

Nombre: Emmanuel Naranjo Blanco.

Carnet: 2019053605.

Grupo: 2.

Introducción

El presente proyecto consiste en la segunda comprobación práctica de un ejercicio propuesto en el curso de Dinámica. Esto con el fin de corroborar los resultados teóricos empleando distintos métodos de validación, y realizar un análisis dinámico utilizando el software SolidWorks.

Por un lado, en el estudio cinemático de los cuerpos rígidos es importante para el diseño de engranajes y mecanismos utilizados para muchas operaciones mecánicas. Una vez que la cinemática está completamente entendida, se puede aplicar las ecuaciones que relacionan las fuerzas en el cuerpo y su movimiento. Hay tres tipos de movimiento de cuerpo rígido: traslación, rotación y movimiento en plano general (Hibbeler, 2016). Por su parte, en el estudio cinético se determinan las fuerzas y aceleraciones del cuerpo rígido, donde es necesario comprender el concepto de momento de inercia, que es una medida de la resistencia de un cuerpo a la aceleración angular ($M = I\alpha$); de la misma manera que la masa es una medida de la resistencia del cuerpo a la aceleración (Hibbeler, 2016).

De esta manera, en este informe se analizará un ejercicio basado en la teoría de cuerpos rígidos, que involucra examinar barras con velocidades y aceleraciones angulares determinadas. En las siguientes secciones se analizará más a fondo los resultados obtenidos, donde principalmente se determinó que las aceleraciones angulares teóricas son $\alpha BD = 305.6 rad/s^2$ y $\alpha DE = 736.8 rad/s^2$, cuyos valores experimentales respectivos son $\alpha BD = 304.6123 rad/s^2$ y $\alpha DE = 743.3183 rad/s^2$.

Objetivos

- Aplicar la teoría expuesta de dinámica de cuerpos rígidos, para el análisis de procesos cinéticos y cinemáticos, y así determinar su complejidad y viabilidad a la hora de resolver el problema planteado.
- Determinar de forma teórica y experimental las aceleraciones angulares de dos barras que forman parte de un cuerpo rígido, así como el estudio de sus fuerzas en distintos puntos.
- Implementar el escenario propuesto por en el enunciado en el ambiente SolidWorks que simule escenarios de la vida real e identificar sus soluciones de forma gráfica.



 Analizar los resultados teóricos y experimentales para corroborar los fenómenos dinámicos mediante distintas herramientas y metodologías.

Solución teórica del problema

Descripción del problema seleccionado

Sabiendo que en el instante mostrado en la Fig.1, la barra AB tiene una velocidad angular de $10 \ rad/s$ en el sentido de las agujas del reloj y se está desacelerando a una velocidad de $2 \ rad/s^2$. Determine las aceleraciones angulares de la barra BD y la barra DE.

Por otra parte, determine las fuerzas en E y B si las masas de las barras son de 0.75 Kg/m.

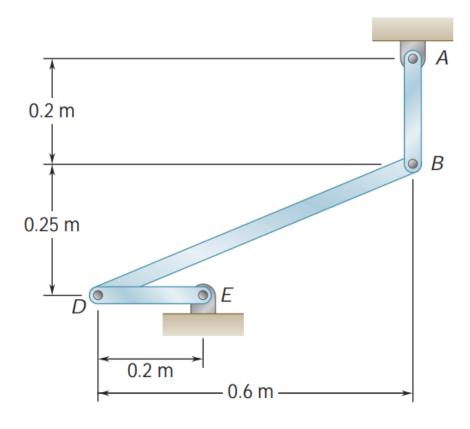


Figure 1: Problema por resolver.



Suposiciones

- Se utilizará un plano de coordenadas determinado para mantener armonía en las direcciones resultantes.
- La fricción entre piezas es despreciable.
- Para determinar las aceleraciones y velocidades no es necesario conocer la masa de las barras.
- No se toma en cuenta el grosor de las barras, por lo que este es tomado de forma arbitraria en el simulador. Preferiblemente se trató de barras delgadas para evitar propagación de errores.
- Las barras AB y DE se encuentran en rotación con respecto a su punto fijo.
- La barra BD está en movimiento de plano general.
- Dada la velocidad angular en la barra AB es posible suponer la dirección de la velocidad en B (-i) y mediante el uso del centro instantáneo se puede suponer la dirección de la velocidad en D (-j).
- Para determinar las aceleraciones se puede apoyar de la estrategia de aceleraciones relativas a un punto de referencia.
- Para el cálculo de las fuerzas en B y E sí se toma la masa de las barras. Se colocó un material representativo: Plain Carbon Steel.

