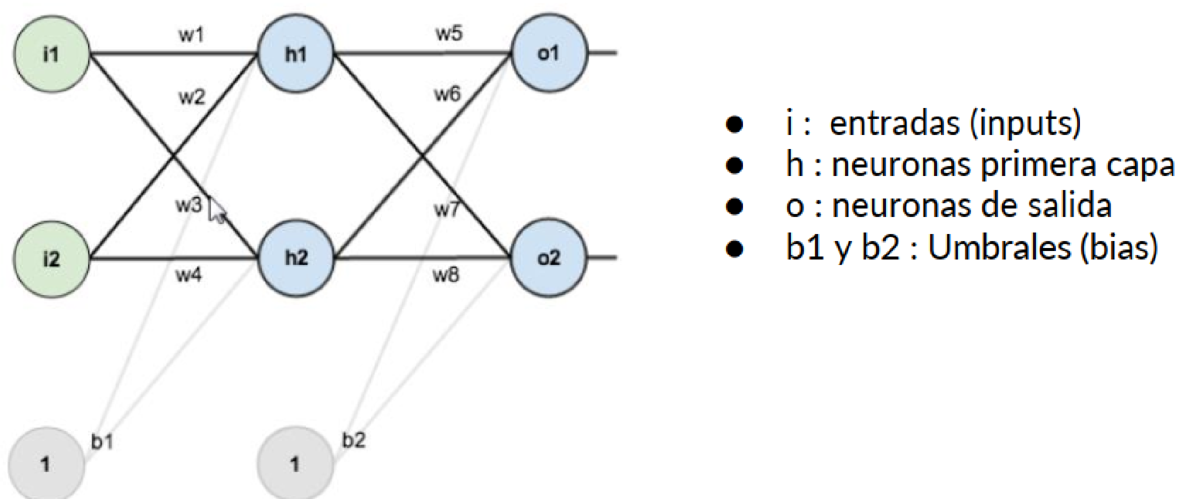
Backpropagation

El algoritmo mas importante para entrenar redes neuronales

Tiene varios problemas

Perceptrón multicapa (fully connected)



Cada neurona en cada capa esta conectada en su totalidad con las neuronas de la capa siguiente

No tiene conexiones hacia atras, ni bucles de autoretroalimentacion ni conexiones laterales. Solo hacia adelante

Se lo llama capa densa

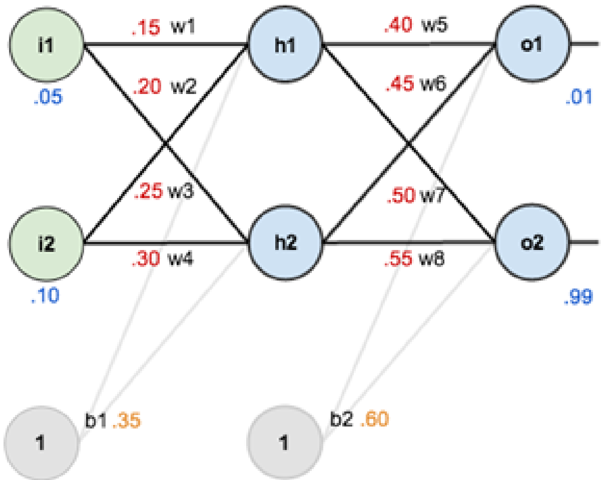
i: input → capas de entrada

h: hidden → capas ocultas

o: output → capas de salida

Inicializamos la red con pe

sos aleatorios



Entrada		Salida - esperada	
i1	i2	o1	o2
0.05	0.10	0.01	0.99

Vamos a usar como funcion de activacion la sigmoidea (no la de escalon porque no es derivable)

Función de activación $$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

Calculamos la entrada para **h1**

$$net_{h1}=w1*i1+w2*i2+b1*1$$
$$net_{h1}=0{,}15*0{,}05+0{,}2*0{,}1+0{,}35*1=0{,}3775$$

Calculamos la salida para **h1**, usando la activación sigmoide

$$out_{h1}=\frac{1}{1+e^{-0{,}3775}}=0{,}59327$$

De igual forma se calcula la salida de la neurona **h2**

$$out_{h2}=0{,}59688$$

Entrada		Salida - esperada		Salida - real	
i1	i2	o1	o2	h1	h2
0.05	0.10	0.01	0.99	0.59327	0.59688

Repetimos los mismos pasos para calcular la salida de las neuronas de salida, usando como entrada las salidas de las neuronas **h**.

