به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضیات مهندسی

گزارش تمرین کامپیوتری۲

نام و نام‌خانوادگی: نرگس غلامی

شماره دانشجویی: ۸۱۰۱۹۸۴۴۷

تاریخ ارسال گزارش: ۷ تیر ۱۴۰۰

فهرست گزارش سؤالات

حل معادله‌ی حرارت

$$u_t = 2^2 u_{xx} \qquad 0 \leq x \leq 2\pi \qquad t \geq 0 \qquad u_x(0,t) = e^{-2t}, \quad u_x(2\pi,t) = e^{-2t} \qquad u(x,0) = \sin^2 x$$

راه‌حل : $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$

• شرایط نیومن : $w(x,t) = xe^{-2t} \longrightarrow \begin{cases} u_t = v_t - 2xe^{-2t} \\ u_{xx} = v_{xx} \end{cases}$

• معادله‌ی جدید : $v_t - 4v_{xx} = 2xe^{-2t} \qquad \begin{cases} v_x(0,t) = 0 \\ v_x(2\pi,t) = 0 \end{cases}$

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \leftarrow \text{شرایط نیومن}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dot{T}_n(t) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) + 4\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^2 T_n(t) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) = 2xe^{-2t}$$

$$\underbrace{\dot{T}_0(t)}_{\text{ضریب ثابت سری فوریه}} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \underbrace{\left(\dot{T}_n(t) + n^2 T_n(t)\right)}_{\text{ضریب کسینوس سری فوریه } 2xe^{-2t}} = 2xe^{-2t}$$

$$\dot{T}_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2x e^{-2t}\, dx = 2\pi e^{-2t} \qquad T_0(t) = -\pi e^{-2t}$$

$$\dot{T}_n(t) + n^2 T_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2xe^{-2t} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{8\left((-1)^n - 1\right)e^{-2t}}{\pi n^2}$$

$$T_n(t) = c_1 e^{-n^2} + \frac{8e^{-2t}\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2 (n^2 - 1)}$$

$$u(x,t) = xe^{-2t} - \pi e^{-2t} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8e^{-2t}\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2 (n^2 - 1)} + c_1 e^{-n^2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

شرایط اولیه

$$\rightarrow u(x,0) = \sin^2(x) = (x - \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{8\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2 (n^2 - 1)} + c_1 e^{-n^2}\right)}_{\text{ضریب کسینوس سری فوریه}} \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

$$\frac{8\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2 (n^2 - 1)} + c_1 e^{-n^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sin^2(x) - x + \pi\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{-4\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}$$

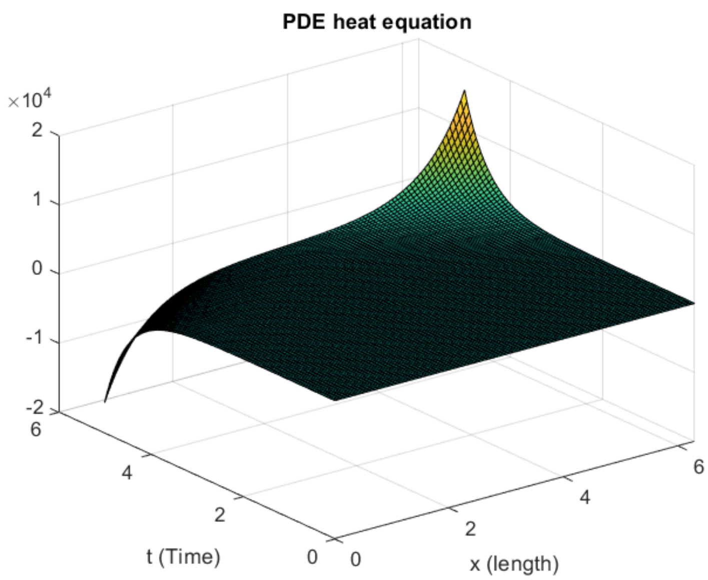
$$c_1 = e^{n^2}\left(\frac{-4(n^2 - 1)\left((-1)^n - 1\right) - 8\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2 (n^2 - 1)}\right)$$

شرح راه حل: ابتدا شرایط داده شده همگن‌سازی شده و سپس از روش جواب حدسی به حل معادله‌ی همگن می‌پردازیم. شرایط مرزی نیومن است در نتیجه در جواب آخر کسینوس وجود دارد. در انتها نیز با توجه به شرایط اولیه ضرایب مجهول معادله را به دست می‌آوریم.

