

# Memoria de Cálculo Proyecto 2

Emmanuel Naranjo Blanco

2019053605

Grupo 2 – Dinámica

Profesor: Carlos Otárola

Semestre II - 2021

## Contenido

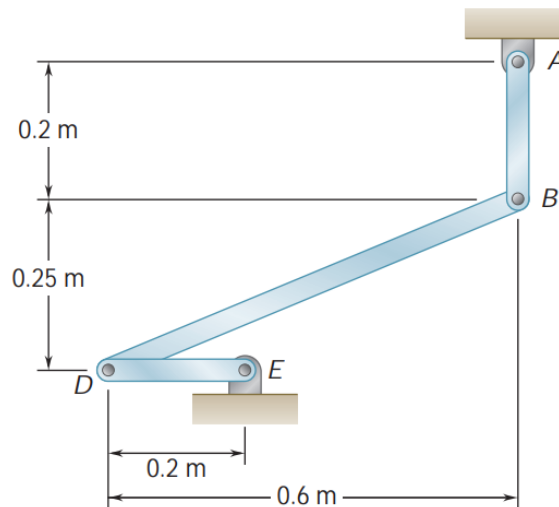
A. Descripción del problema seleccionado .....	2
B. Suposiciones sobre las que se basa el problema.....	2
C. Datos de entrada .....	3
D. Metodología.....	3
E. Cálculos .....	5
F. Resultados.....	10
G. Anexos .....	11

### A. Descripción del problema seleccionado

Sabiendo que en el instante mostrado, la barra AB tiene una velocidad angular de  $10 \text{ rad/s}$  en el sentido de las agujas del reloj y se está desacelerando a una velocidad de  $2 \text{ rad/s}^2$ . Determine las aceleraciones angulares de la barra BD y la barra DE.

Por otra parte, determine las fuerzas en E y B si las masas de las barras son de  $0.75 \text{ Kg/m}$ .

**15.252** Knowing that at the instant shown bar *AB* has an angular velocity of  $10 \text{ rad/s}$  clockwise and it is slowing down at a rate of  $2 \text{ rad/s}^2$ , determine the angular accelerations of bar *BD* and bar *DE*.



**Fig. P15.252**

Figura 1. Enunciado.

### B. Suposiciones sobre las que se basa el problema

- Se utilizará un plano de coordenadas determinado para mantener armonía en las direcciones resultantes.
- La fricción entre piezas es despreciable.
- Para determinar las aceleraciones y velocidades no es necesario conocer la masa de las barras.

- No se toma en cuenta el grosor de las barras, por lo que este es tomado de forma arbitraria en el simulador. Preferiblemente se trató de barras delgadas para evitar propagación de errores.
- Las barras AB y DE se encuentran en rotación con respecto a su punto fijo.
- La barra BD está en movimiento de plano general.
- Dada la velocidad angular en la barra AB es posible suponer la dirección de la velocidad en B ( $-\mathbf{i}$ ) y mediante el uso del centro instantáneo se puede suponer la dirección de la velocidad en D ( $-\mathbf{j}$ ).
- Para determinar las aceleraciones se puede apoyar de la estrategia de aceleraciones relativas a un punto de referencia.
- Para el cálculo de las fuerzas en B y E sí se toma la masa de las barras. Se colocó un material representativo: Plain Carbon Steel.

### C. Datos de entrada

- La velocidad angular de la barra AB: 10 rad/s (sentido horario).
- Aceleración angular de la barra AB: 2 rad/s<sup>2</sup> (sentido antihorario).
- Dimensiones de las barras y su posición para el instante por estudiar.
- La masa de las barras por unidad de metro.
- Efecto gravitacional: 9.81 m/s<sup>2</sup>.

### D. Metodología

#### Solución mediante cinemática del cuerpo rígido:

Se particiona el cuerpo por partes y se realizan los diagramas de cuerpo libres correspondientes para cada barra. Se subdivide el análisis en dos partes, uno para velocidades y otro para aceleraciones. Por un lado, se determinan las velocidades en B y D, y las velocidades angulares de la barra BD y DE. Para esto se apoya de las ecuaciones para un cuerpo en rotación y las provistas al utilizar el centro instantáneo en un punto estratégico, ya que la barra BD está en MPG. Por otro lado, se determinan las aceleraciones tangenciales, normales y angulares aplicando el tipo de

movimiento de cada barra. Por último se resuelve el sistema de ecuaciones resultante para determinar las incógnitas de aceleración buscadas.

#### Solución mediante cinética del cuerpo rígido:

Para determinar las fuerzas de reacción en los puntos B y E del cuerpo rígido, nuevamente se particiona el sistema en sus barras para analizarlas de forma individual. Al saber que las barras tienen una masa de 0.75 Kg/m, se realiza el cálculo de las masas utilizando su longitud y posteriormente su momento de inercia centroidal. Una vez realizados los diagramas cinéticos de cada barra, y calculada las aceleraciones del centro de masa, se procede a aplicar las ecuaciones de movimiento traslacional y rotacional. A partir de estas ecuaciones se procede a determinar las fuerzas solicitadas.

## E. Cálculos

### Solución mediante cinemática del cuerpo rígido:

Sistema de coordenadas por utilizar

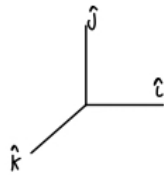
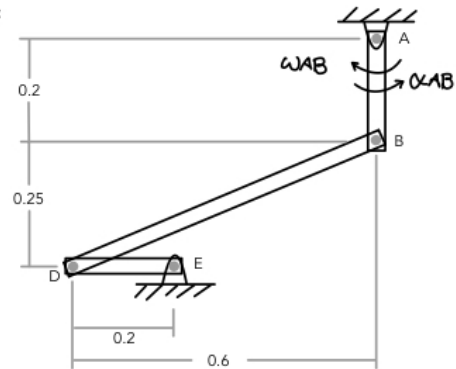
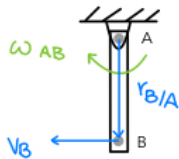


Diagrama general:



Análisis de velocidades

Barra AB: Rotación con respecto al punto fijo A.