Datos de entrada

- La velocidad angular de la barra AB: 10 rad/s (sentido horario).
- Aceleración angular de la barra AB: $2 rad/s^2$ (sentido antihorario).
- Dimensiones de las barras y su posición para el instante por estudiar.
- La masa de las barras en Kg por unidad de metro.
- Efecto gravitacional:

$$9.81 \frac{m}{e^2}$$



Metodología

Para responder cada apartado del ejercicio, se tomó dos estrategias de solución:

- a) Cinemática de cuerpo rígido.
- **b**) Cinética de cuerpo rígido.

Por un lado, para determinar las aceleraciones angulares BD y DE, se particiona el cuerpo por partes y se realizan los diagramas cinemáticos correspondientes para cada barra. Luego se subdivide el análisis en dos partes, uno para velocidades y otro para aceleraciones. En cuanto a las velocidades en B y D, y las velocidades angulares de la barra BD y DE, se apoya de las ecuaciones para un cuerpo en rotación y las provistas al utilizar el centro instantáneo en un punto estratégico, ya que la barra BD está en MPG. Posteriormente, se determinan las aceleraciones tangenciales, normales y angulares aplicando el tipo de movimiento específico de cada barra. Por último se resuelve el sistema de ecuaciones resultante para determinar las incógnitas de aceleración buscadas.

Por otro lado, para determinar las fuerzas de reacción en los puntos B y E del cuerpo rígido, nuevamente se particiona el sistema en sus barras para analizarlas de forma individual. Al saber que las barras tienen una masa de 0.75 Kg/m, se realiza el cálculo de las masas utilizando su longitud y posteriormente su momento de inercia centroidal. Una vez realizados los diagramas cinéticos de cada barra, y calculada las aceleraciones del centro de masa, se procede a aplicar las ecuaciones de movimiento traslacional y rotacional. A partir de estas ecuaciones se procede a determinar las fuerzas solicitadas.

Cálculos

A continuación se presentan las ecuaciones más relevantes para resolver el ejercicio, obtenidas de (Hibbeler, 2016). Demás detalles se encuentran en la memoria de cálculos y video anexados en las referencias del presente informe.

Para el análisis cinemático:

Se realiza el estudio de las velocidades de cada barra, comenzando con la barra AB debido a que contiene mayor información; luego se procede con las siguientes dos. Se aplica la ecuación 1 para hallar las velocidades con respecto a un punto fijo P, el cual se encuentra en los ejes fijos A y E, y en el centro instantáneo CI producido por la barra BD.

$$v = \omega \times r_P \tag{1}$$

A partir de esta se conoce las velocidades angulares $\omega_{BD} = 8rad/s$ y $\omega_{DE} = 24rad/s$.

Mediante la ecuación 2 se estudia las aceleraciones en cada barra, además, sabiendo que el movimiento plano general de un cuerpo rígido se puede describir como una combinación de traslación y rotación, se aplica un análisis de movimiento relativo con las ecuaciones 3 y 4. Donde B es el punto en análisis y A el punto de referencia.

$$a = a_t + a_n = \alpha \times r - \omega^2 \cdot r \tag{2}$$

$$v_B = v_A + v_{B/A} \tag{3}$$

$$a_B = a_A + (a_{B/A})_t + (a_{B/A})_n \tag{4}$$

De estas se determinan las aceleraciones angulares $\alpha BD = 305.6 rad/s^2$ y $\alpha DE = 736.8 rad/s^2$. Además, a partir de el mismo análisis anterior, se determinó la aceleración gravitacional de cada barra.

Para el análisis cinético:

Se realiza el estudio de las fuerzas reactivas en cada barra para determinar mediante las ecuaciones de fuerza y momento, las componentes de fuerzas de B y E, así como su magnitud.

