DETERMINAREA DISTRIBUTIEI CAMPULUI ELECTROSTATIC

1. Chestiuni teoretice

Analiza sistemului de ecuații ale câmpului electromagnetic din punct de vedere al coerenței, completitudinii şi necontradicției, se face cu ajutorul teoremei fundamentale a câmpurilor de vectori.

Natura câmpurilor de vectori se studiază cu ajutorul a două mărimi *globale*, *integrala de linie şi integrala de suprafață ale vectorului câmp* cărora le corespund *mărimile locale* (diferențiale, punctiforme*) rotorul şi divergența* vectorului câmp. Aceste mărimi (globale sau locale) intervin în formularea teoremei fundamentale a câmpurilor de vectori. Fără a particulariza pentru câmpul electromagnetic “ teorema fundamentală a câmpurilor vectoriale”, să considerăm un câmp vectorial caracterizat de vectorul $\overline{\mathrm{G}}$.În conformitate cu această teoremă vectorul câmp $\overline{\mathrm{G}}$ este unic determinat în fiecare punct din domeniul V_Σ mărginit de suprafața închisă Σ, dacă se cunosc:

a) – în formulare integrală (globală):

1) *circulația vectorului* $\overline{\mathrm{G}}$ în lungul oricărei curbe închise Γ:

$$\oint_\Gamma \overline{G}d\overline{s} = \mathrm{C}$$

2) *fluxul vectorului* $\overline{\mathrm{G}}$ prin orice suprafață închisă Σ care poate fi trasată în câmp

$$\iint_\Sigma \overline{G}d\overline{A} = \Psi$$

b) – ***în formulare diferențială (locală):***

1’) *rotorul vectorului* $rot\overline{G}$

2’) *divergența vectorului* $div\overline{\mathrm{G}}$ în fiecare punct din domeniul V_Σ

c) ***condițiile în fiecare punct de pe frontiera*** Σ a domeniului V_Σ (indiferent de formularea problemei, integrală sau diferențială), ce se exprimă:

- fie prin componenta normală $\mathrm{G_n} = \overline{\mathrm{n}} \cdot \vec{G}$
- fie prin componenta tangențială . $G_t = \vec{n} \times \vec{G}$

d) ***condițiile inițiale*** in problemele regimului dinamic.

Problema determinării distribuției câmpului electric poate fi explicata cu ajutorul teoriei câmpurilor vectoriale întrucât mărimile ce descriu câmpul sunt vectorii inducție **D** si intensitate **E** fiind necesar sa cunoaştem sursele câmpului

rot E =0

div D $=\rho_v$ completate cu relatia de dependenta $D=\varepsilon E$ unde permitivitatea electrica $\varepsilon=\varepsilon(E)$ este neliniară dependenta de material

Cunoaşterea completa si determinarea unica a câmpului este posibila prin definirea *condițiilor la limita si inițiale pe intreg domeniul de calcul*. Aceste condiții la limita sunt obtinute din particularizarea relatiilor surselor pe suprafetele se separatie astfel:

div$_S$ D =ρ_s implica conservarea componentelor normale ale inducției electrice pe suprafețele de discontinuitate ce nu conțin sarcini .

rot $_S$E = 0 conduce la conservarea componentelor tangentiale ale intensitatii campului electric pe suprafetele de discontinuitate.

Ecuațiile ce descriu câmpul fiind ecuații diferențiale ,matematic pentru rezolvare trebuiesc cunoscute derivatele de ordin inferior inclusiv valorile inițiale ale mărimilor Soluția intr-un punct din domeniul de calcul este functie de valoarea anterioara a marimii in punctul considerat dar si de contribuțiile in acel punct a tuturor surselor din domeniul de calcul.