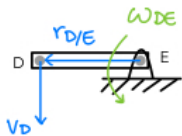
$$\omega_{AB} = 10 (-\hat{k}) \text{ rad/s}$$

Se sabe que:  $v = \omega r$  ;  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\vec{v}_B = 10 (-\hat{k}) \times 0,2 (-\hat{j})$$

$$\vec{v}_B = 2 (-\hat{i}) \text{ m/s}$$

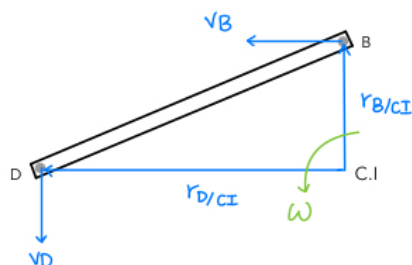
Barra DE: Rotación con respecto al punto fijo E



$$\vec{v}_D = \omega_{DE} (\hat{k}) \times 0,2 (-\hat{i})$$

$$\vec{v}_D = \omega_{DE} \cdot 0,2 (-\hat{j})$$

Barra BD: Movimiento plano general, Se coloca el CI de forma tal que las direcciones en B y D permanezcan conocidas y sus líneas de acción sea perpendicular a CI



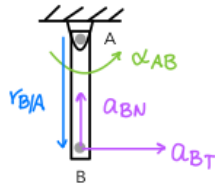
$$\omega = \frac{v_B}{r_{B/CI}} = \frac{v_C}{r_{D/CI}} = \frac{2}{0,25} = 8 (\hat{k}) \text{ rad/s}$$

$$\therefore v_C = 8 \cdot 0,6 = 4,8 (-\hat{j}) \text{ m/s}$$

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{r} = \frac{4,8}{0,2} = 24 (\hat{k}) \text{ rad/s}$$

Análisis de aceleraciones

Barra AB:



se sabe que:  $a = a_T + a_N = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \cdot \vec{r}$

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2 \cdot \vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B = 2 (\hat{k}) \times 0,2 (-\hat{j}) - (10)^2 \cdot 0,2 (-\hat{j})$$

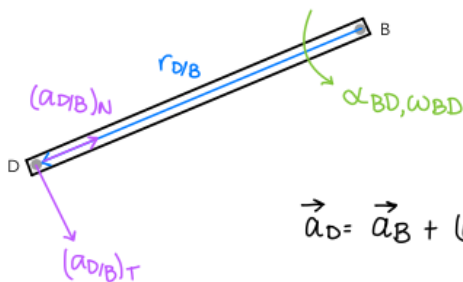
$$\vec{a}_B = 0,4 (\hat{i}) + 20 (\hat{j}) \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Barra BD:

$$\vec{r}_{D/B} = 0,6 (-\hat{i}) + 0,25 (\hat{j})$$

(LMPG)

$$\omega_{BD} = \omega = 8 \text{ rad/s}$$



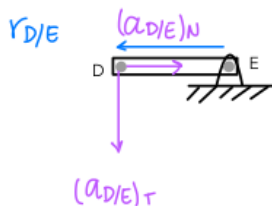
$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + (a_{D/B})_T + (a_{D/B})_N$$

$$\vec{a}_D = 0,4 (\hat{i}) + 20 (\hat{j}) + \alpha_{BD} (\hat{k}) \times (-0,6 (\hat{i}) - 0,25 (\hat{j})) - 8^2 (-0,6 (\hat{i}) - 0,25 (\hat{j}))$$

$$= (38,8 + 0,25 \alpha_{BD}) (\hat{i}) + (36 - 0,6 \alpha_{BD}) (\hat{j})$$

Barra DE

$$\vec{a}_D = \vec{a}_E + (a_{D/E})_T + (a_{D/E})_N ; a_E = 0$$



$$\vec{a}_D = \alpha_{DE} (\hat{k}) \times -0,2 (\hat{i}) - (24)^2 (-0,2 (\hat{i}))$$

$$= 115,2 (\hat{i}) - 0,2 \alpha_{DE} (\hat{j})$$

se igualan componentes cartesianas de  $\vec{a}_D$  para despejar  $\alpha_{DE}$  y  $\alpha_{BD}$ :

En  $\hat{i}$ :

$$38,8 + 0,25\alpha_{BD} = 115,2$$
$$\Rightarrow \alpha_{BD} = 305,6 \text{ rad/s}^2$$

En  $\hat{j}$ :

$$36 - 0,6\alpha_{BD} = -0,2 \alpha_{DE}$$
$$\Rightarrow \alpha_{DE} = 736,8 \text{ rad/s}^2$$

En Resumen:

$$\alpha_{BD} = 305,6 \text{ (k)} \text{ rad/s}^2 \quad R/.$$

$$\alpha_{DE} = 736,8 \text{ (k)} \text{ rad/s}^2 \quad R/.$$

### Solución mediante cinética del cuerpo rígido:

#### Análisis cinético

Para determinar las reacciones, es necesario hallar las componentes  $a_x$  y  $a_y$  de la aceleración del centro de masa de cada barra.  
Se sabe que las masas de las barras son  $0,75 \text{ Kg/m}$

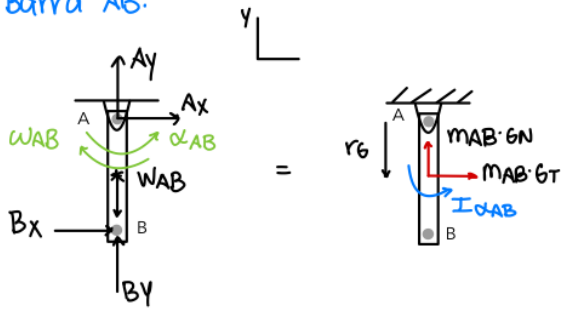
$$\rightarrow m_{AB} = 0,75 \cdot 0,2 = 0,15 \text{ Kg} = m_{DE}$$
$$m_{BD} = 0,75 \cdot 0,65 = 0,4875 \text{ Kg}$$

Las inercias de las barras son:  $I = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2$

$$\rightarrow I_{AB} = I_{DE} = \frac{1}{12} \cdot 0,15 \cdot 0,2^2 = 5 \times 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_{BD} = \frac{1}{12} \cdot 0,4875 \cdot 0,65^2 = 17,164 \times 10^{-3} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Barra AB:



$$a_{BT} = \alpha \cdot r_G$$

$$a_{BN} = \omega^2 \cdot r_G$$

$$r_G = 0,1 \text{ m}$$

Rotación sobre un punto fijo:

$$+\uparrow \Sigma F_y = m_{AB} \cdot \omega^2 \cdot r_G$$

$$A_y + B_y - 0,15 \cdot 9,81 = 0,15 \cdot 10^2 \cdot 0,1$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = m_{AB} \cdot \alpha \cdot r_G$$

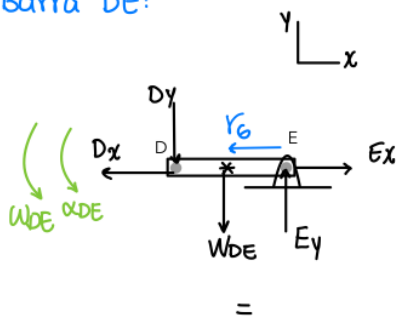
$$A_x + B_x = 0,15 \cdot 2 \cdot 0,1$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = r_G \cdot m_{AB} (\alpha \cdot r_G) + I_{AB} \cdot \alpha \quad (A)$$

$$B_x (0,2) = 0,1 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 0,1 + 5 \times 10^{-4} \cdot 2$$

$$\Rightarrow B_x = 0,02 \text{ N}$$

Barra DE:



Rotación sobre un punto fijo:

$$+\uparrow \Sigma F_y = m_{DE} \cdot \omega^2 \cdot r_G \quad (B)$$

$$-D_y - 0,15 \cdot 9,81 + E_y = 0,15 \cdot 24^2 \cdot 0,1$$

$$\Rightarrow E_y = 16,744$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = m_{DE} \cdot \alpha \cdot r_G \quad (C)$$

$$E_x - D_x = 0,15 \cdot 736,8 \cdot 0,1$$

$$\Rightarrow E_x = 2,0045$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_E = r_G \cdot m_{DE} (\alpha \cdot r_G) + I_{DE} \cdot \alpha \quad (D)$$

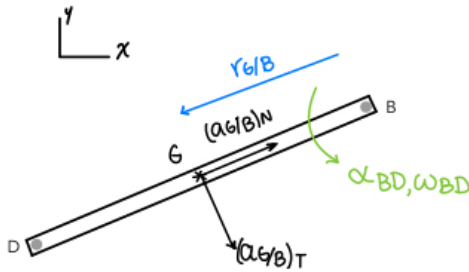
$$D_y (0,2) + 0,15 \cdot 9,81 \cdot 0,1 = 0,1 \cdot 0,15 \cdot 736,8 \cdot 0,1 + 5 \times 10^{-4} \cdot 736,8$$

$$\Rightarrow D_y = 6,632 \text{ N}$$



Barra BD:

se calcula la aceleración del centro de masa mediante aceleraciones relativas (MP6).

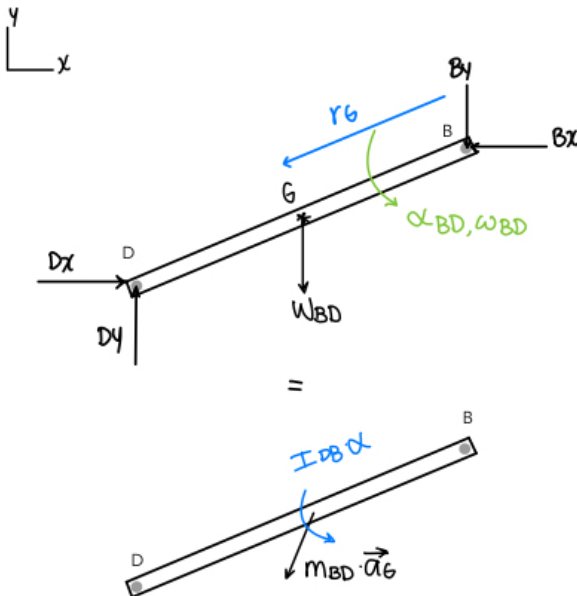


$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + (\vec{a}_{G/B})_T + (\vec{a}_{G/B})_N$$

$$\begin{aligned}\vec{a}_G &= 0,4(\hat{i}) + 20(\hat{j}) + 305,6(\hat{k}) \times [-0,3(\hat{i}) + 0,125(\hat{j})] - 8^2 [-0,3(\hat{i}) + 0,125(\hat{j})] \\ &= 0,4(\hat{i}) + 20(\hat{j}) + 38,2(-\hat{i}) + 91,68(-\hat{j}) + 19,2(\hat{i}) + 8(-\hat{j})\end{aligned}$$

$$\vec{a}_G = -18,6(\hat{i}) - 63,68(\hat{j}) \quad ; \quad |\vec{a}_G| = 66,34 \text{ m/s}^2$$

Ahora cinética en la barra:



$$\pm \sum F_x = m_{BD} \cdot a_{Gx} \quad (E)$$

$$D_x - B_x = 0,4875 \cdot -18,6$$

$$\Rightarrow D_x = -9,0475 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = m_{BD} \cdot a_{Gy} \quad (F)$$

$$D_y - B_y - 0,4875 \cdot 9,81 = 0,4875 \cdot -63,68$$

$$\Rightarrow B_y = 32,894 \text{ N}$$

A partir de (A), (B), (C), (D), (E) y (F) se obtiene las fuerzas en B

$$\begin{aligned}B_x &= 0,02 \text{ N} \\ B_y &= 32,894 \text{ N}\end{aligned} \quad R/$$

$$\begin{aligned}E_x &= 2,0045 \text{ N} \\ E_y &= 16,744 \text{ N}\end{aligned} \quad R/$$

En magnitud:

$$\begin{aligned}|B| &= 32,89 \text{ N} \\ |E| &= 16,86 \text{ N}\end{aligned}$$

## F. Resultados

Los resultados teóricos obtenidos fueron:

- La aceleración angular de la barra BD equivale a  $305.6 \text{ rad/s}^2$ .
- La aceleración angular de la barra DE equivale a  $736.8 \text{ rad/s}^2$ .
- Las fuerzas en B corresponden a:  $B_x = 0.02 \text{ N}$ ,  $B_y = 32.894 \text{ N}$ . En magnitud se trata de  $32.89 \text{ N}$ .
- Las fuerzas en E corresponden a:  $E_x = 2.0045 \text{ N}$ ,  $E_y = 16.744 \text{ N}$ . En magnitud se trata de  $16.86 \text{ N}$ .

Estos fueron la base para analizar los escenarios simulados en SolidWorks, se tuvo que para el tiempo de  $0.1568 \text{ s}$ ,  $\alpha_{BD}=17453 \text{ }^\circ/\text{s}^2$  y  $\alpha_{DE}=42589 \text{ }^\circ/\text{s}^2$ , que equivale a  $\alpha_{BD}=304.6123$  y  $\alpha_{DE}=743.3183$  en  $\text{rad/s}^2$ . En cuanto a las fuerzas en B y E se invita a leer la sección *Fuerzas* de los Anexos. Demás información del proyecto, así como su video se encuentran en el informe final.

## G. Anexos

A continuación, se muestran imágenes del procedimiento realizado en SolidWorks.

### Movimiento del cuerpo rígido:

Se modeló el estudio de movimiento a partir de la horizontal, procurando que AB se desplace  $90^\circ$  para llegar al punto determinado en el enunciado con la velocidad y aceleración requerida.