Para determinar la masa de cada barra se aplica la ecuación 5, donde L es su longitud.

$$m = 0.75 \cdot L \tag{5}$$

El Momento de Inercia Centroidal para las barras uniformes se calcula con la ecuación 6.



$$I_G = \frac{1}{12} \cdot m \cdot L^2 \tag{6}$$

Cuando se trata de aplicar suma de momentos en un punto distinto al centro de gravedad, se aplica el Teorema de Ejes Paralelos indicado en la ecuación 7.

$$I = I_G + m \cdot d^2 \tag{7}$$

Una vez conocida la masa y los momentos de incercia, se aplica las ecuaciones 8, 9 y 10.

Ecuaciones de movimiento traslacional:

$$\sum F_x = m(a_G)_x \tag{8}$$

$$\sum F_y = m(a_G)_y \tag{9}$$

Ecuaciones de movimiento rotacional:

$$\sum M_G = I_G \alpha \tag{10}$$

Con respecto a un punto distinto al centro de gravedad se aplica el concepto de momentos cinéticos, resumido en la ecuación 11.

$$\sum M_P = -\bar{y} \cdot m(a_G)_x + \bar{x} \cdot m(a_G)_y + I_G \alpha \tag{11}$$

Para la aceleración gravitacional, para el caso de movimiento rotacional sobre un eje fijo, se aplica el concepto de ejes normales (12) y tangenciales (13). En la barra en M.P.G se utilizan las componentes x y y de a_G .

Aceleración normal:

$$(a_G)_n = \omega^2 \cdot r_G \tag{12}$$

Aceleración tangencial:

$$(a_G)_t = \alpha \cdot r_G \tag{13}$$

Donde r_G es indica la distancia entre el punto de medición hasta el centro de gravedad.

De este modo, se encontró las fuerzas solicitadas cuyas magnitudes son B=32.89N y E=16.86N.



Resultados

Los resultados teóricos obtenidos fueron:

- La aceleración angular de la barra BD equivale a 305.6 rad/s^2 .
- La aceleración angular de la barra DE equivale a 736.8 rad/s^2 .
- Las fuerzas en B corresponden a: Bx = 0.02 N, By = 32.894 N. En magnitud se trata de 32.89 N.
- Las fuerzas en E corresponden a: Ex = 2.0045 N, Ey = 16.744 N. En magnitud se trata de 16.86 N.

Validación del problema

Descripción

La validación del problema planteado se realizó en SolidWorks con el fin de utilizar un método alternativo en la solución. Este consiste en recrear el modelo CAD solicitado, incluyendo las condiciones del problema y las suposiciones necesarias para obtener el resultado más acertado posible.

Explicación

Para resolver el ejercicio propuesto, se realizó el diseño de cuatro elementos: tres barras y un soporte que sirve como punto fijo en dos partes del sistema (A y E). Como indica el enunciado, cada barra tiene una longitud específica debido a que es un parámetro importante en el cálculo. En cambio su ancho y grosor se seleccionaron de forma arbitraria.

Además, para el análisis cinemático no se requiere conocer las masas, sin embargo, para el estudio cinético sí es prescindible. Se seleccionó el material Plain Carbon Steel de forma representativa y se le asignó un valor de masa a cada barra según la relación mostrada en la ecuación 5. Esto se muestra en las Figuras 2, 3 y 4.

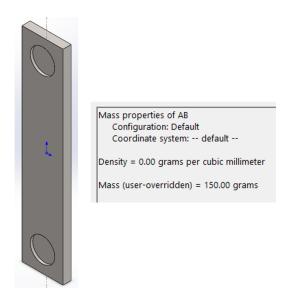


Figure 2: Diseño pieza AB.

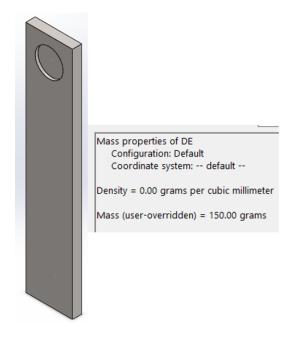


Figure 3: Diseño pieza DE.

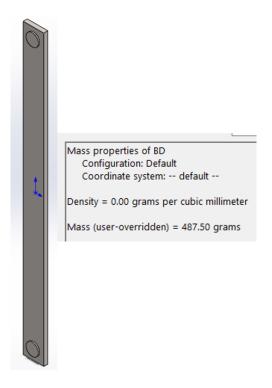


Figure 4: Diseño pieza BD.