Restrângerea numărului de necunoscute in domeniul de calcul este posibila prin utilizarea potențialului scalar V ce satisface ecuația diferențiala de ordin II:

div[-(ε)***grad(**V)]=ρ_v completata cu conditia la limita **div$_S$[**(ε)***grad$_S$(**V)**]**=ρ_S ce exprima teorema refractiei liniilor de camp electric pe suprafetele de separatie.In acest mod se obtine o singura ecuație ce trebuie solutionată pe intreg domeniu de calcul. Domeniul de calcul poate fi descompus intr-o colecție finita de subdomenii denumite **regiuni** in care trebuie soluționată ecuația de ordinul II.Intrucat ecuația conține necunoscuta V cu mărimile cunoscute care sunt proprietățile de material si densitatea de sarcină ρ.

Alegerea regiunilor se face atât după existenta sau inexistenta sursei câmpului cât si după proprietățile de material. Conform acestor criterii se pot definii mai multe regiuni în secțiunea BOUNDARIES .

In câmp electrostatic potențialul electrodinamic scalar V satisface o ecuație *de tip Poisson* $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ dacă domeniul de analiză conține sarcinii electrice adevărate in interior sau o ecuație de *tip Laplace* $\Delta V = 0$ in domeniile fără sursă .

Ecuațiile de tip Poisson conțin sursa in interior dar fluxul prin orice suprafață închisă se conserva Ecuațiile de tip Laplace nu conțin sarcini in interior iar fluxul prin orice suprafață închisă este nul. Regimurile statice permit definirea relațiilor efect-cauză. Studiul acestor regimuri se face in acord cu teoria acțiunii prin cotiguitate. In cadrul acțiunii prin contiguitate interacțiunile dintre sistemele fizice au proprietatea că *evenimentele dintr-un loc şi la un anumit moment* sunt influențate *de evenimentele ce au avut loc in trecutul imediat(exprimate prin condiții inițiale)* dar şi de vecinătatea imediată (*exprimate prin condiții la limită).*

Descrierea câmpului in regim electrostatic intr-un domeniu finit prin potențialul electric scalar trebuie să tină cont de proprietățile enunțate In acest regim static evenimentele dintr-un loc nu evoluează in timp dar sunt influențate de vecinătatea imediată. *Cunoaşterea şi impunerea condițiilor la limită* rezultă din *prima formulă Green pentru câmpuri de scalari*Dacă Uşi V sunt două câmpuri de scalari definite in domeniul V_Σ, fluxul prin suprafată Σ a vectorului U**grad**V este :

$$\oiint_{\Sigma} U grad V d\vec{A} = \iiint_{V_\Sigma} (U\Delta V + gradU gradV)dV_\Sigma$$

Presupunem U si V că sunt două soluții ce satisfac ecuația de câmp in domeniul V_Σ, $\Delta U = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ cu aceleaşi condiții pe frontieră adică U=V Scalarul diferență U-V in domeniul de analiză satisface *ecuația Laplace* $\Delta(U-V)=0$ *cu condiții pe frontieră nule (U-V)=0*

Prima formulă Green aplicată scalarului diferență U-V conduce la

$$\oiint_{\Sigma} (U-V)grad(U-V)d\vec{A} = \iiint_{V_\Sigma} [(U-V)\Delta(U-V) + grad(U-V)grad(U-V)]dV = 0$$

Concluzia ce se poate desprinde din analiza acestei relații este că in *cazul ecuațiilor de tip Laplace fluxul total prin suprafața Σ este nul.* Acest flux nul a fost obținut prin impunerea pe frontiera domeniului a valorii mărimii scalare *conditie denumită de tip Dirichlet* Totodată, fie că analizăm din prima formulă Green ,fie din definiția unui flux in care mărimea vectorială derivă din gradientul unui potențial $\oiint_{\Sigma}(-gradV)d\vec{A}$, *un flux poate fi nul* pe o suprafață Σ şi dacă **grad**V=0 sau produsul scalar **ngrad**V=0.