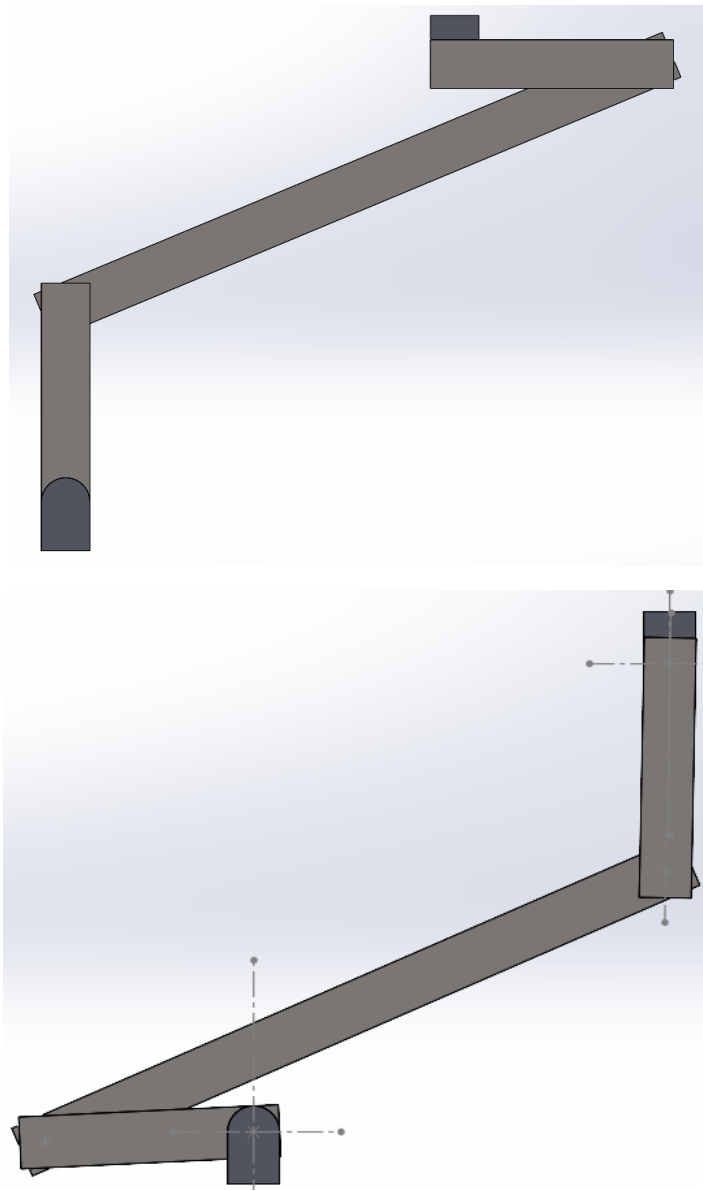


Figura 2. Desplazamiento inicial y final de la barra AB.

## Resultados:

Estos se muestran en grados, por lo que se requiere hacer la conversión:

$$1 \text{ grad} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

El estudio dinámico se aplicó para un tiempo de 0.1568s dado que en este tiempo se aproxima que la barra AB se desplaza 90° desde su posición inicial hasta su posición final.

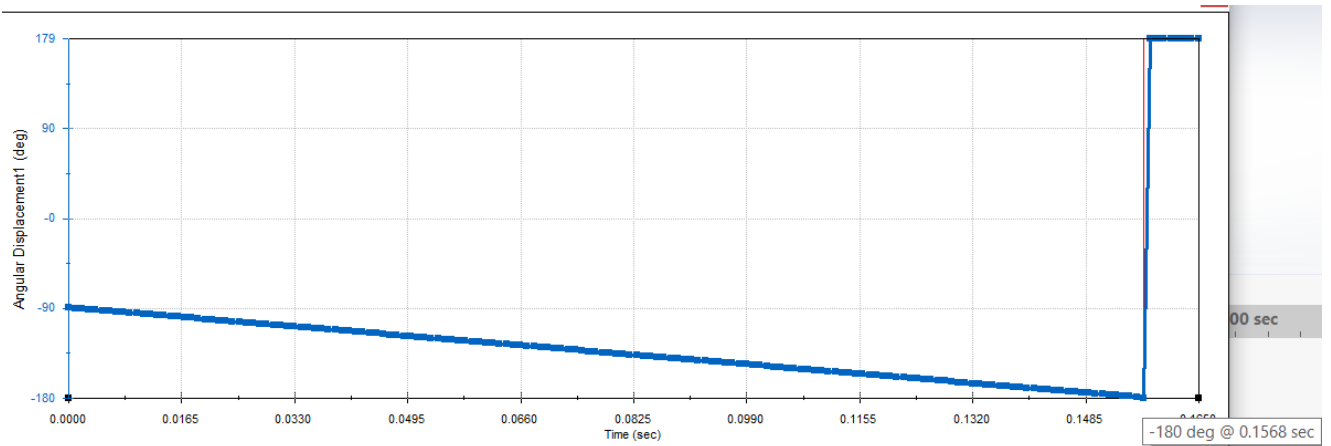


Figura 3. Desplazamiento de barra AB.

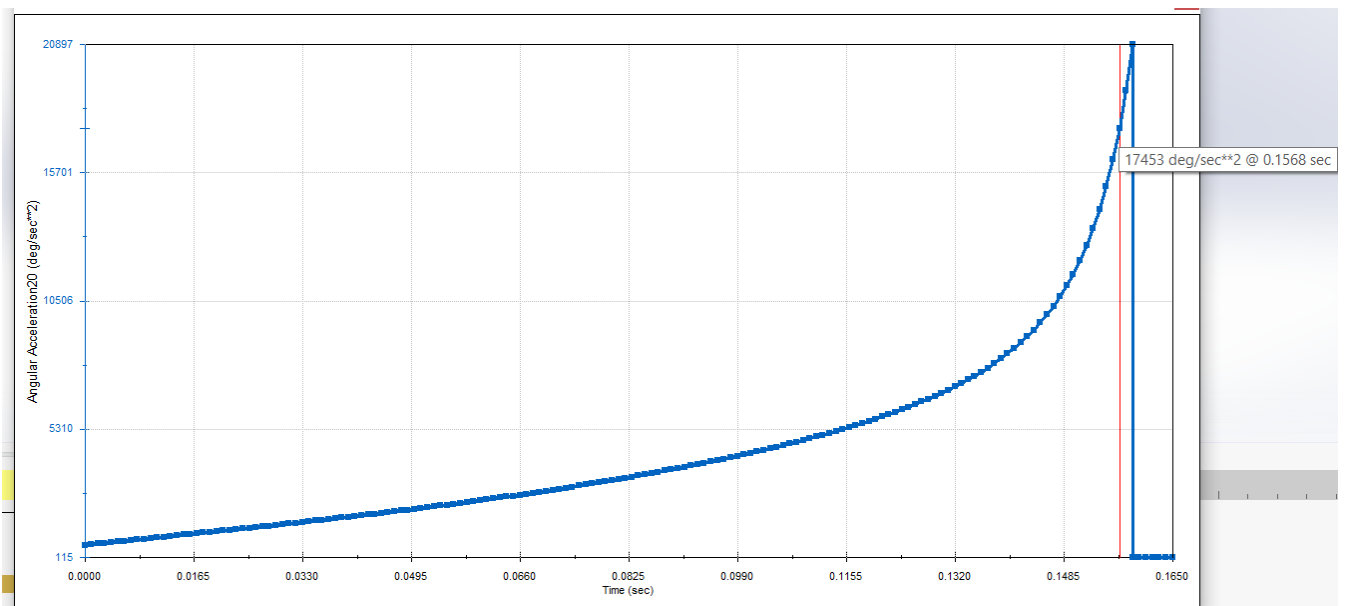


Figura 4. Aceleración angular experimental de barra BD.