Los soportes para las barras en A y en E también se colocaron de forma estética, puesto que no son relevantes en los resultados (Figura 5).

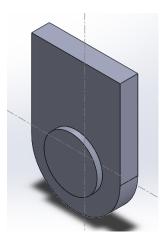


Figure 5: Diseño de soporte fijo.



Seguidamente, se hizo el ensamble de todas las piezas siguiendo las especificaciones geométricas del enunciado, Figura 6.

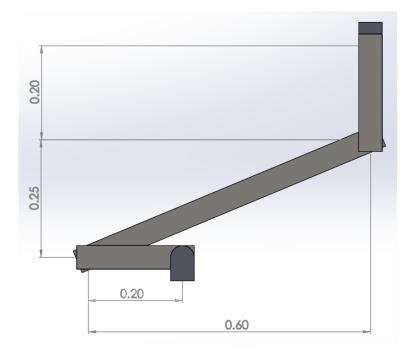


Figure 6: Ensamble.

Se utilizó la extensión SolidWorks Motion para realizar el análisis de movimiento del cuerpo. En este se agregaron dos motores en la barra AB, uno con sentido horario y valor de $10 \ rad/s$ y otro con sentido antihorario con valor de $2 \ rad/s^2$, Figuras 7 y 8.



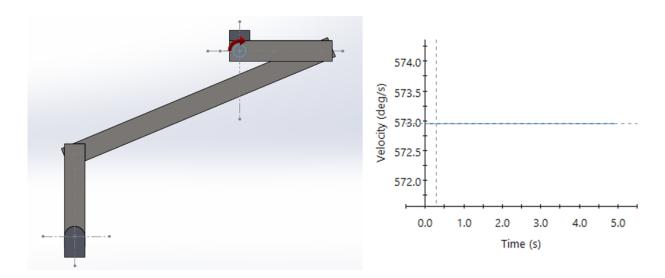


Figure 7: Modelado de la velociad angular en AB.

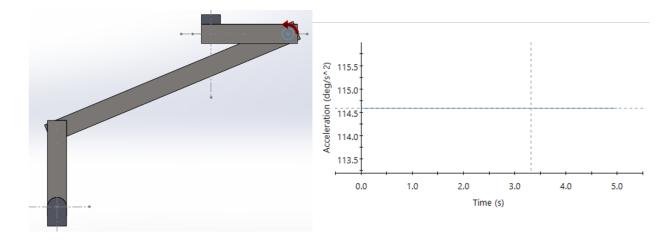


Figure 8: Modelado de la aceleración en AB.



También se agregó el efecto gravitacional en el eje y con una magnitud de $9.81 \ m/s^2$. Además, se aplicó el sistema metro / kilogramo / segundo (Figura 9).

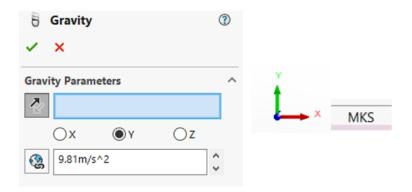


Figure 9: Gravedad y sistemas de medición, coordenadas.

Por último, se procedió a realizar la simulación para analizar de forma gráfica los resultados experimentales y compararlos con el cálculo teórico. Se inició el movimiento en la posición inicial de la Figura 10 y se concluyó en la posición iniciada en la Figura 11.

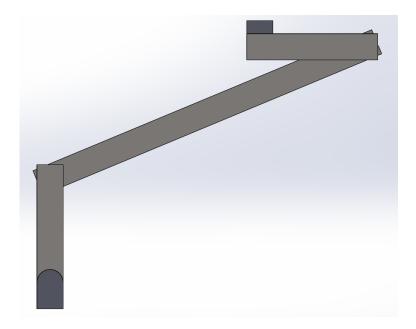


Figure 10: Posición inicial del sistema para el análisis de movimiento.



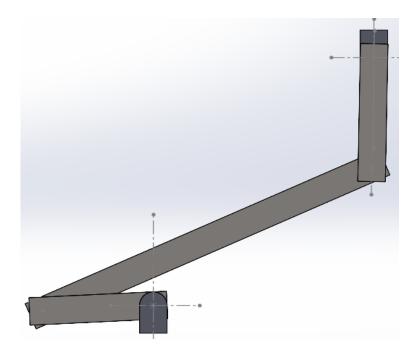


Figure 11: Posición final del sistema para el análisis de movimiento.

