

# Rezonanța circuitelor liniare în regim permanent sinusoidal

## 1. Chestiuni teoretice

Se consideră un dipol liniar pasiv, având inclus în structura sa atât bobine cât și condensatoare. Dipolul este excitat de un semnal sinusoidal iar răspunsul acestuia are amplitudinea și faza inițială dependentă de frecvența semnalului de excitație. Dacă frecvența semnalului de excitație și / sau parametrii dipolului variază, atunci defazajul dintre semnalul răspuns și de excitație este nul. Regimul de funcționare al dipolului în care defazajul este nul poartă denumirea de regim de rezonanță.

Deoarece  $\varphi = \arctg \frac{X_e}{R_e}$  sau  $\varphi = \arctg \frac{B_e}{R_e}$  anularea defazajului implică

$X_e=0$ , sau  $B_e=0$ , relații ce reprezintă condițiile de rezonanță ale dipolului.

## 2. Rezonanța serie (rezonanța tensiunilor)

Un astfel de regim poate fi obținut prin conectarea în serie a unui rezistor, bobină ideală și condensator ideal alimentate fie de la un generator ideal de tensiune, fie de la unul ideal de curent.

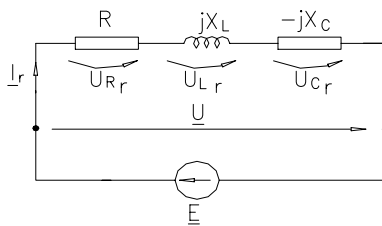


Figura 1

Ecuția în complex a tensiunii la bornele dipolului este:

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R\underline{I} + jX_L\underline{I} - jX_C\underline{I} = \underline{Z}\underline{I}$$

unde  $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$   $\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R_e + jX_e$

Condiția de rezonanță:

$$X_c = 0 \Rightarrow X_L - X_C = 0 \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

conduce la posibilitățile de realizare a rezonanței prin:

- variația frecvenței semnalului de excitație;
- modificarea inductivității sau capacității. Diagrama de fazori la rezonanță

este:

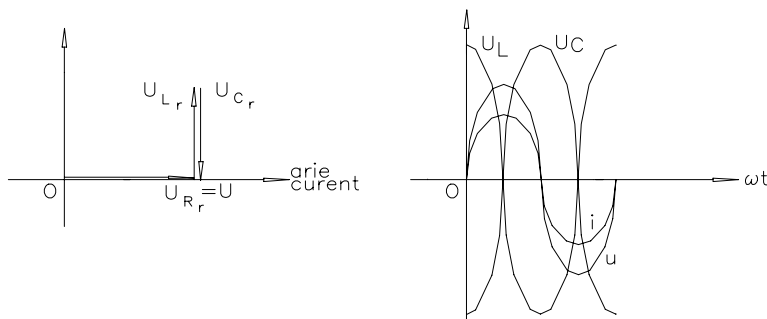


Figura 2

Impedanța circuitului la rezonanță este:

$$Z|_{\omega=\omega_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \Big|_{\omega=\omega_0} = R$$

Curentul din circuit la rezonanță are valoare maximă fiind limitat numai de rezistența circuitului  $\boxed{I_0 = \frac{U}{R}}$ .

Întrucât la rezonanță  $U_L|_{\omega=\omega_0} = U_C|_{\omega=\omega_0}$  - și sunt independente de tensiunea de alimentare este posibil ca tensiunea pe elementul reactiv să fie mai mare decât tensiunea de alimentare, conducând la apariția supratensiunilor.

Condiția de existență a supratensiunilor este:  $U_L|_{\omega=\omega_0} > U_R|_{\omega=\omega_0}$ ;

$\omega_0 L I_R > R I_R$  dar  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Numim  $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \left(\frac{U_L}{I}\right)_{\omega=0}$  - impedanță caracteristică

raportul dintre tensiunea pe elementul reactiv și curentul din circuit la rezonanță.