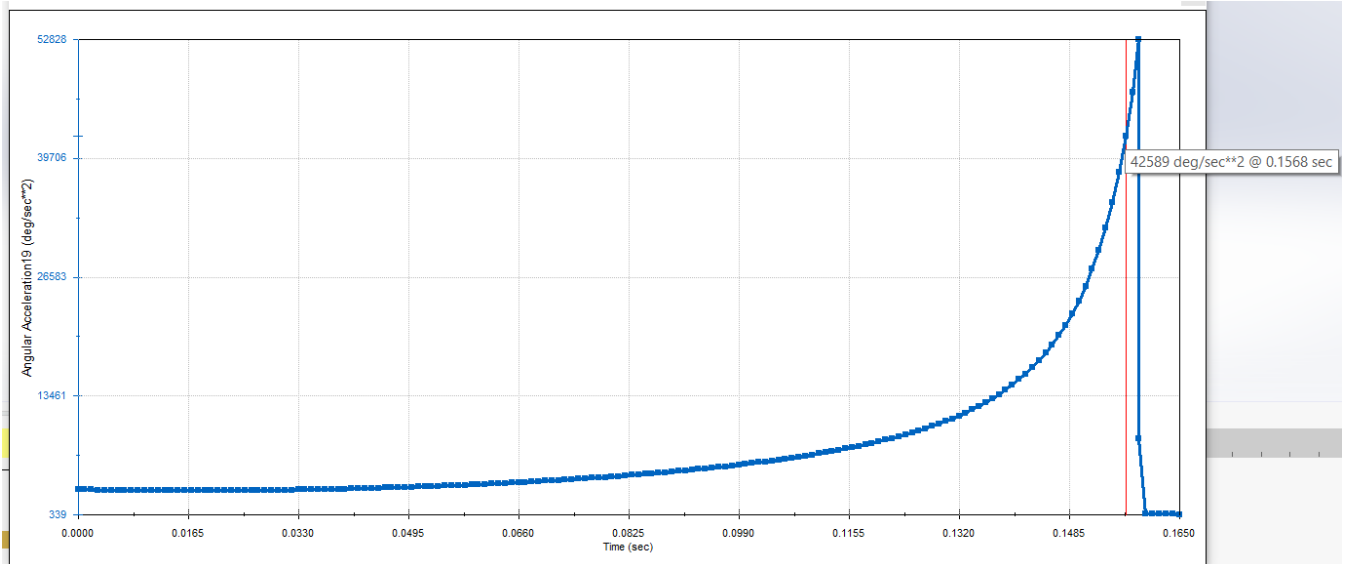


Figura 5. Aceleración angular experimental de barra DE.

### Piezas:

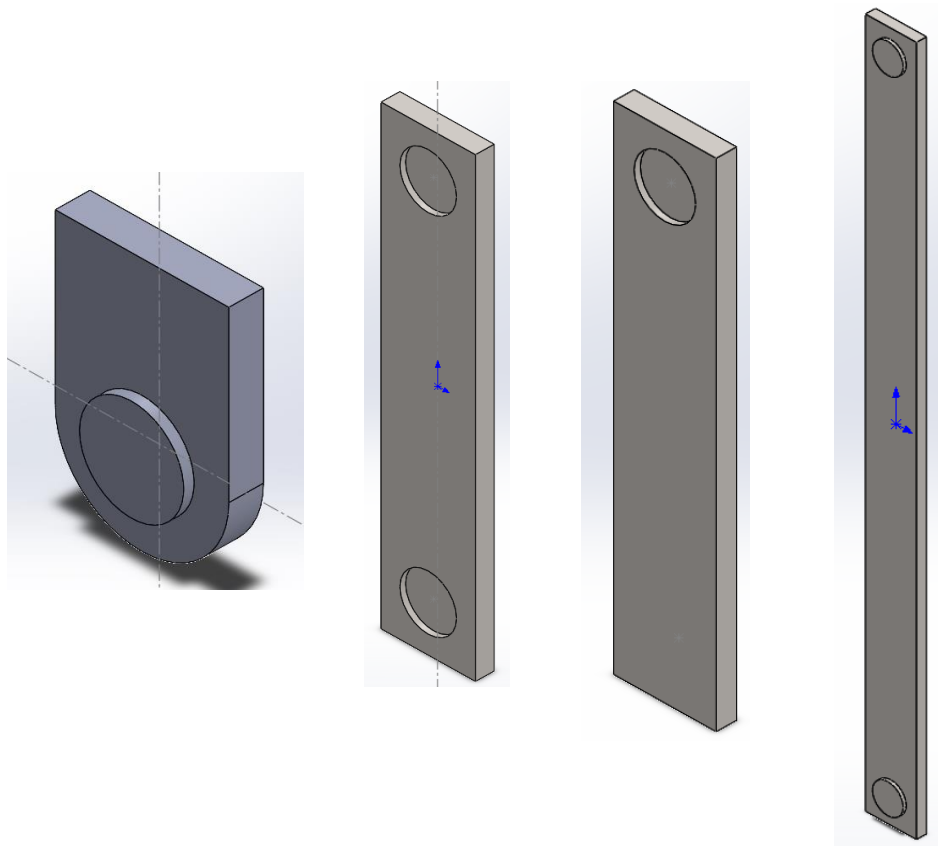


Figura 6. Diseño de piezas.

<p>Mass properties of BD Configuration: Default Coordinate system: -- default --</p> <p>Density = 0.00 grams per cubic millimeter</p> <p>Mass (user-overridden) = 487.50 grams</p>	<p>Mass properties of DE Configuration: Default Coordinate system: -- default --</p> <p>Density = 0.00 grams per cubic millimeter</p> <p>Mass (user-overridden) = 150.00 grams</p>
<p>Mass properties of AB Configuration: Default Coordinate system: -- default --</p> <p>Density = 0.00 grams per cubic millimeter</p> <p>Mass (user-overridden) = 150.00 grams</p>	

Figura 7. Masa de piezas.

