1　C - Dice and Coin

サイコロを投げたとき，i が出たとする．

i が出る確率は $\dfrac{1}{n}$ である．

$k \leq i \leq n$ のとき，コインを振る必要はないので，サイコロで i が出たときに勝つ条件付き確率は 1 である．

$1 \leq i < k$ のとき，勝つためにコインを振って表を出さなければならない回数を t_i とする．t_i 回コインを振り続け，表が出続けたとすると，t_i 回コインを振ったときの得点 Point(i) について，

$$\mathrm{Point}(i) = i \cdot 2^{t_i} \tag{1}$$
$$\mathrm{Point}(i-1) < k \leq \mathrm{Point}(i) \tag{2}$$

が成り立つ．

(1), (2) より，

$$\begin{aligned} i \cdot 2^{t_i - 1} &< k \leq i \cdot 2^{t_i} \\ 2^{t_i - 1} &< \frac{k}{i} \leq 2^{t_i} \\ t_i - 1 &< \log_2\left(\frac{k}{i}\right) \leq t \end{aligned}$$

が成り立つ．

ここで，天井関数 $\lceil x \rceil$ を用いると，

$$\begin{aligned} t_i &= \left\lceil \log_2\left(\frac{k}{i}\right) \right\rceil \\ &= \lceil \log_2 k - \log_2 i \rceil \end{aligned} \tag{3}$$

と表せる．

以上より，サイコロを投げて i が出た場合（最初の得点が i の場合）のときに勝つ条件付き確率 p_i は，

$$p_i = \begin{cases} 1 & (\ k \leq i \leq n\ ) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil \log_2 k - \log_2 i \rceil} & (\text{上記以外}) \end{cases} \tag{4}$$

である．

求める確率 p は，

$$p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} p_i\right) \tag{5}$$
$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) \tag{6}$$

であり，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$ について，$k \leq n$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = (n-k) + \sum_{i=1}^{k} p_i \tag{7}$$

であるから，

$$p = \begin{cases} \dfrac{1}{n}\left\{(n-k) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i\right\} & (\ k \leq n\ ) \\ \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i\right) & (\text{上記以外}) \end{cases} \tag{8}$$

である．