Calculo la entrada para **o1**:

$$net_{o1}=w5*out_{h1}+w6*out_{h2}+b2*1$$

$$net_{o1}=0{,}4*0{,}59327+0{,}45*0{,}59688+0{,}6*1=1{,}1059$$

Calculo la salida para **o1 y o2**:

$$out_{o1}=\frac{1}{1+e^{-1{,}1059}}=0{,}75137$$

$$out_{o2}=0{,}7729$$

Entrada		Salida - esperada		Salida - real			
i1	i2	o1	o2	h1	h2	o1	o2
0.05	0.10	0.01	0.99	0.59327	0.59688	0.75137	0.7729

Calculamos el error cuadrático medio de cada neurona de salida, con la siguiente fórmula:

$$E=\sum \frac{1}{2}(target-output)^2$$

Target es el valor esperado y output es el valor real

$$E_{01}=\sum \frac{1}{2}(target_{o1}-output_{o1})^2=\frac{1}{2}(0{,}01-0{,}75137)^2=0{,}274811$$

$$E_{02}=0{,}02356$$

Entrada		Salida - esperada		Salida - real				Errores	
i1	i2	o1	o2	h1	h2	o1	o2	o1	o2
0.05	0.10	0.01	0.99	0.59327	0.59688	0.75137	0.7729	0.274811	0.02356

Calculamos el error total, como la suma de todos los errores:

$$E_{total}=E_{o1}+E_{o2}=0{,}274811+0{,}02356=0{,}29837$$

Hasta aca lo que hicimos fue inicializar una red neuronal con valores aleatorios y le dimos un input, hicimos que procesara ese input y me dio una salida. Y calculamos el error

Aplicamos Backpropagation

Es una técnica de descenso por gradiente, vamos a tener que buscar la función error en función de los pesos, derivarla respecto a cada uno de los pesos y eso nos va a dar el gradiente, que nos va a decir en que dirección crece el error

Nosotros vamos a ir en dirección opuesta

⇒ Vamos hacia donde decrece el error

$$\vec{\nabla} E_{total} = \left(\frac{\partial E_{total}}{\partial w1}, \frac{\partial E_{total}}{\partial w2}, \frac{\partial E_{total}}{\partial w3}, \frac{\partial E_{total}}{\partial w4}, \frac{\partial E_{total}}{\partial w5}, \frac{\partial E_{total}}{\partial w6}, \frac{\partial E_{total}}{\partial w7}, \frac{\partial E_{total}}{\partial w8}\right)$$

Empecemos por calcular uno de estos valores.
Es el primero de los pesos, en la última capa de la red.