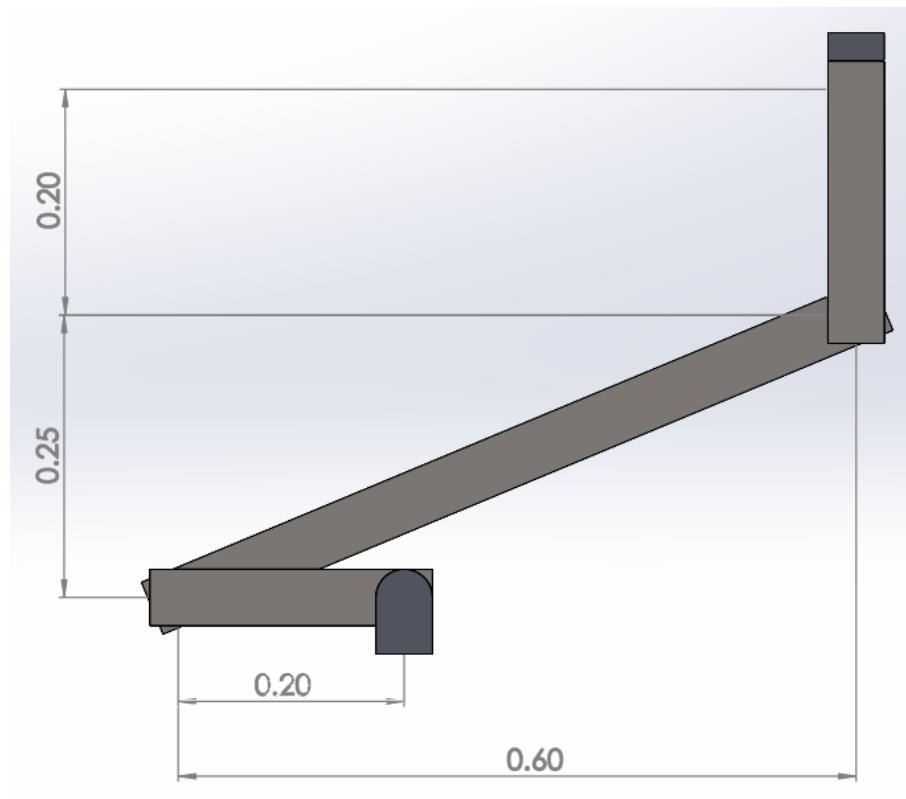


Figura 8. Ensamble.

### Configuración del sistema:

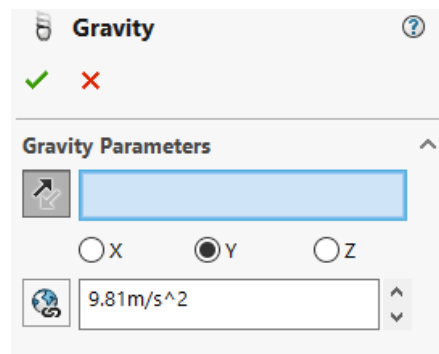


Figura 9. Gravedad.

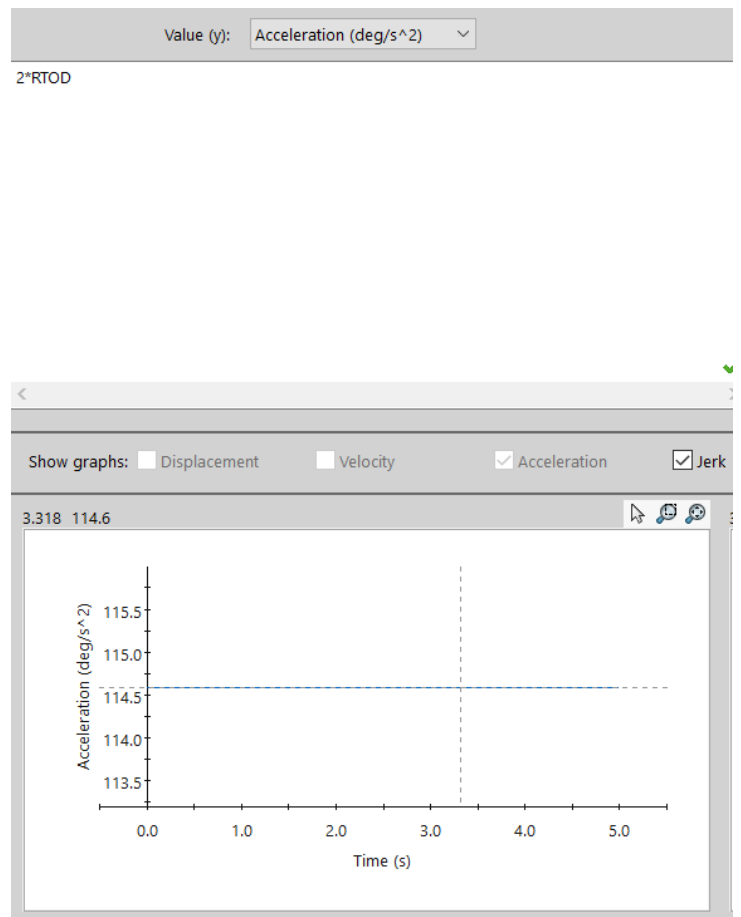
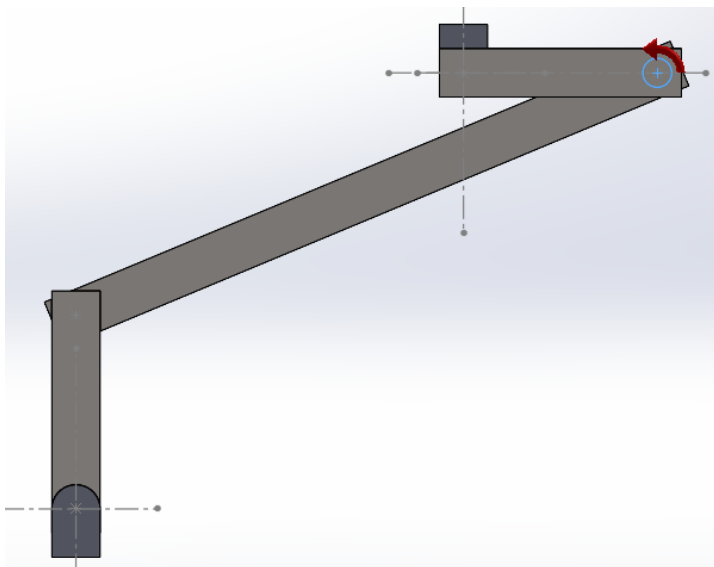


Figura 10. Motor con aceleración antihoraria de  $2 \text{ rad/s}^2$  en barra AB.

