第 1 章

トポロジー導関数の定義

1.1 トポロジー導関数の定義

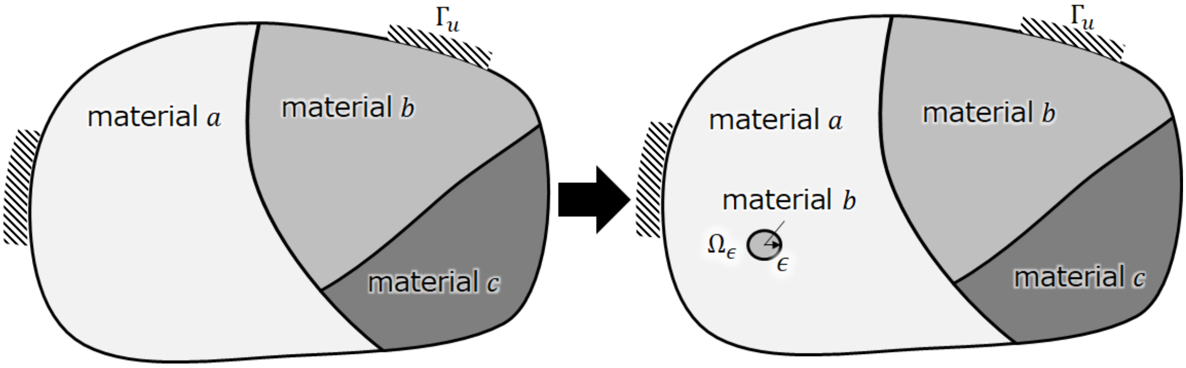

Fig.1.1 Definition of topological derivative

トポロジー導関数は設計領域中で定義される関数で，各点 $\boldsymbol{x}$ を中心とする微小な円領域が，別の材料に置き換わった時の目的関数の感度を表す．図 1.1 のように，材料 a の占める領域中の位置 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ を中心とする微小な円領域に，材料 b が生じた際のトポロジー導関数 $D_T F^{a \to b}(\boldsymbol{z})$ は以下のように定義される．

$$D_T F^{a \to b}(\boldsymbol{z}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\delta F^{a \to b}(\boldsymbol{z})}{g(\epsilon)} \tag{1.1}$$

ここで，$\delta F^{a \to b}$ は目的関数の変化，$g(\epsilon)$ は極限値が存在するように定義される ϵ の関数である．一般的に次式のように Ω_ϵ の測度で定義される．

$$g(\epsilon) = \pi \epsilon^2 \qquad \text{(for 2D)} \tag{1.2}$$

$$= \frac{3}{4} \pi \epsilon^3 \qquad \text{(for 3D)} \tag{1.3}$$

1.2　Topological-Shape Sensitivity Method

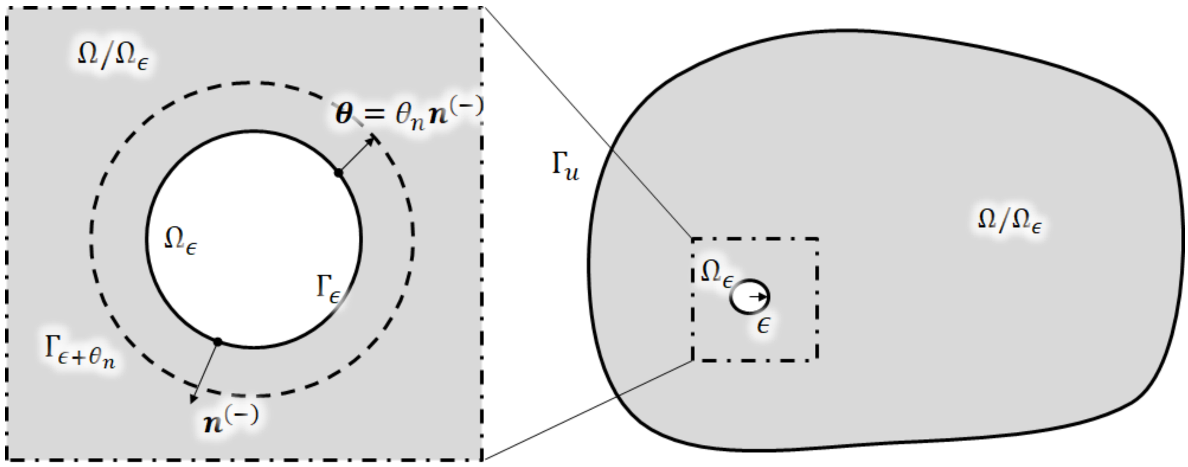

Fig.1.2　Concept of Topological-Shape Sensitivity Method

Novotny et al. は形状微分の極限をとることでトポロジー導関数を導出する方法を提案した．形状微分とは構造の境界が微小量移動した時の目的関数の感度である．

$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x})$ 方向に形状が微小変動するとき，領域写像 $\psi_s(\boldsymbol{x})$ は次式のように表される．

$$\psi_s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + s\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}) \tag{1.4}$$

この時，形状微分 $DF(\Omega) \cdot \boldsymbol{\theta}$ は以下のように定義される．

$$DF(\Omega) \cdot \boldsymbol{\theta} = \frac{d}{ds} F(\psi_s(\Omega)) \tag{1.5}$$

図 1.2 のように半径 ϵ の空洞 Ω_ϵ が物体領域 Ω/Ω_ϵ 内向き法線 $\boldsymbol{n}^{(-)}$ 方向に膨張する時, つまり

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_n \boldsymbol{n}^{(-)} \qquad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \tag{1.6}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on} \quad \Gamma/\Gamma_\epsilon \tag{1.7}$$

