Singular Value Decomposition (SVD) y Dynamic Mode Decomposition (DMD)

Juan Diego Naranjo

May 20, 2025

Outline

¿Qué es el SVD?

Teorema 1.1: Descomposición SVD

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, existen matrices ortogonales $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ y $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y una matriz diagonal $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tales que

$$A = U\Sigma V^T$$

Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ una matriz con rango $\operatorname{Rank}(A) = r$.

- $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ valores propios de $A^T A$ ordenados de forma decreciente. $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ valores singulares.
- $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores propios de $A^T A$
- $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A\mathbf{v}_i \implies A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$

$$V = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad U = \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_m \\ | & & | \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$$

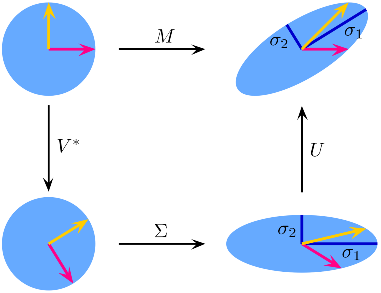
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A = U \Sigma V^T$$

Interpretación

Geométricamente, aplicar una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se puede entender como una secuencia de tres transformaciones:

1. Primero, $V^T\mathbf{x}$ reexpresa el vector $\mathbf{x}$ en la base ortonormal formada por los vectores propios de A^TA. Es un **cambio de base** en el dominio.
2. Luego, Σ actúa sobre el resultado, **escalando** las coordenadas a lo largo de direcciones específicas. Esta operación representa un **estiramiento o compresión** de cada componente por su valor singular σ_i.
3. Finalmente, U aplica una **rotación o reflexión** que alinea el resultado con la base ortonormal del codominio.



$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^*$$

Figure: Ilustración del efecto de una matriz M de 2×2 sobre el disco unitario y la base canónica de $\mathbb{R}^2$

Pseudoinversa de Moore-Penrose

Definición 1.1: Pseudoinversa de Moore-Penrose

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ con descomposición SVD $A = U\Sigma V^T$, su pseudoinversa está dada por

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$$

donde $\Sigma^\dagger \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ es la matriz diagonal que resulta de tomar los recíprocos de los valores singulares no nulos σ_i en Σ y trasponiendo.

Mínimos Cuadrados

Dado un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ se cumple que

$$\|Ay - b\|_2 \leq \|Ax - b\|$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, donde $y = A^\dagger b$. Este resultado se puede extender a sistemas con varios b. Si $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ entonces

$$\|AY - B\|_F \leq \|AX - B\|_F$$

para todo $X \in \mathcal{M}_{n,p}$, donde $Y = A^\dagger B$.

SVD Truncado y Aproximación de Bajo Rango

Teorema 1.2: Eckart-Young

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ con $A = U\Sigma V^T$ y $\operatorname{Rank}(A) = r$. Si $1 \le k \le r$ y

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T \quad \text{(SVD)} \quad A_k := \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j^T$$

Entonces $\|A - A_k\| \le \|A - B\|$ para toda $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ con $\operatorname{Rank}(B) = k$

¿Qué es el DMD?

- La descomposición en modos dinámicos (DMD) es una técnica de reducción de orden que permite descubrir estructuras/patrones de baja dimensión a partir de datos de alta dimensión.
- Originó en la comunidad de dinámica de fluidos como una técnica para descomponer flujos complejos en una representación simple basada en estructuras espaciotemporales coherentes.
- El éxito de DMD se debe a que es un método basado en datos y libre de ecuaciones, capaz de descomponer con precisión un sistema complejo en estructuras espaciotemporales coherentes, lo que permite su uso en predicciones a corto plazo y en control de sistemas.

El método DMD se basa en la recolección de datos $\mathbf{x}_k$ que representan el estado de un sistema dinámico en diferentes momentos t_k, donde $k = 1, 2, \dots, m$. Algorítmicamente, el DMD consiste en una regresión lineal de los datos sobre una dinámica local:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k,$$

donde la matriz A se elige para minimizar la norma

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - A\mathbf{x}_k\|_2$$

sobre $k = 1, 2, 3, \dots, m-1$.

Arquitectura

Dado un sistema dinámico

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, t; \mu)$$

buscamos aproximar

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, t; \mu) \quad \rightsquigarrow \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{A}\mathbf{x}$$

Si tenemos la condición inicial $\mathbf{x}(0)$, la solución está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k \exp(\omega_k\, t) b_k = \mathbf{\Phi} \exp(\mathbf{\Omega} t)\mathbf{b}$$

,

donde ϕ_k y ω_k son los vectores y valores propios de la matrix $\mathcal{A}$, y los coeficientes b_k son las coordenadas de $\mathbf{x}(0)$ en la base generada por los vectores propios.

