Examen session 1

Une attention particulière est portée à la précision des réponses et à la qualité de la rédaction. Tous les documents sont interdits, ainsi que les téléphones portables ou autres dispositifs éléctroniques.

Exercice 1. Soit u une fonction mesurable de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
On définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{nu(x)} \end{array}$$

1. Montrer que g_n est mesurable.

   solution : g_n est mesurable comme composée de $x \mapsto \exp(nx)$ et u qui sont mesurables.

2. On suppose dans cette question que μ est la mesure de densité $\frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.
   (a) Montrer que μ est une mesure finie sur $\mathbb{R}$.

   solution : $\mu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx < +\infty$.

   (b) Donner un exemple de fonction mesurable u telle que g_1 ne soit pas intégrable.

   solution : on pose $u(x) = x$. Alors

   $$\int_{\mathbb{R}} |g_1(x)|\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^x}{x^2}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)dx \geq \int_k^{+\infty} \frac{e^x}{x^2}dx \geq \frac{e^k}{k^2} \to +\infty \text{ lorsque } k \to +\infty.$$

3. On suppose que u est à valeurs négatives, c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \leq 0$.
   (a) Montrer que g_n est intégrable.

   solution : $g_n \leq 1$ donc $\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\, d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} d\mu(x) = \mu(\mathbb{R}) < +\infty$.

   (b) La suite de fonctions g_n converge-t-elle simplement ? Si oui, donner sa limite simple.

   solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $u(x) = 0$, alors $g_n(x) = e^{nu(x)} \to_{n\to+\infty} 1$ et si $u(x) < 0$, alors $g_n(x) = e^{nu(x)} \to_{n\to+\infty} 0$. Donc la limite simple de g_n est $\mathbf{1}_{u^{-1}(\{0\})}$.

   (c) Montrer que

   $$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu = \mu(u^{-1}(\{0\})).$$

   solution : On a pour tout entier n, $g_n \leq 1$ où 1 est une fonction μ-intégrable et g_n converge simplement vers $\mathbf{1}_{u^{-1}(\{0\})}$. Par le théorème de convergence dominée,

   $$\lim_{n\to+\infty} \int g_n d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} g_n d\mu = \int \mathbf{1}_{u^{-1}(\{0\})} d\mu = \mu(u^{-1}(\{0\})).$$

Exercice 2. On considère un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions réelles mesurables.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \sup_{k,l\geq n} |f_k(x) - f_l(x)|$ est une fonction mesurable.

   solution : Les fonctions $g_{(k,l)} : x \mapsto |f_k(x) - f_l(x)|$ sont mesurables comme composées de fonctions mesurables pour $k, l \in E := [n, +\infty[\times [n, +\infty[\cap \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. L'ensemble E est dénombrable donc $\sup_{(k,l)\in E} g_{(k,l)}$ est mesurable.

2. Démontrer que l'ensemble

   $$A = \{x \in X; (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy}\}$$

   est membre de la tribu $\mathcal{A}$.

solution : $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k, l \geq n, |f_k(x) - f_l(x)| \leq \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k, l \geq n, |f_k(x) - f_l(x)| \leq 2^{-m}$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \sup_{(k,l)\in E} g_{k,l}(x) \leq 2^{-m}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{(k,l)\in E} g_{(k,l)} \right)^{-1} ([0, 2^{-m}])$$

Donc $A \in \mathcal{A}$.

Exercice 3. Le but de l'exercice est d'étudier l'opérateur T qui a une fonction $f \in L^2(]0, +\infty[, \mathbb{C})$ associe la fonction

$$T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$$

pour $x \in]0, +\infty[$

1. Montrer que la fonction $T(f)$ est bien définie.

   solution : Soit $x \in]0, +\infty[$. On a par Cauchy-Schwarz

   $$\int_0^x |f(t)|\, dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0,x]}(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\, \|f\|_{L^2} < +\infty$$

   Ainsi f est intégrable sur $[0, x]$ et $T(f)(x)$ est bien défini.