となる時の形状微分を考える．θ_n は正の値をとる定数である．トポロジー導関数は以下のように $\epsilon \to 0$ の極限をとることで得られる．

$$D_T F = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{g'(\epsilon)|\theta_n|} \Big(DF \cdot \boldsymbol{\theta} \Big)(\epsilon) \tag{1.8}$$

ただし，$g'(\epsilon)$ は $g(\epsilon)$ の ϵ に関する微分を表す．このような，形状微分に基づくトポロジー導関数の導出方法を Topological-Shape Sensitivity Method と呼び，以下のプロセスで導出す

る．まず，形状微分 $DF \cdot \boldsymbol{\theta}$ を求める．次に，$\epsilon \to 0$ とした時の状態場や随伴場の漸近的な振る舞いを調べる．その結果を式 (1.8) に代入することでトポロジー導関数を導出する．

第 2 章

弾性体の固有振動問題

2.1 固有振動問題の支配方程式

最大 n 個の材料を用いる場合を考える．p 番目 $(1 \leq p \leq n)$ の材料が占める領域を Ω_p，p 番目の材料と q 番目の材料の境界を Γ_{pq} とする．固有値 λ とそれに対応する固有振動モード $\boldsymbol{u}$ は以下の支配方程式に従う．

$$C^p_{ijkl} u_{k,lj} + \lambda \rho^p u_i = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega_p \tag{2.1}$$

$$u_i = 0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_D \tag{2.2}$$

$$C_{ijkl} u_{k,l} n_j = 0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_N \tag{2.3}$$

$$u^p_i = u^p_i \qquad \text{on} \quad \Gamma_{pq} \tag{2.4}$$

$$C^p_{ijkl} u^p_{k,l} n^p_j + C^q_{ijkl} u^q_{k,l} n^q_j = 0 \qquad \text{on} \quad \Gamma_{pq} \tag{2.5}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} (\rho^p u_i u_i) d\Omega = 1 \tag{2.6}$$

ただし，C_{ijkl} は弾性テンソル，ρ は質量密度を表す．

2.2 固有振動数最大化問題の目的関数

1 番目から α 番目までの固有振動数の最大化を目的とする場合，目的関数は以下のように，α 番目までの固有値の調和平均の形で定義される．

$$\min_{\Omega_p\{1 \leq p \leq n\}} F = -\Big(\sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{1}{\lambda_\beta} \Big)^{-1} \tag{2.7}$$

ただし，λ_β は β 番目の固有値を表す．α 個の固有値の内，小さいものから順に目的関数への影響が大きいため，この目的関数を最小化することで小さい固有値から優先的に最大化される．

この目的関数のトポロジー導関数は連鎖率から以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
D_T F &= \sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \lambda_\beta} D_T \lambda_\beta \\
&= -\Big(\sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{1}{\lambda_\beta} \Big)^{-2} \Big(\sum_{\beta=1}^{\alpha} \frac{D_T \lambda_\beta}{\lambda_\beta^2} \Big)
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

ゆえに，固有値 λ のトポロジー導関数を導出することで，目的関数のトポロジー導関数が得られる．

第 3 章

形状微分

3.1 形状微分の公式

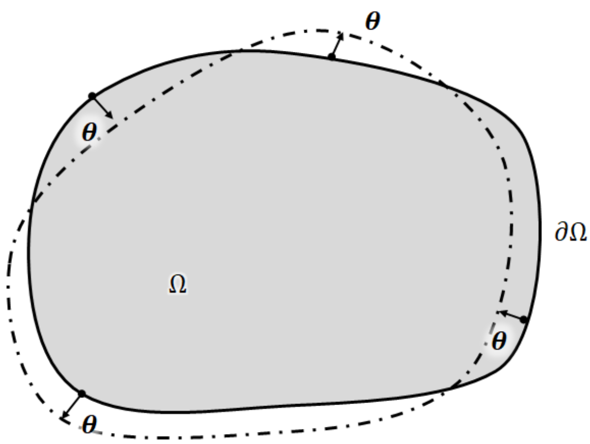

Fig.3.1 Deformation in $\boldsymbol{\theta}$ direction

形状微分には以下のような公式が存在する．

汎関数 J が積分領域 Ω に依存しない密度関数 f の領域積分によって，次式のように表されるとする．

$$J = \int_{\Omega} f d\Omega \tag{3.1}$$

この時，J の形状微分は次式で得られる．

$$DJ \cdot \theta = \int_{\Gamma} (\theta_i n_i) f d\Omega \tag{3.2}$$

ただし，$\boldsymbol{n}$ は Γ 上の外向きの単位法線ベクトルを表す．

次に，汎関数 J が密度関数 f の境界積分によって，次式のように表される場合を考える．

$$J = \int_\Gamma f d\Gamma \tag{3.3}$$

この時，J の形状微分は次式で得られる．

$$DJ \cdot \theta = \int_\Gamma (\theta_i n_i)\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j} n_j + Hf\Big) d\Omega \tag{3.4}$$