توضیحات کد:

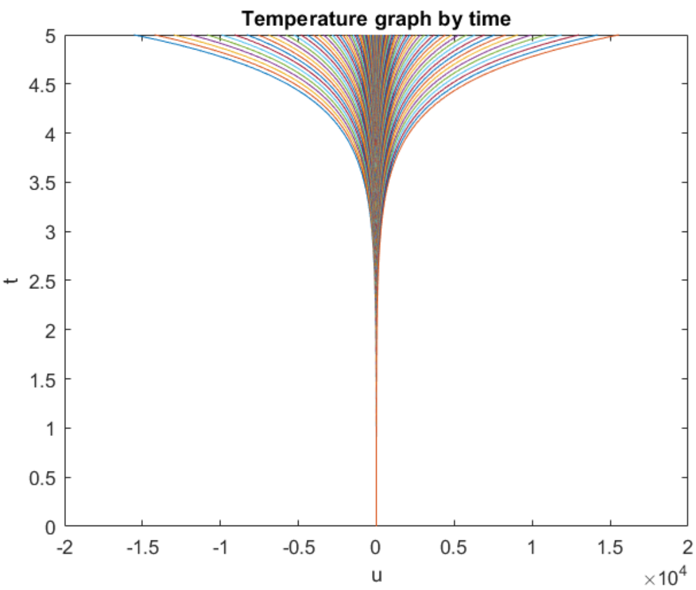
- در کد زیر با توجه به معادله‌ای که داشتیم ابتدا مقدار m برابر با صفر قرار داده شد. سپس حدود t و x مشخص شده و توابع شرایط مرزی و شرایط اولیه نیز به صورت جداگانه نوشته شد و معادله pde توسط تابع pdepe حل شد. نمودار سه بعدی آن را بعد از کد مشاهده می‌نمایید.

```
m = 0;
t = linspace(0, 5, 100);
x = linspace(0, 2*pi, 100);
u = pdepe(m , @pdefun, @icfun, @bcfun, x, t);
surf(x, t, u);
title("PDE heat equation");
xlabel("x (length)");
ylabel("t (Time)");
```



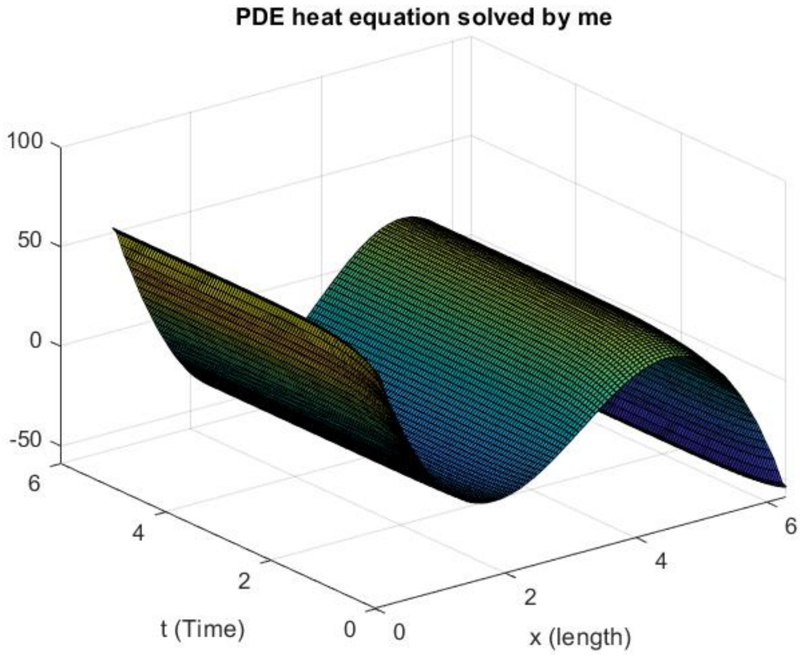
در این مرحله نمودار دما بر حسب زمان رسم می‌شود.

```
plot(u, t);
title("Temperature graph by time");
xlabel("u");
ylabel("t");
```



حل دستی به ازای $n = ۱$ تا ۵۰ به صورت زیر محاسبه می‌گردد. با استفاده از بازه‌ی x و t دو ماتریس ۱۰۰*۱۰۰ x1 و t1 ساخته می‌شود که باعث می‌شود حاصل جمع شامل مقادیر درستی باشد.

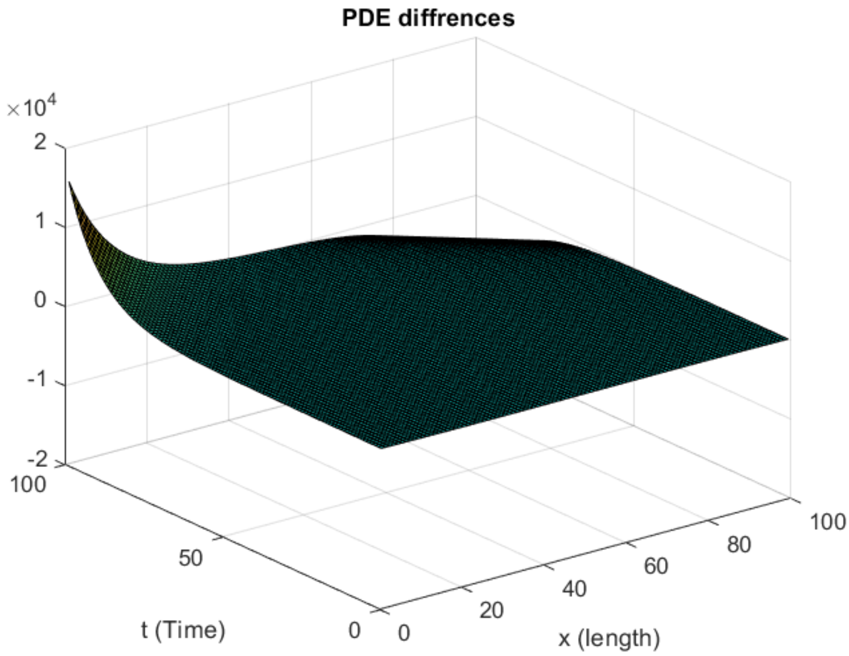
```
[x1, t1] = meshgrid(x, t);
s = 0;
for n = 2:50
s = s + (-4*(((-1)^n)-1)*(n^2+1)/(pi*n^2*(n^2-1))+(8*exp(-2*t1)*(((-1)^n)-
1))/(pi*n^2*(n^2-1)))*cos(n*x1/2);
end
s = s + x1*exp((-2*t1)) - pi*exp(-2*t1);
surf(x1, t1, s);
```



