c$ exprimant le rapport de la circonférence au rayon :) supposant que $CN(1 + \epsilon)$ soit le rayon cherché de l'équateur du

* On appelle ici l'ellipticité d'un sphéroïde, la fraction qui exprime la différence du rayon de l'équateur à l'axe par rapport à l'axe.

sphéroïde, sa solidité sera, par la même raison, $\frac{2}{3}\, c \times CN^3$ $(1+\epsilon)^2$, & en égalant ces deux expressions, il viendra $\frac{2}{3}\, c r^3$ $(1+\gamma)^2 = \frac{2}{3}\, c \times CN^3\,(1+\epsilon)^2$, d'où l'on tire $\frac{r^3\,(1+\gamma)^2}{CN^3}$ $= \overline{1+\epsilon}^{\,2}$ ou $\frac{r^{\frac{3}{2}}\,\overline{1+\gamma}}{CN^{\frac{3}{2}}} = 1+\epsilon$; mais par l'Article 32. de cette Section, $CN$ doit avoir pour valeur $r(1+\gamma ss)$ donc $1+\epsilon$ $= \frac{r^{\frac{3}{2}}(1+\gamma)}{r^{\frac{3}{2}}(1+\gamma ss)^{\frac{3}{2}}}$, ou $\overline{1+\gamma} \times (1+\gamma ss)^{-\frac{3}{2}}$, ou $\overline{1+\gamma} \times \overline{1-\frac{3}{2}\gamma ss}$, (en élevant par le binome de *Newton* $(1+\gamma ss)^{\frac{3}{2}}$ & en négligeant les $\gamma\gamma$) ou enfin $1+\gamma-\frac{3}{2}\gamma ss$ en négligeant encore les $\gamma\gamma$; ayant donc $1+\epsilon = 1+\gamma-\frac{3}{2}\gamma ss$, on aura $\gamma\,(1-\frac{3}{2}ss)$ pour la valeur cherchée de $\epsilon$, c'est-à-dire, pour l'ellipticité du sphéroïde dont l'axe de révolution seroit $NO$, & dont la quantité de matiere seroit la même que celle du sphéroïde $BNFO$.

Cela posé, il ne s'agit plus que d'avoir l'attraction qu'exerce un sphéroïde, dont le demi axe de révolution est $CN = r(1+\gamma ss)$, & dont l'ellipticité est $\gamma\,(1-\frac{3}{2}ss)$ sur un corpuscule placé sur cet axe de révolution à la distance $CM$, laquelle distance $= e$ $(1+\delta ss)$ par l'Article 32.

On a démontré ci-devant (Article 35.) que lorsque le demi axe de révolution est $r$, l'ellipticité $\delta$, & la distance du corpuscule au centre $e$, l'expression de l'attraction étoit $\frac{2cr^3}{3ee} + \frac{4cr^3\delta}{3ee}$ $- \frac{4cr^5\delta}{5e^4}$, il faut donc mettre dans cette expression $r(1+\gamma ss)$ à la place de $r$, & $e(1+\delta ss)$ à la place de $e$, & $\gamma\,(1-\frac{3}{2}ss)$ à la place de $\delta$.

Comme les deux derniers termes $\frac{4cr^3\delta}{3ee} - \frac{4cr^5\delta}{5e^4}$ de la quantité dans laquelle on doit faire la substitution sont affectés de la lettre $\delta$ qui représente une quantité infiniment petite, il ſera inutile de mettre pour $r$, & pour $e$, des quantités qui en diffèrent infiniment peu ; ainſi il ſuffira de mettre dans ces deux termes, à la place de $\delta$, $\gamma\,(1-\frac{3}{2}ss)$ ; mais dans le terme $\frac{2cr^3}{3ee}$ qui eſt fini, il faudra ſubſtituer $r\,(1+\gamma ss)$ à $r$, & $e\,(1+\delta ss)$ à $e$.

Faiſant maintenant cette ſubſtitution, on aura pour le premier terme $\frac{2cr^3}{3ee}\,\frac{(1+\gamma ss)^3}{(1+\delta ss)^2}$, ou $\frac{2cr^3}{3ee}\,\frac{(1+3\gamma ss)}{(1+2\delta ss)}$, ou $\frac{2cr^3}{3ee}$ $(1+3\gamma ss-2\delta ss)$ en négligeant les $\delta^2$, les $\gamma^2$, & les $\delta\gamma$, & en élevant les quantités par le binome, & effectuant la diviſion indiquée.

On aura enſuite pour les termes $\left(\frac{4cr^3}{3ee}-\frac{4cr^5}{5e^4}\right)\delta$ la quantité $\left(\frac{4cr^3}{3e^2}-\frac{4cr^5}{5e^4}\right)\gamma\,(1-\frac{3}{2}ss)$ qui devient $\frac{4cr^3\gamma}{3e^2}-\frac{4cr^5\gamma}{5e^4}$ $-\frac{2cr^3ss\gamma}{ee}+\frac{6cr^5ss\gamma}{5e^4}$, & en ajoutant ces deux quantités, on aura enfin $\frac{2cr^3}{3e^2}(1+3\gamma ss-2\delta ss)+\frac{4cr^3\gamma}{3e^2}-\frac{4cr^5\gamma}{5e^4}$ $+\frac{6cr^5\gamma ss}{5e^4}-\frac{2cr^3\gamma ss}{ee}$, ou $\frac{2cr^3}{3ee}-\frac{4cr^3ss\delta}{3ee}+\frac{4cr^3\gamma}{3ee}$ $-\frac{4cr^5\gamma}{5e^4}+\frac{6cr^5\gamma ss}{5e^4}$, & c'eſt là la valeur de l'attraction que le ſphéroïde $BNFO$, ſuppoſé d'une denſité uniforme, exerce ſur le corpuſcule $M$.

Pour avoir l'attraction du même ſphéroïde, en ſuppoſant qu'il ſoit compoſé de couches qui varient tant en denſité qu'en ellipticité, ſoit différenciée l'expreſſion précédente, & l'on aura $\frac{2crrdr}{ee}-\frac{4cr^2\delta ssdr}{ee}+\frac{4c}{3ee}d(r^3\gamma)-\frac{4c}{5e^4}d(r^5\gamma)$ $\frac{6c}{5e^4}d(r^5\gamma)ss$, qui exprimera l'attraction de l'orbe $BNFO$ $bnfo$, ($r$ & $\gamma$ étant les indéterminées.)

Soit maintenant $R$ la densité de cet orbe, on n'aura plus qu'à multiplier la différentielle précédente par $R$, & l'intégrant, ensuite on aura l'attraction du sphéroïde $BNFO$ de densité variable; faisant enfin dans cette intégrale $r=e$, elle exprimera l'attraction du sphéroïde proposé $PMEKT$. C. Q. F. T.

Nommant en général $A$ la quantité que devient $\frac{Rrrdr}{ee}$ lorsqu'elle est intégrée, complettée, & qu'on y a substitué $e$ à la place de $r$, $B$ & $D$ les quantités que deviennent $\frac{R}{ee}d(r^3\gamma)$ & $\frac{R}{e^4}d(r^5\gamma)$ dans la même supposition, l'expression précédente $\frac{2c}{ee}\int Rrrdr - \frac{4c\delta ss}{ee}\int Rrrdr + \frac{4c}{3ee}\int Rd(r^3\gamma) - \frac{4c}{5e^4}\int Rd(r^5\gamma) + \frac{6c}{5e^4}\int Rd(r^5\gamma)ss$, prendra cette forme $2cA + 4c\delta ssA + \frac{4}{3}cB - \frac{4}{5}cD + \frac{6}{5}cssD$.

Si on fait dans cette valeur $s=o$, ce qui suppose le corpuscule au pole, elle se réduira à $2cA + \frac{4}{3}cB - \frac{4}{5}cD$.

Et si l'on fait $s=1$, ce qui suppose le corpuscule à l'équateur, $2cA - 4c\delta A + \frac{4c}{3}B + \frac{2c}{5}D$.

## XXXVII.

### *COROLLAIRE I.*

Si l'on se proposoit d'avoir l'attraction que le sphéroïde $PMEKT$ exerceroit sur le corpuscule $M$ dans le cas où l'on supposeroit ce sphéroïde homogéne, on reprendroit la quantité $\frac{2cr^3}{3ee} - \frac{4cr^3\delta ss}{3ee} - \frac{4cr^5\gamma}{5e^4} + \frac{4cr^3\gamma}{3ee} + \frac{6cr^5\gamma ss}{5e^4}$ qui exprime l'attraction du sphéroïde $BNFO$ sur $M$, & on feroit dans cette expreſſion $r = e$ & $\gamma = \delta$, ce qui la changeroit en $\frac{2}{3} ce + \frac{8}{15} ce\delta - \frac{2}{15} ce\delta ss$.

Si dans cette valeur on fait $s = o$, c'eſt-à-dire, ſi on ſuppoſe que le point $M$ devient le point $P$ ou le pole du ſphéroïde, l'attraction ſera alors exprimée par $\frac{2}{3} ce + \frac{8}{15} ce\delta$, qui eſt la même expreſſion qu'on a trouvée précédemment dans l'Article 29.

Si on fait $s = 1$, c'eſt-à-dire, ſi on ſuppoſe que le point $M$ devienne le point $E$, & qu'il ſoit par conſéquent à l'équateur, on aura en ce cas $\frac{2}{3} ce + \frac{8}{15} ce\delta$ pour l'attraction en ce lieu, laquelle eſt, comme l'on voit, plus petite qu'au pole, de la quantité $\frac{2}{15} ce\delta$.

Et ſi on compare cette différence avec l'attraction entiere au pole $\frac{2}{3} ce + \frac{6}{15} ce\delta$, on aura par le rapport $\frac{\frac{2}{15} ce\delta}{\frac{2}{3} ce + \frac{8}{15} ce\delta}$, ou $\frac{\delta}{5 + 3\delta}$, ou enfin $\frac{\delta}{5}$, en négligeant les $\delta^2$ & puiſſances plus élevées; donc l'attraction au pole ſurpaſſe celle à l'équateur d'une fraction, qui eſt la cinquiéme partie de celle qui marque l'excès du diamétre de l'équateur ſur l'axe.

## XXXVIII.

### COROLLAIRE II.

Si on ſuppoſe que ce ſphéroïde ſoit compoſé de couches toutes ſemblables entr'elles, & dont la denſité augmente uniformément du centre à la circonférence, on aura alors $\gamma = \delta$ & $R = mr$, quantités qu'il faudra ſubſtituer dans l'expreſſion générale.

On voit d'abord que $\frac{Rrrdr}{ee}$ ſera $\frac{mr^3dr}{ee}$ dont l'intégrale eſt $\frac{mr^4}{4ee}$, dans laquelle faiſant $e = r$, on a $\frac{mee}{4}$ pour la valeur de $A$.

On a de même $\frac{Rd(r^3\gamma)}{ee} = \frac{3m\delta r^3 dr}{ee}$, dont l'intégrale $\frac{3m\delta r^4}{4ee}$ donne $\frac{3m\delta ee}{4}$ pour la valeur de $B$ lorſque $r = e$.

On a enfin $\frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4} = \frac{5m\delta r^5 dr}{e^4}$, dont l'intégrale $\frac{5m\delta r^6}{6e^4}$ donne $\frac{5m\delta e^2}{6}$ pour la valeur de $D$ lorſque $r = e$.

Subſtituant ces valeurs de $A$, $B$, $D$ dans l'expreſſion générale de l'attraction, laquelle on vient de trouver à la fin de cette Propoſition, $2cA - 4c\delta ssA + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{7}cD + \frac{6}{7}cssD$, elle ſe réduira à $e^2mc(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\delta)$, dans laquelle expreſſion $s$ n'entrant pas, on voit que quelle que ſoit la poſition du point $M$ dans cette hypothèſe de denſité, l'attraction vers le centre ſera toujours la même.

## XXXIX.

### COROLLAIRE III.

Suppoſant à préſent que les ellipſes des couches ſoient d'autant plus applaties qu'elles ſont plus éloignées du centre, ou, ce qui revient au même, faiſant $\gamma = \frac{\delta r}{e}$, & ſuppoſant de plus que la denſité qui eſt ſuppoſée donnée, & qui au centre eſt $= m$, diminue continuellement & uniformément du centre à la ſurface, c'eſt-à-dire, que $R = me - pr$, ou que plus la quantité $p$ ſera grande, plus $R$ ou la denſité diminue; & faiſant enſuite les ſubſtitutions indiquées pour avoir $A$, $B$, $D$ dans ces ſuppoſitions, on aura $\frac{Rrrdr}{ee} = A = \frac{mer^2dr - pr^3dr}{ee}$, dont l'intégrale $\frac{mer^3}{3ee} - \frac{pr^4}{4ee}$ donne $(\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p)ee$ pour la valeur de $A$ en faiſant $r = e$.

On aura ensuite $\frac{R\,d\,(r^3\delta)}{ee} = B = \frac{me-pr}{ee} \times d\left(\frac{\delta r^4}{e}\right) = \frac{4me\delta r^3dr - 4p\delta r^4dr}{e^3}$, dont l'intégrale $\frac{me\delta r^4}{e^3} - \frac{4}{5}p\frac{\delta r^5}{e^3}$, donne $B = e^2\delta\,(m - \frac{4}{5}p)$ en faisant $r = e$.

Et enfin $\frac{R\,d\,(r^5\gamma)}{e^4} = D = \frac{6me\delta r^5dr - 6p\delta r^6dr}{e^5}$, dont l'intégrale $\frac{me\delta r^6 - \frac{6}{7}p\delta r^7}{e^5}$ donne $D = (m - \frac{6}{7}p)\,\delta e^2$ lorsque $r = e$.

Substituons maintenant ces valeurs de $A$, $B$, $D$ dans l'expression générale $2cA - 4css\delta A + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{5}cD + \frac{6}{5}cssD$, & nous aurons $2ce^2(\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p) - 4ce^2(\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p)\,ss\delta + \frac{4}{5}ce^2\delta\,(m - \frac{4}{5}p) - \frac{4}{5}c\delta e^2(m - \frac{6}{7}p) + \frac{6}{5}css\delta e^2(m - \frac{6}{7}p)$ ou $2ce^2\,(\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p) + css\delta e^2\,(-\frac{2}{15}m - \frac{1}{35}p) + ce^2\delta\,(\frac{8}{15}m - \frac{8}{21}p)$, qui est la valeur de l'attraction du sphéroïde sur $M$ dans l'hypothèse présente.

Si on fait $s = 0$, cette quantité deviendra $2ce^2(\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p) + ce^2\delta(\frac{8}{15}m - \frac{8}{21}p)$ & exprimera l'attraction du même sphéroïde au pole.