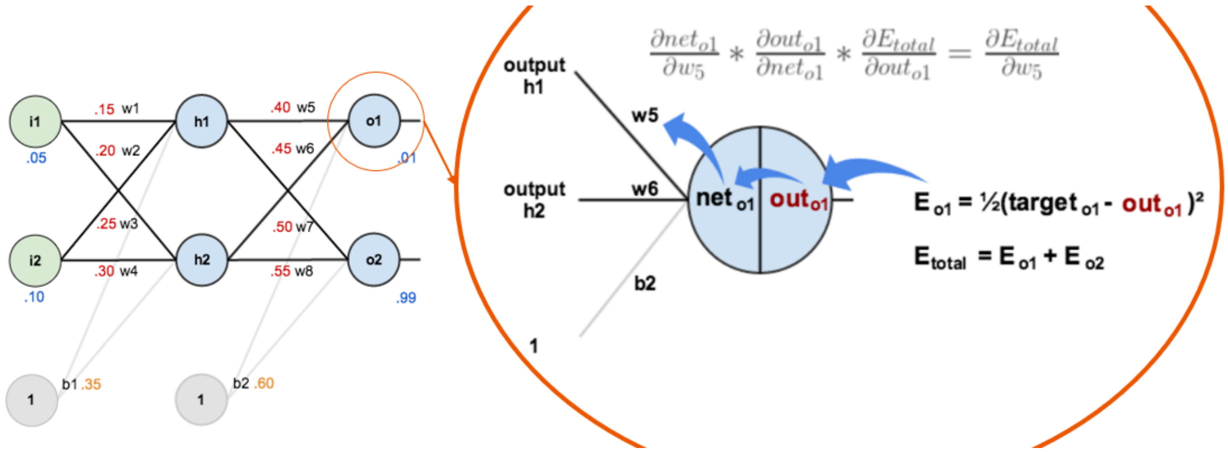
$\frac{\partial E_{total}}{\partial w5}$: *Se lee como la derivada parcial de* E_{total} *respecto de* $w5$, *o tambien como el gradiente respecto de* $w5$.

Siempre vamos calculando los errores de las capas de atrás, las capas ocultas, las capas de salida.

Entrada		Salida - esperada		Salida - real				Errores		
i1	i2	o1	o2	h1	h2	o1	o2	o1	o2	total
0.05	0.10	0.01	0.99	0.59327	0.59688	0.75137	0.7729	0.274811	0.02356	0.29837

Utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial w5} = \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{01}} * \frac{\partial out_{01}}{\partial net_{01}} * \frac{\partial net_{01}}{\partial w5}$$



Es constante

$$E_{total} = \frac{1}{2}(target_{o1} - out_{o1})^2 + \frac{1}{2}(target_{o2} - out_{o2})^2$$

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{o1}} = 2 * \frac{1}{2}(target_{o1} - out_{o1})^{2-1} * -1 + 0$$

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{o1}} = -(target_{o1} - out_{o1}) = -(0.01 - 0.75136507) = 0.74136507$$

$$out_{o1} = \frac{1}{1+e^{-net_{o1}}}$$

$$\frac{\partial out_{o1}}{\partial net_{o1}} = out_{o1}(1 - out_{o1}) = 0.75136507(1 - 0.75136507) = 0.186815602$$

$$net_{o1} = w_5 * out_{h1} + w_6 * out_{h2} + b_2 * 1$$

$$\frac{\partial net_{o1}}{\partial w_5} = 1 * out_{h1} * w_5^{(1-1)} + 0 + 0 = out_{h1} = 0.593269992$$

net_{o1} es lo que ingresa por o1

Todo junto:

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial w_5} = 0.74136507 * 0.186815602 * 0.593269992 = 0.082167041$$

Calculando el nuevo peso w5 o w5'

$$w5' = w5 - \alpha * 0{,}082167041 = 0{,}35891648$$

Tasa de aprendizaje *(learning rate)*
= 0.5 en este ejemplo

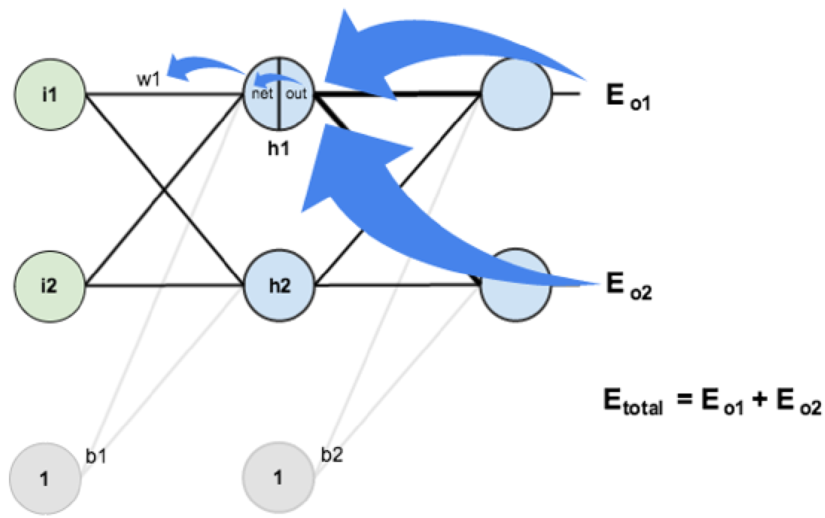
Repetimos para los otros pesos:

$$w_6^+ = 0.408666186$$
$$w_7^+ = 0.511301270$$
$$w_8^+ = 0.561370121$$

Seguimos por la capa anterior, oculta

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial w1} = \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h1}} * \frac{\partial out_{h1}}{\partial net_{h1}} * \frac{\partial net_{h1}}{\partial w1}$$

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h1}} = \frac{\partial E_{o1}}{\partial out_{h1}} + \frac{\partial E_{o2}}{\partial out_{h1}}$$



$$\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h1}} = \frac{\partial E_{o1}}{\partial out_{h1}} + \frac{\partial E_{o2}}{\partial out_{h1}}$$

Empezaremos por el primer término:

$$\frac{\partial E_{o1}}{\partial out_{h1}} = \frac{\partial E_{o1}}{\partial net_{o1}} * \frac{\partial net_{o1}}{\partial out_{h1}}$$

$\frac{\partial E_{o1}}{\partial net_{o1}}$ Ya fue calculado anteriormente:

$$\frac{\partial E_{o1}}{\partial net_{o1}} = \frac{\partial E_{o1}}{\partial out_{o1}} * \frac{\partial out_{o1}}{\partial net_{o1}} = 0.74136507 * 0.186815602 = 0.138498562$$

$$\frac{\partial E_{o1}}{\partial out_{h1}} = \frac{\partial E_{o1}}{\partial net_{o1}} * \frac{\partial net_{o1}}{\partial out_{h1}}$$

$$net_{o1} = w_5 * out_{h1} + w_6 * out_{h2} + b_2 * 1$$

$$\frac{\partial net_{o1}}{\partial out_{h1}} = w_5 = 0.40$$

Entonces:

$$\frac{\partial E_{o1}}{\partial out_{h1}} = \frac{\partial E_{o1}}{\partial net_{o1}} * \frac{\partial net_{o1}}{\partial out_{h1}} = 0.138498562 * 0.40 = 0.055399425$$

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h1}} = \frac{\partial E_{o1}}{\partial out_{h1}} + \frac{\partial E_{o2}}{\partial out_{h1}}$$

$$\frac{\partial E_{o2}}{\partial out_{h1}} = -0.019049119$$

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h1}} = \frac{\partial E_{o1}}{\partial out_{h1}} + \frac{\partial E_{o2}}{\partial out_{h1}} = 0.055399425 + -0.019049119 = 0.036350306$$

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial w1} = \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h1}} * \frac{\partial out_{h1}}{\partial net_{h1}} * \frac{\partial net_{h1}}{\partial w1}$$

Aún hay que calcular estos dos términos

$$out_{h1} = \frac{1}{1+e^{-net_{h1}}}$$

$$\frac{\partial out_{h1}}{\partial net_{h1}} = out_{h1}(1 - out_{h1}) = 0.59326999(1 - 0.59326999) = 0.241300709$$

$$net_{h1} = w_1 * i_1 + w_3 * i_2 + b_1 * 1$$

$$\frac{\partial net_{h1}}{\partial w_1} = i_1 = 0.05$$

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial w1} = \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h1}} * \frac{\partial out_{h1}}{\partial net_{h1}} * \frac{\partial net_{h1}}{\partial w1}$$

$$0.036350306 * 0.241300709 * 0.05 = 0.000438568$$

$$w1' = w1 - \alpha * \frac{\partial E_{total}}{\partial w1}$$

$$= 0.15 - 0.5 * 0.000438568 = 0.149780716$$

Repetimos para w2, w3 y w4

$$w_2^+ = 0.19956143$$

$$w_3^+ = 0.24975114$$

$$w_4^+ = 0.29950229$$