ただし，$H \equiv div\boldsymbol{n}$ は Γ の平均曲率を表す．

公式 (3.2),(3.4) はいずれも密度関数 f が積分領域に依存しないことが条件であることに注意が必要である．

3.2　ラグラジアンの定式化

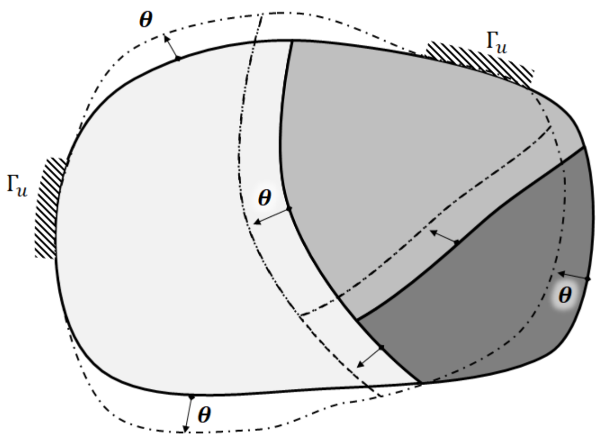

Fig.3.2　Shape derivative

ラグラジアンを以下のように定式化する．

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(\Omega_{p\{1\le p\le n\}};\boldsymbol{U},X,\boldsymbol{V},Y) =&X+\sum_{p=1}^{n}\int_{\Omega_p}\Big(V_{i,j}C^{p}_{ijkl}U_{k,l}-X\rho^{p}V_iU_i\Big)d\Omega\\
&-\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{p=q}^{n}\int_{\Gamma_{pq}}\frac{1}{2}\Big(C^{p}_{ijkl}U^{p}_{k,l}n^{p}_{j}-C^{q}_{ijkl}U^{q}_{k,l}n^{q}_{j}\Big)(V^{p}_{i}-V^{q}_{i})d\Gamma\\
&-\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{p=q}^{n}\int_{\Gamma_{pq}}\frac{1}{2}\Big(V^{p}_{i,j}C^{p}_{ijkl}n^{p}_{l}-V^{q}_{i,j}C^{q}_{ijkl}n^{q}_{l}\Big)(U^{p}_{k}-U^{q}_{k})d\Gamma\\
&-\sum_{p=1}^{n}\int_{\Gamma_{pu}}\Big(C^{p}_{ijkl}U^{p}_{k,l}n^{p}_{j}\Big)(V^{p}_{i})d\Gamma\\
&-\sum_{p=1}^{n}\int_{\Gamma_{pu}}\Big(V^{p}_{i,j}C^{p}_{ijkl}n^{p}_{l}\Big)(U^{p}_{k})d\Gamma\\
&+Y\Big\{1-\sum_{p=1}^{n}\int_{\Omega_p}(\rho^{p}U_iU_i)d\Omega\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

$\boldsymbol{U},X$ はそれぞれ状態変数 $\boldsymbol{u},\lambda$ に対応する変数，$\boldsymbol{V},Y$ はラグランジュ乗数である．ここで，$\boldsymbol{u}$ や λ が領域 Ω_p に依存する関数であるのに対し，$\boldsymbol{U},X,\boldsymbol{V},Y$ は Ω_p に依存しない関数であることに注意が必要である．

ラグラジアン (3.5) に対し，$\boldsymbol{V}$ に関して部分積分を行うと

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(\Omega_{p\{1\le p\le n\}};\boldsymbol{U},X,\boldsymbol{V},Y) =&X-\sum_{p=1}^{n}\int_{\Omega_p}\Big(C^{p}_{ijkl}U_{k,lj}+X\rho^{p}U_i\Big)V_id\Omega\\
&+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{p=q}^{n}\int_{\Gamma_{pq}}\frac{1}{2}\Big(C^{p}_{ijkl}U^{p}_{k,l}n^{p}_{j}+C^{q}_{ijkl}U^{q}_{k,l}n^{q}_{j}\Big)(V^{p}_{i}-V^{q}_{i})d\Gamma\\
&-\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{p=q}^{n}\int_{\Gamma_{pq}}\frac{1}{2}\Big(V^{p}_{i,j}C^{p}_{ijkl}n^{p}_{l}-V^{q}_{i,j}C^{q}_{ijkl}n^{q}_{l}\Big)(U^{p}_{k}-U^{q}_{k})d\Gamma\\
&+\sum_{p=1}^{n}\int_{\Gamma_{pN}}\Big(C^{p}_{ijkl}U^{p}_{k,l}n^{p}_{j}\Big)(V^{p}_{i})d\Gamma\\
&-\sum_{p=1}^{n}\int_{\Gamma_{pu}}\Big(V^{p}_{i,j}C^{p}_{ijkl}n^{p}_{l}\Big)(U^{p}_{k})d\Gamma\\
&+Y\Big\{1-\sum_{p=1}^{n}\int_{\Omega_p}(\rho^{p}U_iU_i)d\Omega\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

状態方程式 (2.1)〜(2.6) より，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{u}(\Omega_{p\{1\le p\le n\}})$，$X=\lambda(\Omega_{p\{1\le p\le n\}})$ とすれば，任意の

$\boldsymbol{V}, Y$ に対して次式が成立することがわかる．

$$\mathscr{L}(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{U}, Y) = \lambda(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}}) \tag{3.7}$$

3.3　ラグラジアンの停留条件

式 (3.7) より，$\lambda(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}})$ の形状微分は次式のように表される．

$$\begin{aligned} D\lambda(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}}) \cdot \boldsymbol{\theta} =& D\mathscr{L}(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{V}, Y) \cdot \boldsymbol{\theta} \\ &+ \left\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{V}}(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{V}, Y), \delta \boldsymbol{u} \right\rangle \\ &+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X}(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{V}, Y) \cdot \delta\lambda \end{aligned} \tag{3.8}$$

ここで，$\delta\boldsymbol{u}$ および $\delta\lambda$ はそれぞれ状態場 $\boldsymbol{u}$ および λ の変分である．$\boldsymbol{u}$ および λ が状態方程式を介して領域 Ω_p に依存しているため，連鎖率によって上式の右辺第 2 項および第 3 項が生じている．しかし，$\delta\boldsymbol{u}$ および $\delta\lambda$ は導出することが困難であるため，それらの計算を回避するためにラグラジアンの停留条件を考える．

$$\left\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{U}}, \delta \boldsymbol{U} \right\rangle \Bigg|_{opt} = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X} \Bigg|_{opt} = 0 \tag{3.10}$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{V}}, \delta \boldsymbol{V} \right\rangle \Bigg|_{opt} = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Y} \Bigg|_{opt} = 0 \tag{3.12}$$