Debido a la configuración de los motores en SolidWorks, se colocó su intervención en tiempos específicos para obtener un modelado congruente, Figuras 12 y 13.

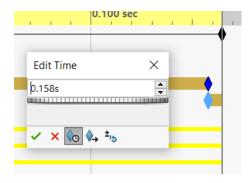


Figure 12: Tiempo donde termina el motor de velocidad y se aplica el motor de aceleración.

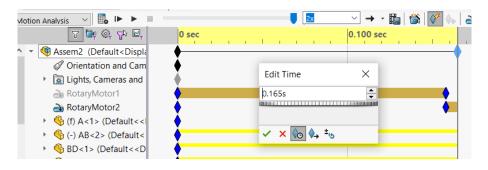


Figure 13: Tiempo establecido para el análisis.

Resultados de validación

Una vez realizada la simulación, se obtienen dos gráficas relevantes, presentadas en las Figuras 14 y 15. La primera corresponde a la aceleración angular de la barra BD y la segunda a la aceleración angular de la barra DE. Ambos casos se dan en grados por unidad de tiempo, y se requiere hacer la conversión a radianes a partir de la ecuación 14.

$$1^o = \frac{\pi}{180} rad \tag{14}$$

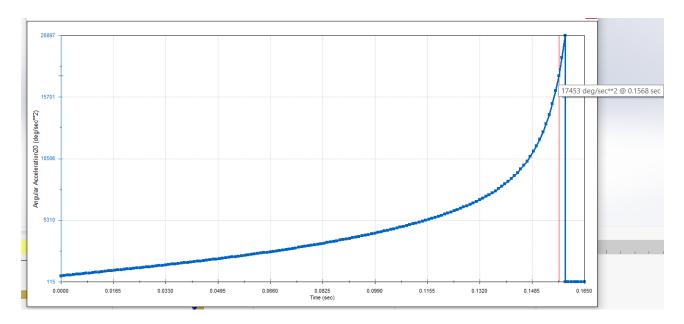


Figure 14: Aceleración angular BD vs tiempo.



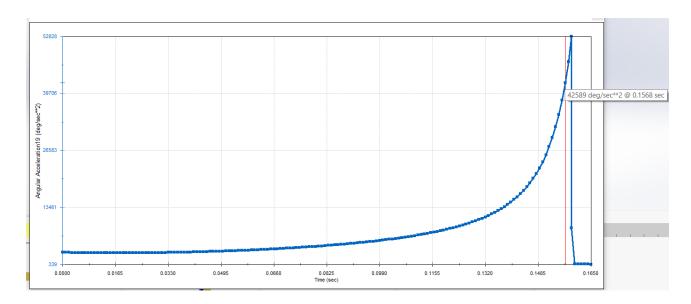


Figure 15: Aceleración angular DE vs tiempo.

Como se muestra, se realizó el análisis en el tiempo 0.1568 s, debido a que en este instante, la barra AB está en la posición vertical especificada en el problema. Para esto se realizó el barrido de muestras desde la posición inicial hasta la final como se presentó anteriormente en las Figuras 10 y 11. Sabiendo esto, se determinó el tiempo a partir del gráfico de desplazamiento de AB en función del tiempo justamente cuando ocurre un desplazamiento de 90° (Figura 16).

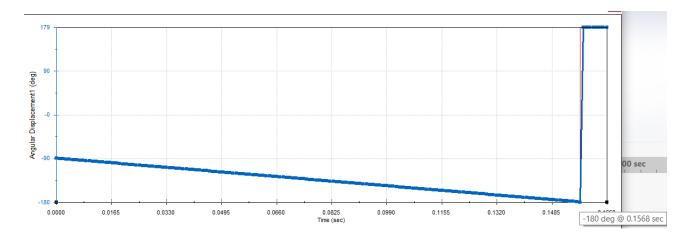


Figure 16: Desplazamiento de AB en función del tiempo.



A modo resumen, se tabuló cada medición en las Tablas 1 y 2.

Table 1: Aceleraciones angulares BD y DE en grados.

αBD experimental $(^o/s^2)$	17 453
αDE experimental ($^{o}/s^{2}$)	42 589

Table 2: Aceleraciones angulares BD y DE en radianes.

