1. Introduction
2. Quelques simplifications du problème
   - Décomposition de n en éléments irréductibles
   - Simplification des sous-groupes
3. Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite
   - Matrices à coefficients entier
   - Formes normales de Hermite
4. Génération et énumération des sous-groupes
   - Génération des sous-groupes
   - Énumération des sous-groupes
5. Génération du treillis
6. Quelques résultats
   - Pour $n = 2$
   - Pour $n = 4$
   - Pour $n = 8$
   - Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes
7. Bibliographie

Introduction

1 Introduction
2 Quelques simplifications du problème
- Décomposition de n en éléments irréductibles
- Simplification des sous-groupes

3 Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite
- Matrices à coefficients entier
- Formes normales de Hermite

4 Génération et énumération des sous-groupes
- Génération des sous-groupes
- Énumération des sous-groupes

5 Génération du treillis
6 Quelques résultats
- Pour $n = 2$
- Pour $n = 4$
- Pour $n = 8$
- Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes

7 Bibliographie

Introduction

- Ce projet aborde l'analyse des sous-groupes du groupe $Z/nZ \times Z/nZ$, un sujet complexe par rapport à l'étude des sous-groupes d'un groupe cyclique.
- Théoriquement, nous utiliserons les vecteurs colonnes des matrices à coefficients entiers et les formes normales de Hermite pour générer et caractériser ces sous-groupes, et introduirons une formule pour les compter.
- Pratiquement, nous développerons un outil OCaml pour générer ces sous-groupes et leur treillis, en se basant sur un entier en paramètre.

Quelques simplifications du problème

1. Introduction
2. Quelques simplifications du problème
   - Décomposition de n en éléments irréductibles
   - Simplification des sous-groupes
3. Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite
   - Matrices à coefficients entier
   - Formes normales de Hermite
4. Génération et énumération des sous-groupes
   - Génération des sous-groupes
   - Énumération des sous-groupes
5. Génération du treillis
6. Quelques résultats
   - Pour $n = 2$
   - Pour $n = 4$
   - Pour $n = 8$
   - Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes
7. Bibliographie

Décomposition de n en éléments irréductibles

- Nous allons simplifier le problème aux cas où $n = p^m$ avec p un nombre premier et $m \in \mathbb{N}$.

Proposition

Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *avec* p_i *des nombres premiers distincts. Alors,*

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \prod_{i=1}^{k} (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^2$$

Décomposition de n en éléments irréductibles

- Nous avons priviligé l'utilisation de $\rho -$ *Pollard* pour décomposer un entier en facteurs irréductibles

```
fonction rho_pollard P n x y k i d
    Si d <> 1:
        Retourne d
    Sinon :
        x = P ( x ) mod n
        d = pgcd (| y - x | , n )
        Si i = k :
            Retourne rho_pollard loop P n x x 2 k (i+1) d
        Sinon
            Retourne rho_pollard P n x y k (i+1) d
```

Simplification des sous-groupes

Proposition

$$\mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Simplification des sous-groupes

Proposition

$$\mathbb{Z}^2/n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Remarque

le problème se résout à trouver les sous-groupes G de Z^2 tels que

$$H = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

et

$$n\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{G} = < \begin{pmatrix} \overline{a} \\ \overline{b} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{c} \\ \overline{d} \end{pmatrix} >$$

Table des matières

1 Introduction
2 Quelques simplifications du problème
- Décomposition de n en éléments irréductibles
- Simplification des sous-groupes

3 Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite
- Matrices à coefficients entier
- Formes normales de Hermite

4 Génération et énumération des sous-groupes
- Génération des sous-groupes
- Énumération des sous-groupes

5 Génération du treillis
6 Quelques résultats
- Pour $n = 2$
- Pour $n = 4$
- Pour $n = 8$
- Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes

7 Bibliographie

Matrices à coefficients entier

- La caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec une matrice $H = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ a été explorée, mais leur non-unicité nous amène à utiliser les formes normales d'Hermite, soutenues par une proposition clé sur les matrices à coefficients entiers.

Matrices à coefficients entier

- La caractérisation des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec une matrice $H = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ a été explorée, mais leur non-unicité nous amène à utiliser les formes normales d'Hermite, soutenues par une proposition clé sur les matrices à coefficients entiers.