まず，式 (3.11)，(3.12) に関しては，式 (3.6) より次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
0 =& \left\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{V}}, \delta \boldsymbol{V} \right\rangle \Big|_{opt} \\
=& \sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} \Big(C^p_{ijkl} U_{k,lj} + X \rho^p U_i \Big) \delta V_i d\Omega \\
&+ \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{p=q}^{n} \int_{\Gamma_{pq}} \frac{1}{2} \Big(C^p_{ijkl} U^p_{k,l} n^p_j + C^q_{ijkl} U^q_{k,l} n^q_j \Big) (\delta V^p_i - \delta V^q_i) d\Gamma \\
&- \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{p=q}^{n} \int_{\Gamma_{pq}} \frac{1}{2} \Big(\delta V^p_{i,j} C^p_{ijkl} n^p_l - \delta V^q_{i,j} C^q_{ijkl} n^q_l \Big) (U^p_k - U^q_k) d\Gamma \\
&+ \sum_{p=1}^{n} \int_{\Gamma_{pN}} \Big(U^p_{i,j} C^p_{ijkl} n^p_l \Big) (\delta V^p_i) d\Gamma \\
&- \sum_{p=1}^{n} \int_{\Gamma_{pu}} \Big(\delta V^p_{i,j} C^p_{ijkl} n^p_l \Big) (U^p_k) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

$$
0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Y} \Big|_{opt} = 1 - \sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} (\rho^p U_i U_i) d\Omega \tag{3.14}
$$

上式と状態方程式 (2.1)〜(2.6) との比較から，$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}(\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}})$，$X = \lambda(\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}})$ の時，任意の $\delta \boldsymbol{V}$ に対して停留条件 (3.11)，(3.12) が成立することがわかる．

$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}(\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}}), Y = \eta(\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}})$ が $\boldsymbol{U}, X$ に関する停留条件 (3.9)，(3.10) を満たすとすると，λ の形状微分は以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
D\lambda(\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}}) \cdot \boldsymbol{\theta} =& D\mathscr{L}(\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{v}, \eta) \cdot \boldsymbol{\theta} \\
&+ \Big\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{U}} (\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{v}, \eta), \delta \boldsymbol{u} \Big\rangle \\
&+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X} (\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}}; \boldsymbol{p}, \lambda, \boldsymbol{v}, \eta) \cdot \delta \lambda \\
&+ \Big\langle \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \boldsymbol{V}} (\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{v}, \eta), \delta \boldsymbol{v} \Big\rangle \\
&+ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Y} (\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}}; \boldsymbol{p}, \lambda, \boldsymbol{v}, \eta) \cdot \delta \eta \\
=& D\mathscr{L}(\Omega_{p\{1 \leq p \leq n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{v}, \eta) \cdot \boldsymbol{\theta}
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

ここで，上式の中辺第 2 項から第 5 項が停留条件 (3.9)〜(3.12) より，任意の $\delta \boldsymbol{u}, \delta \lambda, \delta \boldsymbol{v}, \delta \eta$ に対して 0 になることを用いた．式 (3.15) より，ラグラジアンの形状微分の式に $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}, X = \lambda, \boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}, Y = \eta$ を代入することで，固有値 λ の形状微分が得られることが分かる．

3.4　随伴方程式

続いて，$\boldsymbol{U}, X$ に関する停留条件 (3.9)，(3.10) をみたすような，$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}}), Y = \eta(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}})$ の条件について考える．

ラグラジアン (3.5) に対し，$\boldsymbol{U}$ に関して部分積分を行うと

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}};\boldsymbol{U},X,\boldsymbol{V},Y) =& X - \sum_{p=1}^{n}\int_{\Omega_p}\Big(V_{i,jl}C^p_{ijkl} + X\rho^p V_k\Big)U_k d\Omega \\
&-\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{p=q}^{n}\int_{\Gamma_{pq}}\frac{1}{2}\Big(C^p_{ijkl}U^p_{k,l}n^p_j - C^q_{ijkl}U^q_{k,l}n^q_j\Big)(V^p_i - V^q_i)d\Gamma \\
&+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{p=q}^{n}\int_{\Gamma_{pq}}\frac{1}{2}\Big(V^p_{i,j}C^p_{ijkl}n^p_l + V^q_{i,j}C^q_{ijkl}n^q_l\Big)(U^p_k - U^q_k)d\Gamma \\
&+\sum_{p=1}^{n}\int_{\Gamma_{pN}}\Big(V^p_{i,j}C^p_{ijkl}n^p_l\Big)(U^p_k)d\Gamma \\
&-\sum_{p=1}^{n}\int_{\Gamma_{pu}}\Big(C^p_{ijkl}U^p_{k,l}n^p_j\Big)(V^p_i)d\Gamma \\
&+Y\Big\{1-\sum_{p=1}^{n}\int_{\Omega_p}(\rho^p U_i U_i)d\Omega\Big\}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