Si on fait $s = 1$, cette quantité deviendra $2ce^2\,(\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p) + ce^2\delta\,(\frac{8}{15}m - \frac{8}{21}p) + ce^2\delta(-\frac{2}{15}m - \frac{1}{35}p)$, ou $2ce^2\,(\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p) + ce^2\delta\,(\frac{6}{15}m - \frac{43}{105}p)$, & elle exprimera l'attraction du même sphéroïde à l'équateur.

La différence de ces deux attractions est $ce^2\delta\,(\frac{2}{15}m + \frac{3}{105}p)$, & cette différence étant comparée à l'attraction au pole, donnera pour le rapport $\frac{ce^2\delta(\frac{2}{15}m + \frac{3}{105}p)}{2ce^2\,(\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p)}$ en négligeant les $\delta^2$ & puissances plus élevées, & cette fraction qui se réduit à $\delta\left(\frac{\frac{2}{15}m + \frac{3}{105}p}{\frac{2}{3}m - \frac{1}{2}p}\right) = \delta\left(\frac{28m + 6p}{140m - 105p}\right)$, exprimera ce que l'excès de l'attraction au pole sur celle à l'équateur, est à l'attraction entiere du sphéroïde.

## X L.

### PROPOSITION VIII. PROBLÉME III.

*Trouver l'attraction suivant la ligne* CS *perpendiculaire à* CP *qu'exerce un sphéroïde* PME, *composé d'une infinité de couches elliptiques* KLkl, *toutes de densités & d'ellipticités différentes, sur un corpuscule placé en* M.

Fig. 23. Soient faites les lignes $CM = e$. $CN = r$. $QM = qe$. l'ellipticité de $PME = \delta$. celle de $KL = \gamma$. la densité de la couche quelconque $KkLl = R$. Soient de plus $MX$ la perpendiculaire à l'ellipse $PME$ rencontrant $CE$ en $V$, & $MT$ la perpendiculaire à l'ellipse semblable à $KNL$ & qui passeroit par $M$, laquelle perpendiculaire rencontre la ligne $CE$ en $S$.

Il est démontré par l'Article 35. qu'on aura $\frac{2cr^5}{5e^5} \times CT$ pour l'attraction qu'exerceroit sur le corpuscule $M$ suivant $CT$ le sphéroïde $KNL$ supposé homogéne; au lieu de cette attraction suivant $CT$, j'imagine une force suivant $CS$ propre à donner la même direction, lorsqu'elle sera combinée avec la force suivant $CM$ que la force suivant $CT$: il est clair que cette force suivant $CS$, devra avoir pour expression $\frac{2cr^5}{5e^5} \times CS$ pour être équivalente à la force suivant $TC$, qui a pour expression $\frac{2cr^5}{5e^5} \times CT$.

Il s'agit donc d'avoir la valeur de $CS$, ou la distance du point $C$, au point où la perpendiculaire à l'ellipse semblable à $KNL$ rencontre l'axe $CE$; mais par la propriété de l'ellipse, cette ligne $CS$ a pour valeur $QM \times \frac{CE^2 - CP^2}{CP^2}$, c'est-à-dire, $2qe\gamma$ en négligeant les $\gamma^2$; multipliant donc $\frac{2cr^5}{5e^5}$ par $2qe\gamma$ valeur de

CS

$CS$, on aura $\frac{4cqr^5\gamma}{5e^4}$ pour la force ſuivant $CS$, équivalente à l'attraction du ſphéroïde $KNL$ ſuppoſé homogéne, ſur $M$ ſuivant $CT$.

En différenciant cette force, on aura $\frac{4cq}{5e^4}d(r^5\gamma)$ pour la force ſuivant $CS$ de l'orbe $KNL$, en ſuppoſant que cet orbe ſoit de la denſité 1.

Mais en le ſuppoſant de la denſité $R$, $\frac{4cq}{5e^4}Rd(r^5\gamma)$ ſera la force de l'orbe $KkLl$, & $\frac{4cq}{5e^4}\int Rd(r^5\gamma)$ ſera la force du ſphéroïde $KNL$ ſuppoſé hétérogéne.

Si on prend, comme on a fait plus haut, $D$ pour ce que devient la quantité $\int\frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4}$ lorſque $r=e$, on aura $\frac{4cq}{5}D$ pour la force du ſphéroïde propoſé $PME$, ſur le corpuſcule $M$ ſuivant $CS$. C. Q. F. T.

## XLI.

## PROPOSITION IX. LEMME IV.

*Suppoſant que le ſphéroïde précédent* PME *tourne dans un temps tel que la force centrifuge qui en réſulte ſoit infiniment petite par rapport à l'attraction totale du ſphéroïde, on demande la direction* MZ *qui réſulte des attractions qu'exerce ſur* M *le ſphéroïde* PME, *ces attractions étant combinées avec la force centrifuge produite par la rotation du même ſphéroïde.*

Suppoſant que $CM$ exprime la force de l'attraction du ſphéroïde ſuivant $CM$, $CH$ la force équivalente à l'attraction ſuivant la perpendiculaire $CX$, & $HZ$ la force centrifuge qui agiroit en $M$, il eſt évident que $MZ$ ſeroit la direction demandée. Fig. 24.

Soit repriſe maintenant l'expreſſion $2cA - 4c\delta ssA + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{5}cD + \frac{6}{5}cssD$ qu'on a trouvée dans l'Article 36. pour l'expression de l'attraction suivant $CM$, ou prenant en cette occasion $2cA$ pour exprimer la force de la gravité à l'équateur, ce qui se peut toujours en négligeant les infiniment petits du second ordre.

Mais comme les forces centrifuges des corps qui tournent dans le même temps sont comme les rayons, on aura $CE$, ou $e$ à $QM$, ou $qe$ (on a gardé les dénominations de l'Art. 36.) comme $2cA\varphi$ à $2cA\varphi q$, qui sera l'expression de la force centrifuge en $M$, ou la force $HZ$.

Mais la force $CH$, c'est-à-dire, la force suivant cette direction équivalente à l'attraction suivant $CX$, vient d'être trouvée dans l'Article précédent $= \frac{4cq}{5}D$; donc $2cAq\varphi + \frac{4cq}{5}D$ est la force totale suivant $CH$, provenant, tant de l'attraction que de la force centrifuge; donc si on prend $CZ$ à $CM$ comme $2cAq\varphi + \frac{4cq}{5}D$ à $2cA$, ou, ce qui revient au même, si on fait $CZ = \frac{qe(A\varphi + \frac{2}{5}D)}{A}$, ou $= \frac{cr(\frac{2}{5}D + A\varphi)}{2A\delta}$ (en mettant à la place de $q$, $\frac{cr}{2e\delta}$ qui lui est égal par la propriété de l'ellipse,) $MZ$ sera la direction & la quantité cherchée qui résulte, tant de l'attraction que de la force centrifuge. *C. Q. F. T.*

## XLII.

### *SCHOLIE.*

Si l'on imagine maintenant que le sphéroïde précédent ait sa surface couverte de fluide, & qu'on veuille que ce fluide soit en équilibre pendant la rotation donnée au sphéroïde, il est clair que la direction de la force qui fait peser les particules $M$, laquelle direction est composée de l'attraction & de la force centrifuge, doit être la perpendiculaire même $MV$ à ce sphéroïde; donc il faut que $\delta$, ou l'ellipticité du sphéroïde proposé, soit telle, que $CV = \left(\frac{\frac{2}{3}D + A\varphi}{2A\delta}\right) cr$, c'eſt-à-dire, que cette valeur de $\delta$ doit dépendre de la réſolution de l'équation $\frac{\frac{2}{3}D + A\varphi}{2A\delta} = 1$, ou $2A\delta = \frac{2}{3}D + A\varphi$, équation qui ſera facile à réſoudre auſſi-tôt que l'on connoîtra $A$ & $D$, c'eſt-à-dire, auſſi-tôt qu'on aura fixé la loi ſuivant laquelle la denſité & l'ellipticité varient du centre à la ſurface extérieure.

S'il étoit reſté dans cette équation la quantité $QM$, ou $CM$, ou toute autre quantité variable, il eſt évident que la valeur de $\delta$ contiendroit des variables, ce qui ſeroit une abſurdité, puiſque l'ellipticité du ſphéroïde propoſé dont on cherche la figure convenable afin qu'il ſoit en équilibre, doit être une quantité déterminée, & c'eſt cet évanouiſſement de la lettre $q$ qui aſſure la juſteſſe de l'hypothèſe qu'on a priſe, en regardant la figure $PME$ comme une ellipſe.

## XLIII.

## PROPOSITION X. PROBLÉME V.

*Trouver la figure de la Terre ſuppoſée homogéne.*

La terre ſuppoſée entierement fluide, ou bien ſolide, mais couverte d'une lame de fluide infiniment mince, eſt, pour l'équilibre, dans le cas qu'on a traité dans la premiere partie de cette Section.

Pour déterminer ſa figure dans cette hypothèſe, il faut chercher ce qu'elle donne pour $A$ & pour $D$, on remplira la condition de l'homogénéité en faiſant $R = 1$, ce qui donnera, en reprenant l'expreſſion générale de $A$ & de $D$ trouvée Propoſition 7. de cette ſeconde partie de cette Section, $\int Rrrdr = \frac{1}{3}r^3$, & alors faiſant $r = e$, on aura $A = \int \frac{Rrrdr}{ee} = \frac{1}{3}e$, $\int R\,d(r^5\gamma)$

fera $\int d(r^5\gamma)$, ou $r^5\gamma$ ; donc $D = \int R d \frac{(r^5\gamma)}{e^4}$ est alors $e\delta$ ; (car en faisant $r = e$, il faut faire $\gamma = \delta$.)

Substituant donc $\frac{1}{3}e$ pour $A$, & $e\delta$ pour $D$ dans l'équation $2A\delta = \frac{2}{5}D + A\varphi$ de l'Article précédent, cette équation deviendra $\frac{2}{3}e\delta = \frac{2}{5}e\delta + \frac{1}{3}e\varphi$, qui donne $\delta = \frac{5}{4}\varphi$, c'est-à-dire, que dans le cas de l'homogénéité, l'ellipticité du sphéroïde doit être à la fraction qui exprime le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur comme 5 à 4 ; ainsi $\frac{1}{288}$ étant cette fraction pour la terre, on aura $\delta = \frac{5}{4 \times 288}$ qui donne environ $\frac{1}{230}$ pour l'excès du diamétre de l'équateur de la terre sur l'axe. *C. Q. F. T.*

## XLIV.

### *SCHOLIE.*

M. *Newton* a trouvé à peu près ce même rapport par la méthode qu'il a suivi ; mais il est à remarquer que dans cette méthode il se contente de supposer que le méridien est une ellipse sans le prouver, & même sans assurer qu'il en soit une ; il se contente d'égaler le poids de la colomne de fluide qu'il suppose dans l'axe de révolution, au poids de la colomne qui iroit du centre à l'équateur, sans donner rien qui assure de l'équilibre des autres colomnes.

## XLV.

### PROPOSITION XI. PROBLÉME VI.

*Trouver la figure de Jupiter dans la même hypothèse de l'homogénéité.*

Il n'est question, pour y parvenir, que de connoître le rapport de la force centrifuge à la gravité, sur l'équateur de Jupiter.

Pour connoître la premiere de ces deux forces, il faut connoître le rayon de l'équateur de Jupiter & le temps de sa rotation, & l'on connoîtra la seconde par le temps de la révolution de l'un de ses satellites, & par la distance de ce satellite à Jupiter.

$T$ exprimant le temps périodique du satellite qu'on choisit pour cette opération, $t$ celui de la révolution de Jupiter autour de son axe, $r$ le rayon de Jupiter, & $R$ celui de l'orbite du satellite, on aura * $\frac{r^3 T^2}{R^3 t^2}$ pour exprimer $\varphi$, ou le rapport de la force centrifuge à la gravité sur l'équateur de Jupiter.

Mettant donc dans cette formule pour $T$, 24032′, temps de la révolution du 4[e] satellite de Jupiter, & pour $t$, 596′, temps de la révolution de Jupiter autour de son axe; l'unité pour $r$ qui est le rayon de Jupiter, & 26, 63 pour $R$ qui est le rayon de l'orbe du satellite, on aura $\frac{r^3 T^2}{R^3 t^2}$ ou $\varphi = \frac{10}{116}$, & par conséquent $\delta$, (ou l'ellipticité de Jupiter dans le cas de l'homogénéité) $= \frac{5}{4}\varphi = \frac{10}{92}$ environ. *C. Q. F. T.*

* Pour démontrer cette formule, soit pris $\mu$ pour exprimer un intervale de temps infiniment petit, pendant lequel on cherche quelle seroit la chute du satellite, & on aura $T : cR :: \mu : \frac{\mu c R}{T}$ qui est la valeur du petit arc parcouru par le satellite dans le temps $\mu$ : le quarré de cet arc $\frac{\mu^2 c^2 R^2}{T^2}$ étant divisé par le rayon $R$, c'est-à-dire, $\frac{\mu^2 c^2 R}{T^2}$ exprimera la fléche ou chute du satellite vers Jupiter, laquelle mesure la force de cette planete à la distance $R$, & par conséquent, $\frac{\mu^2 c^2 R^3}{T^2 r^2}$ pour la force de la même planete à la distance $r$ de son centre, c'est-à-dire, à sa surface.

Mais on trouveroit la force centrifuge en divisant par le rayon $r$ le quarré $\frac{\mu^2 c^2 r^2}{t^2}$ du petit arc que décrit chaque partie de Jupiter dans le temps $\mu$, ce qui donneroit pour cette force centrifuge $\frac{\mu^2 c^2 r}{t^2}$, divisant donc $\frac{\mu^2 c^2 r}{t^2}$ par $\frac{\mu^2 c^2 R^3}{T^2 r^2}$, on aura $\frac{r^3 T^2}{R^3 t^2}$. *C. Q. F. D.*

## XLVI.

### PROPOSITION XII. PROBLÉME VII.

*Trouver la figure d'une planete qu'on suppose composée de couches elliptiques, dont les ellipticités augmenteroient du centre à la surface proportionnellement à la distance au centre, & dont les densités décroîtroient du centre à la circonférence proportionnellement à la même distance.*

Dans cette hypothèse, qui est la même que celle qui a été traitée Article 39. on aura, en prenant toujours $me - pr$ pour exprimer la densité $R$, & $\frac{\delta r}{e}$ pour l'ellipticité $\gamma$, $A = (\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}p)ee$, $D = (m - \frac{6}{7}p)\delta ee$: substituant ces valeurs dans l'équation $\frac{2}{5}D + A\varphi = 2A\delta$, ou $2D + 5A\varphi = 10A\delta$ trouvée (Article 42.) on aura $\frac{10}{3}me^2\delta - \frac{10}{4}pe^2\delta = 2me^2\delta - \frac{12}{7}pe^2\delta + \frac{5}{3}me^2\varphi - \frac{5}{4}pe^2\varphi$, ou $\frac{10}{3}\delta m - \frac{5}{2}\delta p = 2m\delta - \frac{12}{7}p\delta + \frac{5}{3}m\varphi - \frac{5}{4}p\varphi$, ou enfin $\frac{10}{3}\delta m - \frac{5}{2}\delta p - 2m\delta + \frac{12}{7}p\delta = (\frac{5}{3}m - \frac{5}{4}p)\varphi$, d'où l'on tire $\delta = \varphi\frac{(\frac{5}{3}m - \frac{5}{4}p)}{\frac{4}{3}m - \frac{11}{14}p}$, ou $\delta = \frac{\varphi(140m - 105p)}{112m - 66p}$ qui exprimera l'ellipticité cherchée du sphéroïde proposé aussi-tôt qu'on fixera le rapport de $m$ à $p$, ce qui dépend de la différence totale de densité qu'on suppose entre la superficie & le centre.

