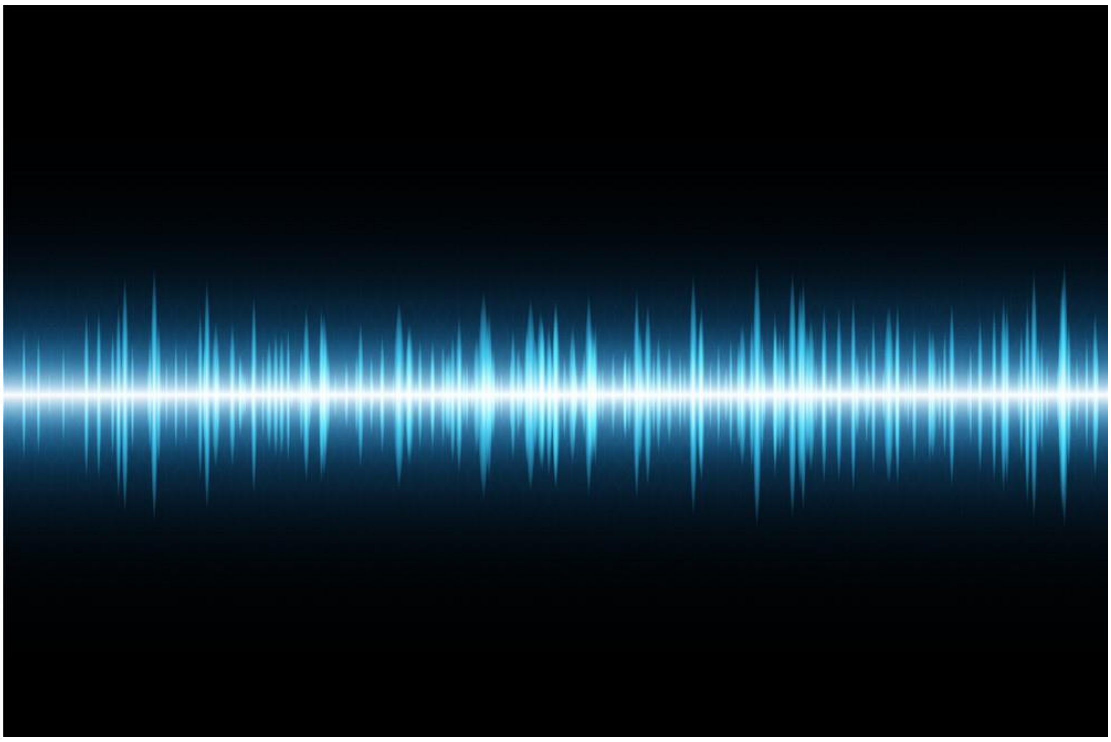
«به نام خدا»

گزارش پروژه سوم سیگنال و سیستم‌ها

استاد اخوان

نرگس غلامی

۸۱۰۱۹۸۴۴۷



سوالات مفهومی:

۱) می‌دانیم سیگنال‌ها در کامپیوتر به صورت دیجیتال ذخیره می‌شوند و همچنین پردازش آن‌ها نیز به همین صورت انجام می‌پذیرد. مبحث نمونه‌برداری یک پل بین این دو مورد می‌سازد و ما را کمک می‌کند که از مفهوم سیگنال‌های گسسته در این جهت استفاده کنیم.
فرضا اگر به ما یک سیگنال با N نمونه متناظر با T ثانیه بدهند گام‌های نمونه برداری این آرایه T/N است. ما برای این که تبدیل فوریه این سیگنال را پیدا بکنیم از fft کمک می‌گیریم و بعد برای این که به یک بازه متقارن، متناظرش کنیم از دستور fftshift کمک می‌گیریم. خروجی این دستور بین π و π- خواهد بود. در آخر فرکانس زاویه‌ای را به فرکانس سنتی تبدیل می‌کنیم.