となるため，停留点における $\boldsymbol{V}$ および Y をそれぞれ $\boldsymbol{v}$，η とすると，式 (3.9)，(3.10) は以下のようになる．

$$\begin{aligned}
0 =& \Big\langle\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\boldsymbol{U}},\delta\boldsymbol{U}\Big\rangle\Big|_{opt} \\
=&\sum_{p=1}^{n}\int_{\Omega_p}\Big(v_{k,lj}C^p_{ijkl} + \lambda\rho^p v_i + 2\eta\rho^p u_i\Big)\delta U_i d\Omega \\
&-\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{p=q}^{n}\int_{\Gamma_{pq}}\frac{1}{2}\Big(\delta U^p_{i,j}C^p_{ijkl}n^p_l - \delta U^q_{i,j}C^q_{ijkl}n^q_l\Big)(v^p_k - v^q_k)d\Gamma \\
&+\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{p=q}^{n}\int_{\Gamma_{pq}}\frac{1}{2}\Big(v^p_{k,l}C^p_{ijkl}n^p_j + v^q_{k,l}C^q_{ijkl}n^q_j\Big)(\delta U^p_i - \delta U^q_i)d\Gamma \\
&+\sum_{p=1}^{n}\int_{\Gamma_{pN}}\Big(v^p_{k,l}C^p_{ijkl}n^p_j\Big)\delta U^p_i d\Gamma \\
&-\sum_{p=1}^{n}\int_{\Gamma_{pu}}\Big(\delta U^p_{i,j}C^p_{ijkl}n^p_l\Big)v^p_k d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$0 = \left.\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial X}\right|_{opt} = 1 - \sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} \left(\rho^p v_i u_i\right) d\Omega \tag{3.18}$$

ここで，$C_{ijkl} = C_{klij}$ であることを用いて，添え字を $(i, j, k, l) \rightarrow (k, l, i, j)$ に変換した．以上から，$\boldsymbol{v}$，η が以下の随伴方程式を満たすとき，停留条件 (3.9)，(3.10) は成立する．

$$C^p_{ijkl} v_{k,lj} + \lambda \rho^p v_i + 2\eta \rho^p u_i = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_p \tag{3.19}$$

$$v_i = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_D \tag{3.20}$$

$$C_{ijkl} v_{k,l} n_j = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_N \tag{3.21}$$

$$v^p_i = v^q_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{pq} \tag{3.22}$$

$$C^p_{ijkl} v^p_{k,l} n^p_j + C^q_{ijkl} v^q_{k,l} n^q_j = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_{pq} \tag{3.23}$$

$$\sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} (\rho^p v_i u_i) d\Omega = 1 \tag{3.24}$$

次に，η の値を求める．まず，強形式の状態方程式 (2.1) に $\boldsymbol{v}$ をかけ，領域積分することで次式が得られる．

$$\sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} \left(v_{i,j} C^p_{ijkl} u_{k,l} - \lambda \rho^p v_i u_i \right) d\Omega = 0 \tag{3.25}$$

強形式の随伴方程式 (3.19) に $\boldsymbol{u}$ をかけ，領域積分することで次式が得られる．

$$\sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} \left(v_{i,j} C^p_{ijkl} u_{k,l} - \lambda \rho^p u_i v_i - 2\eta u_i u_i \right) d\Omega = 0 \tag{3.26}$$

式 (3.25) と式 (3.26) の差を取り，正規化条件 (2.6) を用いることで以下のように η が求まる．

$$\eta \sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} (\rho^p u_i u_i) d\Omega = \eta = 0 \tag{3.27}$$

ゆえに，随伴場の偏微分方程式 (3.19)〜(3.23) は状態場の偏微分方程式 (2.1)〜(2.5) と等しくなり，随伴場 $\boldsymbol{v}$ は次式のように状態場 $\boldsymbol{u}$ の定数倍で与えられる．

$$\boldsymbol{v} = K\boldsymbol{u} \tag{3.28}$$

さらに，状態場と随伴場の正規化条件 (2.6),(3.24) より，次式のように K の値が求まる．

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} \left(\rho^p u_i v_i \right) d\Omega \\ &= K \sum_{p=1}^{n} \int_{\Omega_p} \left(\rho^p u_i u_i \right) d\Omega \\ &= K \end{aligned} \tag{3.29}$$

ゆえに，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は等しい．

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \tag{3.30}$$

3.5　形状微分の公式の適用

式 (3.15) に式 (3.27),(3.30) を代入することで，固有値 λ の形状微分は次式のように表される．

$$D\lambda \cdot \boldsymbol{\theta} = D\mathscr{L}(\Omega_{p\{1\le p\le n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{u}, 0) \cdot \boldsymbol{\theta} \tag{3.31}$$

形状微分の公式 (3.2)，(3.4) を式 (3.31) のラグラジアンの形状微分に適用し，Γ_u 上で $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$ を仮定すると次式が得られる．

$$\begin{aligned}
&D\lambda \cdot \boldsymbol{\theta} \\
&= D\mathscr{L}(\Omega_{p\{1\le p\le n\}}; \boldsymbol{u}, \lambda, \boldsymbol{u}, 0) \cdot \boldsymbol{\theta} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \int_{\Gamma_p} (\theta_m n_m^p) \Big(u_{i,j} C_{ijkl}^p u_{k,l} - \lambda \rho^p u_i u_i \Big) d\Omega \\
&- \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{p=q}^{n} \int_{\Gamma_{pq}} (\theta_m n_m^p) \Big(\frac{\partial}{\partial x_\gamma} n_\gamma^p + H^p \Big) \Big(C_{ijkl}^p u_{k,l}^p n_j^p - C_{ijkl}^q u_{k,l}^q n_j^q \Big) (u_i^p - u_i^q) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.32}$$

境界条件から $\partial\Omega_{pq}$ 上で $\boldsymbol{u}^p = \boldsymbol{u}^q$ であることに注意すると，固有値 λ の形状微分は次式のように導出される．

$$\begin{aligned}
D\lambda \cdot \boldsymbol{\theta} =& \sum_{p=1}^{n} \int_{\Gamma_p} (\theta_m n_m^p) \Big(u_{i,j} C_{ijkl}^p u_{k,l} - \lambda \rho^p u_i u_i \Big) d\Omega \\
&- \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{p=q}^{n} \int_{\Gamma_{pq}} (\theta_m n_m^p) \Big(C_{ijkl}^p u_{k,l}^p n_j^p - C_{ijkl}^q u_{k,l}^q n_j^q \Big) (u_{i,\gamma}^p n_\gamma^p - u_{i,\gamma}^q n_\gamma^p) d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.33}$$