   Dans les questions 2 à 7, on suppose que f est continue à support compact dans $[a, b]$ pour $0 < a < b$ (c'est à dire $f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$)

2. Montrer que pour tout $x > 0$,

   $$|T(f)(x)| \leq \frac{\sqrt{b-a}\, \|f\|_{L^2}}{x}$$

   solution : Soit $x \in]0, +\infty[$. Par Cauchy-Schwarz, sachant que $f = \mathbf{1}_{[a,b]} \times f$ par hypothèse,

   $$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt \right| \leq \frac{1}{x} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{b-a}\, \|f\|_{L^2}}{x}$$

3. Calculer la limite de $x\left(T(f)(x)\right)^2$ lorsque $x \to +\infty$.

   solution : D'après ce qui précède,
$$x\left(T(f)(x)\right)^2 \leq x\frac{(b-a)\,\|f\|_{L^2}^2}{x^2} = \frac{(b-a)\,\|f\|_{L^2}^2}{x} \to 0 \text{ lorsque } x \to +\infty.$$

4. Donner une équation différentielle qui relie $T(f)$ et f.

   solution : Par le théorème fondamental de l'analyse, comme f est continue, $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est une primitive de f donc $(xT(f))' = f$ on obtient alors
$$xT(f)' + T(f) = f.$$

5. On suppose de plus que f est une fonction (continue à support compact) réelle. En déduire à l'aide d'une intégration par parties que
$$\|T(f)\|_{L^2}^2 = 2\int_{[0,+\infty]} fT(f).$$

   solution : On a par intégration par parties
$$\|T(f)\|_{L^2}^2 = \int_0^{+\infty} (T(f)(x))^2 dx = \left[x(T(f)(x))^2\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} xT(f)'(x)T(f)(x)dx$$
   Sachant que f est continue à support compact dans $[a,b]$, on a $T(f)(t) = 0$ si $t \leq a$. Donc en particulier si $t = 0$. De plus avec la question 3, $\left[x(T(f)(x))^2\right]_0^{+\infty} = 0$. D'après la question 4,
$$\int_0^{+\infty} xT(f)'(x)T(f)(x)dx = -\int_0^{+\infty} T(f)(x)^2 dx + \int_0^{+\infty} f(x)T(f)(x)dx.$$
   On obtient bien l'identité voulue.

   Remarque

   On pouvait se passer de la question 4, par IPP avec : $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $v(x) = (\int_0^x f(t)dt)^2$.

6. En déduire que si f est continue à support compact réelle,
$$\|T(f)\|_{L^2} \leq 2\,\|f\|_{L^2}.$$

   solution : Par Cauchy Schwarz et la question précédente, on obtient
$$\|T(f)\|_{L^2}^2 = 2\int_{[0,+\infty]} fT(f) \leq 2\,\|T(f)\|_{L^2}\,\|f\|_{L^2}.$$
   Si $T(f) = 0$, l'inégalité voulue est trivialement vraie. Si $T(t) \neq 0$, on divise l'inégalité précédente par $\|T(f)\|_{L^2}$.

7. Montrer que si f est continue à support compact à valeurs complexes,
$$\|T(f)\|_{L^2} \leq 2\,\|f\|_{L^2}.$$

   solution : La partie réelle et la partie imaginaire commutent avec l'intégrale. Ainsi on a $Re(T(f)) = T(Re(f))$ et $Im(T(f)) = T(Im(f))$. La partie réelle et la partie imaginaire de f sont continues à support compact donc on peut appliquer à celles-ci l'inégalité précédente. Cela donne
$$\begin{aligned}\|T(f)\|_{L^2}^2 &= \|Re(T(f))\|_{L^2}^2 + \|Im(T(f))\|_{L^2}^2 = \|T(Re(f))\|_{L^2}^2 + \|T(Im(f))\|_{L^2}^2 \\ &\leq 4\,\|Re(f)\|_{L^2}^2 + 4\,\|Im(f)\|_{L^2}^2 = 4\,\|f\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

8. Soit $f_n \in L^2(]0,+\infty[,\mathbb{C})$ une suite de fonctions qui converge vers $f \in L^2(]0,+\infty[,\mathbb{C})$ dans L^2. Montrer que $T(f_n)$ converge simplement vers $T(f)$.

   solution : Soit $x \in]0,+\infty[$. On a par Cauchy-Schwarz

   $$|T(f)(x) - T(f_n)(x)| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(x) - f_n(x))dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \|f_n - f\|_{L^2} \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty$$

   donc $T(f_n)$ converge simplement vers f.