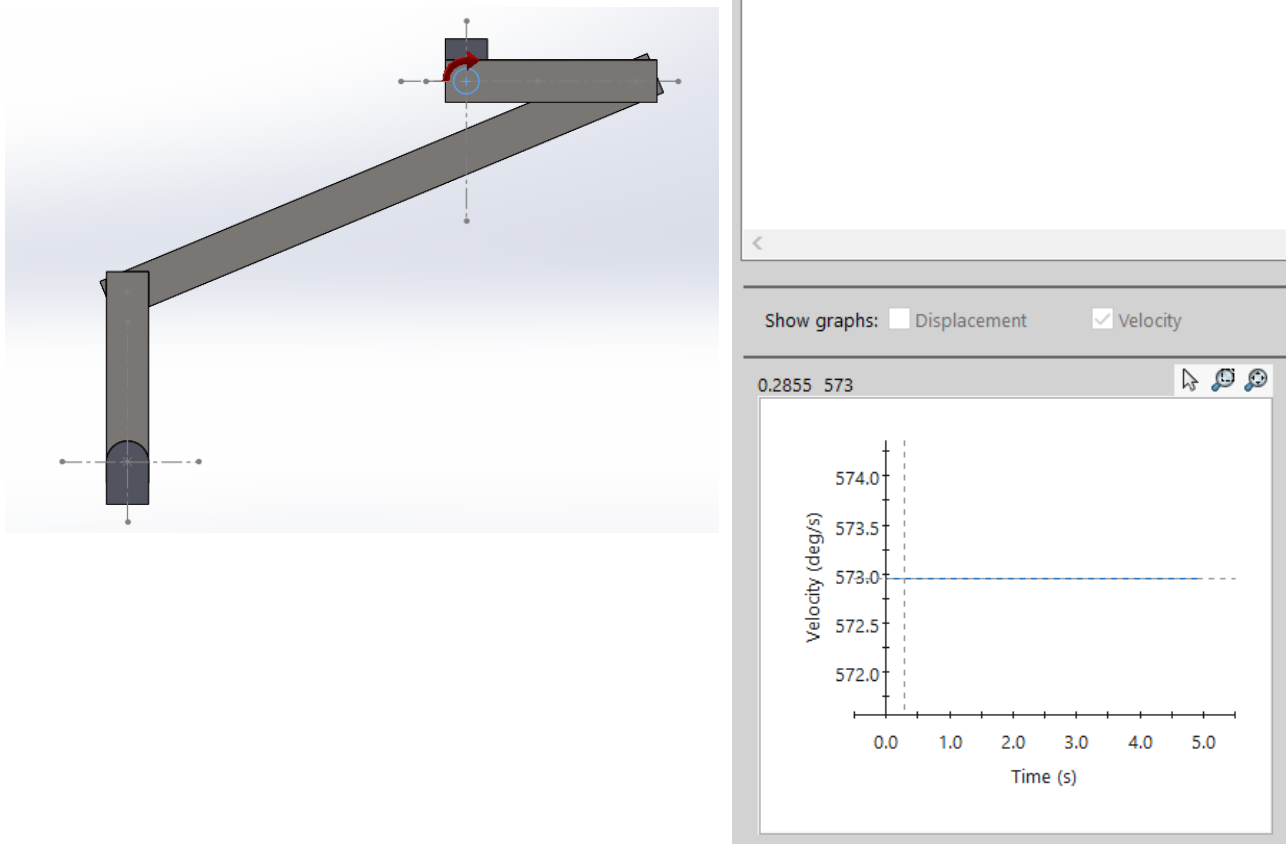


Figura 11. Motor con velocidad horaria de 10 rad/s en barra AB.



## Tiempos:

Se colocó los tiempos de acción de cada motor a conveniencia para obtener el resultado más acertado.

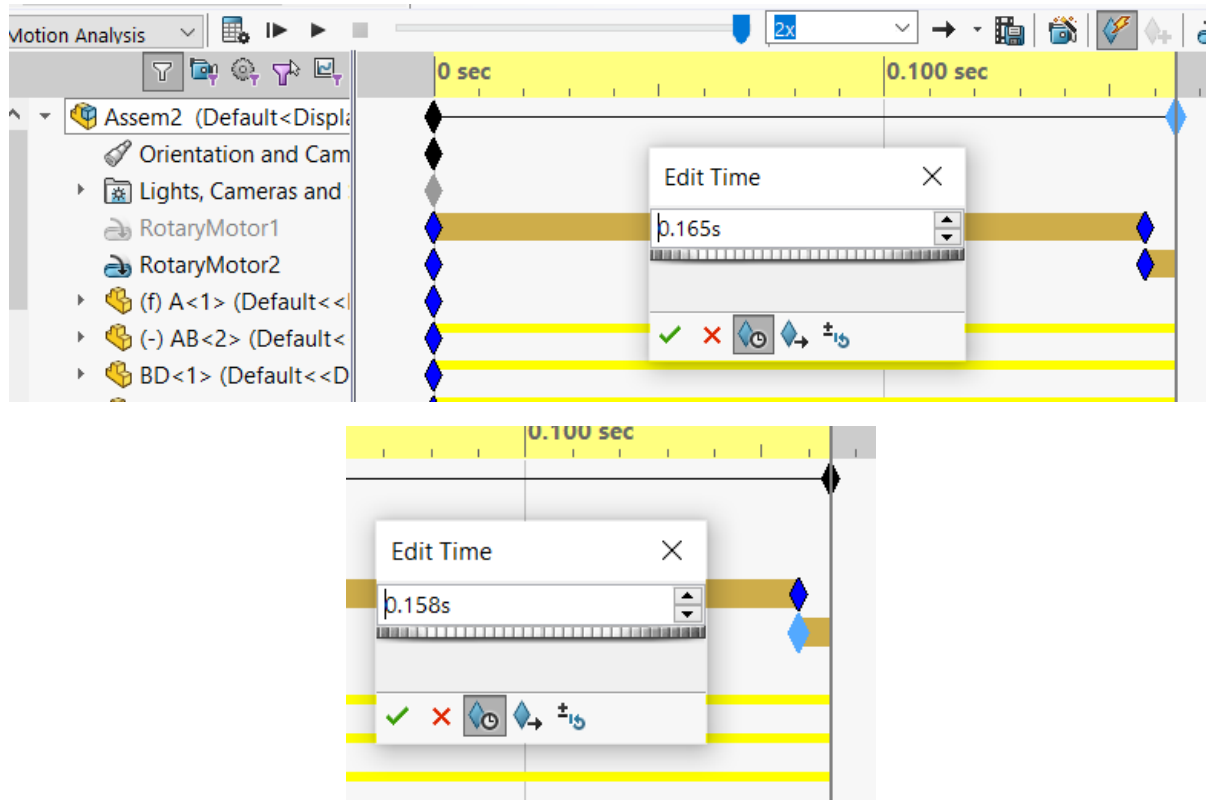


Figura 12. Uso de tiempos.

## Fuerzas:

Con respecto a la comprobación práctica de las fuerzas solicitadas teóricamente, se realizó distintos modelos y variantes en CAD de la configuración del sistema; no obstante, no hubo resultado satisfactorio.