۲) طبق رابطه زیر متوجه می‌شویم که رزولوشن فرکانسی مستقل از نرخ نمونه‌برداری است و با عکس دوره تناوب نسبت دارد. یعنی هر چقدر طول زمانی سیگنال بیشتر باشد در فرکانس رزولوشن بهتری دریافت می‌شود.

$$\frac{fs}{N} = \frac{1}{N * ts} = \frac{1}{T}$$

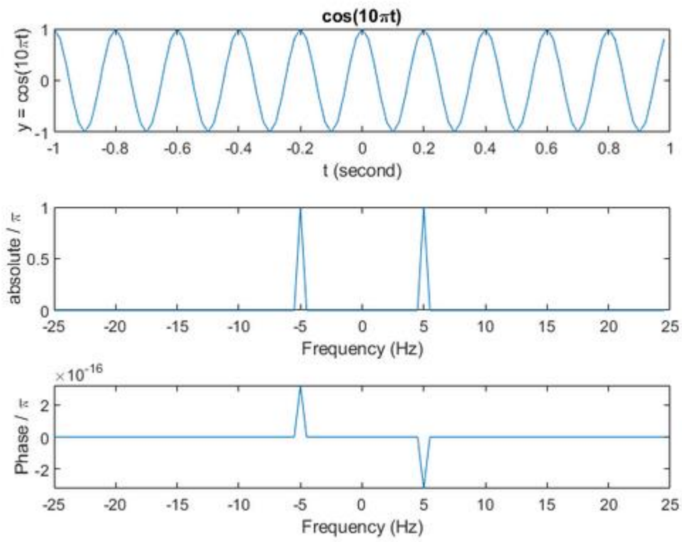
بخش اول)

اول یک توضیح کلی راجع به روند نوشتن کد این ۵ قسمت می‌دهیم:

```
tstart = -1;
tend = 1;
fs = 50;
ts = 1/fs;
t = tstart:ts:tend-ts;
N = length(t);
x = cos(10*pi*t);
subplot(3, 1, 1);
plot(t, x)
title("cos(10\pit)");
xlabel('t (second)');
ylabel('y = cos(10\pit)');
xf = fftshift(fft(x));
xf = xf/max(abs(xf));
fr = -fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
subplot(3, 1, 2);
plot(fr, abs(xf));
xlabel('Frequency (Hz)');
ylabel('absolute / \pi');
subplot(3, 1, 3);
tol = 1e-6;
xf(abs(xf) < tol) = 0;
plot(fr, angle(xf));
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('Phase / \pi')
```

tstart و tend و fs همان‌گونه که در صورت سوال گفته شده نوشته می‌شود و در ایکس سیگنال مورد نظر نوشته می‌شود. سپس تبدیل فوریه سیگنال‌ها را با استفاده از دو دستور fft و fftshift محاسبه می‌نماییم. سپس سه پلات مربوط به خود تابع، اندازه تابع و همچنین فاز تابع در یک شکل کشیده می‌شود. در فاز یک tolerance تعیین می‌شود که اگر از آن پایین‌تر باشد مقدارش برابر با صفر گردد. در ادامه به مقایسه خروجی تبدیل فوریه توابع با مقدار تئوری آن می‌پردازیم.

قسمت اول)

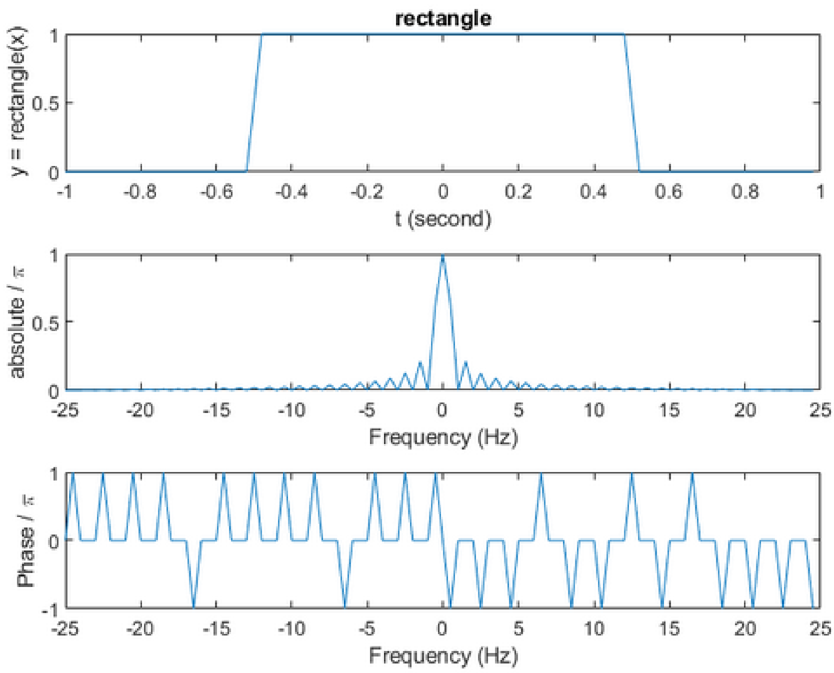


مقدار تئوری محاسبه شده:

$$x(t)) \; \mathcal{F}\{\cos(10\pi t)\} = \pi\delta(\omega-10\pi) + \pi\delta(\omega+10\pi)$$

مشاهده می‌شود که همان‌طور که محاسبه شده در شکل هم می‌بینیم که در نقطه ۵ و -۵ مقدار داریم. ۵ و ۵- در حقیقت همان 10π و -10π هستند که تقسیم بر 2π شده‌اند. فاز هم نداریم. پس این دو با یکدیگر یکی هستند.

قسمت دوم)



مقدار تئوری محاسبه شده:

$$x_2(t) \Rightarrow \hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

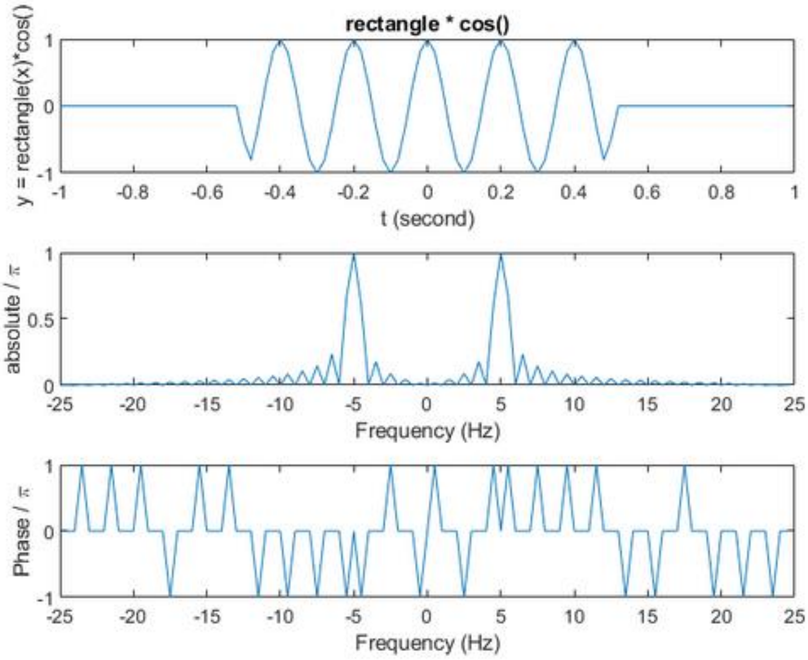
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{e^{0.5 i\omega} - e^{-0.5 i\omega}}{i\omega} = \frac{2\sin(0.5 i\omega)}{\omega}$$

$$= \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

در این قسمت نیز پلات، با مقدار تئوری تطابق دارد. در پلات اندازه سیگنال یک سینک حول نقطه صفر را مشاهده می‌کنیم.

برای فاز هم در نقاط مختلف فاز π و یا $-\pi$ می‌بینیم که در جهت نمایش "منفی" می‌باشد.

قسمت سوم)



مقدار تئوری محاسبه شده:

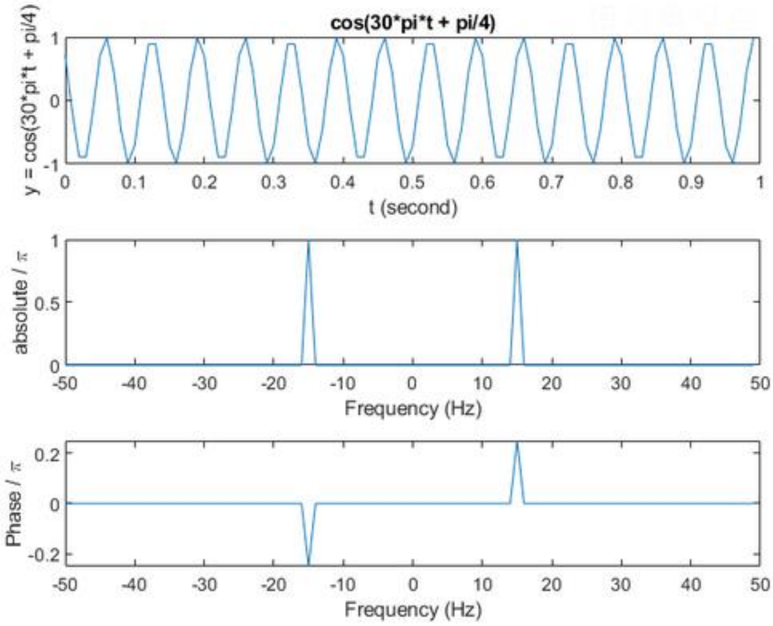
$$x_3(t) = x_1(t)\, x_2(t) \Rightarrow \mathcal{F}\{x_3(t)\} = \left(x_1(t) * x_2(t)\right)\frac{1}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - 10\pi}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega + 10\pi}{2\pi}\right)$$

در این قسمت نیز پلات، با مقدار تئوری تطابق دارد. در پلات اندازه سیگنال دو سینک حول نقاط ۵ و ۵- را مشاهده می‌کنیم.

برای فاز هم در نقاط مختلف فاز π و یا $-\pi$ می‌بینیم که در جهت نمایش "منفی" می‌باشد.

قسمت چهارم)

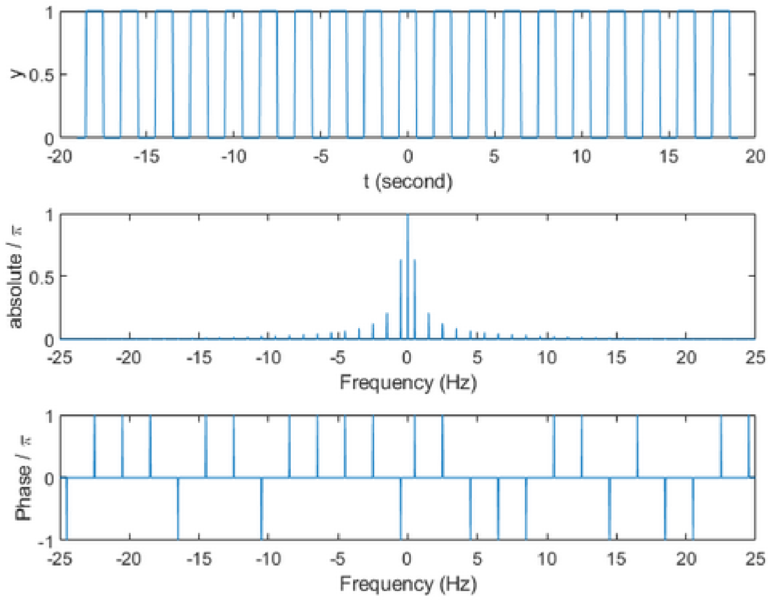


مقدار تئوری محاسبه شده:

$$\mathcal{F}\{x_4(t)\} = \pi\,\delta(\omega-30\pi)\,e^{i\frac{\pi}{4}} + \pi\,\delta(\omega+30\pi)\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

در محاسبه تئوری دو ضربه در دو نقطه ۱۵ و ۱۵- (π۳۰ و π۳۰-) داریم که در پلات اندازه مشاهده می‌شود و همچنین در همین نقاط، فاز ۰.۲۵ و ۰.۲۵- (π/۴ و π/۴ -) را داریم.

قسمت پنجم)



مقدار تئوری محاسبه شده:

