

ENS-Natitingou

Année Académique : 2022 – 2023

CAPES MATHÉMATIQUES
Examen de Distribution et Analyse de Fourier
Septembre 2023
Durée : 03h

Exercice 1

Parmi les affirmations suivantes lesquelles sont vraies , lesquelles sont fausses. Pourquoi?

1. Toute fonction continue sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n définit une distribution sur ce ouvert.
2. la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ définit une distribution sur \mathbb{R} .
3. $L^1(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$
4. Toute fonction continue sur \mathbb{R} est à décroissance rapide.
5. La fonction $x \longrightarrow |x|$ est un élément de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Exercice 2

Les fonctions suivantes définissent-elles des distributions sur \mathbb{R} ?

1.
$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{(n)}(n)$$
2.
$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \sin x dx$$
3.
$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| dx$$
4.
$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longmapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln \varepsilon \right) dx$$

NB. $\varphi^{(n)}$ est la dérivée d'ordre n de φ .

Exercice 3

On note E la fonction partie entière.

- 1) Montrer que la fonction $x \longrightarrow E(2x)$ définit une distribution sur \mathbb{R} .
- 2) On note T cette distribution. Calculer T' la dérivée de T au sens des distributions.

Exercice 4

On note \hat{f} la transformée de Fourier d'une fonction f mesurable sur \mathbb{R} .

- 1) À quelle condition la transformée de Fourier de f est-elle définie?
- 2) Donner la définition d'une distribution tempérée.
- 3) Montrer que la distribution de Dirac est tempérée.