Si on veut, par exemple, que la densité soit double au centre de ce qu'elle est à la surface, on aura $p = \frac{1}{2}m$, & dans ce cas $\delta = \varphi\left(\frac{175}{158}\right)$, qui devient $\frac{175}{158 \times 288} = \frac{1}{260}$ environ, dans le cas où le sphéroïde est la terre.

Si on veut ensuite que la densité à la surface les $\frac{3}{4}$ de celle au centre, on aura alors $p = \frac{1}{4}m$, & par conséquent $\delta = \varphi\left(\frac{140 - \frac{105}{4}}{112 - \frac{66}{4}}\right)$

ou $\delta = \varphi \left(\frac{455}{382}\right)$ & qui devient $\frac{455}{382 \times 288} = \frac{1}{242}$ environ dans le cas où le ſphéroïde eſt la terre.

Si on faiſoit $p = o$, il eſt clair qu'on rentreroit dans le cas de l'homogénéité; auſſi la formule $\delta = \varphi \left(\frac{140\,m - 105\,p}{112\,m - 66\,p}\right)$ deviendroit en ce cas $\varphi \left(\frac{140}{112}\right)$, c'eſt-àdire, $\frac{5}{4}\varphi$, ainſi qu'on l'a trouvé pour ce cas (Article 43.) *C. Q. F. T.*

## XLVII.

## PROPOSITION XIII. PROBLÊME VIII.

*Trouver la figure d'une planete composée d'une maſſe fluide qui environne un noyau ſolide de figure elliptique, dont la denſité & l'ellipticité ſont données.*

Ce cas ne paroît pas d'abord ſe réduire à la Prop. précédente; dans laquelle la denſité & l'ellipticité varioient du centre à la ſurface; au lieu que dans le cas préſent, depuis le centre juſqu'à une diſtance finie, il n'y a point de variation dans la denſité ni dans l'ellipticité, & depuis la ſuperficie extérieure du noyau juſqu'à la ſurface il n'y a encore aucune variation dans la denſité de la maſſe fluide environnante, ni dans ſon ellipticité.

Que $CA$ repréſente le demi axe du noyau, $CH = AG = 1 + f$ ſa denſité, $CB = e$ le demi axe du ſphéroïde, $AF = BE = 1$ la denſité de l'orbe environnante, la ligne $HGEF$ eſt alors l'échelle des denſités, qui étoit dans le Prob. général, la courbe dont les ordonnées auroient été $R$ pendant que les abſciſſes étoient $r$. Fig. 25.

Pour trouver dans ce cas ci ce que devient la quantité $\int \frac{Rrrdr}{ee} = A$, il faudra calculer cette quantité dans la ſuppoſition de $R = 1$ & $r = e$, & en retrancher ce que la même quantité devient lorsque $r=a$, la quantité qui viendra par cette soustraction sera la partie de $\int \frac{Rrrdr}{ee}$ qui répond à l'orbe fluide environnant, & sa valeur sera $\frac{1}{3}e - \frac{1}{3}\frac{a^3}{ee}$, car $\int \frac{Rrrdr}{ee}$ dans la supposition de $R=1$ est $\frac{r^3}{3ee}$ qui devient $\frac{1}{3}e$ lorsque $r=e$, & $\frac{1}{3}\frac{a^3}{ee}$ lorsque $r=a$.

Il faudra ensuite calculer $\int \frac{Rrrdr}{ee}$ en faisant $R=1+f$, & $r=a$, cette quantité sera alors la partie de $\int \frac{Rrrdr}{ee}$ qui convient au noyau, & sa valeur sera $\frac{1}{3}\frac{a^3}{ee}(1+f)$; ajoutant alors ces deux parties de $\int \frac{Rrrdr}{ee}$, on aura pour cette quantité, c'est-à-dire pour $A$, $\frac{1}{3}e - \frac{\frac{1}{3}a^3}{ee} + \frac{a^3}{3ee}(1+f) = \frac{1}{3}e + \frac{\frac{1}{3}a^3 f}{ee}$.

Pour trouver de même la quantité $D$, ou $\int \frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4}$ qui répond aux deux parties dont on suppose la planete composée, on fera d'abord $R=1$, & $\gamma=\delta$, ce qui donnera $\int \frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4} = \frac{r^5\delta}{e^4}$ qui devient $e\delta$ lorsque $r=e$.

On retranchera de cette même quantité ce que $\int \frac{Rd(r^5\gamma)}{e^4}$ devient lorsque $R=1$ comme auparavant, & que $\gamma$ au lieu d'être $\delta$ est l'ellipticité du noyau supposée $=\alpha$ pendant que $r=a$; ce qui donnera alors $\int \frac{R\alpha(r^5)}{e^4} = \frac{a^5\alpha}{e^4}$, retranchant cette derniere quantité de la premiere, on aura $e\delta - \frac{\alpha a^5}{e^4}$ pour la partie $D$ qui répond à l'orbe environnant.

Supposant

Supposant ensuite dans $\int R\,(r^5\gamma)$, $R = 1 + f$, $\gamma = \alpha$, & $r = a$, on aura $\frac{a^5\alpha}{e^4}\,(1+f)$ pour la partie $D$ qui répond au noyau.

Ajoutant ces deux parties de $D$, on aura pour sa valeur totale $e\delta - \frac{a^5\alpha}{e^4} + \frac{a^5\alpha\,(1+f)}{e^4} = e\delta + \frac{a^5\alpha f}{e^4}$ : substituant enfin les valeurs de $A$ & de $D$ dans l'équation, $\frac{2}{5}D + A\varphi = 2A\delta$, ou $2D + 5A\varphi = 10A\delta$, il viendra $10\delta\left(\frac{1}{3}e + \frac{\frac{1}{3}a^3f}{ee}\right) - 2e\delta$

$- \frac{2a^5f\alpha}{e^4} = 5\varphi\left(\frac{1}{3}e + \frac{\frac{1}{3}a^3f}{ee}\right)$, d'où l'on tire $\delta = \frac{\frac{6a^5f\alpha}{e^4} + 5e\varphi}{4e + \frac{10a^3f}{ee}}$

$+ \frac{\frac{5a^3f\varphi}{ee}}{4e + \frac{10a^5}{ee}} = \frac{6a^5f\alpha + 5\varphi e^5 + 5a^3f\varphi}{4e^5 + 10a^3fe^2}$, qui est la même formule que celle que M. *Clairaut* a donné Art. 31. de la seconde Partie de la Théorie de la figure de la Terre, puisqu'elle n'en différe qu'en ce que, dans la formule de M. *Clairaut*, la quantité $e$ répond à l'unité.

M. *Clairaut* a tiré ce cas d'un Problême qui différe de celui que je viens de traiter, en ce que, outre qu'il a supposé (figure de la Terre, p. 210.) que les couches varioient du centre jusqu'à une surface extérieure $BF$; il a supposé encore un orbe fini de densité homogéne, ce que je n'ai pas fait dans la Prop. précédente, dans laquelle la planete ou le sphéroïde est supposé composé d'une infinité de couches toutes infiniment minces.

## XLVIII.

### *COROLLAIRE I.*

Par cette formule on trouvera l'ellipticité du sphéroïde aussitôt qu'on aura donné des valeurs à $a$, $f$, $\alpha$, & réciproquement, si $\delta$ est donné par observation, on tirera ce que doit être la densité ou l'ellipticité, ou le rayon du noyau, pour que la planete ſoit en équilibre ; car deux des trois quantités $a$, $\alpha$, $f$, étant données, la troiſiéme ſe déterminera par le ſecours de l'équation précédente, qui donne la valeur de $\delta$, pourvû que l'on obſerve que $\alpha$ ſoit toujours une quantité de l'ordre de $\delta$, c'eſt-à-dire, une quantité très-petite, que $a$ ſoit plus petit que $e$, que $f$ n'ait jamais de valeur négative plus grande que l'unité, parce qu'alors le noyau ſeroit d'une denſité négative, ce qui ſeroit abſurde.

## XLIX.

### COROLLAIRE II.

Si, par exemple, on vouloit que la planete fut plus applatie que dans le cas de l'homogénéité, & que le noyau fut d'une ellipticité égale à celle de la planete, on auroit en ce cas $\delta = \alpha = \frac{5}{4}\varphi(1+p)$, ($p$ étant un nombre poſitif) puiſque $\delta = \frac{5}{4}\varphi$ dans le cas de l'homogénéité : (Article 43.) or l'équation précédente

$$\delta = \frac{\frac{6a^5 f\alpha}{4e} + 5e\varphi + \frac{5a^3 f\varphi}{ee}}{4e + \frac{10a^3 f}{ee}}$$ deviendroit dans cette ſuppoſition

$$\frac{5}{4}\varphi(1+p) = \frac{\frac{6a^5 f}{e^4} \times \frac{5}{4}\varphi(1+p) + 5e\varphi + \frac{5a^3 f\varphi}{ee}}{4e + \frac{10a^3 f}{ee}},$$

ou $$5(1+p)e + \frac{25a^3 f}{2ee}(1+p) = \frac{15a^5 f}{2e^4}(1+p) + 5e + \frac{5a^3 f}{ee},$$

d'où l'on tire $$f = \frac{5pe}{\frac{15}{2}a^5 e^4 \times \overline{1+p} - \frac{25a^3 p}{2e^2} - \frac{15a^3}{2e^2}},$$ ou

$$\frac{-1}{\frac{3}{2}p\left(\frac{a^3}{e^3} - \frac{a^5}{e^5}\right) + \frac{5a^3}{2e^3} - \frac{3a^5}{2e^5}},$$ qui eſt néceſſairement une valeur négative, puiſque $a < e$, $\frac{a^3}{e^3} < \frac{a^5}{e^5}$, ce qui rend le dénominateur poſitif ; ainſi en ſuivant cette hypothèſe, le noyau

de la planete doit être moins dense que la matiere qui l'environne.

L.

### *COROLLAIRE III.*

Si on veut que la planete soit un orbe d'épaisseur finie dont le milieu soit entierement vuide, il faut alors que $f = -1$ & on aura alors l'équation $-1 = \frac{-1}{\frac{3}{2}p\left(\frac{a^3}{e^3} - \frac{a^5}{e^5}\right) + \frac{5a^3}{2e^3} - \frac{3a^5}{2e^5}}$, qui étant résolue donnera la valeur de $a$, nécessaire pour l'équilibre de la planete, c'est-à-dire, la valeur du rayon de l'espace vuide qui se trouvera dans cette hypothèse, lequel rayon est l'inconnue.

Il est évident que des différentes racines que contiendra l'équation qu'on vient de trouver & qui résoudroient le Problême, on ne prendra que les positives.

LI.

### *COROLLAIRE IV.*

On expliqueroit aisément, par le même calcul, comment une planete pourroit être allongée sans que l'équilibre du fluide qui la couvre en fut troublé ; car si le noyau est lui-même allongé, c'est-à-dire, si $\alpha$ est négatif & plus grand que $5\varphi(a^3fe^2 + e^5)$, $\delta$ sera négatif, car la valeur générale de $\delta$ étant dans le cas de $\alpha$ négatif, $= \frac{-6a^5f\alpha + 5\varphi e^5 + 5a^3fe^2\varphi}{4e^5 + 10a^3fe^2}$, il est évident que cette valeur de $\delta$ sera négative si le terme $6a^5f\alpha$ est plus grand que les termes $5\varphi e^5 + 5a^3f\varphi e^2$, c'est-à-dire, si $\alpha > 5\varphi\left(\frac{e^5 + 5a^3fe^2}{6a^5f}\right)$.

## L I I.

### *COROLLAIRE V.*

Si en supposant toujours que le sphéroïde soit plus applati que dans le cas de l'homogénéité, on veut que la densité du noyau soit plus grande que celle de la partie fluide, ou fluide & solide qui l'entoure, (pourvu que les parties fluides & solides de cet orbe soient d'une même densité,) il faudra en ce cas que l'ellipticité du noyau soit plus grande que $\frac{\delta e e}{a a}$, & à plus forte raison plus grande que $\delta$; car si on substitue dans la valeur de $\delta = \frac{6 a^5 f \alpha + 5 e^5 \varphi + 5 a^3 f e^2 \varphi}{4 e^5 + 10 a^3 f e^2}$ pour $\alpha$, $\left(\frac{\delta + V}{a a}\right) e e$; cette valeur de $\delta$ deviendra $\delta = \frac{6 a^3 f e^2 (\delta + V) + 5 e^5 \varphi + 5 a^3 e^2 f \varphi}{4 e^5 + 10 a^3 f e^2}$ qui donne $\delta = \frac{5}{4} \varphi + \frac{3 a^3 f V}{2 e^3 + 2 a^3 f}$; or comme $\frac{5}{4} \varphi$ est l'ellipticité dans le cas de l'homogénéité, (Art. 43.) on voit, que si l'on veut, que le sphéroïde qui a un noyau plus dense que le reste, c'est-à-dire, dans lequel $f$ est positif, soit plus applati que le sphéroïde homogéne; il faut que $V$ soit positif, c'est-à-dire, que $\alpha$ qui est l'ellipticité du noyau & qu'on a fait $= \frac{(\delta + V) e e}{a a}$, soit plus grand que $\frac{\delta e e}{a a}$, & à plus forte raison plus grand que $\delta$ *C. Q. F. D.*

## L I I I.

### *SCHOLIE.*

On voit par ce calcul qu'il ne suffit pas pour expliquer comment la terre peut avoir ses axes dans un rapport plus grand que celui de 230 à 231, de supposer, comme a fait M. *Newton*, plus de densité au centre qu'à la surface; on voit au contraire que si la terre avoit un noyau ou sphérique, ou d'une même courbure qu'elle, ou plus applati, pourvu que cet applatissement ne fût pas tel que $\alpha > \frac{\delta e e}{a a}$, les deux axes de la terre seroient entr'eux dans une moindre raison que 230 à 231; on verra dans peu ce qui avoit engagé M. *Newton* à croire qu'un plus grand applatissement que celui de 230 à 231 se trouvoit par une plus grande densité au centre.