第 4 章

固有振動モードの漸近展開

4.1　固有振動モードの変動に関する方程式

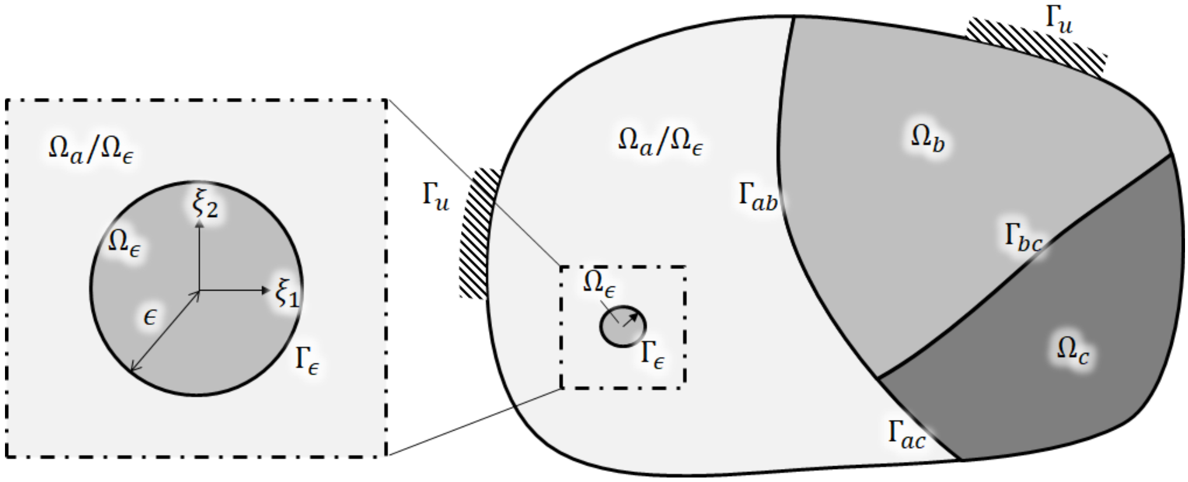

Fig.4.1　Emergence of a circular region

材料 a で占められた領域 Ω_a 中の微小な円領域 Ω_ϵ に材料 b が生成した際の，固有振動モード $\boldsymbol{u}^\epsilon$ および固有値 λ^ϵ について考える．ただし，これによって固有振動モードの順番の変化

は起こらないと仮定する．この時の支配方程式は以下のようになる．

$$C^b_{ijkl}u^\epsilon_{k,lj} + \lambda^\epsilon \rho^b u^\epsilon_i = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\epsilon \tag{4.1}$$

$$C^a_{ijkl}u^\epsilon_{k,lj} + \lambda^\epsilon \rho^a u^\epsilon_i = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_a \backslash \Omega_\epsilon \tag{4.2}$$

$$C^p_{ijkl}u^\epsilon_{k,lj} + \lambda^\epsilon \rho^p u^\epsilon_i = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_p \quad (p \neq a) \tag{4.3}$$

$$u^{\epsilon b}_i = u^{\epsilon a}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \tag{4.4}$$

$$C^b_{ijkl}u^{\epsilon b}_{k,l}n^b_j + C^a_{ijkl}u^{\epsilon a}_{k,l}n^a_j = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \tag{4.5}$$

$$u^{\epsilon p}_i = u^{\epsilon q}_i \quad \text{on} \quad \Gamma_{pq} \tag{4.6}$$

$$C^p_{ijkl}u^{\epsilon p}_{k,l}n^p_j + C^q_{ijkl}u^{\epsilon q}_{k,l}n^q_j = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_{pq} \tag{4.7}$$

$$\sum_{p=1,p\neq a}^{n} \int_{\Omega_p} (\rho^p u^\epsilon_i u^\epsilon_i) d\Omega + \int_{\Omega_a \backslash \Omega_\epsilon} (\rho^a u^\epsilon_i u^\epsilon_i) d\Omega + \int_{\Omega_\epsilon} (\rho^b u^\epsilon_i u^\epsilon_i) d\Omega = 1 \tag{4.8}$$

$\boldsymbol{u}^\epsilon, \lambda^\epsilon$ を，微小な材料 b の領域が生成される前の固有ベクトルおよび固有値 $\boldsymbol{u}, \lambda$ 用いて展開すると，次式のようになる．

$$\boldsymbol{u}^\epsilon(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\chi_{R^2/\Omega} + \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \tag{4.9}$$

$$\lambda^\epsilon = \lambda + \hat{\lambda} \tag{4.10}$$

ここで，Ω_ϵ の中心座標を $\boldsymbol{x}_0$ とし，$\boldsymbol{\xi} = \dfrac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}}{\epsilon}$ を導入し，$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ を ϵ に関して次式のように漸近展開する．

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) =& \{\hat{\boldsymbol{u}}^{(I-)}(\boldsymbol{x}) + \epsilon\hat{\boldsymbol{u}}^{(II-)}(\boldsymbol{x})\}\chi_{\Omega_\epsilon} + \{\hat{\boldsymbol{u}}^{(I+)}(\boldsymbol{x}) + \epsilon\hat{\boldsymbol{u}}^{(II+)}(\boldsymbol{x})\}\chi_{R^2\backslash\Omega_\epsilon} + O(\epsilon^2)\\ =& \{\hat{\boldsymbol{w}}^{(I-)}(\boldsymbol{\xi}) + \epsilon\hat{\boldsymbol{w}}^{(II-)}(\boldsymbol{\xi})\}\chi_{\Omega_\epsilon} + \{\hat{\boldsymbol{w}}^{(I+)}(\boldsymbol{\xi}) + \epsilon\hat{\boldsymbol{w}}^{(II+)}(\boldsymbol{\xi})\}\chi_{R^2\backslash\Omega_\epsilon} + O(\epsilon^2)\\ =& \{\hat{\boldsymbol{w}}^{(-)}(\boldsymbol{\xi})\}\chi_{\Omega_\epsilon} + \{\hat{\boldsymbol{w}}^{(+)}(\boldsymbol{\xi})\}\chi_{R^2\backslash\Omega_\epsilon} + O(\epsilon^2)\end{aligned} \tag{4.11}$$