Proposition

Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ alors

$$\mathrm{Im}(AQ) = \mathrm{Im}(A)$$

Formes normales de Hermite

- Nous allons désormais énoncer la définition de la forme normale de Hermite

Formes normales de Hermite

- Nous allons désormais énoncer la définition de la forme normale de Hermite

Définition

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ alors, il existe une unique matrice échelonnée réduite suivant les colonnes $H \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ telle qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{Z})$ avec $H = AQ$. La matrice H s'appelle la forme normale de Hermite de A.

Table des matières

1 Introduction
2 Quelques simplifications du problème
- Décomposition de n en éléments irréductibles
- Simplification des sous-groupes

3 Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite
- Matrices à coefficients entier
- Formes normales de Hermite

4 Génération et énumération des sous-groupes
- Génération des sous-groupes
- Énumération des sous-groupes

5 Génération du treillis
6 Quelques résultats
- Pour n = 2
- Pour n = 4
- Pour n = 8
- Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes

7 Bibliographie

Génération des sous-groupes

- Dans cette section, nous supposerons que $n = p^m$

Theomème

Les seules matrices dont les colonnes génèrent un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ sont les matrices de la forme

$$H = \begin{pmatrix} p^a & 0 \\ j & p^b \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \leq m, b \leq m \text{ et } j < p^b$$

ou

$$H = \begin{pmatrix} p^a & 0 \\ jp^k & p^b \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \leq m, b \leq m, k \leq m \text{ et } j < p^(b - k)$$

Corollaire

Soit la suite $Ak0 \leq k \leq n$ telle que

$$A_0 = \{(a,b) \mid a+b \leq m\}$$
$$A_k = \{(a,b) \mid a \leq m, b \leq m, a+b = m+k\}$$

Alors, l'ensemble des matrices du théorème, c'est-à-dire, les matrices dont les colonnes génèrent les sous-groupes $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times p^m\mathbb{Z}$ est

$$M = \bigcup_{k=0}^{m} M_k$$

où

$$M_k = \{\begin{pmatrix} p^a & 0 \\ jp^k & p^b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in A_k,\ 0 \leq j \leq p^{(b-k)}\}$$

shado

Énumération des sous-groupes

Theomème

Soit $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *définie par*

$$\psi(p,n) = \sum_{i=0}^{n} (n-i)p^i + \sum_{i=0}^{n} \frac{1-p^{n-i+1}}{1-p}$$

Alors, le nombre de sous groupe de $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ *est* $\psi(p,m)$

Énumération des sous-groupes

Theomème

Soit $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *définie par*

$$\psi(p,n) = \sum_{i=0}^{n} (n-i)p^i + \sum_{i=0}^{n} \frac{1-p^{n-i+1}}{1-p}$$

Alors, le nombre de sous groupe de $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ *est* $\psi(p,m)$

Proposition

Soit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *avec* p_i *des nombres premiers distincts. Le nombre total de sous-groupes de* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est*

$$\prod_{i=1}^{k} \psi(p_i,\alpha_i) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_i} (\alpha_i - j)p_i^j + \sum_{j=0}^{\alpha_i} \frac{1-p_i^{\alpha_i-j+1}}{1-p_i} \right)$$

Génération du treillis

1 Introduction
2 Quelques simplifications du problème
- Décomposition de n en éléments irréductibles
- Simplification des sous-groupes

3 Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite
- Matrices à coefficients entier
- Formes normales de Hermite

4 Génération et énumération des sous-groupes
- Génération des sous-groupes
- Énumération des sous-groupes

5 Génération du treillis
6 Quelques résultats
- Pour $n = 2$
- Pour $n = 4$
- Pour $n = 8$
- Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes

7 Bibliographie

Génération du treillis

- Notre algorithme prend en paramètres l'ensemble des sous-groupes G ainsi que leur table de relation T

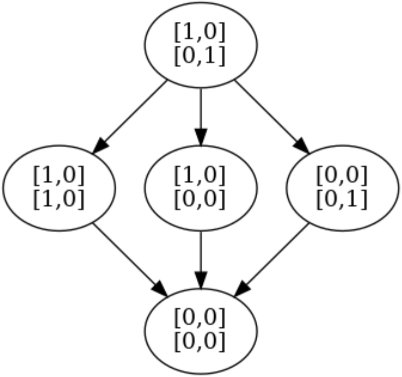
```
fonction creer_treillis (G T) =
    G ← Trier G par la cardinalit é
    L =
    Pour chaque u  G:
        Pour chaque v  T[u]:
            Si non (u, v0)  L tel que v0  v
                Alors L  { (u, v) }
    Retourner (G, L)
```