Tenemos m observaciones/datos $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$. Definimos las matrices

$$X = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_{m-1} \\ | & & | \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} | & & | \\ x_2 & \dots & x_m \\ | & & | \end{bmatrix}$$

Buscamos una matriz A que nos lleve de un estado al siguiente con el menor error posible.

$$A\mathbf{x}_k \approx \mathbf{x}_{k+1} \equiv AX \approx X'$$

Minimizamos $\|X' - AX\|_F$ con

$$AX = X' \implies A = X'X^\dagger = X'V\Sigma^\dagger U^T$$

Algoritmo DMD

Teniendo las matrices de estado X y X' tomamos $k \leq r = \text{Rank}(X)$.

1. (Descomposición SVD truncada)
$$X = U_k \Sigma_k^{\dagger} V_k^T$$
2. (Transformación lineal de semejanza)
$$\tilde{A} = U_k^T X' V_k \Sigma^{\dagger}$$
3. (Autovectores y autovalores)
$$\tilde{A} W = W \Lambda$$
4. (Modos)
$$\Phi = X' V \Sigma^{\dagger} W$$

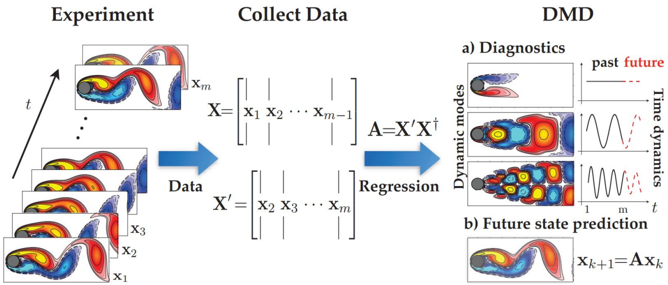


Figure: Diagrama del metodo DMD

Interpretación

La descomposición SVD truncada de X se puede entender dinámicamente como:

- U_k contiene las direcciones principales (modos espaciales),
- Σ_k contiene los valores singulares (energía de cada modo),
- V_k describe la evolución temporal de los modos.

Proyectamos los datos a un subespacio de dimensión reducida que captura la estructura esencial del sistema, eliminando ruido y redundancia. $\tilde{A}$ actúa en el subespacio generado por los modos dominantes. Esta matriz tiene una dimensión mucho menor que A, pero preserva su dinámica principal.

Diagonalizamos $\tilde{A}$ para obtener:

- Λ: matriz diagonal con los autovalores (frecuencias y tasas de crecimiento/decaimiento),
- W: matriz de autovectores en el espacio reducido.

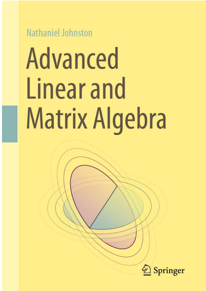
Estos representan las frecuencias dominantes y cómo evolucionan los modos principales en el tiempo. Las columnas de Φ, llamadas modos dinámicos, son los vectores propios de A asociados a los valores propios en Λ. Los primeros valores y vectores propios representan patrones en la dinamica del modelo.

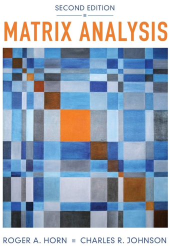
Usos y aplicaciones

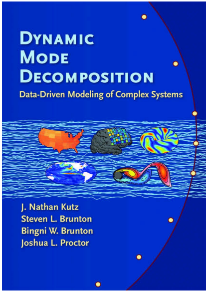
El DMD tiene varios usos e interpretaciones. Generalmente, permite realizar tres tareas principales:

1. **Diagnóstico.** Extrae características espaciotemporales clave y de bajo rango de sistemas de alta dimensión, lo que permite obtener resultados físicamente interpretables en términos de estructuras espaciales y sus respuestas temporales asociadas.
2. **Estimación del estado y predicción futura.** Construir modelos dinámicos utilizando las estructuras dominantes en los datos para estimar el estado futuro del sistema. Este enfoque generativo se ha utilizado con éxito en diversas aplicaciones para la predicción futura de sistemas dinámicos.
3. **Control.** Dado que se utiliza un modelo lineal para predecir un sistema no lineal, la precisión de la predicción solo se mantiene durante una ventana de tiempo limitada. Sin embargo, si esta ventana es suficiente para tomar una decisión de control eficaz, es posible influir en el estado futuro del sistema.

Bibliografía







- Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2018) Matrix analysis. New York: Cambridge University Press.
- Johnston, N. (2021) Advanced linear and matrix algebra. Cham, Cham: Springer International Publishing Springer.
- Kutz, N.J. et al. (2016) Dynamic mode decomposition: Data-driven modeling of Complex Systems. Philadelphia (Pa.): Society for industrial and applied mathematics.