αBD experimental (rad/s^2)	
αDE experimental (rad/s^2)	743.3183

Análisis de resultados

Comparación

En las siguientes tablas se tabuló los resultados más relevantes del proyecto, tanto teóricos como experimentales, que serán analizados en próximas secciones. Primero, las Tablas 3 y 4 presentan los resultados ya convertidos en radianes de las aceleraciones angulares y sus porcentajes de error de αBD y αDE con respecto al valor teórico respectivamente.

Table 3: Resultados obtenidos.		
αBD teórica (rad/s^2)	305.6	
αBD experimental (rad/s^2)	304.6123	
Porcentaje de error αBD (%)	0.32	

Table 4: Resultados obtenidos.		
αDE teórica (rad/s^2)	736.8	
αDE experimental (rad/s^2)	743.3183	
Porcentaje de error αDE (%)	0.885	



Segundo, las Tablas 5 y 6 están relacionadas a los resultados de las fuerzas en los puntos B y E.

Table 5: Resultados de fuerzas obtenidos.

FBx teórica (N)	0.02
FBy teórica (N)	32.894
FEx teórica (N)	2.0045
FEy teórica (N)	16.744

Table 6: Resultados de fuerzas obtenidos.

FB teórica (N)	32.89
FE teórica (N)	16.86
FB experimental (N)	N/A
FE experimental (N)	N/A
Porcentaje de error (%)	N/A

Análisis

A partir de cinemática, se realizaron los cálculos para obtener las aceleraciones angulares en las piezas BD y DE. Al analizar las Tabla de resultados 3 y 4, se puede notar que se logró comprobar con alto grado de exactitud al comparar con las aceleraciones obtenidas en SolidWorks. Esto debido a que el porcentaje de error entre αBD y αDE experimental y teórica son inferiores al 1%, aspecto satisfactorio. No obstante, a partir de cinética, no se logró obtener mediciones experimentales significativas. Como se observa en la Tabla 6, en estos apartados se colocó N/A, aspecto que se analizará más adelante.

Primeramente, en cuanto a la implementación en el software, esta tuvo sus utilidades y sus puntos por mejorar. Por un lado, para obtener las aceleraciones en cada barra, se tuvo que modelar el cuerpo rígido para que en el punto mostrado en el enunciado, AB tuviera una velocidad angular de $10 \ rad/s$ en sentido horario y una desaceleración de $2 \ rad/s^2$. Dado que el objetivo principal es un análisis dinámico y se sabe que este se realiza en instantes específicos; es decir, los datos de entrada conocidos son en el momento exacto ya mencionado por enunciado, y no se sabe con totalidad si estos varían o se mantienen en otras partes del desplazamiento de las barras.

Dicho esto, se hizo una suposición, la cual fue iniciar el análisis de movimiento en la posición horizontal mostrada en la Figura 10 y hacer un barrido en el tiempo hasta alcanzar los 90 grados. Se sabe que esto se debe realizar para que SolidWorks realice las gráficas correspondientes, y se encontró que el tiempo donde ocurre esto es cuando t=0.1569s.



Una vez estudiados los gráficos de aceleraciones angulares αBD y αDE , y encontrar el punto en la gráfica para el tiempo escogido, se determinó que los resultados son congruentes con los valores teóricos, como se tabuló en las Tablas 3 y 4, cuyos porcentajes de error indican que los valores experimentales tienen confiabilidad.

No obstante, las fuentes de propagación de error son varias. Una se trata del análisis gráfico, que según la persona que esté midiendo puede variar. A pesar de esto, el resultado se encuentra dentro de un rango congruente, por lo que los resultados se consideran válidos. Otro se trata de la incertidumbre causada por la configuración del software como tal, quien realiza estudios de cuerpos rígidos según las condiciones planteadas por el operador del programa en el computador, entre ellas está la cantidad de muestras por segundo y los tiempos de aplicación. En este caso, se decidió aplicar los motores como se indicó en la Figuras 7 y 8 que luego de prueba y error se ajustaron lo más posible a las condiciones iniciales del ejercicio; también se escogió medir 1000 cuadros por segundo durante el análisis de movimiento. Donde se sabe que entre menor cantidad de cuadros, menos puntos de medición y menor es la precisión del gráfico.