Table des matières

1. Introduction
2. Quelques simplifications du problème
   - Décomposition de n en éléments irréductibles
   - Simplification des sous-groupes
3. Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite
   - Matrices à coefficients entier
   - Formes normales de Hermite
4. Génération et énumération des sous-groupes
   - Génération des sous-groupes
   - Énumération des sous-groupes
5. Génération du treillis
6. Quelques résultats
   - Pour n = 2
   - Pour n = 4
   - Pour n = 8
   - Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes
7. Bibliographie

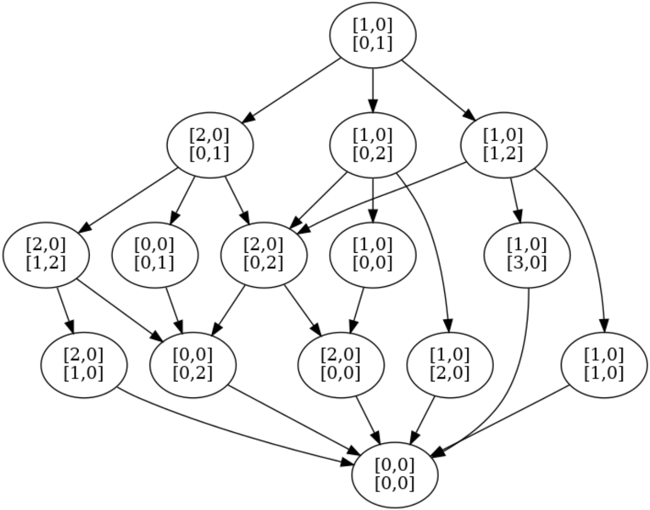
Pour n = 2

- Nombre de sous-groupe de $Z/2Z \times Z/2Z$: 5



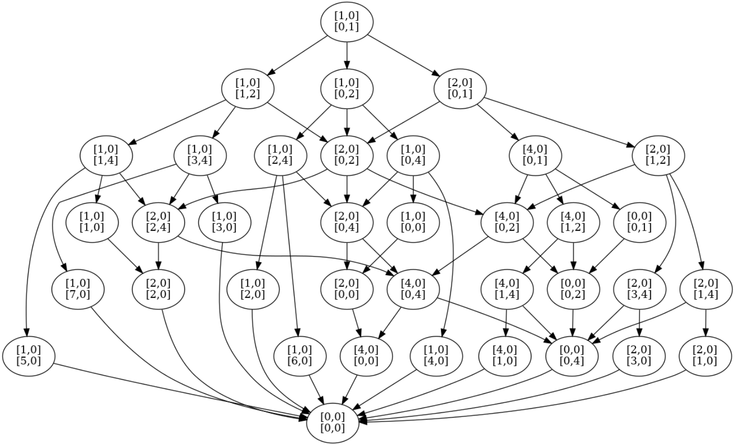
Pour n = 4

- Nombre de sous-groupe de $Z/4Z \times Z/4Z$: 15



Pour $n = 8$

- Nombre de sous-groupe de $Z/8Z \times Z/8Z$: 37



Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lvert Z/nZxZ/nZ \rvert$	*inf*	1	5	6	15	8	30	10	37	23	40

Table des matières

1 Introduction
2 Quelques simplifications du problème
- Décomposition de n en éléments irréductibles
- Simplification des sous-groupes

3 Matrices à coefficients entier et forme normales de Hermite
- Matrices à coefficients entier
- Formes normales de Hermite

4 Génération et énumération des sous-groupes
- Génération des sous-groupes
- Énumération des sous-groupes

5 Génération du treillis
6 Quelques résultats
- Pour n = 2
- Pour n = 4
- Pour n = 8
- Quelques valeur de la suite du nombre de sous-groupes

7 Bibliographie

Bibliographie

- COSTE Michel ; Algèbre linéaire sur les entiers ; Mars 2018
- Thomas H. Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest, Clifford Stein ; Algorithmique : cours avec 957 exercices et 158 problèmes, 3e édition, Paris : Dunod ; DL 2010
- PERNET Clément ; Calcul de formes normales matricielles : de l'algorithmique à la mise en pratique ; Séminaire SIESTE ; ENS-Lyon ; 12 février 2013
- BERHURY Grégory ; Algèbre le grand combat : Cours et exercices ; 2e édition ; Paris : Calvage Mounet ; 2020. 1215 p. (Mathématiques en devenir)
- Mario Hampejs, Nicki Holighaus, László Tóth, Christoph Wiesmeyr ; Representing and counting the subgroups of the group Zm $\times$ Zn ; 2012