

Final Algebra 04/03/2024

Nahuel Prieto
enprieto@dc.uba.ar

1 Ejercicio 1

Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a_1 &= 4, a_2 = 5 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} - 10a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Probar que $a_n \equiv 4^n \pmod{11} \forall n \in \mathbb{N}$ y calcular el resto de la division por 11 de $\sum_{n=1}^{2024} a_n$

Solucion:

Probamos por induccion

$$P_{(n)} : a_n \equiv 4^n \pmod{11}$$

Caso base: $\hookrightarrow P_{(1)}$ verdadera? Sí, pues $4 \equiv 4 \pmod{11}$

$\hookrightarrow P_{(2)}$ verdadera? Sí, pues $5 \equiv 4^2 \pmod{11}$

Paso Inductivo: $\forall h \in \mathbb{N}$, $\hookrightarrow P_{(h)} \wedge P_{(h+1)}$ verdadera? $\Rightarrow \hookrightarrow P_{(h+2)}$ verdadera?

HI: $a_h \equiv 4^h \pmod{11} \wedge a_{h+1} \equiv 4^{h+1} \pmod{11}$

Qpq: $a_{h+2} \equiv 4^{h+2} \pmod{11}$

$$\begin{aligned} \text{obs: } a_h &\equiv 4^h(11) \iff a_h = 11k + 4^h, \quad k \in \mathbb{Z} \\ a_{h+1} &\equiv 4^{h+1}(11) \iff a_{h+1} = 11j + 4^{h+1}, \quad j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

por def: $a_{h+2} = a_{h+1} - 10a_h$

$$\therefore a_{h+2} \stackrel{\text{HI}}{=} (11j + 4^{h+1}) - 10(11k + 4^h)$$

$$a_{h+2} = 11j + 4^{h+1} - 10 \cdot 11k - 10(4^h)$$

$$a_{h+2} = 11 \underbrace{(j - 10k)}_Q - 6 \cdot 4^h$$

$$a_{h+2} + 6 \cdot 4^h = 11Q \iff 11 \mid a_{h+2} + 6 \cdot 4^h$$

$$\therefore a_{h+2} + 6 \cdot 4^h \equiv 0(11)$$

$$a_{h+2} \equiv -6 \cdot 4^h(11)$$

$$-a_{h+2} \stackrel{(-1)}{\equiv} 6 \cdot 4^h(11)$$

$$-2a_{h+2} \stackrel{(2)}{\equiv} 4^h(11)$$

$$9a_{h+2} \equiv 4^h(11)$$

$$144a_{h+2} \stackrel{(4^2)}{\equiv} 4^h \cdot 4^2(11) \iff a_{h+2} \equiv 4^{h+2}(11) \quad \text{tal como se queria probar}$$

obs: $144 = 11 \cdot 13 + 1 \iff 144 \equiv 1(11)$

Como se probó el caso base y el paso inductivo, se concluye que

$P(n)$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

Ahora voy a calcular el resto de dividir

$$\sum_{n=1}^{2024} a_n \text{ por } 11$$

Probamos anteriormente que $a_n \equiv 4^n(11)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{2024} a_n = \sum_{n=1}^{2024} 4^n$$

Me interesa saber $r_{11}(4^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

voy aplicar PTF, $11 \nmid 4 \implies 4^n \equiv 4^{r_{10}(n)}(11)$

$r_{10}(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r_{11}(4^{r_{10}(n)})$	1	4	5	9	3	1	4	5	9	3

Viendo la tabla de restos se puede observar que cada 5 sucesiones se vuelven a repetir los mismos restos

$$\therefore \sum_{n=1}^{2024} \underbrace{4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5}_{5 \text{ sucesiones}} + \dots + 4^{2024}$$

$$4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 \equiv 4 + 5 + 9 + 3 + 1 \equiv 22 \equiv 0(11)$$

Voy a pensar las 5 sucesiones como que son un bloque, en $2024 = 5 \cdot 404 + 4$

es decir tengo 404 bloques de 5 sucesiones todos esos bloques son congruentes a $0(11)$.

Por lo que en la sumatoria sobreviven $4^{2021} + 4^{2022} + 4^{2023} + 4^{2024}$

que por tabla de restos se que:

$$4^{2021} + 4^{2022} + 4^{2023} + 4^{2024} \equiv 4 + 5 + 9 + 3 \equiv 21 \equiv 10 \quad (11)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{2024} a_n \equiv \sum_{n=1}^{2024} 4^n \equiv 10 \quad (11) \quad \text{se concluye que } r_{11}(\sum_{n=1}^{2024} a_n) = 10$$

2 Ejercicio 2

a) Enunciar la definicion de divisibilidad para enteros y determinar si la relacion \mathfrak{R} sobre \mathbb{Z} dada por

$$a \mathfrak{R} b \iff a \mid b \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0$$

es reflexiva, simetrica, antisimetrica y transitiva.

b) Calcular el cardinal del conjunto

$$\{a \in \mathbb{Z} : a \mathfrak{R} 14580000 \quad \wedge \quad a \equiv 0 \quad (15)\}$$

Solucion: a)