ただし，上付き添え字の $+$ は微小領域 Ω_ϵ の外側を,$-$ は内側を示している．この時，$\hat{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{\xi})^{(\pm)}$ は次式を満たす．

$$C^b_{ijkl}\Big\{\frac{1}{\epsilon^2}\frac{\partial^2\hat{w}^{(-)}_k}{\partial\xi_l\partial\xi_j}(\boldsymbol{\xi})\Big\} + \big(\lambda+\hat{\lambda}\big)\rho^b\hat{w}^{(-)}_i(\boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_\epsilon \tag{4.12}$$

$$C^a_{ijkl}\Big\{\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l\partial x_j}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{\epsilon^2}\frac{\partial^2\hat{w}^{(+)}_k}{\partial\xi_l\partial\xi_j}(\boldsymbol{\xi})\Big\} + \big(\lambda+\hat{\lambda}\big)\rho^a\big\{u_i(\boldsymbol{x}) + \hat{w}^{(+)}_i(\boldsymbol{\xi})\big\} = 0 \quad \text{in} \quad \Omega_a\backslash\Omega_\epsilon \tag{4.13}$$

$$\hat{w}^{(-)}_i(\boldsymbol{\xi}) = u_i(\boldsymbol{x}) + \hat{w}^{(+)}_i(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \tag{4.14}$$

$$C^b_{ijkl}\Big\{\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\hat{w}^{(-)}_k}{\partial\xi_l}(\boldsymbol{\xi})n^{(-)}_j\Big\} + C^a_{ijkl}\Big\{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\boldsymbol{x})n^{(+)}_j + \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\hat{w}^{(+)}_k}{\partial\xi_l}(\boldsymbol{\xi})n^{(+)}_j\Big\} = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \tag{4.15}$$

$$\sum_{p=1,p\neq a}^{n}\int_{\Omega_p}\rho^p(u_iu_i+2u_i\hat{w}_i^{(+)}+\hat{w}_i^{(+)}\hat{w}_i^{(+)})d\Omega$$
$$+\int_{\Omega_a\backslash\Omega_\epsilon}\rho^a(u_iu_i+2u_i\hat{w}_i^{(+)}+\hat{w}_i^{(+)}\hat{w}_i^{(+)})d\Omega+\int_{\Omega_\epsilon}\rho^b(\hat{w}_i^{(-)}\hat{w}_i^{(-)})d\Omega=1 \quad (4.16)$$

式 (4.13) から式 (2.1) を引き，整理することで，以下のようになる．

$$C^b_{ijkl}\frac{\partial^2\hat{w}_k^{(-)}}{\partial\xi_l\partial\xi_j}(\boldsymbol{\xi})+\epsilon^2\Big\{(\lambda+\hat{\lambda})\rho^b\hat{w}_i^{(-)}(\boldsymbol{\xi})\Big\}=0 \quad \text{in} \quad \Omega_\epsilon \quad (4.17)$$

$$C^a_{ijkl}\frac{\partial^2\hat{w}_k^{(+)}}{\partial\xi_l\partial\xi_j}(\boldsymbol{\xi})+\epsilon^2\Big\{\lambda\rho^a\hat{w}_i^{(+)}(\boldsymbol{\xi})+\hat{\lambda}\rho^a\Big(u_i(\boldsymbol{x})+\hat{w}_i^{(+)}(\boldsymbol{\xi})\Big)\Big\}=0 \quad \text{in} \quad \Omega_a\backslash\Omega_\epsilon \quad (4.18)$$

$$\hat{w}_i^{(-)}(\boldsymbol{\xi})-\hat{w}_i^{(+)}(\boldsymbol{\xi})=u_i(\boldsymbol{x})=u_i(\boldsymbol{z})+\epsilon\xi_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{z})+O(\epsilon^2) \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \quad (4.19)$$

$$C^b_{ijkl}\frac{\partial\hat{w}_k^{(-)}}{\partial\xi_l}(\boldsymbol{\xi})n_j^{(-)}-C^a_{ijkl}\frac{\partial\hat{w}_k^{(+)}}{\partial\xi_l}(\boldsymbol{\xi})n_j^{(-)}=\epsilon C^a_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\boldsymbol{z})+O(\epsilon^2) \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \quad (4.20)$$

$$\sum_{p=1}^{n}\int_{\Omega_p}\rho^p(2u_i\hat{w}_i^{(+)}+\hat{w}_i^{(+)}\hat{w}_i^{(+)})d\Omega+\int_{\Omega_\epsilon}\{\rho^b\hat{w}_i^{(-)}\hat{w}_i^{(-)}-\rho^au_iu_i\}d\Omega=0 \quad (4.21)$$

ϵ の 0 次の項を整理すると

$$C^b_{ijkl}\frac{\partial^2\hat{w}_k^{(I-)}}{\partial\xi_l\partial\xi_j}(\boldsymbol{\xi})=0 \quad \text{in} \quad \Omega_\epsilon \quad (4.22)$$

$$C^a_{ijkl}\frac{\partial^2\hat{w}_k^{(I+)}}{\partial\xi_l\partial\xi_j}(\boldsymbol{\xi})=0 \quad \text{in} \quad \Omega\backslash\Omega_\epsilon \quad (4.23)$$

$$\hat{w}_i^{(I-)}(\boldsymbol{\xi})-\hat{w}_i^{(I+)}(\boldsymbol{\xi})=u_i(\boldsymbol{z}) \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \quad (4.24)$$

$$C^b_{ijkl}\frac{\partial\hat{w}_k^{(I-)}}{\partial\xi_l}(\boldsymbol{\xi})n_j^{(-)}-C^a_{ijkl}\frac{\partial\hat{w}_k^{(I+)}}{\partial\xi_l}(\boldsymbol{\xi})n_j^{(-)}=0 \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \quad (4.25)$$