On voit en même temps que M. *Newton* qui avoit à expliquer pourquoi l'applatissement de Jupiter, donné par les observations, étoit plus petit que celui qui résultoit de son calcul fait dans l'hypothèse de l'homogénéité, n'auroit pas dû prendre une hypothèse aussi dure que celle qu'il a prise en supposant l'équateur de cette planete plus dense que le reste; il n'avoit qu'à supposer plus de densité au centre qu'à la superficie, & alors il auroit eu le dénouement de sa difficulté, sans être obligé de faire une supposition, qui, si elle avoit lieu pour Jupiter, devroit être bien plus sensible dans la terre; car si, comme il le prétend, les parties de l'équateur de Jupiter étant plus exposées au Soleil doivent s'être reserrées, pourquoi n'en seroit-il pas arrivé de même à la terre.

Au reste ce que nous venons de dire pour un cas sur la diminution d'applatissement des sphéroïdes qu'apporte le plus de densité des parties voisines du centre, se peut traiter plus généralement comme on va le voir dans l'Article suivant.

## L I V.

## PROPOSITION XIV. THEORÉME I.

*Si la densité diminue continuellement du centre à la surface du sphéroïde, il sera moins applati que lorsqu'on le suppose homogène, pourvû que les ellipticités ne diminuent pas aussi du centre à la surface, ou que si elles diminuent, ce ne soit pas dans une plus grande raison que le quarré des distances.*

$\frac{\delta ee}{rr}$ seroit la valeur de $\delta$ si on vouloit que l'ellipticité diminuât du centre à la surface dans la même raison que les quarrés des distances augmentent; donc en supposant que $u$ soit une quantité positive, il faudra, en substituant $\left(\frac{ee}{rr} - u\right)\delta$ pour $\gamma$, faire voir que $\delta$ doit être nécessairement plus petit que $\frac{5}{4}\varphi$, la valeur de $\gamma$ étant substituée dans $\int R\,d(r^5\gamma)$ changera cette quantité en $5\,\delta\int e^2 Rrrdr - \delta\int R\,d(r^5 u)$, ou $5\,\delta e^2\int Rrrdr - \delta Rr^5 u + \delta\int r^5 u\,dR$, & donnera par conséquent $D = 5\,\delta A - \delta G$, en prenant $G$ pour ce que devient $\frac{Rur^5 - \int r^5 u\,dR}{ee}$ lorsqu'on fait $r = e$; mettant donc cette valeur de $D$ dans l'équation générale $10\,\delta A - 2D = 5A\varphi$ qu'on a trouvée ci-dessus (Art. 42.) on en tirera $\delta = \frac{5\varphi}{4 + \frac{G}{2A}}$ qui sera nécessairement plus petit que $\frac{5}{4}\varphi$, pourvû que $G$ soit positif, ce qui ne sauroit manquer d'être, puisque les deux termes que contient la quantité $\frac{Rur^5 - \int r^5 u\,dR}{ee}$ d'où l'on tire $G$ sont tous les deux positifs; le premier $Rur^5$ l'est certainement puisqu'il est affecté du signe $+$, & le second l'est aussi quoiqu'il soit affecté du signe $-$, parce que $R$ décroissant lorsque $r$ augmente, $dR$ est négatif. *C. Q. F. D.*

## L V.

## PROPOSITION XV. PROBLEME IX.

*Un sphéroïde composé de couches de différentes densités & de différentes ellipticités, étant supposé tourner dans le temps convenable pour l'équilibre du sphéroïde, trouver la loi que suit la pesanteur, c'est-à-dire, l'attraction totale dont on a retranché l'effet de la force centrifuge depuis le pole jusqu'à l'équateur.*

On a vu dans l'Article 41. que $\varphi$ représentant le rapport de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur, $2cA\varphi$ exprimera la force centrifuge à l'équateur, & $2cA\varphi \times \frac{QM}{CE}$ la force centrifuge en un lieu quelconque $M$, puisque les forces centrifuges sont comme les rayons, lorsque les corps tournent dans le même temps.

Décomposant ensuite la force centrifuge qui agit en $M$ suivant la direction $QM$, afin d'avoir la partie de cette force qui agit dans le sens du rayon $CM$, on aura $2cA\varphi \times \frac{QM^2}{CE \times CM}$ qu'on peut prendre, sans erreur sensible, pour $2CA\varphi \times \frac{QM^2}{CM^2}$, ou $2cA\varphi SS$, en nommant $S$ le sinus de $PCM$; retranchant donc cette force $2cA\varphi SS$ de $2cA - 4cSS\delta A + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{5}cD + \frac{6}{5}cSSD$ qui exprime (Article 36.) l'attraction du sphéroïde dans la direction $CM$, on aura $2cA + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{5}cD + (\frac{6}{5}cD - 4\delta cA - 2c\varphi A)SS$ pour exprimer la force de la pesanteur en un lieu quelconque. *C. Q. F. T.*

On a supposé dans ce Problême que la direction de la pesanteur étoit celle du rayon $CM$, & c'est ce qui n'est pas exactement vrai; mais ce qui peut être supposé sans erreur sensible dans cette occasion, parce qu'une force décomposée suivant une direction qui différe infiniment peu de celle du rayon, donne, par cette décomposition, une force qui n'en différe que d'un infiniment petit du second ordre.

Si on retranche l'expression précédente de celle qui exprime la pesanteur ou l'attraction au pole, laquelle est $2cA + \frac{4}{5}cB - \frac{4}{5}cD$, il viendra pour la différence $(4cA\delta + 2cA\varphi - \frac{6}{5}cD)SS$, ce qui apprend que la diminution de la pesanteur depuis le pole jusqu'à l'équateur, est proportionnelle au quarré du cosinus de la latitude; car on peut prendre, sans erreur sensible, l'angle $PCM$ pour le complement de la latitude, lorsque le sphéroïde différe très-peu d'une sphére.

## L V I.

## PROPOSITION XVI. THEORÉME II.

*E étant l'ellipticité qu'auroit une planete supposée en équilibre si elle étoit homogéne, P la pesanteur des corps au pole de cette planete, Π la pesanteur à l'équateur, δ l'ellipticité de la même planete dans la supposition qu'elle soit composée comme le sphéroïde de l'Art. 10. d'une infinité de couches de densités & d'ellipticités différentes; je dis qu'on aura toujours* $\frac{P - \Pi}{\Pi} = 2E - \delta$, *quel que soit l'arrangement & la forme des couches dont elle est composée.*

Faisant $S = 1$ dans la quantité précédente $(2cA\varphi - \frac{6}{5}cD + 4cA\delta)SS$, on aura $2cA\varphi - \frac{6}{5}cD + 4cA\delta$ pour exprimer $P - \Pi$, ou l'excès de la pesanteur au pole sur celle à l'équateur; divisant donc cette quantité par $\Pi$, c'est-à-dire, par $2cA$, qui suffit dans cette occasion pour exprimer la pesanteur à l'équateur, on aura $2\delta + \varphi - \frac{3}{5}\frac{D}{A} = \frac{P - \Pi}{\Pi}$; mais on a vu dans l'Article 41. qu'afin que le sphéroïde pût subsister en équilibre, il falloit que $10\delta A - 2D = 5A\varphi$; donc au lieu de

$\frac{3D}{5A}$ on peut mettre $3\delta - \frac{3}{2}\varphi$, ce qui changera la quantité $2\delta + \varphi - \frac{3D}{5A}$ en $\frac{5}{2}\varphi - \delta$; mais $\frac{5}{4}\varphi$ est la valeur de l'ellipticité qu'auroit le sphéroïde s'il étoit homogéne ; donc $\frac{P - \Pi}{\Pi} = 2\varepsilon - \delta$. *C. Q. F. D.*

## LVII.

### *SCHOLIE.*

Il suit de ce calcul, qu'en supposant la terre homogéne & composée comme les sphéroïdes précédens, si son applatissement se trouve plus grand que $\frac{1}{230}$ ainsi que les observations faites au nord & au sud l'ont donné, la diminution totale de la pesanteur depuis le pole jusqu'à l'équateur, doit être autant au-dessous de la fraction $\frac{1}{230}$, que cette même fraction est surpassée par celle qui exprime l'applatissement trouvé par les observations. Ainsi en supposant, comme il le paroît par les observations que je viens de citer, que l'ellipticité de la terre soit la $\frac{1}{174}$, le raccourcissement du pendule du pole à l'équateur devroit être de $\frac{1}{174} - \frac{1}{230} = \frac{56}{40020} = \frac{1}{714}$ environ, ce qui se trouve très-différent de ce que les observations ont appris, puisqu'on voit par ces observations que ce même raccourcissement surpasse la fraction $\frac{1}{230}$ au lieu d'être plus petit.

Cette conclusion est bien contraire à celle de M. *Newton*, qui, en trouvant que les observations faites sur le pendule donnoient son raccourcissement du pole à l'équateur plus grand que $\frac{1}{230}$, vouloit que la terre fût en même temps plus applatie que cette même fraction ; mais ce sentiment de M. *Newton* étoit fondé sur ce qu'il pensoit que dans tout sphéroïde en équilibre, la pesanteur doit être toujours en raison renversée de la distance au centre, proportion qui n'est vraie que lorsque le sphéroïde est homogéne ; on peut voir pag. 253. du Livre de M. *Clairaut*, les passages de M. *Newton* qui prouvent qu'il s'étoit fondé sur cette supposition, sans en avoir vû la vérité que pour le cas de l'homogénéité.

La conclusion à laquelle conduit le calcul ci-dessus, rend la théorie précédente assez difficile à concilier avec les observations qui concernent la figure de la terre ; car l'hypothèse dans laquelle on regarde la terre supposée hétérogéne comme composée de couches orbiculaires est bien vraisemblable, & il seroit bien dur d'avoir recours à l'expédient de supposer l'équateur plus dense que le reste, & à supposer les différens rayons qui vont de la surface au centre de différentes densités, ce qui d'ailleurs pourroit bien ne pas conduire encore à trouver le rapport desiré entre l'applatissement de la terre, & le raccourcissement du pendule du pole à l'équateur.

Dans les calculs qu'a employé M. *Clairaut*, il a supposé à la vérité la forme elliptique aux couches extérieures, & l'on pourroit craindre que des couches d'une autre forme que l'ellipse, ne donnassent quelque changement dans le résultat : c'est donc une ressource pour ceux qui voudront concilier la théorie de l'attraction avec les observations de la figure de la terre dans le systême de M. *Newton*, sans joindre aucune autre force à celle de l'attraction ; la recherche est digne des plus grands Géométres par la difficulté, mais on a tout lieu de craindre qu'elle ne conduise à aucun résultat plus propre à concilier les observations avec cette théorie, si on ne veut pas donner aux couches qui composent la terre un arrangement qui paroisse trop controuvé.

L'hypothèse des couches elliptiques a une grande raison pour être préférée aux autres, c'est que ces courbes sont celles qui conviennent à toutes les couches, en supposant qu'elles ayent été originairement fluides; c'est ce que M. *Clairaut* a fait voir dans le quatriéme Chapitre de sa Théorie de la figure de la terre.

Je n'entreprends point ici d'éclaircir ce Chapitre, parce qu'il dépend des mêmes principes que ceux dont j'ai parlé précédemment, & que les personnes qui auront eu tous les secours que je leur ai donné par les détails dans lesquels je suis entrée, entendront facilement ce Chapitre dans l'ouvrage même.

# SECTION V.

## DES MARÉES.

I.

Il ne s'agit plus de rechercher quelle est la vraie cause des marées ; elle est connue aujourd'hui des Physiciens-Géométres avec toute la certitude dont la Physique est susceptible : il ne reste à présent qu'à développer cette cause, à en tirer toutes les conséquences, & en calculer les effets.

On sçait assez que les marées sont occasionnées par l'inégalité de l'action que la Lune & le Soleil exercent sur les parties qui composent la terre. M. *Newton* a tellement établi le méchanisme de cette cause, qu'il n'est plus permis d'en douter. Il faut cependant avouer que ce grand homme ne s'est pas donné la peine d'entrer là-dessus dans le détail que l'importance de la matiere exigeoit. L'Académie des Sciences a si bien senti à cet égard l'intérêt du Public, qu'elle n'a pas hésité de proposer la question des marées pour le Prix de 1740. prévoyant bien que cela encourageroit les savans à mettre le système de M. *Newton* dans tout son jour, & à le perfectionner autant que l'incertitude de quelques circonstances requises pourroient le permettre. On peut dire que jamais son attente n'a été mieux remplie que cette fois-là : Les soins de l'Académie, & ses heureux auspices, nous ont procuré trois belles Piéces fort étendues, toutes fondées sur les principes de M. *Newton* : elles sont de Messieurs *Daniel Bernoulli*, *Mac-Laurin* & *Euler*. Je me suis sur tout attachée à lire celle de M. *Bernoulli*, dans laquelle il m'a paru trouver plus d'ordre, de netteté & de précision ; & j'espére que le Lecteur me saura gré, si pour Commentaire de notre Auteur sur cette matiere, je lui donne un abrégé du Traité de M. *Bernoulli* ; ce que je ne pourrai cependant faire, sans omettre plusieurs propositions essentielles, ni sans changer les démonstrations de celles que j'alléguerai.

## I I.

Il est bon de n'examiner d'abord que l'action d'un seul luminaire, & de commencer par celle du Soleil, parce que nous en connoissons la quantité de matiere relativement à celle de la terre. On remarquera d'abord que le Soleil attire la terre, & que cette force est contre-balancée pour la totalité par la force centrifuge qui répond au mouvement annuel de la terre, lequel mouvement nous considérerons comme parfaitement uniforme, & circulaire autour du Soleil : mais ce qui est vrai pour la totalité, ne peut pas être appliqué à chaque particule de la terre, c'est-à-dire, qu'on ne sauroit supposer la force centrifuge de chacune de ces particules égale à la force avec laquelle la même particule est attirée vers le Soleil, puisque la force centrifuge est la même pour chacune d'elles, pendant que les particules de la terre qui sont plus proches du Soleil, en sont attirées plus fortement que celles qui en sont plus éloignées. Ainsi si la distance de la terre au Soleil est égale à 22000 demi-diamétres terrestres, & si les forces attractives suivent la raison réciproque des quarrés des distances, les forces attractives pour le point de la terre qui est le plus proche du Soleil, pour le centre de la terre & pour le point de la terre qui est le plus éloigné du Soleil, ces trois forces, dis-je, seront à peu près comme 11001, 11000 & 10999, pendant que la force centrifuge de la terre sera pour chaque point de la terre comme 11000 ; si nous retranchons ensuite pour chacun de ces trois points la force centrifuge de la force attractive, il nous restera 1, o & — 1, ce qui marque que les deux extrémités du diamétre de la terre qui est dirigé vers le Soleil, souffrent des forces égales en sens contraire, qui tendent à y éloigner les particules depuis le centre de la terre, ou bien à les élever.