9. Montrer que pour tout $f \in L^2(]0,+\infty[,\mathbb{C})$,

   $$\|T(f)\|_{L^2} \leq 2 \|f\|_{L^2}.$$

   solution : Par un théorème de densité du cours, soit f_n une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans L^2. Par la question précédente, on sait que $T(f_n)$ converge simplement vers $T(f)$. En utilisant le théorème de Fatou :

   $$\|T(f)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |T(f)|^2(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} |T(f_n)|^2(x)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |T(f_n)|^2(x)dx.$$

   Maintenant, en utilisant la question 7,

   $$\liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |T(f_n)|^2(x)dx \leq 4 \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n|^2(x)dx = 4 \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^2}^2 = 4\|f\|_{L^2}^2$$

   car f_n converge vers f dans L^2.

10. Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir cette inégalité avec une constante strictement plus petite que 2, en considérant la suite de fonctions $\left(\frac{\mathbf{1}_{[1,n]}(x)}{\sqrt{x}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

    solution : Soit$f_n = \left(\frac{\mathbf{1}_{[1,n]}(x)}{\sqrt{x}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

    $$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathbf{1}_{[1,n]}(x)}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n.$$

    On a de plus

    $$T(f_n)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\mathbf{1}_{[1,n]}(t)}{\sqrt{t}}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) & \text{si } 1 \leq x \leq n \\ 2\left(\frac{\sqrt{n}}{x} - \frac{1}{x}\right) & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

    Ainsi

    $$\begin{aligned}
    \|T(f_n)\|_{L^2}^2 &= \int_1^n 4\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)^2 dx + \int_n^{+\infty} 4\left(\frac{\sqrt{n}}{x} - \frac{1}{x}\right)^2 dx \\
    &= 4\int_1^n \left(\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^2}\right)dx + 4\left(\sqrt{n}-1\right)^2 \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \\
    &= 4\left[\ln x + 4x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1}\right]_1^n + 4\left(\sqrt{n}-1\right)^2 \left[-x^{-1}\right]_n^{+\infty} \\
    &= 4\ln n + \frac{16}{\sqrt{n}} - 16 - \frac{4}{n} + 4 + 4\frac{\left(\sqrt{n}-1\right)^2}{n} \\
    &= 4\ln n\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) \text{ lorsque } n \to +\infty.
    \end{aligned}$$

    On obtient

    $$\frac{\|T(f_n)\|_{L^2}}{\|f_n\|_{L^2}} = \sqrt{\frac{4\ln n\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)}{\ln n}} = 2 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \text{ lorsque } n \to +\infty$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n tel que

$$\frac{\|T(f_n)\|_{L^2}}{\|f_n\|_{L^2}} \geq 2 - \epsilon$$

donc l'inégalité ne peut avoir lieu pour une constante strictement plus petite que 2.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$ et $f(0) = f(1)$.

1. Rappeler la définition du coefficient de Fourier $c_n(f)$ (aussi noté $\hat{f}(n)$). Donner et démontrer la relation entre $c_n(f)$ et $c_n(f')$.

   solution : $c_n(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}dt$. Et par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \int_0^1 f'(t)e^{-2i\pi nt}dt = \left[f(t)e^{-2i\pi nt}\right]_0^1 - (-2i\pi n)\int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}dt \\ &= f(1)e^{-2i\pi n} - f(0) + 2i\pi n \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi nt}dt = 2i\pi n c_n(f) \end{aligned}$$

   car $f(0) = f(1)$ et $e^{-2i\pi n} = 1$.

2. Rappeler la définition de la série de Fourier de f. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que pour $t \in [0,1]$,

$$|f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|c_n(f')|}{|n|}.$$

   solution : La série de Fourier de f est $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{2i\pi nt}$. Comme f est de Classe $\mathcal{C}^1$ et $f(0) = f(1)$, f est égale en tout point à sa série de Fourier. On obtient pour $t \in [0,1]$

$$|f(t)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{2i\pi nt}\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left|\frac{c_n(f')}{2i\pi n}\right| = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|c_n(f')|}{|n|}.$$

3. On rappelle que $\|f\|_{\mathcal{C}^0} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. En déduire que

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0}^2 \leq \frac{1}{12}\|f'\|_{L^2}^2.$$

   solution : En passant au sup sur $[0,1]$ dans l'inégalité de la question 2, puis en utilisant Cauchy-Schwarz, on a

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0}^2 \leq \left(\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|c_n(f')|}{|n|}\right)^2 \leq \frac{1}{4\pi^2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n(f')|^2\right)$$

   En utilisant le fait que $c_0(f') = 0$ et l'égalité de Parseval, sachant que $f' \in \mathcal{C}^0([0,1]) \subset L^2$, on obtient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n(f')|^2 = \|f'\|_{L^2}^2.$$

   De plus,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

   D'où l'inégalité attendue.