Practica BFS, Dijsktra, AGM

Nahuel

May 25, 2025

1 Ejercicio 1 solucion

Teorema 1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y no ponderado. Ejecutar* ***BFS*** *desde $v \in V$ produce un árbol T tal que para todo w alcanzable desde v se cumple*

$$\operatorname{dist}_T(v, w) = \operatorname{dist}_G(v, w).$$

En particular, T es v-geodésico.

Demostración. Denotemos por $\ell(w)$ el *nivel* (número de iteración) en el que BFS descubre a w.

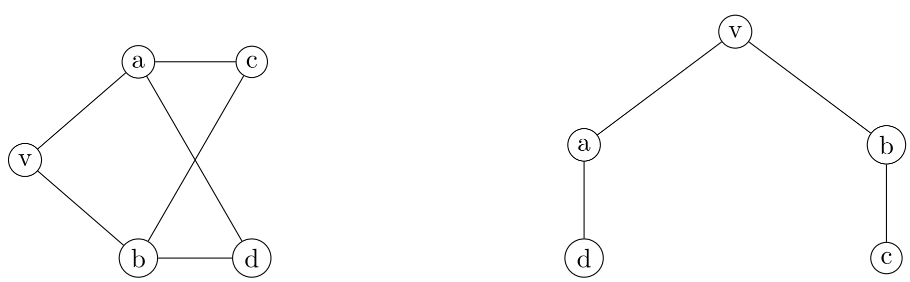
(i) Existe un camino de longitud $\ell(w)$ en G: BFS solo encola a w cuando examina una arista (x, w) con x ya extraído de la cola, y $\ell(x) = \ell(w) - 1$. Por inducción sobre $\ell(w)$ se obtiene un camino $v \rightsquigarrow w$ con $\ell(w)$ aristas.

(ii) Minimalidad. Supongamos, hacia contradicción, que existe un camino P de v a w con menos de $\ell(w)$ aristas. Sea y el primer vértice de P que BFS descubre *después* de v. Entonces su predecesor x en P está a nivel $< \ell(w) - 1$ y la arista (x, y) haría que y (o eventualmente w) se encolase antes, contradiciendo la definición de $\ell(w)$.

Los incisos (i) y (ii) implican $\ell(w) = \operatorname{dist}_G(v, w)$. Como el camino registrado por BFS en T tiene exactamente $\ell(w)$ aristas, se cumple la igualdad de distancias en el árbol; por lo tanto T es v-geodésico. ☐

Contraejemplo: árbol v-geodésico que no es árbol BFS

Grafo G



(a) Grafo G (b) Árbol $T = \{va, vb, ad, bc\}$

Figure 1: Contraejemplo: árbol v-geodésico que no es árbol BFS.

- T es **generador** (contiene los 5 vértices y tiene 4 aristas).
- Las distancias en T coinciden con las de G:

$$\operatorname{dist}_T(v, a) = \operatorname{dist}_T(v, b) = 1, \quad \operatorname{dist}_T(v, c) = \operatorname{dist}_T(v, d) = 2.$$

Luego T es v-geodésico.

¿Por qué ninguna ejecución de BFS produce T?

1. Al iniciar BFS en v se encolan, en algún orden, a y b.
   Llamemos *"primero"* al que salga antes de la cola.
2. Ese vértice primero (sea a o b) explora sus incidentes
   $(\text{primero}, c)$ y $(\text{primero}, d)$.
   Ambos vecinos están sin visitar y reciben como *padre* al vértice primero; quedan encolados.
3. Cuando salga el segundo vértice de $\{a, b\}$,
   los vértices c y d ya estarán marcados,
   de modo que **no cambiarán de padre**.

Así, en **todo árbol BFS** ambos vértices de nivel 2 tienen el **mismo padre** (el que se extrajo antes entre a y b).

En el árbol T ocurre lo contrario: c es hijo de b y d es hijo de a.

Por lo tanto, T **no puede** obtenerse con BFS desde v.

En conclusión:

- Todo árbol que produce BFS es v-geodésico,
- pero **no todo árbol v-geodésico** puede surgir de BFS;
- el grafo y el árbol anteriores son un *contraejemplo concreto*.

2 Ejercicio 3 Solucion

Teorema 2. *Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Sea H el digrafo bipartito construido de la siguiente forma:*

- $\forall v \in V(G)$ *se crean dos copias* v^0 *y* v^1
- $\forall (u, v) \in E(G)$*, se agrega la arista dirigida* $(u^0, v^1) \in E(H)$

Entonces, una secuencia de vertices $v_1^1, v_2^0, \ldots, v_k^{k \bmod 2}$ *es un recorrido en* H

Nota: Para que el enunciado tenga sentido y la equivalencia sea válida en ambos sentidos, asumimos que por cada arista $(v, w) \in E(G)$, el grafo H contiene tanto la arista $v^0 \to w^1$ como la arista $v^1 \to w^0$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Suongamos que $v_1, v_2, \ldots, v_k$ es un recorrido de G. Entonces por definicion de recorrido de un digrafo se cumple

$$\forall i \in \{1, \ldots, k-1\} \quad (v_i, v_{i+1}) \in E(G)$$

Por la construccion del grafo H, existe una arista $(v_i^{i \bmod 2}, v_{i+1}^{i \bmod 2}) \in H$ si y solo si $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$

Por lo tanto:

$$(v_1^1, v_2^0), (v_2^0, v_3^1), \ldots, (v_{k-1}^{k \bmod 2}, v_k^{k \bmod 2}) \in E(H)$$

Es decir, la secuencia $v_1^1, v_2^0, v_3^1, \ldots, v_k^{k \bmod 2}$ es un recorrido en H $\square$