Si dans le même diamétre nous prenons au dedans de la terre deux points également éloignés du centre, ces deux points souffriront encore une pareille force égale de part & d'autre, qui tend à éloigner les particules de ce centre ; mais cette force diminuera en même raison que la distance au centre de la terre. J'appellerai ce diamétre terrestre, dont la direction passe par le centre du Soleil, *l'axe Solaire* de la terre ; si nous considérons à présent l'équateur qui répond à cet axe, nous voyons que chaque point pris dans le plan de cet équateur, peut être censé également éloigné du centre du Soleil, & qu'ainsi aucun point de ce plan, ne se ressentira de l'inégalité entre la force centrifuge & la force attractive, & ne perdra rien de sa pesanteur naturelle vers le centre de la terre. Si l'on conçoit donc deux canaux, l'un tout le long du demi axe solaire, & l'autre tout le long du rayon de son équateur, qui communiquent ensemble au centre de la terre & qui soient remplis d'un fluide, il sera élevé dans le premier canal & descendra dans l'autre, & la chose sera ainsi pour l'un & l'autre demi axe solaire. C'est ici la premiere source du flux & reflux de la mer.

## III.

On remarquera en second lieu, que dans le canal de l'un des demi axes solaires, chaque partie du fluide est attirée directement vers le Soleil suivant la direction du canal, au lieu que dans l'autre canal cette force agit avec une petite obliquité ; il faut donc décomposer cette force en deux autres, l'une perpendiculaire au canal, & l'autre parallele ; la premiere peut encore être censée parfaitement détruite par la force centrifuge, parce que la différence de cette force à la force entiere, ne fait qu'une espéce d'infiniment petit du second ordre ; mais la seconde force tire chaque particule dans ce canal directement vers le centre de la terre, & se joint à l'action de la pesanteur naturelle ; cette petite force n'existe point dans le canal du demi axe solaire, & ainsi le fluide descendra encore par cette raison dans le canal de l'équateur solaire, & élevera celui de l'autre. C'est-là la seconde source du flux & reflux de la mer.

I V.

Les deux causes que nous venons d'exposer ne sauroient manquer d'élever les eaux vers les deux poles de l'axe solaire, & de les déprimer dans chaque point de l'équateur solaire, quelques hypothèses qu'on veuille faire par rapport aux autres circonstances qui nous restent à considérer, & on voit que la figure de la terre, que la seule pesanteur naturelle lui fait prendre, est un peu changée par l'action du Soleil, & qu'elle en est allongée de maniere que son axe solaire en devienne plus long, & le diamétre de l'équateur solaire plus court. Ce petit changement de la figure de la terre cause aussi-tôt une petite variation dans la pesanteur naturelle, tant en direction qu'en force, & nous démontrerons ci-dessous que cette variation conspire avec les deux premieres causes immédiates à faire le même effet, & cela dans une proportion ni assez grande pour négliger les deux premieres causes, ni assez petite pour la négliger elle-même. Voilà la troisiéme source des marées la plus fâcheuse pour le calcul, & dont l'effet dépend de plusieurs hypothèses & circonstances, qu'on ne pourra peut être jamais déterminer au juste.

V.

La terre ainsi allongée conserveroit la figure sans qu'il y eut aucun flux & reflux, si elle n'avoit point de mouvement journalier : c'est donc la rotation de la terre autour de son axe, conjointement avec son allongement, qui produisent alternativement un baissement & élévation des eaux de la mer. Si l'axe de rotation étoit le même que l'axe solaire, il n'y auroit aucun mouvement dans les eaux de la mer, parce que chaque point conserveroit constamment une même distance depuis les poles solaires, pendant que la terre feroit sa révolution ; mais comme ces deux axes font un angle, il est facile de voir que chaque point de la surface de la terre s'approche & s'éloigne alternativement des poles solaires, & cela deux fois pendant une révolution, & que les eaux s'éléveront dans ce point jusqu'à ce qu'il en soit le plus proche, & qu'ensuite elles se baisseront jusqu'à ce qu'il en soit le plus loin : l'intervalle entre deux marées est de 12 heures solaires, en tant que les marées sont produites par l'action du soleil.

## V I.

Ce que nous venons de dire par rapport au Soleil doit être appliqué dans toute son étendue à la Lune, & tous les phénomènes des marées nous font voir évidemment que l'effet de cet astre est considérablement plus grand que celui du Soleil : si on connoissoit avec une précision suffisante le rapport entre les masses de la Lune & du Soleil, il seroit facile d'en déterminer le rapport entre leurs effets ; mais ce rapport entre les masses est assez incertain, & ne sauroit être déterminé que par le moyen de quelques observations sur les marées, ou bien de quelques irrégularités du mouvement de la Lune, ou par quelques autres moyens semblables : Cependant on ne sera pas surpris que l'action de la Lune surpasse considérablement celle du Soleil, malgré la masse énorme de celui ci, quand on considérera la grande proximité qu'il y a entre la Lune & la terre, & que les effets des deux luminaires sont en raison réciproque cubique des distances,

distances à la terre, & en raison simple de leurs masses, comme nous verrons ci-dessous. A l'égard de cette cause l'intervale entre deux marées sera de 12 heures lunaires, ou d'environ $12^h\ 25'$ solaires.

V I I.

En combinant les deux actions du Soleil & de la Lune sur les eaux de la mer, nous voyons qu'il y a à proprement parler continuellement deux espéces de marées, qu'on pourra appeller *marées solaires* & *marées lunaires*, & qui peuvent se former indépendemment les unes des autres ; ces deux sortes de marées paroissent en se confondant n'en faire qu'une seule espéce, mais qui devient sujette à de grandes variations. Je dis que ces marées considérées comme simples, auront toujours les apparences d'être extrêmement variables ; car dans les syzigies les eaux sont élevées & baissées en même temps par l'un & l'autre luminaire, & dans les quadratures les eaux sont élevées par le Soleil, là où elles se baissent à l'égard de la Lune, & réciproquement elles se baissent à l'égard du Soleil au même moment qu'elles s'élévent à l'égard de la Lune ; desorte que par ces effets, tantôt conspirans, tantôt opposés, il résulte des variations très-sensibles, tant par rapport à l'heure des marées que par rapport à leur hauteur. Toutes ces variations, que la combinaison des deux espéces de marées indique pour toutes les différentes circonstances, répondent parfaitement aux observations qu'on a faites sur cette matiere, desorte que la théorie en est entierement confirmée, ou plutôt démontrée. Voilà l'explication physique de la vraie cause des marées ; c'est à la Géométrie à la mettre dans un plus grand jour ; la matiere est extrêmement riche, & je passerois les bornes d'un Commentaire, si je voulois la traiter dans toute son étendue ; je me contenterai d'en exposer les principes les plus essentiels.

V I I I.

Il me paroît sur tout nécessaire de faire voir que la cause des marées telle que nous l'avons exposée, n'a rien de disproportionné aux effets que nous prétendons en déduire ; on pourroit apparemment aller plus loin, & démontrer géométriquement une entiere égalité entre les effets & leurs causes, sans les grandes irrégularités des terres & de l'Océan, & si on connoissoit en même temps toutes les circonstances par rapport à l'intérieur de la terre que demande une détermination précise. Il s'agit donc de rechercher de combien les eaux de la mer sont élevées près des poles de l'axe solaire de la terre par l'action du Soleil, c'est-là le Problême fondamental : mais cette question dépend de plusieurs circonstances, à la connoissance desquelles il n'y a aucune apparence de pouvoir jamais parvenir. Il faudroit connoître toutes les variations des densités de la matiere de la terre depuis la surface jusqu'au centre. Il faudroit ensuite sçavoir, en supposant les densités sensiblement inégales, si l'intérieur de la terre doit être considéré comme un globe solide couvert d'eau, ou bien comme fluide : dans le premier cas le globe ne sauroit changer sa figure ; mais dans le second cas chaque couche de la terre change sa figure, & fait changer celle de toutes les autres, desorte qu'à la surface de la terre les eaux sont plus ou moins élevées suivant les différentes hypothèses. Il faut même avouer l'insuffisance de l'analyse pour calculer les résultats, & qu'on est obligé dans la généralité du Problême d'envisager la chose sous une face qui ne convient pas exactement avec sa nature, ce qui fait qu'en pressant trop les formules, on en tire des Corollaires peu conformes aux apparences de la vérité. Il faudroit encore connoître la figure & la grandeur de l'Océan. Tout cela influe sur notre question.

## I X.

Les réflexions que je viens de faire excusent suffisamment M. *Newton* de n'avoir considéré que le cas le plus simple, qui est de supposer la terre homogéne dans toute son étendue ; cette supposition rend non seulement les calculs praticables, mais elle a encore ceci de commode, qu'il n'eſt pas néceſſaire en ce cas de faire aucune diſtinction entre l'hypothèſe d'une entiere fluidité de la terre ou de ſa ſolidité, pourvu qu'on la ſuppoſe toute inondée : auſſi tous ceux qui ont réſolu ce Problême s'accordent-ils entierement pour ce dernier cas. Si donc la terre eſt compoſée d'une matiere d'une même denſité depuis la ſurface juſqu'au centre, & que la ſeule peſanteur naturelle agiſſe ſur toutes les parties de cette maſſe, il eſt évident que la terre en prendra une figure parfaitement ſphérique. Mais ſi enſuite l'action du Soleil ſurvient, cette ſphère ſera changée en ſpheroïde, & on conſidére ce ſphéroïde comme elliptique, tel que chaque méridien faſſe une ellipſe dont la différence des axes ſoit extrêmement petite ; il faut conſidérer la figure des méridiens ſolaires comme connue, puiſque ſans cela on ne ſauroit déterminer la différence entre les peſanteurs naturelles pour la ſphére & pour le ſphéroïde. Cependant on peut démontrer qu'en ſuppoſant une figure elliptique, cette figure n'eſt pas changée par l'action du Soleil, & qu'ainſi le ſphéroïde eſt néceſſairement elliptique. Par cette méthode on peut démontrer que preſque toutes les petites forces perturbatrices, comme, par exemple, la force centrifuge qui répond au mouvement journalier de la terre, changent la figure ſphérique en ſphéroïde elliptique. Il eſt queſtion à préſent de déterminer la différence entre les deux demi axes de l'ellipſe dont il s'agit, différence qui eſt la même que celle du demi axe ſolaire de la terre & du rayon de l'équateur ſolaire. Pour nous mettre en état de la déterminer, j'alléguerai ici quelques propoſitions de M. *Newton* ſur l'attraction des corps homogénes, ſphéroïdiques & elliptiques.

## X.

### LEMME I.

Fig. 1. *Soit* BGDH *une ellipse presque circulaire, qui par sa révolution autour du grand axe* BD *forme un sphéroïde homogéne; si on suppose le petit demi axe* $GC = b$, *le grand demi axe* $BC = b + c$; *si on nomme ensuite* g *l'attraction d'une sphére homogéne avec le sphéroïde, & dont le rayon est* $= b$ *pour un point pris dans la surface de la sphére; je dis que l'attraction du sphéroïde pour le pole* B *ou* D *sera* $= g + \frac{c}{5b} g$.

C'est la Prop. 6. du Chap. 2. du Traité de M. *Daniel Bernoulli* sur le flux & le reflux de la mer, & on remarquera que j'appelle ici *g* ce que ce Géométre exprime par $\frac{2}{3} n \mu b$.

## XI.

### LEMME II.

*L'attraction du même sphéroïde pour un point* G *pris dans l'équateur solaire sera* $= g + \frac{2c}{5b} g$.

C'est la Proposition suivante de M. *Bernoulli.*

## XII.

### LEMME III.

*Dans le même sphéroïde l'attraction pour un point quelconque pris dans un diamétre quelconque, est à l'attraction pour l'extrémité du même diamétre, comme la distance du premier point au centre du sphéroïde est au demi diamétre.*

C'est le troisiéme Corollaire de la Prop. 91. du premier Livre des Principes de M. *Newton.*

## XIII.

### PROBLÉME.

*Trouver la différence entre le demi axe solaire* BC *& le rayon de son équateur* GC.

## SOLUTION.

Qu'on imagine les deux canaux $BC$ & $GC$, qui communiquent ensemble au centre $C$, remplis d'eau : l'équilibre qu'il y aura entre les eaux des deux canaux, demande que la pression totale des eaux soit de part & d'autre égale ; il n'y aura donc qu'à chercher ces pressions totales, & les supposer ensuite égales. Soit à présent $GC = b$, $BC = b + \varsigma$ ; qu'on prenne dans le demi axe $BC$ deux points infiniment proches $M$ & $m$, & qu'on suppose $CM = x$, $Mm = dx$ : nous aurons en vertu de l'Article dixiéme, la pesanteur au point $B$ vers le centre $C = g + \frac{\varsigma}{5b} g$ ; ensuite l'Article douziéme donne la même pesanteur pour le point $M = \frac{x}{b+\varsigma} \times \left(g + \frac{\varsigma}{5b} g\right)$, & cette expression peut être censée $= \left(\frac{x}{b} - \frac{4 \varsigma x}{5 bb}\right) g$. Soit à présent la pesanteur solaire pour le centre $C$, c'est-à-dire, la pesanteur qui anime une particule placée au centre $C$ vers le centre du Soleil $= \gamma$ ; & qu'on nomme $B$ la distance entre ces deux centres, & la distance du point $M$ jusqu'au centre du Soleil sera $= B - x$ ; ainsi la pesanteur solaire pour le point $M$ sera $= \left(\frac{B}{B-x}\right)^2 \gamma$ ou bien $= \gamma + \frac{2x}{B} \gamma$. De cette force solaire il faut retrancher la force centrifuge qui répond au mouvement annuel de la terre, & qui est pour chaque point de la terre $= \gamma$, après quoi il reste une petite force actuelle $\frac{2x}{B} \gamma$, avec laquelle la petite colomne $Mm$ est animée vers $B$, & la force totale qui anime cette petite colomne vers $C$ sera $= \left(\frac{x}{b} - \frac{4 \varsigma x}{5 bb}\right) g - \frac{2x}{B} \gamma$. Si on multiplie cette force par la masse $Mm$, qu'on peut exprimer par $dx$ à cause de l'homogénéité de la terre, nous aurons la pression de la petite colomne

Fig. 2.

vers le centre $C = \frac{gxdx}{b} - \frac{4g\epsilon xdx}{5bb} - \frac{2\gamma xdx}{B}$. Si on prend l'intégrale de cette quantité ſans ajouter aucune conſtante, nous aurons $\frac{gxx}{2b} - \frac{2g\epsilon xx}{5bb} - \frac{\gamma xx}{B}$ : faiſons enfin $x = BC = b + \epsilon$ & nous aurons en négligeant les quantités cenſées infiniment petites du ſecond ordre, le poids total de la colomne entiere $BC$ vers le centre $C = \frac{1}{2}gb + \frac{3}{5}g\epsilon - \frac{\gamma bb}{B}$.