Condițiile impuse mărimii scalare pentru această situație se numesc *condiții de tip Neumann*. *(conditie naturala)* Extrapolând rezultatele putem spune că pentru orice combinație liniară $\alpha V + \beta \cdot gradV = 0$ *(condiții de tip Robin)* impusă pe frontiera domeniului fluxul se anulează

2 Exemple de utilizare a soft-ului în determinarea câmpului electrostatic

2.1. *Determinarea intensității câmpului şi a potențialului între două sarcini punctiforme de 1C egale şi opuse , dispuse pe axa Oy la distanța 2d în aer utilizând formula integrală a potențialului electric.*

Potențialul electric într-un punct oarecare al unei sarcini punctiforme este egal cu superpoziția potențialelor produse de fiecare sarcină .Alegând sistemul de coordonate cartezian la jumătatea distanței dintre sarcini potențialul într-un punct oarecare este $U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{x^2+(y+d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+(y-d)^2}}\right)$ respectiv intensitatea câmpului are componentele **E**x=-dU/dx, respectiv **E**y=-dU/dy. Implementarea în PDEase2 a distribuției câmpului electric din zona cuprinsă intre sarcini pe un domeniu Lx pe axa Ox respectiv Ly pe axa Oy cu Ly>2d impune definirea formulei integrale a potențialului electrostatic, a componentelor câmpului ,a domeniului de analiză , poziționarea surselor q şi condițiile pe frontiera domeniului de tip natural (conservarea componentei tangențiale a câmpului ce poate lipsi in declarațiile PDEase) conform programului anexat**:**

Programul de calcul

```
Title "Câmpul între două sarcini egale si opuse "
Select
contours=10  surfacegrid=10 {se selecteaza numarul de linii de contur}
Definitions
Lx=1  Ly=1 d=Ly/2    q=1     {sarcina electrica}
eps0=8.85e-12     c=1/(4*pi*eps0)
U=c*[q/sqrt(x**2+(y+d)**2)-q/sqrt(x**2+(y-d)**2]   {formula potentialului}
Ex=-dx(U)  Ey=-dy(U)       { Componentele campului}
Eabs=sqrt(Ex**2+Ey**2)
small=1e-15
Boundaries
Region 1
start(-Lx,-Ly)  line to (Lx,-Ly) line to (Lx,Ly) line to (-Lx,Ly) line to finish
Plots
contour(Ex)   contour(log10[abs(Ex)+small])
contour(Ey)   contour(log10[abs(Ey)+small])
Contour(Eabs)   contour(log10[abs(Eabs)+small])
Vector(Ex/Eabs,Ey/Eabs) as " Directia campului"
End
```

Se vor studia modificările distribuției câmpului electric la distanță d variabilă si sarcină q redusă (dipol electric)

2.2 *Determinarea intensității câmpului şi a potențialului între plăci metalice de lungime* delx *şi grosime g_y aflate la potențiale +10V şi –10V , dispuse pe axa Ox la distanța d despărțite de un dielectric* **.(Condensatorul plan)**

Armăturile condensatorului plan sunt două plăci metalice identice de arie *A* dispuse paralel la distanța *d* mult mai mică decât dimensiunile armăturilor .Dielectricul liniar, izotrop şi omogen de permitivitate constantă, ocupă domeniul dintre armături. Sarcinile electrice egale şi de semne opuse stabilesc în dielectric un câmp electric care se poate aproxima uniform, cu excepția marginilor armăturilor unde câmpul este neuniform (efect de margine)