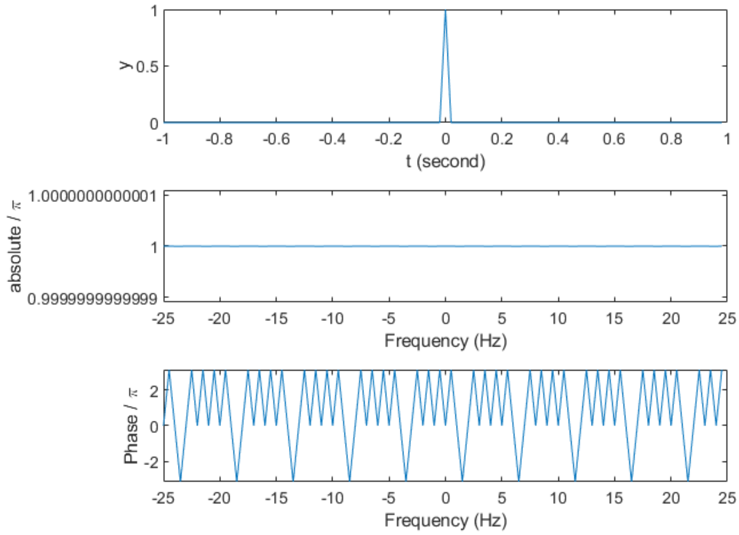
$$F\{x_a(t)\} = \sum_{k=-9}^{9} \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) e^{-j\omega \times 2k} = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \sum_{k=-9}^{9} \delta\left(\omega - \frac{k}{T}\right)$$

در خروجی این قسمت یک تابع سینک را داریم که ضربدر یک سری تابع ضربه با فواصل 1/T یا همان ۰.۵ می‌شود و در خروجی پلات متلب نیز یک تابع سینک گسسته را مشاهده می‌کنیم.

علت این که فواصل ۰.۵ است این است که همیشه در تبدیل فوریه گسسته خروجی در فواصل 2π/T مشخص می‌شد. ما نمودار را برحسب f داریم پس 2π را کنار می‌گذاریم. پس فواصل نمونه‌ها 1/T یا همان ۰.۵ می‌باشد.

بخش دوم)

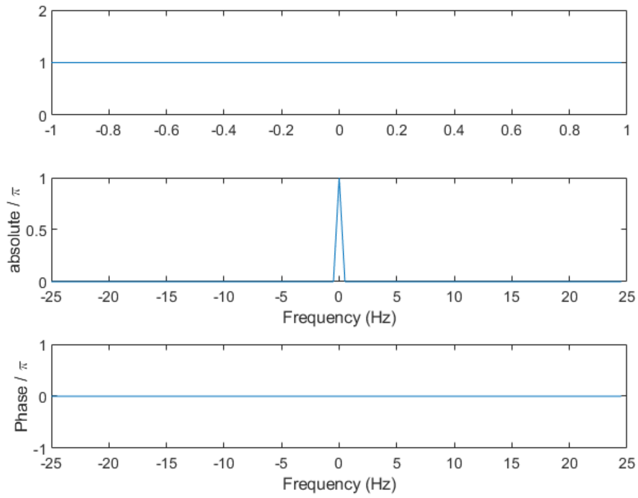
قسمت اول)



همان‌طور که توقع می‌رفت شارپ‌ترین سیگنال اسموث‌ترین سیگنال حوزه فرکانس را نیاز دارد و به عبارتی همه‌ی فرکانس‌ها در ساخت سیگنال اصلی مشارکت دارند به خاطر همین است که می‌بینیم پلات فاز در همه‌ی نقاط یک مقداری دارد.

$$\mathcal{F}\{x_4(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 1$$

قسمت دوم)



برعکس قسمت قبل برای بدست آوردن اسموث‌ترین سیگنال در حوزه زمان به شارپ‌ترین سیگنال در حوزه فرکانس نیازمندیم که در فرکانس صفر هم مقدار دارد.

$$\mathcal{F}\{x_v(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}\, dt = \delta(t)$$

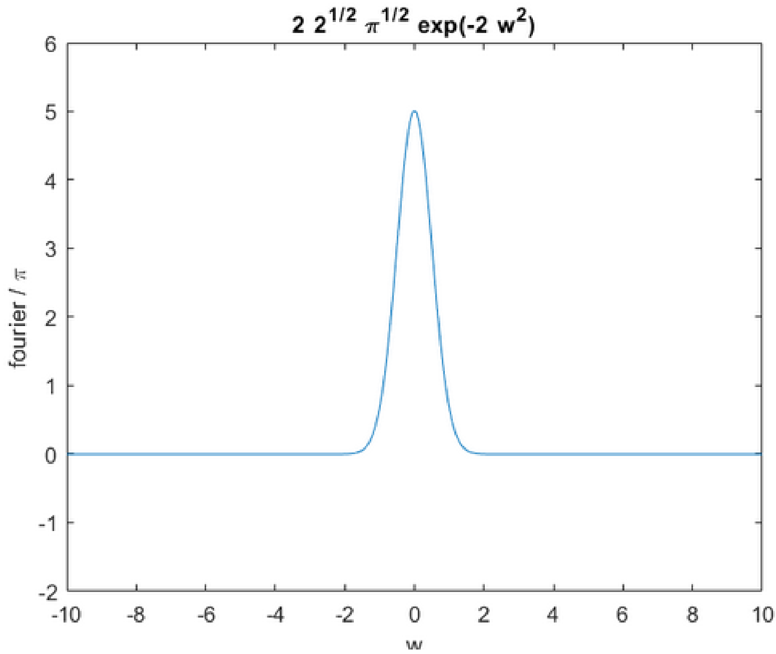
بخش سوم)

