Quelques simplifications du problème

Décomposition de n en éléments irréductibles

Proposition

Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *avec* p_i *des nombres premiers distincts. Alors,*

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \prod_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^2$$

Décomposition de n en éléments irréductibles

```
fonction rho_pollard P n x y k i d
    Si d <> 1:
        Retourne d
    Sinon :
        x = P ( x ) mod n
        d = pgcd (| y - x | , n )
        Si i = k :
            Retourne rho_pollard P n x x 2k (i+1) d
        Sinon
            Retourne rho_pollard P n x y k (i+1) d
```

Simplification des sous-groupes

Proposition

$$\mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Simplification des sous-groupes

Proposition

$$\mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Remarque

Le problème se résout à trouver les sous-groupes $\mathbb{G}$ *de* $\mathbb{Z}^2$ *telsque*

et

$$n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{G} = < \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{pmatrix} >$$

Table des matières

Matrices à coefficients entier

Proposition

Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ *et* $Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ *alors*

$$\mathrm{Im}(AQ) = \mathrm{Im}(A)$$

Formes normales de Hermite

Définition

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ alors, il existe une unique matrice échelonnée réduite suivant les colonnes $H \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ avec $H = AQ$. La matrice H s'appelle la forme normale de Hermite de A.

Table des matières

Génération des sous-groupes

- Dans cette section, nous supposerons que $n = p^m$

Theomème

Les seules matrices dont les colonnes génèrent un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ *sont les matrices de la forme*

$$H = \begin{pmatrix} p^a & 0 \\ j & p^b \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \leq m, b \leq m \text{ et } j < p^b$$

ou

$$H = \begin{pmatrix} p^a & 0 \\ jp^k & p^b \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \leq m, b \leq m, k \leq m \text{ et } j < p^(b-k)$$

Corollaire

Soit la suite $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ *telle que*

$$A_0 = \{(a, b) \mid a + b \leq m\}$$
$$A_k = \{(a, b) \mid a \leq m, b \leq m, a + b = m + k\}$$

Alors, l'ensemble des matrices du théorème, c'est-à-dire, les matrices dont les colonnes génèrent les sous-groupes $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times p^m\mathbb{Z}$ *est*

$$M = \bigcup_{k=0}^{m} M_k$$

où

$$M_k = \{\begin{pmatrix} p^a & 0 \\ jp^k & p^b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in A_k, 0 \leq j \leq p^{(b-k)}\}$$

Énumération des sous-groupes

Theomème

Soit $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *définie par*

$$\psi(p,n) = \sum_{i=0}^{n}(n-i)p^i + \sum_{i=0}^{n}\frac{1-p^{n-i+1}}{1-p}$$

Alors, le nombre de sous groupe de $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ *est* $\psi(p,m)$

Proposition

Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *avec* p_i *des nombres premiers distincts. Le nombre total de sous-groupes de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est*

$$\prod_{i=1}^{k} \psi(p_i, \alpha_i) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_i} (\alpha_i - j) p_i^j + \sum_{j=0}^{\alpha_i} \frac{1 - p_i^{\alpha_i - j + 1}}{1 - p_i} \right)$$

Génération du treillis

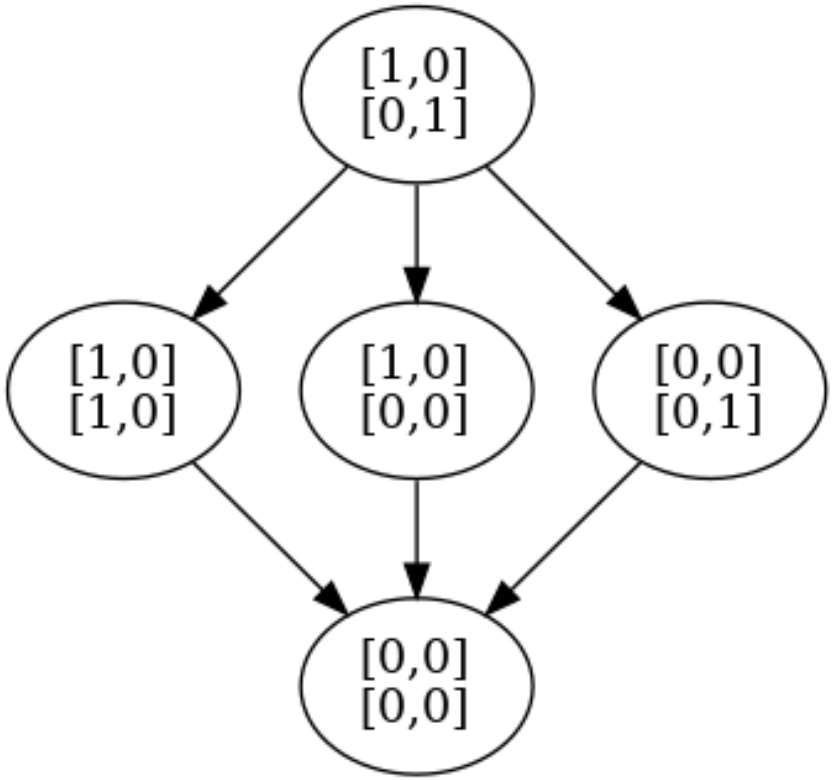
Génération du treillis

```
fonction creer_treillis (G T) =
    G <- Trier G par la cardinalité
    L = Vide
    Pour chaque u dans G:
        Pour chaque v dans T[u]:
            Si not-exists (u, v0) dans L tel que v0  v
                Alors L UNION {(u, v)}
    Retourner (G, L)
```

Table des matières

Pour n = 2

- Nombre de sous-groupe de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: 5



Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lvert\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\rvert$	∞	1	5	6	15	8	30	10	37	23	40

Table des matières

Bibliographie

- COSTE Michel ; Algèbre linéaire sur les entiers ; Mars 2018
- Thomas H. Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest, Clifford Stein ; Algorithmique : cours avec 957 exercices et 158 problèmes, 3e édition, Paris : Dunod ; DL 2010
- PERNET Clément ; Calcul de formes normales matricielles : de l'algorithmique à la mise en pratique ; Séminaire SIESTE ; ENS-Lyon ; 12 février 2013
- BERHURY Grégory ; Algèbre le grand combat : Cours et exercices ; 2e édition ; Paris : Calvage Mounet ; 2020. 1215 p. (Mathématiques en devenir)
- Mario Hampejs, Nicki Holighaus, László Tóth, Christoph Wiesmeyr ; Representing and counting the subgroups of the group Zm × Zn ; 2012