Pour trouver à préſent la preſſion totale du fluide $GC$, nous remarquerons qu'en vertu du ſecond Lemme la peſanteur au point $G$ doit être exprimée par $g + \frac{2\epsilon}{5b}g$ : ſi on fait après cela $CN = y$, $Nn = dy$, on aura pour le point $N$ la peſanteur $= \frac{y}{b} \times \left(g + \frac{2\epsilon}{5b}g\right)$ : quant à la peſanteur ſolaire $\gamma$ qui ſe fait vers le centre du Soleil, il faut la réſoudre en deux autres, dont la premiere agit parallélement à $BC$ qui n'entre plus en ligne de compte, tant parce qu'elle peut encore être cenſée $= \gamma$, & qu'ainſi elle eſt détruite par la force centrifuge du mouvement annuel de la terre, que parce qu'elle agit perpendiculairement contre les bords du canal ; il ne reſte donc à conſidérer que la peſanteur ſolaire en tant qu'elle agit dans chaque point $N$ dans la direction $NC$, & qui eſt $= \frac{B}{y}\gamma$ : ſi nous ajoutons cette petite force à celle de la peſanteur, nous aurons la force totale qui anime la petite colomne $Nn$ vers le centre $C$, & qui par conſéquent ſera $= \frac{gy}{b} + \frac{2g\epsilon y}{5bb} + \frac{\gamma y}{B}$. Si nous multiplions cette force accélératrice par la maſſe de la petite colomne $Nn$ ou par $dy$, nous aurons la preſſion de cette colomne vers le centre $C = \frac{gydy}{b} + \frac{2g\epsilon ydy}{5bb} + \frac{\gamma ydy}{B}$. Si on prend l'intégrale de cette quantité & qu'enſuite on faſſe $y = b$, on aura enfin le poids total de la colomne entiere $GC$ vers le centre $C = \frac{1}{2}gb + \frac{1}{5}g\epsilon + \frac{\gamma bb}{2B}$. Si nous faiſons enfin cette preſſion totale égale à la précédente qui répond au canal $BC$, nous aurons $\frac{1}{2}gb + \frac{1}{5}g\epsilon + \frac{\gamma bb}{2B} = \frac{1}{2}gb + \frac{3}{5}g\epsilon - \frac{\gamma bb}{B}$ ou $\epsilon = \frac{15}{4} \times \frac{\gamma}{g} \times \frac{b}{B} \times b$. Cette expreſſion eſt la même que celle que donne M. *Bernoulli*, pour ce cas au §. 8. Chap. 4.

## X I V.

Comme la quantité $\gamma$ eſt un peu variable en conſidérant l'excentricité de l'orbite de la terre, il ſera plus convenable d'exprimer le rapport $\frac{\gamma}{g}$ par celui des maſſes du Soleil & de la terre; ſi on exprime ces maſſes par $\mu$ & $m$, on aura $\frac{\gamma}{g} = \frac{\mu}{m} \times \frac{bb}{BB}$ & $\epsilon = \frac{15}{4} \times \frac{\mu}{m} \times \frac{b^3}{B^3} \times b$. Cette expreſſion nous apprend que les élévations des eaux exprimées par $\epsilon$, ſont en raiſon réciproque cubique des diſtances de la terre au Soleil. Il paroît d'abord par l'une & l'autre de ces expreſſions, que la valeur de $\epsilon$ en nombres devroit être aſſez incertaine comme dépendante de la diſtance du Soleil ou de ſa parallaxe, laquelle n'eſt pas encore bien établie; mais la façon dont on peut ſe ſervir pour déterminer les rapports $\frac{\gamma}{g}$ & $\frac{\mu}{m}$ redreſſent cette incertitude, de maniere que la quantité $\epsilon$ ne dépend plus que de la parallaxe de la Lune qu'on connoît aſſez au juſte.

## X V.

La réflexion que je viens de faire m'engage à donner une troiſiéme expreſſion pour la valeur de $\epsilon$: On remarquera donc que $g$ dénotant la peſanteur naturelle (car l'attraction de la ſphère inſcrite dans le ſphéroïde, ne différe pas ſenſiblement de celle de tout le ſphéroïde) la peſanteur moyenne de la Lune vers la terre ſera $= \frac{bb}{AA} g$, (en entendant par $A$ la diſtance moyenne de la Lune à la terre, qu'on connoît aſſez exactement;) & cette peſanteur $\frac{bb}{AA} g$ eſt à la peſanteur de la terre vers le Soleil ou à $\gamma$, comme la force centrifuge de la Lune à la force centrifuge de la terre. Soit le temps périodique moyen de la Lune $= t$, celui de la terre $= T$, la diſtance moyenne de la Lune au centre de gravité du ſyſtême de la terre & de la Lune $= nA$, & qu'on entende par $B$ la diſtance moyenne de la terre au Soleil, on ſçait par les Théorémes de M. *Hughens*, que les forces centrifuges de la Lune & de la terre dans leurs orbites ſont comme $\frac{nA}{tt}$ à $\frac{B}{TT}$: nous aurons donc cette analogie $\frac{bb}{AA} g : \gamma :: \frac{nA}{tt} : \frac{B}{TT}$, laquelle donne $\frac{\gamma}{g} = \frac{B}{nA} \times \frac{bb}{AA} \times \frac{tt}{TT}$. Si nous ſubſtituons cette valeur dans l'équation de l'Article 13. nous aurons $c = \frac{15}{4} \times \frac{b^3}{nA^3} \times \frac{tt}{TT} \times b$.

## XVI.

C'eſt enfin cette équation qui nous apprend au juſte la valeur de $c$ pour la diſtance moyenne du Soleil: la valeur $\frac{tt}{TT}$ eſt ſuivant M. *Newton*, $= \frac{1000}{178725}$; $b = 19695539$ pieds, ſuivant la meſure de M. *Caſſini*; $\frac{b}{A} = \frac{1}{60\frac{1}{4}}$ ſuivant M. *Newton*. Quant au coëfficient $n$, il dépend de la proportion de la maſſe de la terre à celle de la Lune; M. *Newton* ſuppoſe la premiere 39 fois plus grande que l'autre, fondé ſur la différence des marées dans les ſyzigies & dans les quadratures, & là-deſſus il faut faire $n = \frac{39}{40}$:

M.

M. *Daniel Bernoulli* a beaucoup plus approfondi cette question extrêmement utile pour calculer plusieurs perturbations lunaires, & plusieurs autres petits mouvemens ; il a fait voir qu'il falloit plutôt déduire la masse de la Lune de quelques inégalités sur les intervalles des marées, & cette considération nous apprend que la masse de la Lune est plus petite en raison à peu près de 5 à 9, desorte que la masse de la terre doit être à celle de la Lune environ comme 70 à 1, & qu'il faut par conséquent faire $n = \frac{70}{71}$. Mais pour notre question cette discussion est assez superflue : car si on suppose $n = \frac{39}{40}$ on trouve $C$ d'un pied onze pouces, & un huitiéme de pouce, & si on suppose $n = \frac{70}{71}$ on trouve environ $2\frac{1}{2}$ lignes de moins.

## XVII.

Voilà donc quel seroit l'excès de la plus grande hauteur de la mer par dessus la plus petite, si toute la terre étoit fluide & homogéne avec les eaux de la mer, en tant que cet excès est produit par l'action inégale du Soleil sur les parties de la terre. On peut ensuite former une infinité d'autres hypothèses sur la conformation de la terre & sur l'Océan, dont les unes rendent la valeur moyenne de $C$ plus grande, & d'autres plus petite. Cependant nous voyons déja par avance que ladite élévation d'environ deux pieds, n'a rien de disproportionné aux phénoménes que nous en voulons déduire : car nous montrerons que la valeur de $C$ étant d'environ deux pieds pour l'action solaire, elle doit être d'environ cinq pieds pour l'action lunaire, & ces deux causes se joignant ensemble dans les sizigies, nous aurons sept pieds d'élévation pour l'état moyen, & plus de 8 pieds si la Lune est dans son périgée. Selon M. *Newton* l'action lunaire est plus grande, parce qu'il suppose plus de masse à la Lune, & selon lui l'action des deux luminaires réunie sous les circonstances les plus favorables, pourroit élever les eaux jusqu'à la hauteur de 12 ou 13 pieds. Nous allons traiter cette question avec un peu plus de détail.

## XVIII.

Il s'agit donc à présent d'examiner quelle sera la valeur de $\mathfrak{C}$ par rapport à l'action de la Lune : quoique la masse de la Lune soit extrêmement petite par rapport à celle du Soleil, on ne doit pas être surpris qu'elle puisse faire un effet considérablement plus grand ; car la proximité de la Lune avec la terre fait que la pesanteur des parties de la terre vers la Lune est extrêmement inégale relativement au Soleil. En un mot, on voit que la même expression que nous avons donnée à l'Art. 14. servira encore par rapport à la Lune, en entendant par $\mu$ la masse de la Lune, & par $B$ sa distance à la terre : Ainsi la détermination absolue de l'effet de la Lune ne dépend que du rapport de sa masse à celle de la terre : avant que d'alléguer les raisons qui peuvent nous donner quelque lumiere sur ce rapport, il ne sera pas hors de propos de réduire le tout à la densité de la Lune par rapport à celle de la terre ; le volume de la terre étant environ $48\frac{1}{2}$ fois plus grand que celui de la Lune, si nous supposons la densité de la terre à celle de la Lune comme $d$ à $\delta$, nous aurons $\frac{\mu}{m} = \frac{\delta}{48,5\, d}$, & ainsi l'élévation entiere des eaux par dessus les plus basses causée par la Lune, sera $= \frac{15}{4} \times \frac{\delta}{48,5\, d} \times \frac{b^3}{B^3} \times b$, en entendant par $B$ la distance de la Lune au centre de la terre. Si nous supposons à présent pour cette distance moyenne $B = 60\frac{1}{4}\, b$, & si nous faisons encore $b = 19695539$, nous aurons par rapport à la Lune l'élévation moyenne des eaux $= 6,96 \times \frac{\delta}{d}$ pieds, ou à peu près de $7 \times \frac{\delta}{d}$ pieds. Si nous voulons supposer les densités $\delta$ & $d$ égales entr'elles, nous aurons sept pieds d'élévation, &

l'action solaire sera à l'action lunaire environ comme 2 à 7. M. *Newton* suppose $\frac{\delta}{d} = \frac{21}{17}$, & cette hypothèse fait l'élévation moyenne lunaire des eaux d'environ 8 $\frac{1}{2}$ pieds, & par conséquent l'action solaire à l'action lunaire environ comme 1 à 4 $\frac{1}{2}$ : il avoit adopté cette proportion, & de-là il détermine $\frac{\delta}{d} = \frac{21}{17}$. M. *Daniel Bernoulli*, induit par d'autres raisons, suppose les actions moyennes du Soleil & de la Lune en raison de 2 à 5, & de-là il s'ensuit que les densités de la Lune & de la terre sont environ comme 5 à 7 : ce rapport des densités rend la masse de la terre environ 70 fois plus grande que celle de la Lune, pendant que M. *Newton* ne l'a fait que 39 fois plus grande. La proportion de M. *Bernoulli* paroît beaucoup mieux répondre aux systêmes astronomiques qui dépendent de cette détermination, que celle de M. *Newton*, & des Géométres du premier ordre ont témoigné la même préférence.

## XIX.

Nous voyons au reste que les élévations des eaux qui proviennent de l'action lunaire, sont encore en raison réciproque des cubes des distances de la Lune à la terre, tout comme par rapport au Soleil : cette raison fera varier considérablement les marées à cause de la grande excentricité de l'orbite lunaire, de maniere que la plus petite élévation dans l'apogée de la Lune, sera à la plus grande élévation dans le périgée de cet astre, environ comme 2 à 3, & cette variation répond parfaitement bien aux observations.

## XX.

Pour voir maintenant les élévations & les abaissemens successifs des eaux pendant une marée entiere tant solaire que lunaire, il ne faut pas se contenter de connoître la quantité $\mathfrak{C}$ ou l'élévation Fig. 1. du point $B$ par dessus le point $G$ ; il faut connoître encore quelle est la hauteur du point $B$ par dessus un point quelconque $O$.

Fig. 2. Soit donc l'ellipse $GOBHD$ dans la seconde figure, la même que dans la premiere ; qu'on tire du centre $C$ & du rayon $CG$ le quart de cercle $Gob$, & les deux demi diamétres $CbB$ & $CoO$ ; il est facile à démontrer par la nature d'une ellipse presque circulaire, que $Bb$ sera à $Oo$, comme le quarré du sinus total au quarré du sinus de l'angle $GCO$ ; si on appelle donc le sinus total 1 & le sinus de l'angle $GCO = s$, on aura la petite hauteur $Oo = ss\mathfrak{C}$ & $Bb - Oo = (1 - ss)\mathfrak{C}$. On remarquera dans l'application, que l'angle $OCB$ mesure la distance depuis le Zenith jusqu'au luminaire en question. Voici donc à présent comment on pourra connoître les haussemens & les abaissemens des eaux, quelle que soit la latitude du lieu & la déclinaison de la Lune ou du Soleil. Je ne parlerai que des marées solaires pour m'énoncer avec plus de précision ; mais le tout doit s'entendre de même par rapport aux marées lunaires.