Además, a pesar de haber colocado la restricción del desplazamiento de la barra AB, esta no se cumplió, por lo cual se ajustó el tiempo final hasta un instante después de alcanzar los 90 grados como se observa en la Figura 11, y se colocó el punto de medición aproximadamente cuando AB está totalmente vertical. Esto pudo ser parte de la incertidumbre experimental.

Por otra parte, al haber concluido el ensamble y haber colocado las relaciones necesarias, se observó que había un punto donde las barras se trababan y el giro era forzado. Como se observa en la Figura 17, el estudio no requiere alcanzar hasta ese punto, por lo cual se decidió restringir el movimiento, pero es un indicador de que aún hay posibilidad de mejora del diseño.

Una vez finalizado el estudio cinemático, se procedió con la parte cinética del cuerpo rígido. Por un lado, se prevé que el cálculo teórico fue realizado acertadamente, por lo que se cumple lo relacionado con la implementación de distintos métodos teóricos de dinámica para determinar puntos de interés del cuerpo rígido. Siendo los resultados los presentados en la Tabla 5 con magnitudes de 32.89 N para B y 16.86 N para E. No obstante, cuando se trató de llevar a la práctica, hubo dificultades, de lo cual se concluye que para cumplir a cabo proyectos ingenieriles y funcionales, no basta solo con el concepto matemático ni las leyes físicas correctas, sino de todo una estructuración para implementarlo en la vida real.



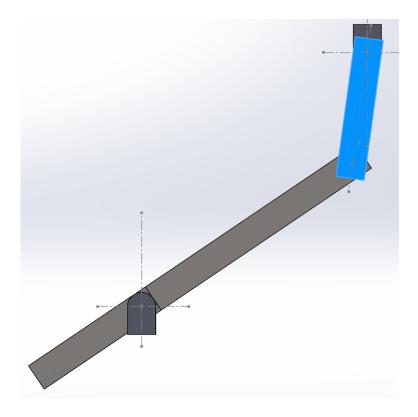


Figure 17: Posición problemática del ensamble.

En este caso, para determinar las fuerzas en B y E se encontró con restricciones en el diseño propuesto, que no permitieron al simulador graficar correctamente. La Figura 18 muestra parte de la etapa experimental para encontrar las fuerzas, demás representaciones visuales se muestran en la memoria de cálculo (Naranjo, 2021b). En esta etapa se diseñó varios ensambles (Figura 19), con distintas relaciones y geometría de las piezas; sin embargo, ninguna fue exitosa para graficar fuerzas, esta gráfica permaneció en cero (Figura 20).

Por lo cual, se supuso que se trataba de un error de diseño en el modelo CAD, lo cual se comprobó al implementar una pieza bajo condiciones aleatorias, y lograr medir la fuerza de reacción correctamente en su punto fijo, Figura 21.



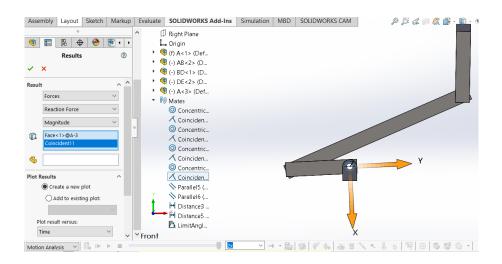


Figure 18: Aplicación experimental de las fuerzas.

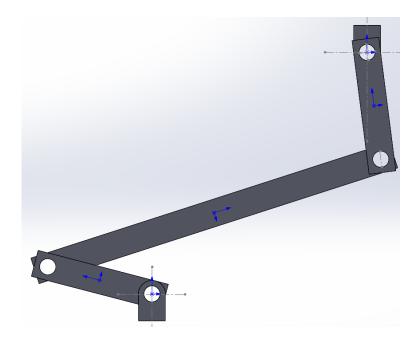


Figure 19: Diseño alternativo del problema.



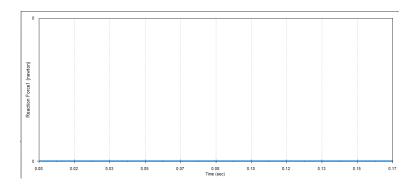


Figure 20: Resultados de fuerzas.

