



UNIVERSITÉ PARIS CITÉ

PROJET MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE

# Sous-groupes de $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$

*Kevin Garnier*  
*Charly Martin Avila*

Dirigé par  
Olivier BRUNAT

Année 2023

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Simplification du problème ?</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Generation et Enumeration des sous-groupes</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Quelques résultats</b>	<b>3</b>

## **1 Introduction**

Il est très facile de décrire tous les sous-groupes d'un groupe cyclique d'ordre  $n$  : il y en a exactement un par diviseur positif de  $n$ . Pourtant, étonnamment, décrire tous les sous-groupes d'un groupe abélien est en général un problème difficile.

Dans ce projet, nous se proposons de considérer cette question pour le groupe  $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ .

D'un point de vue théorique, nous mettrons en avant la générations et la caractérisations de sous-groupes grâce aux vecteurs colonne des matrices à coefficients entier et en particulier aux formes normales de Hermite. Nous montrerons aussi une formule permettant de les compter.

D'un point de vue pratique, nous créerons un programme OCAML capable de générer les sous-groupes de  $n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$  ainsi que leur treillis à partir d'un entier donné en paramètres.

## **2 Simplification du problème ?**

## **3 Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite**

## **4 Generation et Enumeration des sous-groupes**

## **5 Quelques résultats**