Condiția de apariție a supratensiunilor poate fi exprimată și prin inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{L}{C}} > R, \quad \boxed{Z_0 > Z_R} \text{ - apar supratensiuni.}$$

Numim factor de calitate al circuitului rezonant raportul dintre tensiunea pe elementul reactiv și tensiunea de alimentare definit de relația:

$$Q_s = \left( \frac{U_L}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left( \frac{U_C}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left( \frac{U_C}{I_R} \cdot \frac{U_R}{U} \right)_{\omega=\omega_0} = \left( \frac{U_C}{I_R} \cdot \frac{1}{\frac{U}{I_R}} \right)_{\omega=\omega_0} = \frac{Z_0}{R}.$$

Inversul factorului de calitate  $\frac{1}{Q_s} = d$  se numește factor de amortizare ce reprezintă, din punct de vedere, fizic raportul dintre tensiunea aplicată circuitului și tensiunea de la bornele elementului reactiv.

Reprezentând grafic (figura 3):  $U_L = f(\omega)$  și  $U_C = f(\omega)$ :

$$U_L = \omega L I = \omega L \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

rezultă maximizarea tensiunii pe bobina ideală pentru pulsația:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2-d^2}} \Rightarrow \omega_L > \omega_0$$

iar maximizarea tensiunii pe capacitate pentru:

$$\frac{\partial U_C}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2-d^2}{2}} \Rightarrow \omega_C < \omega_0$$

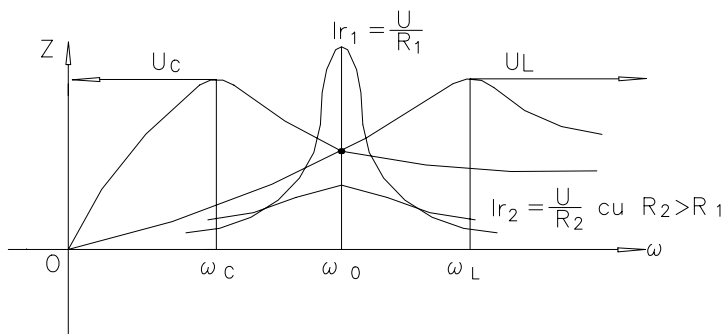


Figura 3

Dacă  $\omega_C < 0$  atunci nu mai apar supratensiuni  $\Leftrightarrow 2-d^2 < 0 \Rightarrow \boxed{d > \sqrt{2}}$  - condiția de inexistență a supratensiunilor.

Oscilații de energie la rezonanța tensiunilor.

Valorile instantanee ale energiei înmagazinate în câmpul electric (condensator) respectiv câmpul magnetic sunt:

$$W_e = \frac{1}{2} C U_c^2, \quad W_m = \frac{1}{2} L i^2$$

unde:  $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \gamma_i)$  iar  $u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = -\sqrt{2} \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t + \gamma_i)$ .

Energia totală înmagazinată în circuitul serie este suma energiei din condensator și bobină, iar la rezonanță, energia înmagazinată are valoarea:

$$W_r = (L I^2)_r [\cos^2(\omega t + \gamma_i) + \sin^2(\omega t + \gamma_i)] = (L I^2)_r$$

sau funcție de valoarea maximă a curentului:  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

$$W_r = \frac{1}{2} L I_m^2 = \frac{1}{2} C U_m^2 = \text{ct.}$$

### Concluzie:

La rezonanță au loc oscilații neamortizate ale energiei între bobine și condensatoare. În acest regim nu are loc schimb de energie între surse și câmpul electromagnetic al circuitului. Sursele furnizează energie numai rezistoarelor în care se produc efecte Joule-Lentz.

### 3. Rezonanța de curent (paralel)

Acest regim poate fi realizat la bornele unui circuit format din gruparea paralel R, L, C alimentată de la o sursă sinusoidală de tensiune sau de curent (figura 4).