## XXI.

Lorsque le Soleil est à l'horizon, l'axe solaire est horizontal, & on se trouve toujours dans l'équateur solaire. C'est donc toujours alors que les eaux sont les plus basses ; on se trouve à ce moment au point $G$, & comme cela est général, il est bon de partir de ce point. Ensuite les eaux s'éleveront à mesure que le Soleil approchera du méridien, & elles seront les plus hautes au moment que le Soleil y passera ; si la hauteur méridienne du Soleil est représentée par l'angle $GCO$, alors la petite $Oo$ marquera la plus grande élévation des eaux, & elle sera égale à $ss\mathfrak{C}$ en entendant par $s$ le sinus de la hauteur méridienne du Soleil : après cela les eaux commenceront à baisser jusqu'à ce que le Soleil se couche ; cette marée est appellée *marée de dessus*. Après le coucher du Soleil les eaux recommenceront à s'élever, parce qu'on s'approche de l'autre pole solaire, & cette élévation durera jusqu'au passage inférieur du Soleil par le méridien, & si on appelle $\sigma$ le sinus de l'arc du méridien compris entre le Soleil & l'horizon, la plus grande élévation des eaux sera $= \sigma\sigma C$; enfin les eaux recommenceront à baisser jusqu'au moment du lever du Soleil : ces secondes marées sont appellées *marées de dessous*. Voici à présent quelques propriétés des marées solaires, mais qui souffrent de grandes altérations par des causes étrangéres.

Ce n'est que sous la ligne que les marées de dessus & les marées de dessous sont égales entr'elles; dans tous les autres paralléles ces deux espéces de marées différent tant en hauteur qu'en durée, à moins que la déclinaison du Soleil soit nulle.

Vers les équinoxes les marées solaires de dessus & de dessous sont égales, mais elles sont d'autant plus petites, que la latitude du lieu est plus grande, & cela en raison quarrée des sinus des latitudes.

Près des poles il peut arriver qu'il n'y ait qu'une seule marée dans le temps de 24 heures, & cela arriveroit dans les climats où le Soleil ne se couche & ne se leve pas. Dans ces cas la haute mer & la basse répondent aux passages du Soleil par le méridien; mais ces sortes de marées seront comme insensibles à cause des grandes latitudes.

## XXII.

Tout ce que nous venons de dire sur les marées solaires est également vrai pour les marées lunaires, pourvu qu'on fasse les changemens qui conviennent aux termes. De là on voit qu'on peut toujours exprimer pour chaque moment l'élévation des plus hautes eaux par dessus les plus basses. Soit l'élévation totale des eaux représentée par la petite ligne $B b$ pour le Soleil $= S$, & pour la Lune $= L$; soit le sinus de la hauteur verticale du Soleil $= s$ & celui de la Lune $= t$, on aura toujours dans ce moment là l'élévation entiere des eaux provenante de l'action réunie des deux luminaires $= ssS + ttL$: par cette seule expression on réduit toutes les questions qu'on peut former sur les marées aux calculs astronomiques : mais on remarquera que ladite élévation $ssS + ttL$ doit se rapporter à la surface sphérique *Gob* telle qu'elle seroit dans les sizigies sans les autres circonstances. Cette hauteur changera continuellement jusqu'à ce qu'elle devienne la plus grande, & alors c'est la haute mer, après quoi elle diminuera pendant environ six heures, & puis on aura la basse mer; la différence entre les deux hauteurs donnera ce qu'on appelle *hauteur de marée.* Ainsi on voit que la hauteur de marée dépend d'un grand nombre de circonstances, sçavoir de la déclinaison de chaque luminaire, de l'âge de la Lune, de la latitude du lieu, & enfin des distances des deux luminaires au centre de la terre, & si on vouloit examiner notre question au long suivant toutes ces circonstances, on s'ouvriroit un vaste champ de Problême : mais comme cela nous meneroit bien loin au delà de notre dessein, nous ne nous arrêterons plus qu'aux principales.

## XXIII.

Supposons d'abord l'orbite de la Lune & celle du Soleil parfaitement dans le plan de l'équateur ; considérons de plus ces orbites comme parfaitement circulaires, & prenons un point sous la ligne, alors on pourra supposer $s = 1$ & $t = 1$ ; cela arriveroit à midi dans les sizigies, & l'élévation entiere des eaux seroit exprimée par $S + L$, mais six heures après on aura à peu près $s = o$ & $t = o$, & les eaux n'auront plus aucune élévation ; ainsi la hauteur de marée sera exprimée dans les sizigies par $S + L$ : mais dans les quadratures on aura au moment du passage de la Lune par le méridien $t = 1$ & $s = o$, & l'élévation des eaux sera $= L$ ; ensuite six heures après on aura $s = 1$ & $t$ à peu près $= o$, & l'élévation des eaux $= S$, & la hauteur de marée sera $= L - S$. Donc les hauteurs de marée dans les sizigies & dans les quadratures, seront comme $L + S$ à $L - S$.

M. *Newton* s'est servi de cette proportion pour en déduire le rapport de $L$ à $S$, qu'il trouve à peu près comme $4\frac{1}{2}$ à 1.

Il est de si grande conséquence de déterminer ce rapport, non seulement pour la perfection de la théorie des marées, mais encore pour plusieurs autres matieres, que je n'hésiterai pas d'exposer le sentiment de M. *Bernoulli* sur ce sujet. Il est à remarquer qu'il y a un grand nombre de causes secondes qui mettent une différence considérable entre la réalité & les résultats de la théorie pure, plus ou moins suivant la nature de la matiere dont il s'agit. Dans nos ports & dans ceux de l'Angleterre, les marées ne sont pas causées immédiatement par l'action des deux luminaires ; ce sont plutôt des suites des marées du grand Océan, tout comme les marées de la mer Adriatique sont des suites des petites marées de la mer Méditerranée ; les marées primitives peuvent différer en tout très-sensiblement des marées secondaires : aussi le rapport entre les grandes marées & les marées batardes, est-il très-différent dans chaque port ; il n'y a donc rien à établir sur ces sortes d'observations faites dans les ports de nos climats. Il faudroit plutôt avoir de pareilles observations faites sur les bords d'une petite isle située près de la ligne dans une mer profonde, & ouverte de tout côté jusqu'à une très-grande étendue. Il y a toutes les apparences qu'on y remarqueroit une autre proportion entre les grandes marées & les marées batardes, que celle de 9 à 5 observée par *Sturm*, au dessous de Bristol, qui fait $\frac{L}{S} = \frac{7}{2}$, & qui réduite à l'état moyen des circonstances variables donne suivant le calcul de M. *Newton* $\frac{L}{S} = \frac{9}{2}$ ou plutôt $= 4,4815$.

Il faut remarquer ensuite que les marées ne sauroient entierement se conformer à l'état de l'équilibre ; cela supposeroit que toute la mer pût prendre à chaque moment la figure d'équilibre sans aucun mouvement sensible, & il faudroit pour cela que le mouvement diurne de la terre se fit beaucoup plus lentement qu'il ne se fait. Au contraire si la rotation de la terre se faisoit avec une rapidité extrêmement grande, il ne pourroit y avoir aucune marée sensible : cela fait déja voir que la différence des marées sera plus petite dans la réalité qu'elle ne devroit être suivant le calcul fondé sur l'équilibre : c'est par cette raison que les marées de dessus ne différent pas à beaucoup près des marées de dessous qui les suivent autant que l'indique le calcul précédent, tout mouvement tâchant à se conserver tel qu'il est par sa nature. Il est donc entierement sûr que les marées batardes sont plus grandes, & les grandes marées plus petites qu'elles ne seroient suivant le simple équilibre : il sera donc nécessaire de supposer les grandes marées moyennes aux marées batardes moyennes suivant la loi de l'équilibre en plus grande raison que de 9 à 5, & si on les supposoit comme 7 à 3, on en tireroit le rapport de $\frac{L}{S} = \frac{5}{2}$. C'est-là le rapport auquel M. *Daniel Bernoulli* s'est déterminé, après avoir rassemblé sous ce même point de vûe toutes les variations des marées. La pénétration & la circonspection de ce Physicien Géométre, méritent sans doute qu'on adopte ce rapport moyen jusqu'à ce que d'autres observations répandent de nouvelles lumieres sur cette question, & cela d'autant plus qu'il satisfait mieux aux autres théories qui dépendent de la détermination de la masse de la Lune, & que M. *Bernoulli* fonde sa correction sur des variations qui ne sauroient souffrir aucune altération sensible par les susdites causes secondes que nous dirons bientôt.

## XXIV.

Reprenons ici notre formule $ssS + ttL$, qui marque l'élévation des eaux pour chaque moment; afin d'en déduire les hauteurs & les heures des marées pendant le cours de toute une lunaison pour les suppositions qu'on a faites au commencement du précédent Article. Dans les hautes & les basses mers cette

cette quantité $ssS + ttL$ fait un *maximum* ou un *minimum*.

Soit $AFGEM$ l'équateur que nous supposons pour faciliter nos calculs dans le plan de l'écliptique & de l'orbite lunaire; $AE$ le diamétre horizontal; $G$ le zenith: supposons le Soleil en $F$ & la Lune en $H$, & un moment après en $f$ & $h$, nous aurons $FB = s$; $fb = s + ds$; $HD = t$; $hd = t - dt$; or, $ds = \sqrt{1 - ss} \times Ff$ & $-dt = \sqrt{1 - tt} \times Hh =$ à peu près, à cause du mouvement de la Lune, à $\frac{29}{30} \times \sqrt{1 - tt} \times Ff$, & comme la quantité $ssS + ttL$ doit faire un *maximum* ou un *minimum*, nous aurons $Ssds + Ltdt = 0$; si nous substituons donc pour $ds$ & pour $dt$ leurs valeurs $\sqrt{1-ss} \times Ff$ & $-\frac{29}{30} \times \sqrt{1-tt} \times Ff$, nous aurons alors $Ss\sqrt{1-ss} \times Ff = \frac{29}{30} \times L \times t\sqrt{1-tt} \times Ff$, ou enfin $\frac{s\sqrt{1-ss}}{t\sqrt{1-tt}} = \frac{29L}{30S}$.

C'est de cette équation qu'on peut tirer les principales propriétés des marées lunaires & solaires, mêlées & confondues.

## XXV.

Nous voyons qu'au moment des hautes & des basses mers les quantités $s\sqrt{1-ss}$ & $t\sqrt{1-tt}$ ont toujours le même rapport, qui est celui de $29L$ à $30S$, ou à peu près de 5 à 2: or la quantité $s\sqrt{1-ss}$ n'est jamais plus grande que $\frac{1}{2}$, ainsi la quantité $t\sqrt{1-tt}$ ne peut jamais surpasser $\frac{1}{5}$, ou plutôt $\frac{30}{29} \times \frac{1}{5}$ ou $\frac{6}{29}$; il faut donc que l'un des facteurs $t$ ou $\sqrt{1-tt}$ soit toujours assez petit, ce qui marque que la Lune est toujours ou près du méridien ou près de l'horizon dans ces momens. Dans les sizigies & dans les quadratures la haute mer se fait précisément, quand la Lune passe par le méridien & la basse mer, quand la Lune est à l'horizon : mais hors des sizigies & des quadratures ce n'est pas la même chose. Soit, par exemple, $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$, il faudra faire $t\sqrt{1-tt} = \frac{6}{29}$, & cette équation fait l'arc $GH$ à peu près de $12^d$ ou 48 minutes lunaires, ou environ 50 minutes ordinaires après le passage de la Lune par le méridien, & cela arrivera lorsque la Lune est à $57^d$ du Soleil, ou à la neuviéme marée avant la plus haute, puisque la plus haute marée ne se fait que trois ou quatre marées après les sizigies, ce qui peut prévenir de différentes causes. Ce sont là les marées qui retardent le plus sur le mouvement de la Lune. Si nous avions supposé le rapport de $L$ à $S$ plus grand que de 5 à 2, nous aurions trouvé en même raison l'arc $GH$ plus petit ; dans l'hypothèse de M. *Newton* il ne seroit que d'environ $7^d$, & la haute mer ne retarderoit jamais au-delà de 27 minutes sur le mouvement de la Lune, ce qui est contraire aux observations. On voit donc qu'on peut déduire le rapport de $L$ à $S$, du plus grand retardement de la pleine mer sur le passage de la Lune par le méridien ; mais il faudra employer en même temps toutes les corrections : on remarquera aussi que par des causes particulieres la pleine mer dans les sizigies ne se fait pas à midi, mais quelque temps après suivant la position du lieu ; ce temps doit être ajoûté au temps des observations ; par exemple à *Brest* on a la pleine mer dans les sizigies à $3^h\ 15'$, il faudroit donc, suivant l'hypothèse de M. *Bernoulli*, que la marée la plus tardive se fit $50'$ ordinaires après le passage de la Lune par le méridien, outre les $3^h\ 15'$ du port de *Brest*, c'est-à-dire, $4^h\ 5'$ après le passage par le méridien ; cela suppose que la Lune est dans sa moyenne distance de la terre, car si elle étoit dans son périgée, la quantité $L$ en deviendroit plus grande, & le retard plus petit.