Sistemul de coordonate atasat domeniului de calcul este cel cartezian cu centrul la jumătatea distanței dintre armaturi . Intensitatea câmpului electric are componentele Ex=-dU/dx, respectiv Ey=-dU/dy. Ecuația diferențială vectorială ce trebuie rezolvată este ecuația Laplace divgradU=0 Implementarea în PDEase2 a distribuției câmpului electric din zona cuprinsă intre plăci pe un domeniu Lx pe axa Ox respectiv Ly pe axa Oy cu Ly>d impune definirea componentelor câmpului ,a domeniului de analiză , poziționarea plăcilor (surselor) şi condițiile pe frontiera domeniului de tip natural (conservarea componentei tangențiale a câmpului) Se determină totodată inducția electrică în domeniul de analiză cu relațiile Dx=εEx respectiv Dy=εEy şi densitatea de energie w_e=1/2(DE). Permitivitatea relativă a mediului dintre placi se consideră ε_r=7

```
Title   "Condensator plan"
Variables    U
Definitions
  Lx= 1      Ly= 1     delx= 0.5     d= 0.2     gy= 0.2*d
  Ex= -dx(U)        Ey= -dy(U)      Eabs= sqrt(Ex**2+Ey**2)
  eps0= 8.854e-12         U0= 10                    { Potentialul armaturilor }
  eps                                         {se defineste pe regiuni }
  DEx= eps*Ex      DEy= eps*Ey      Dabs= sqrt(DEx**2+DEy**2)
  energy_d= 0.5* Eabs* Dabs                        { densitatea de energie }
  small= 1e-15
Equations
  del2(U)= 0
Boundaries  {regiunile se definesc ori de cate ori se modifica proprietatile de mediu}
  region 1
   eps= eps0                        { Vid }
   start(-Lx,-Ly)  load(U)= 0                        { limita domeniului de calcul }
   line to (Lx,-Ly) to (Lx,Ly)  to (-Lx,Ly) to finish
       start(-delx/2,-d/2)                         { armatura inferioara a condensatorului }
   value(U)= -U0         line to (delx/2,-d/2)
   to (delx/2,-d/2-gy) to (-delx/2,-d/2-gy) to finish
   start(-delx/2,d/2+gy)                         { armatura superioara  a condensatorului
   value(U)= U0        line to (delx/2,d/2+gy)
   to (delx/2,d/2)  to (-delx/2,d/2) to finish
  region 2
  eps= 7.0*eps0                    { dielectric }
   start(-delx/2,-d/2)  line to (delx/2,-d/2)
   to (delx/2,d/2) to (-delx/2,d/2) to finish
Monitors
  contour(U)
Plots
  contour(U)      contour(Ex)       contour(Ey)
```

```
elevation(Ey) from (-Lx,0) to (Lx,0)
elevation(DEy) from (-Lx,0) to (Lx,0)
contour(energy_d)     contour( energy_d) zoom(-delx,-2*d,  2*delx,4*d)
surface(energy_d)
contour(log10(Eabs+ small))      contour(log10( Dabs+ small))
vector(DEx/Dabs, DEy/Dabs) as "Direction of D"
surface(log10( Dabs+ small))
End
```

2.3 Condensatorul cilindric circular. Armăturile condensatorului sunt constituite din doi cilindri coaxiali de lungimi identice l şi de raze r_e si r_j iar dielectricul de permitivitate constantă ε ocupă domeniul dintre armături . Sarcina electrică pozitivă care încarcă armătura interioară stabileşte în dielectric un câmp electric care se poate aproxima radial cu excepția extremităților (efect de capăt).

```
Title  "Condensator Coaxial "
Select   errlim= 1e-4        contours= 10    surfacegrid= 30
Variables   U
Definitions
  rad0= 1e-3      rad2= 10e-3
  Ex= -dx(U)       Ey= -dy(U)      Eabs= sqrt(Ex**2+Ey**2)
  eps0= 8.854e-12        U0= 1.0           { Potentialul cilindru interior}
  eps                              { definit pe regiuni}
  DEx= eps*Ex      DEy= eps*Ey      Dabs= sqrt(DEx**2+DEy**2)
Equations
  dx( -eps* dx(U))+ dy( -eps* dy(U))= 0
Boundaries
  region 1
    eps= 3*eps0       { permitivitatea }
    value(U)= 0       { potentialul}
    start(rad2,0)
    arc to (0,rad2) to (-rad2,0) to (0,-rad2) to finish
    value(U)= U0      { potentialul firului central}
    start(rad0,0)
    arc to (0,-rad0) to (-rad0,0) to (0,rad0) to finish
Monitors
  contour(U) as "Potential Electric"
Plots
  contour(U) as "Potential Electric"   contour(Ex)   contour(Ey)
  elevation(Eabs) from (0,0) to (rad2,0)
  elevation(Dabs) from (0,0) to (rad2,0)
  vector( DEx/Dabs, DEy/Dabs) as "Directia  D"
End
```

Se vor studia modificările distribuției câmpului electric si inductiei daca sunt introduse doua straturi dielectrice cu permitivitatile relative 7 si 3