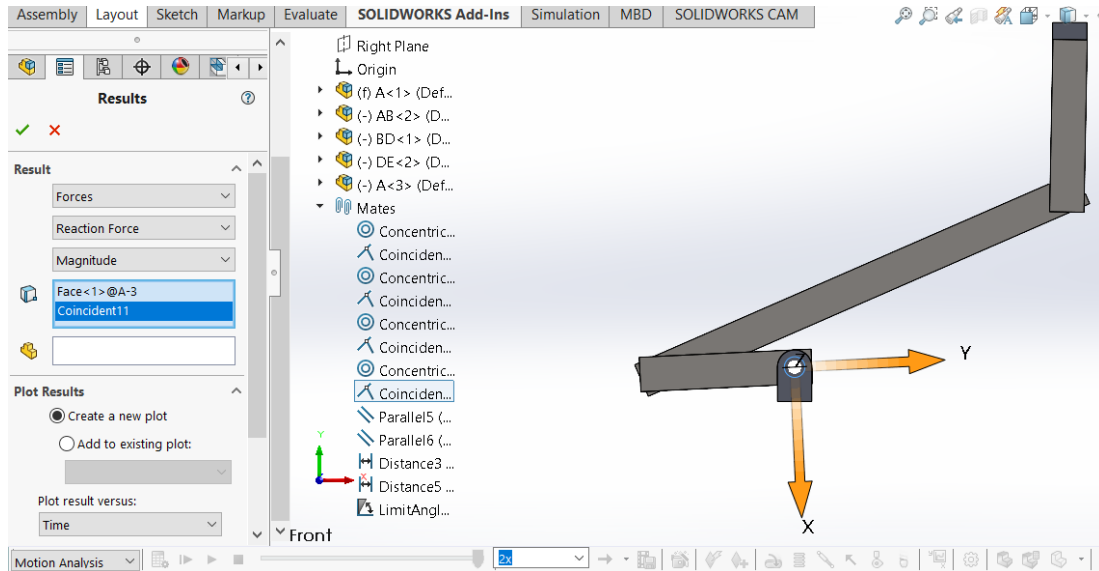


Figura 13. Prueba de fuerzas con modelo final.

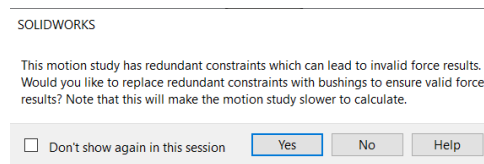


Figura 14. Error del análisis de fuerzas.

Luego de analizar las redundancias y probar eliminar algunas, además de probar con otras variantes de diseño, el movimiento del sistema no resultaba como se esperaba, por lo que el resultado siempre arrojaba cero Newtons.

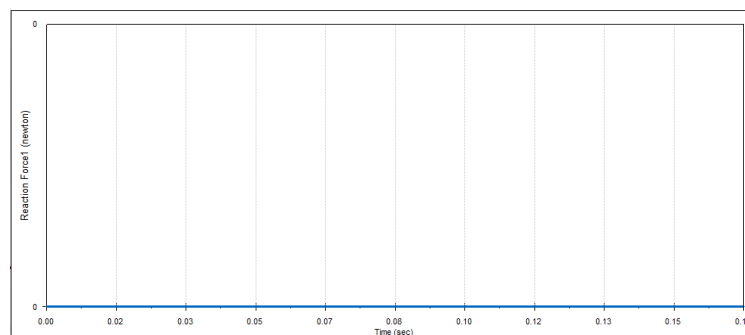


Figura 15. Gráfica de fuerzas simulada.

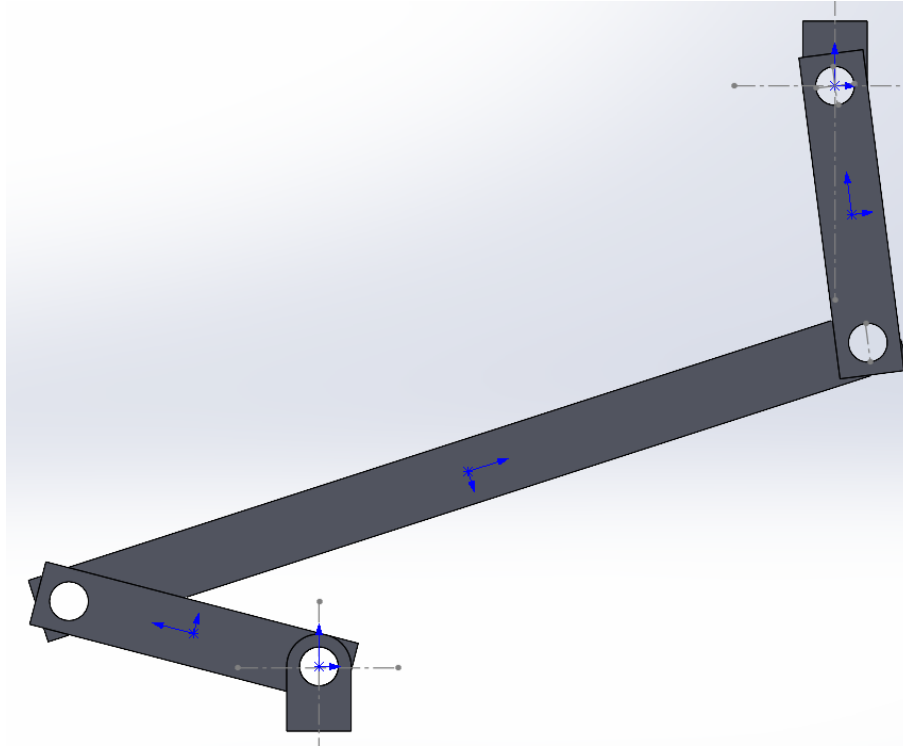


Figura 16. Primer diseño planteado.

Para corroborar que se haya realizado correctamente la selección de uniones de la pieza, se hizo una prueba con condiciones plenamente aleatorias, siguiendo los pasos de distintas fuentes de información, lo cual sí fue exitoso en el estudio de fuerzas. Se concluyó que se trata de una limitante del cuerpo rígido del problema y del diseño propuesto por el estudiante ya que el conocimiento en SolidWorks es principiante.

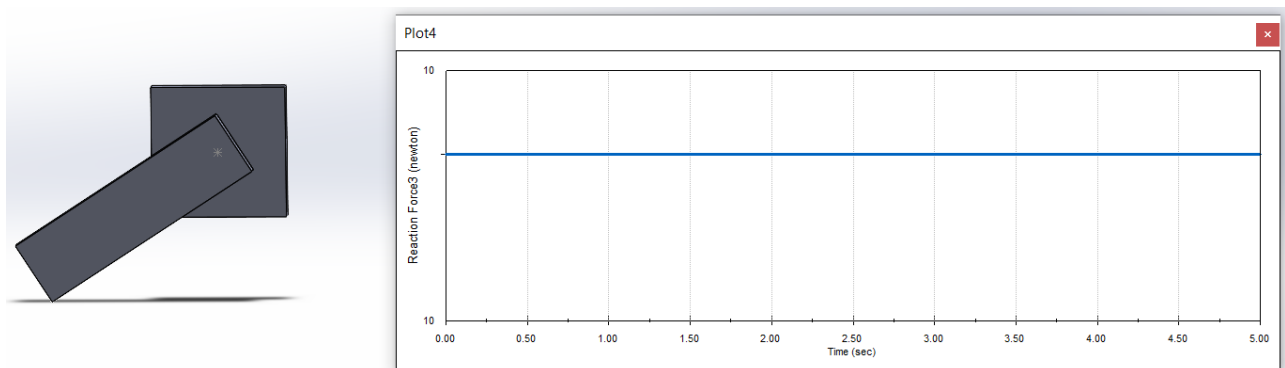


Figura 17. Resultado de fuerza al estudiar una pieza particular.

*\*Nota: Demás análisis se presenta en el informe del proyecto.*