قسمت اول)

```
syms t
x = exp(-t^2/8);
fun = fourier(x)
```

fun = $2\sqrt{2}\ \sqrt{\pi}\ e^{-2w^2}$

```
subplot(1, 1, 1)
ezplot(fun, [-10, 10])
ylim([-2 6])
xlabel('w')
ylabel('fourier / \pi')
```



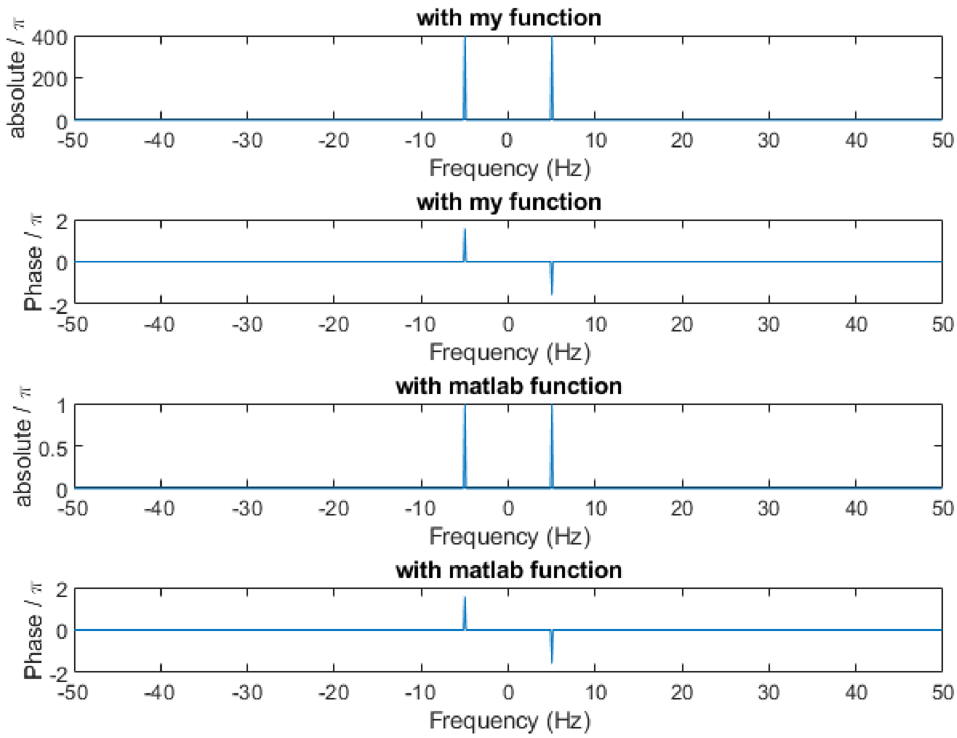
در این بخش با استفاده از تابع fourier و ezplot تبدیل فوریه تابع اولیه رسم شد.

قسمت دوم)

```
freq = -fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
X = zeros(1, length(freq));

for fr = 1:length(freq)
    for tf = 1:length(t)
          X(fr) = X(fr) + sin(10*pi*(t(tf)))*exp((-1i)*2*pi*t(tf)*freq(fr));
    end
end
```

در این قسمت با پیاده‌سازی فرمول تبدیل فوریه با استفاده از دو حلقه، خروجی تبدیل فوریه سیگنال سینوس را بدست می‌اوریم و با خروجی fft مقایسه می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید خروجی این دو قسمت یکسان می‌باشد و مطابق با مقدار تئوری است که در کلاس بررسی کردیم.