

Congreso

1 Grafos

Un grafo es una tupla $G = (V, E)$, donde V es un conjunto no vacío de elementos llamados vértices (o nodos) y E es un conjunto de pares de vértices, llamados aristas.

Un grafo $G = (V, E)$ es dirigido si $E \subseteq V \times V$

Un grafo ponderado es una tripleta $G = (V, E, \omega)$, donde ω es una función $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea G un grafo, donde $G(V) = \{v_1, \dots, v_n\}$. La matriz de adyacencia de G es una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de $n \times n$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Si G es un grafo ponderado, su matriz de adyacencia ponderada está dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} \omega(v_i, v_j), & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

2 Energía

Sea $G = (V, E)$ un grafo con matriz de adyacencia $A(G)$. Decimos que el polinomio característico de G es el polinomio característico de su matriz de adyacencia $A(G)$ dado por $\det(xI_n - A(G))$, donde I_n es la matriz identidad de orden n . Denotamos al polinomio característico de G con $\phi(G, x)$. Los autovalores del grafo G son los autovalores de su matriz de adyacencia $A(G)$. Dado que $A(G)$ es una matriz simétrica, sus autovalores son reales. Llamamos espectro de G al conjunto de autovalores del grafo y lo denotamos por $\text{Spec}(G)$.

$$\text{Spec}(G) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \phi(G, \lambda) = 0\}$$

Sea G un grafo con n vértices. Definimos la energía de G como

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(G) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(G)} |\lambda|$$

El grado de un vértice es el número de vértices conectados a él y lo denotamos $\deg(v)$. Dado un grafo G con $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ definimos $\Delta(G)$ como la matriz diagonal con entradas

$$\delta_{ii} = \deg(v_i)$$

La Matriz Laplaciana de G , denotada $L(G)$, está definida como

$$L(G) = \Delta(G) - A(G)$$

Sea G un grafo con $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$ y $S = \text{Spec}(L(G) - \frac{2m}{n} I_n)$. La energía Laplaciana de G , denotada \mathcal{E}_L , está dada por

$$\mathcal{E}_L = \sum_{\lambda \in S} |\lambda|$$

Una **red neuronal** es un modelo computacional inspirado en el cerebro humano, utilizado en aprendizaje automático e inteligencia artificial para reconocer patrones y tomar decisiones. Consiste en capas de unidades interconectadas llamadas **neuronas**, que procesan datos de entrada y transmiten información a través de conexiones ponderadas.

Relación con la Teoría de Grafos

Una red neuronal puede verse como un **grafo dirigido**, donde:

- **Nodos (vértices)** representan las neuronas.
- **Aristas dirigidas** representan las conexiones ponderadas entre neuronas.

La estructura de una red neuronal se relaciona con la teoría de grafos en varios aspectos:

1. **Redes Feedforward:** Forman un **grafo dirigido acíclico (DAG)** donde la información fluye en una sola dirección, desde la entrada hasta la salida, sin ciclos.
2. **Redes Neuronales Recurrentes (RNNs):** Introducen ciclos, haciendo que el grafo sea **cíclico**, lo que permite la memoria y dependencias temporales en los datos.
3. **Redes Neuronales de Grafos (GNNs):** Utilizan estructuras de **grafos** como entrada, aprendiendo patrones sobre los nodos y aristas, lo que es útil para redes sociales, estructuras moleculares, entre otros.