این شکل سه بعدی، حاصل حل دستی می‌باشد.

- با استفاده از دستور زیر نیز منهای دو pde رسم می‌شود.

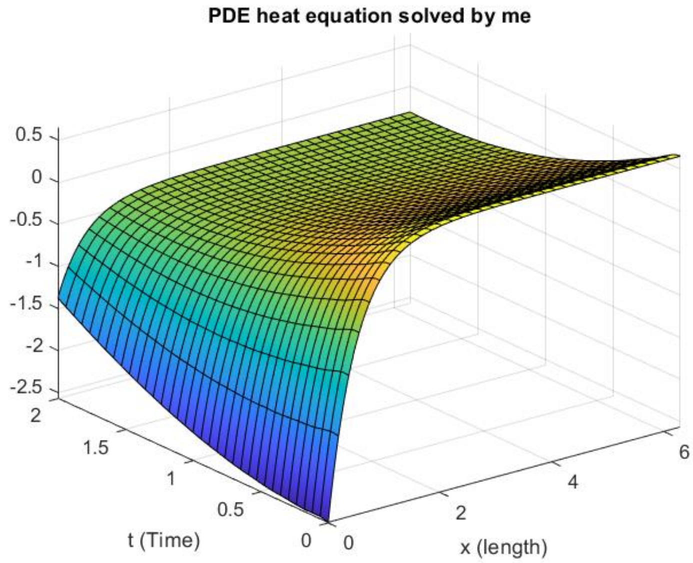
```
surf(s-u)
```



نوع دیگر بدست آوردن جمع از `n = 1` تا `n = 50` با استفاده از تابع `symsum`:

```
x = linspace(0, 2*pi, 100);
t = linspace(0, 2, 100);
syms n x t
k = symsum((-4*(((-1)^n)-1)*(n^2+1)/(pi*n^2*(n^2-1))+(8*exp(-2*t)*(((-1)^n)-
1))/(pi*n^2*(n^2-1)))*cos(n*x/2)  , n , 2, 50);
k = k + x*exp((-2*t)) - pi*exp(-2*t);
syms x t
fsurf(k, [0 2*pi 0 2]);
title("PDE heat equation solved by me");
xlabel("x (length)");
ylabel("t (Time)");
```

شکل زیر حاصل جمع عبارت از n برابر یک تا پنجاه به طریق دیگری می‌باشد.



بخش دوم: حل عددی معادله لاپلاس

- ابتدا ماتریس U به صورت زیر با توجه به شرایط مرزی داده شده و ساخته شد و سپس ماتریس A بنابر ضرایب معادله ها ساخته شدند. سپس با استفاده از دستور `linesolve` معادله ماتریسی حل شده است و با دستور imagesc نمایش داده شده است.

```
U = [0;
    exp((1-1/5)/2);
    exp((1-2/5)/2);
    exp((1-3/5)/2);
    exp((1-4/5)/2);
     0;
     0;
     0;
     0;
     cos(2*pi*(2/5));
     0;
     0;
     0;
     0;
     cos(2*pi*(3/5));
     0;
     0;
     0;
     0;
     cos(2*pi*(4/5));
     0;
     sin(2*pi*(2/5));
     sin(2*pi*(3/5));
     sin(2*pi*(4/5));

A = [1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 1 0 0 0 1 -4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0 1 -4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 1 0 0 0 1 -4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 -4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 -4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 -4 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
     0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
```

```
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 -4 1 0 0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 -4 1 0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 -4 1 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1;];

Z = linsolve(A, U)
```

در Z پاسخ پتانسیل الکتریکی بعضی از نقاط را مشاهده می‌کنید.

```
Z = 25×1

        0
   1.4918
   1.3499
   1.2214
   1.1052
        0
   0.5640
   0.5547
   0.1951
  -0.8090
     ⋮
```

```
imagesc(Z);
```

شکل نمودار پتانسیل‌های نقاط