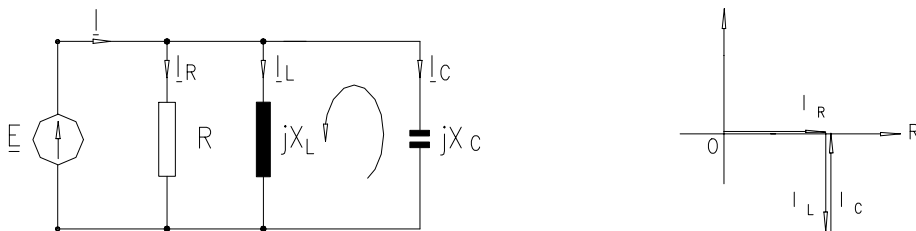


Figura 4

Curentul absorbit de dipol este:

$$\begin{aligned} i &= i_R + i_L + i_C \\ i &= Gu + \frac{1}{L} \int i dt + C \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

Trecând în complex relația de mai sus obținem:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{U}[G - j(B_L - B_C)] \\ \underline{I} &= \underline{U}\underline{Y} \quad \text{cu} \quad I = U\sqrt{G^2 + B^2} \end{aligned}$$

Condiția de obținere a rezonanței impusă dipolului conduce la posibilitățile practice de obținere a rezonanței:

$$B = B_L - B_C = 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega C} - \omega_0 L = 0$$

Admitanța circuitului:  $\underline{Y} = G - jB$  la rezonanță devine:  $\underline{Y} = G$ .

Reprezentarea funcției de frecvență a admitanței și susceptanțelor este redată în figura 5.

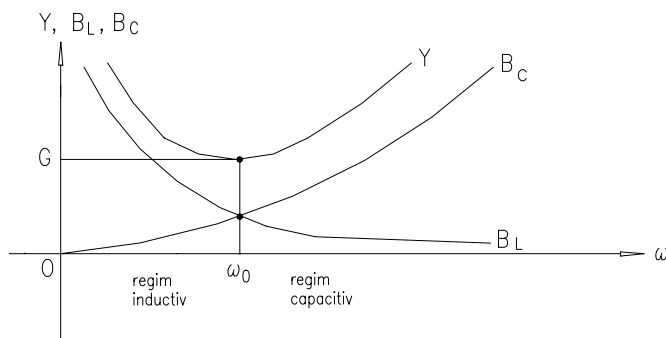


Figura 5

La rezonanță  $I_L = -I_C$  iar curentul absorbit de la sursă,  $I_r = GU$ , - are valoare minimă. Deoarece  $I_L = -I_C$  este posibil în cazul rezonanței paralele ca valoarea efectivă a curentului prin elementul reactiv să fie mult mai mare decât valoarea curentului absorbit de la rețea:  $I_C|_{\omega=\omega_0} > I|_{\omega=\omega_0}$ ;  $\omega_0 CU > GU$  dar  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

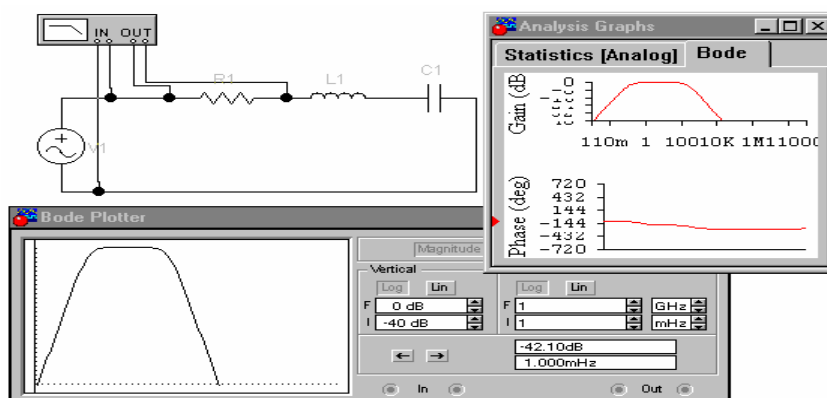


### Rezonanța derivație

$f[\text{Hz}]$	30	40	50	60	70	80	90	100	110	$f_o$
$I$										
$I_l$										
$I_c$										
$Z$										
$\varphi$										

## 4. Simularea circuitelor

Se realizează utilizând editorul grafic circuitul serie RLC cu valorile parametrilor de circuit determinați experimental.



Se conectează Bode plotter-ul considerând mărime de intrare tensiunea de alimentare iar mărime de ieșire tensiunea pe rezistor. Se vizualizează apoi comportarea în frecvență considerând mărime de ieșire tensiunea pe bobină respectiv pe condensator.