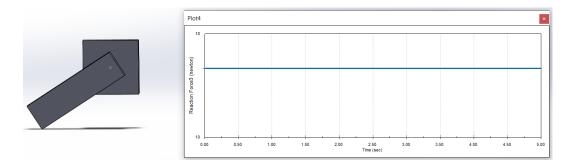


Figure 21: Estudio de fuerzas de una pieza particular.

Para finalizar, en ambos casos hubo dificultades, por lo que se procede a analizar el error humano. Ciertamente, el uso de SolidWorks puede ser intuitivo de alguna forma, la colocación de piezas, el dimensionamiento y uso de materiales; pero requiere de mayor nivel de conocimiento en otras áreas. Se trata de un software completo, que requiere de experiencia para hacer estudios estáticos, de frecuencia, térmicos, lineales, no lineales, dinámicos, de caída; entre otros. A modo individual, el nivel de conocimiento en SolidWorks durante el periodo de realización del proyecto fue básico y se trata del primer curso donde se aplicó SolidWorks Motion. Por lo que, por un lado ha sido conocimiento adquirido durante cada etapa de experimentación, pero por otro lado resulta en una desventaja al tener que presentar resultados en tiempos definidos. A pesar de las condiciones, se concluye que el trabajo resultó satisfactorio, además de que funge como punto de referencia para retomar el proyecto y hacer mejoras porque al final del día de eso se trata el ciclo de la experimentación: recolectar datos, analizarlos, mejorar y repetir.



Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones más relevantes del proyecto.

- Se aplicó los conceptos teóricos de dinámica de cuerpos rígidos, donde se determinó mediante principios cinéticos y cinemáticos las aceleraciones y fuerzas solicitadas por el enunciado del problema. Estas sirvieron como base teórica para la comprobación experimental.
- Se determinó experimentalmente las aceleraciones angulares de dos barras que componen un cuerpo rígido, En cuanto a la viga BD, se obtuvo una aceleración angular de $304.6123 \ rad/s^2$, para un porcentaje de error de 0.32%. En cuanto a la viga DE, se obtuvo una aceleración angular de $743.3183 \ rad/s^2$ m, para un porcentaje de error de 0.885%. Lo cual permite concluir que se realizó una comprobación acertada.
- Se implementó el escenario propuesto por en el enunciado, en un modelado 3D que facilitó simular múltiples variables de una manera similar a la vida real, sirviendo como herramienta de validación. En ambos casos de aceleración, fue posible el análisis gráfico a partir de SolidWorks Motion, sin embargo, para las fuerzas experimentales hubo dificultades técnicas.
- Se determinó que el método de validación tiene puntos por mejorar en cuanto a la configuración del SolidWorks Motion, la cual puede progresar en precisión y resultados, sin embargo su aplicación quedó fuera del alcance de este proyecto. Queda como punto de partida hacia mejores diseños experimentales, enriqueciendo el uso correcto de los principios de investigación al documentar pertinentemente cada detalle del proceso.

Recomendaciones

Como parte de los objetivos del proyecto, se tuvo el recrear el modelo teórico planteado en el enunciado en un ambiente más cercano a la vida real, por lo que hay puntos identificados que en futuros proyectos pueden ser evitados.

El presente proyecto se trató del uso de herramientas externas para comprobar experimentalmente el planteamiento teórico propuesto y así sustentar el análisis dinámico de un sistema. Para esta etapa de experimentación, es indispensable un ambiente de simulación / toma de datos que se adapte a las condiciones iniciales del enunciado por recrear.

De este modo, el uso de un método de validación factible permite obtener resultados congruentes, en otras palabras, según las condiciones del problema puede que un método de validación sea mejor que otro. En este caso se dispuso de maqueta, CAD y programación, y se recomienda analizar detalladamente qué se



puede alcanzar con cada opción y en qué método se tiene mayor facilidad de uso. Esto para disminuir el error durante la experimentación y que la incertidumbre tenga su peso en los resultados y no en quién realiza el experimento.

Referencias

Hibbeler, R. (2016). Ingeniería Mecánica: Dinámica. (Vol. 14). Pearson Education.

Naranjo. (2021a, noviembre). Proyecto de Dinámica 2 [YouTube]. https://youtu.be/0tu-yM6yttY

Naranjo, E. (2021b, noviembre). Memoria de Cálculo Proyecto 2 [PDF].