## XXVI.

Un autre phénoméne remarquable qui répond parfaitement à l'hypothèse de M. *Bernoulli*, & qui peut donner un grand poids à toute cette théorie, est une certaine inégalité entre les intervalles de deux marées de dessus qui se suivent immédiatement : cet intervalle moyen est de $24^h$ lunaires, ou d'environ $24^h\ 50'$ solaires ; mais on a remarqué que dans les sizigies cet intervalle observé un grand nombre de fois n'est que de $24^h\ 35'$, & dans les quadratures de $25^h\ 25'$. Pour expliquer & pour calculer ce phénoméne, supposons que dans un certain jour la Lune & le Soleil répondent au point $G$, & qu'au même moment il y ait pleine mer audit point $G$ ; on voit bien que le lendemain il y aura pleine mer quand la Lune sera en $H$ & le Soleil en $F$, & que l'intervalle entre les deux pleines mers sera exprimé en heures solaires par la circonférence du cercle augmentée de l'arc $GF$ : or tout l'arc $HF$ qui marque la distance de la Lune au Soleil, est à peu près de $12^d\ 30^m$, faisons donc comme ci-dessus le sinus de l'arc $GF = \sqrt{1-ss}$, le sinus de l'arc $HG = \sqrt{1-tt}$, & il faudra d'abord satisfaire à la condition que ces deux petits arcs pris ensemble fassent un arc de $12^d\ 30^m$. Ici nous pourrons pour faciliter les calculs sans erreur sensible, prendre les sinus de ces petits arcs pour les arcs mêmes, & supposer $\sqrt{1-ss} + \sqrt{1-tt} = Sin.\ 12^d\ 30^m = 0,21643$, & par conséquent $\sqrt{1-tt} = 0,21643 - \sqrt{1-ss}$ ; nous pourrons aussi par la même raison supposer $s = 1$ & $t = 1$ : après ces substitutions notre équation du § 24. $\frac{s\sqrt{1-ss}}{t\sqrt{1-tt}} = \frac{29}{30} \times \frac{L}{S}$ se change en celle-ci $\frac{\sqrt{1-ss}}{0,21643 - \sqrt{1-ss}} = \frac{29}{30} \times \frac{L}{S}$ : mettons encore $\frac{5}{2}$ pour $\frac{L}{S}$ & nous aurons

$\frac{\sqrt{1-ss}}{0,21643-\sqrt{1-ss}} = \frac{29}{12}$, qui donne $\sqrt{1-ss}$ ou le ſinus de l'arc cherché $GF = \frac{29}{41} \times 0,21643 = 0,15308$, qui donne à $8^d\ 48'$, ou bien à $35\frac{1}{5}$ minutes horaires, ce qui répond avec une harmonie remarquable aux obſervations. Examinons à préſent de même quel eſt l'intervalle de deux marées de deſſus qui ſe ſuivent immédiatement dans les quadratures. Suppoſons donc que dans un certain jour la Lune réponde au point *G* & le Soleil au point *A*, & que l'angle *ACG* ſoit de $90^d$, la pleine mer ſera dans ce moment préciſément au point *G*; mais afin qu'il y ait au même point *G* pleine mer le lendemain, il faut que la Lune ſe trouve en *F* & le Soleil en *H*, de ſorte que l'arc *AH* marquera le temps qu'il faut ajouter aux $24^h$, pour avoir le temps écoulé entre les deux pleines mers. Je traiterai encore les arcs *AH* & *GF* d'aſſez petits pour qu'ils puiſſent être cenſés égaux à leurs ſinus : ſuppoſons l'arc *AH* ou ſon ſinus $= s$; l'arc *GF* ou ſon ſinus $= \sqrt{1-tt}$, & l'arc *HGF* de 77 degrés & demi, & nous aurons $AH - GF = 12$ degrés 30 minutes, c'eſt-à-dire, $s - \sqrt{1-tt} = 0,21643$, ce qui donne $\sqrt{1-tt} = s - 0,21643$, pendant qu'on peut cenſer $\sqrt{1-ss} = 1$ & $t = 1$, & par conſéquent $\frac{s\sqrt{1-ss}}{t\sqrt{1-tt}} = \frac{s}{\sqrt{1-tt}} = \frac{s}{s-0,21643} = \frac{29}{12}$, ce qui donne $s = 0,369200$, qui répond à $21^d\ 40^m$, ou à 1 heure $26\frac{2}{3}$ minutes de temps, de ſorte que le temps total eſt de 25 heures $26\frac{2}{3}$ minutes, pendant que les obſervations l'ont fixé à 25 heures 25 minutes.

Fig. 5.

## XXVII.

Cette harmonie entre les obſervations, la théorie, les calculs & l'hypothèſe de M. *Bernoulli* au ſujet du rapport de l'action moyenne lunaire à l'action ſolaire, ne nous permet plus de douter ni des unes ni des autres; ſi nous adoptons donc pour ledit rapport celui de 5 à 2, il s'enſuit que la maſſe de la terre eſt à celle de la Lune comme 70 à 1. M. *Bernoulli* allégue auſſi la raiſon pourquoi les obſervations ſur les durées des marées & ſur leurs intervalles, répondent mieux aux calculs que celle qu'on fait ſur les hauteurs inégales des pleines mers ; c'eſt que ces hauteurs ont beaucoup d'influence les unes ſur les autres, pendant que la durée d'une marée ne dépend point, ou ſeulement très-peu, de celle de la marée précédente.

## XXVIII.

Nous voyons donc que le paſſage de la Lune par le méridien ſuivra la haute marée depuis les ſizigies juſqu'aux quadratures, & qu'il la précédera depuis les quadratures juſqu'aux ſizigies ; que la plus grande anticipation, ou le plus grand retardement, ſera d'environ 50 minutes ſolaires de temps ; que dans le temps de la plus grande anticipation, ou du plus grand retardement, la diſtance entre la Lune & le Soleil doit être d'environ 57 $^{d}$, & qu'ainſi la pleine mer avancera ſur le paſſage de la Lune par le méridien de plus en plus pendant environ neuf marées, à compter depuis celle des ſizigies, (ou plutôt depuis la plus haute marée) & que cette plus grande anticipation ſera réparée dans les cinq marées ſuivantes ; c'eſt-là la raiſon pourquoi les marées batardes paroiſſent plus irrégulieres, & il eſt facile de voir que la moindre cauſe accidentelle, ou cauſe ſeconde, peut empêcher ces marées batardes de ſe compoſer entierement ſuivant les régles d'équilibre.

## XXIX.

Voilà l'explication des principaux phénoménes des marées, & tous les principes néceſſaires, pour comprendre celle de tous les autres qui ſont en grand nombre, du moins autant que l'irrégularité des terres & de l'Océan peuvent le permettre. Il n'eſt pas difficile de voir ce que les différentes déclinaiſons des deux luminaires & la latitude des lieux, peuvent contribuer à la formation des marées : cet examen ne demande que la ſolution de quelques problêmes d'Aſtronomie & de Trigonométrie; mais il convient ſur tout d'examiner par quel mouvement les eaux de la mer tendent à ſe compoſer à l'équilibre, qu'elles ne trouvent jamais. Si on ne vouloit conſidérer que les ſeules marées lunaires, ſans faire attention aux cauſes ſecondes non plus qu'à la déclinaiſon de la Lune, il faudroit conſidérer quatre points à 45 $^{d}$ au-deſſus & au-deſſous de l'horizon : dans ces quatre points il n'y auroit aucun mouvement horizontal, & les eaux n'y feroient que monter verticalément ou deſcendre; les eaux couleroient vers chacun de ces quatre points d'un côté par un mouvement oriental, & de l'autre par un mouvement occidental, & les plus grandes vîteſſes de ces mouvemens ſeroient ſous le méridien où ſe trouve la Lune, & à 90 $^{d}$ de ces deux points. Ces quatre points de repos montrent aſſez que les marées n'ont abſolument rien de commun avec le courant général & permanent d'Eſt, & que ce courant, non plus que le vent général d'Eſt, ne ſauroit être produit par l'action de l'un ou de l'autre luminaire ſur la mer, ou ſur l'atmoſphére.

FIN.

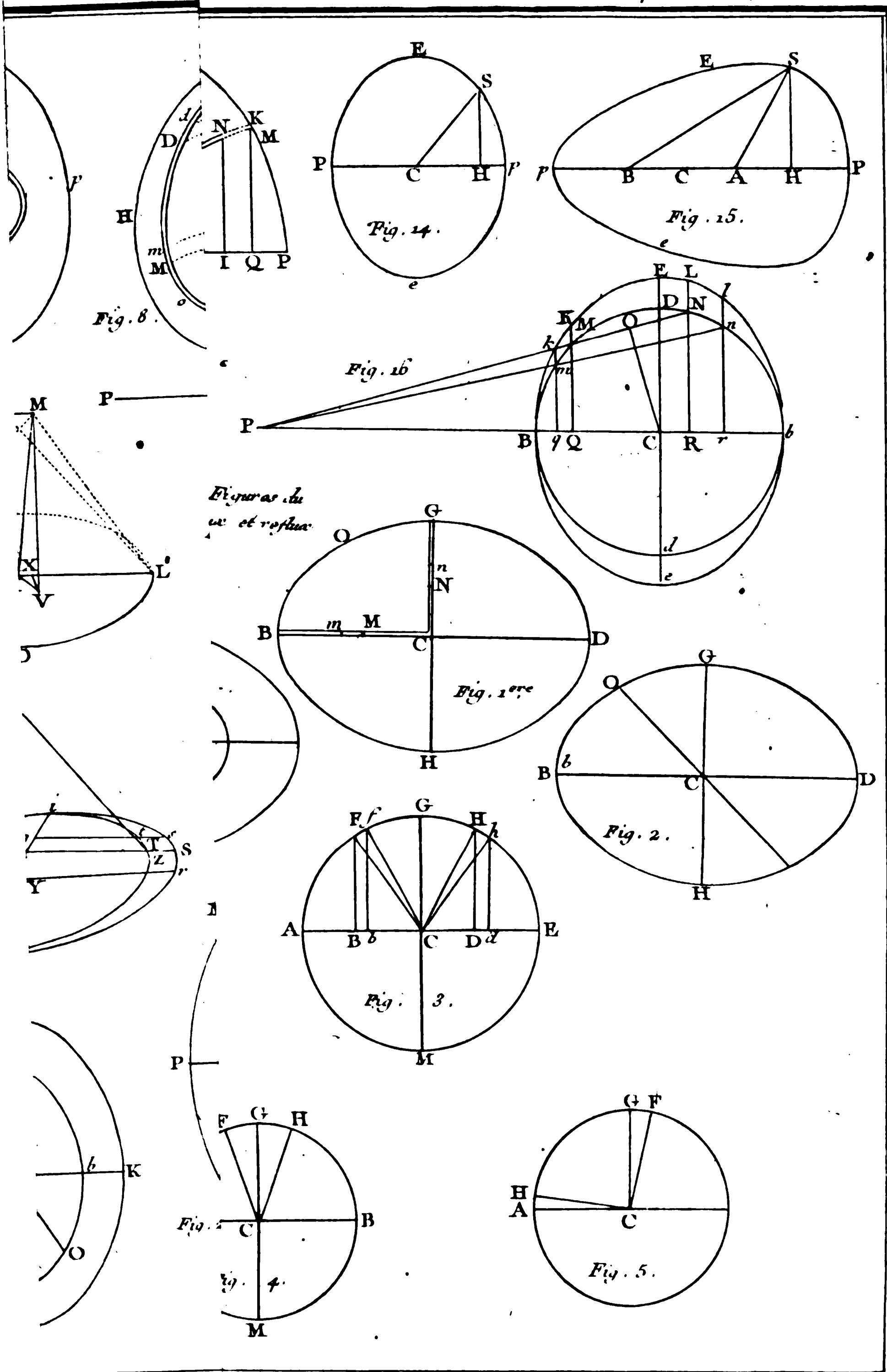


Fig. 8.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 1.ere
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

# TABLE
# DES MATIERES
*Du Commentaire des Principes Mathematiques de la Philosophie Naturelle.*

## EXPOSITION ABREGÉE
## *DU SYSTÊME DU MONDE.*



## SOLUTION ANALYTIQUE
*Des principaux problêmes qui concernent le Systême du Monde.*

### SECTION PREMIERE.
*Des trajectoires dans toute sorte d'hypothèse de pesanteur.*

# SECTION II.

## *De l'attraction des Corps en ayant égard à leurs figures.*

## PREMIERE PARTIE.

### *De l'attraction des sphéres.*

# SECONDE PARTIE.

## *De l'attraction des Corps de figure quelconque.*

## TROISIÉME PARTIE.

*De l'attraction des sphéroïdes en particulier.*



# SECTION III.

*De l'explication de la réfraction en employant le principe de l'attraction.*



# SECTION IV.

*De la figure de la terre.*

## PREMIERE PARTIE.

# SECONDE PARTIE.

## *Qui traite de la figure de la Terre.*

# SECTION V.

## *Des Marées.*

# ERRATA.

## *Tome II. Livre III. des Principes.*

Page 118, ligne 15, grande, *lisez* grandes.
P. 140, l. 11 & ailleurs, *Montenarus*, lisez *Montanari*.
P. 142, l. 8, *Norberg*, lisez *Nuremberg*.
*Ibid.* l. 15, *Galletius*, lisez *M. Gallet*.
P. 144, l. 27, *Ophiuleus*, lisez *Ophiucus*.
P. 153, l. 23, éclairé, *lisez* éclairée.
P. 159, ligne derniere & la premiere de la 160, *Dunelmensis*, lisez de *Durham*.

## Exposition des Principes.

P. 17, note (*l*) sensée, *lisez* censée.
P. 29, note (*u*) *Henelius*, lisez *Hevelius*; puis dans les lignes suivantes au lieu de *ellipti-coansatum*, *Sphari-cocuspidatum*, lisez *elliptico-ansatum*, *Spharico cuspidatum*.
P. 79, l. 25, *Sturminus*, lisez *Sturmius*.
P. 88, l. 22, *Colopressus*, lisez *Colepressus*.
*Ibid.* l. 23. *Sturnius*, lisez *Sturmius*.
P. 108, l. 27, le parcoure, *lisez* le parcourt.
P. 137, l. 6, dans la formule radicale, *lisez* sous le second signe radical, au lieu de $\left(\frac{hh-2kh}{2}\right)^2$, lisez $\left(\frac{2kh-hh}{2}\right)^2$.

Et ligne 7, corrigez la même faute dans la valeur de *a*
P. 190, l. 9, aye, *lisez* ait.

# APPROBATION.

J'Ai lû par l'ordre de Monseigneur le Chancelier, la Traduction des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*, avec un Commentaire analytique sur le même Ouvrage, par Madame la Marquise du Chastellet, & je n'y ai rien trouvé qui en pût empêcher l'impression. A Paris, ce 20 Décembre 1745.

*Signé*, CLAIRAUT.

# PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS, PAR LA GRACE DE DIEU, ROI DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos Amés & féaux Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra: SALUT. Notre bien amée Madame la Marquise DU CHASTELLET, Nous a fait exposer qu'elle desireroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de sa traduction qui a pour titre: *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle, par M. Newton*, s'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant traiter favorablement l'Exposante, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes de faire imprimer ledit Ouvrage en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de *Quinze années* consécutives, à compter du jour de la date des Présentes. Faisons défenses à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun Extrait, sous quelque prétexte que ce soit d'augmentation, correction, changement, ou autres, sans la permission expresse & par écrit de ladite Exposante, ou de ceux qui auront droit d'elle, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, & de trois mille livres d'amende contre chacun des Contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers à ladite Dame Exposante, ou à celui qui aura droit d'elle, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Présentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modéle sous le Contrescel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725. & qu'avant de l'exposer en vente le Manuscrit qui aura servi de copie à l'Imprimeur sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier le Sieur DAGUESSEAU, Chancelier de

France : le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ladite Dame Exposante, ou ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement ; Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour duëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés féaux Conseillers & Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. DONNE' à Paris, le vingt-uniéme jour du mois de Janvier, l'an de grace mil sept cent quarante-six, & de notre Regne le trente-uniéme. Par le Roi, en son Conseil,

Signé, SAINSON, avec grille & paraphe.

*Registré sur le Registre XI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 568. fol. 497. conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du 28 Février 1723. A Paris, le 7 Mars 1746.*

*Signé*, VINCENT, *Syndic.*

*Je reconnois avoir cedé le présent Privilege à M. Michel Lambert. A Paris, ce 27 Février 1746.*

*Signé*, BRETEUIL DU CHASTELLET.

*Registré sur le Registre XI. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, fol. 498. conformément aux anciens Réglemens, & notamment à l'Arrêt du Conseil du 10 Juillet 1745. A Paris, le 7 Mars 1746.*

*Signé*, VINCENT, *Syndic.*