ϵ の 1 次の項を整理すると

$$C^b_{ijkl}\frac{\partial^2\hat{w}_k^{(II-)}}{\partial\xi_l\partial\xi_j}(\boldsymbol{\xi})=0 \quad \text{in} \quad \Omega_\epsilon \quad (4.26)$$

$$C^a_{ijkl}\frac{\partial^2\hat{w}_k^{(II+)}}{\partial\xi_l\partial\xi_j}(\boldsymbol{\xi})=0 \quad \text{in} \quad \Omega\backslash\Omega_\epsilon \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}\hat{w}_i^{(II-)}(\boldsymbol{\xi})-\hat{w}_i^{(II+)}(\boldsymbol{\xi})&=\xi_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{z})\\&\equiv u_i^{(II)} \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \quad (4.28)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C^b_{ijkl}\frac{\partial\hat{w}_k^{(II-)}}{\partial\xi_l}(\boldsymbol{\xi})n_j^{(-)}-C^a_{ijkl}\frac{\partial\hat{w}_k^{(II+)}}{\partial\xi_l}(\boldsymbol{\xi})n_j^{(-)}&=C^a_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\boldsymbol{z})n_j^{(-)}\\&\equiv t_i^{(II)} \quad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \quad (4.29)\end{aligned}$$

以上から，$\hat{\boldsymbol{w}}^{(I-)}$,$\hat{\boldsymbol{w}}^{(I+)}$,$\hat{\boldsymbol{w}}^{(II-)}$,$\hat{\boldsymbol{w}}^{(II+)}$ は，それぞれ平衡方程式に従うことが分かる．

4.2　等方弾性体の平衡方程式の一般解

応力が x_3 成分に依存しない場合の平衡方程式は以下のようになる．

$$\frac{\partial \sigma_{x_1x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{x_1x_2}}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{x_1x_2}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{x_2x_2}}{\partial x_2} = 0 \tag{4.30}$$

あるスカラー関数 Φ を用いて，応力テンソルの各成分を次式で表現することができれば，その応力は明らかに平衡方程式 (4.30) を満たす．

$$\sigma_{x_1x_1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \qquad \sigma_{x_2x_2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \qquad \sigma_{x_1x_2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{4.31}$$

このスカラー関数 Φ は The Airy stress function と呼ばれる．弾性体を解析するには平衡条件に加えて適合条件を満たす必要がある．適合条件とは，弾性体の複数の点の相対的な位置関係が変形によって変化しないことを保証する条件で，二次元の場合には歪みを用いて次式で与えられる．

$$\frac{\partial^2 e_{x_1x_1}}{\partial^2 x_2} - 2\frac{\partial^2 e_{x_1x_2}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 e_{x_2x_2}}{\partial^2 x_1} \tag{4.32}$$

また，等方弾性体の場合，ひずみと応力の関係式は以下で表される．

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} e_{kl} \\ C_{ijkl} &= \frac{3-\kappa}{\kappa-1}\mu\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \tag{4.33}$$

ただし，μ は $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ で与えられる Lame's constant，κ は Kolosov's constant と呼ばれる定数で，平面応力状態では式 (4.34), 平面ひずみ状態では式 (4.35) となる．

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} \qquad \text{(for plain stress)} \tag{4.34}$$

$$\kappa = 3 - 4\nu \qquad \text{(for plain strain)} \tag{4.35}$$

ここで，式 (4.31) および (4.33) から，ひずみ e_{ij} を Φ で表現すると次式のようになる．

$$\begin{aligned} e_{x_1x_1} &= \frac{\kappa+1}{8\mu}\sigma_{x_1x_1} - \frac{3-\kappa}{8\mu}\sigma_{x_2x_2} = \frac{\kappa+1}{8\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} - \frac{3-\kappa}{8\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} \\ e_{x_2x_2} &= \frac{\kappa+1}{8\mu}\sigma_{x_2x_2} - \frac{3-\kappa}{8\mu}\sigma_{x_1x_1} = \frac{\kappa+1}{8\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} - \frac{3-\kappa}{8\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} \\ e_{x_1x_2} &= \frac{1}{2\mu}\sigma_{x_1x_2} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \tag{4.36}$$

式 (4.32) に (4.36) を代入し，整理すると次式が得られる．

$$\nabla^4 \Phi = 0 \tag{4.37}$$

ゆえに Φ は重調和関数となる．

二次元の極座標系において，式 (4.37) には The Michell solution と呼ばれる一般解が存在し，Φ は以下のように展開される．

$$
\begin{aligned}
\Phi =& A_{01}r^2 + A_{02}r^2\ln(r) + A_{03}\ln(r) + A_{04}\theta \\
&+ \left(A_{11}r^3 + A_{12}r\ln(r) + A_{14}r^{-1}\right)\cos(\theta) + A_{13}r\theta\sin(\theta) \\
&+ \left(B_{11}r^3 + B_{12}r\ln(r) + B_{14}r^{-1}\right)\sin(\theta) + B_{13}r\theta\cos(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left(A_{m1}r^{m+2} + A_{m2}r^{-m+2} + A_{m3}r^{m} + A_{m4}r^{-m}\right)\cos(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left(B_{m1}r^{m+2} + B_{m2}r^{-m+2} + B_{m3}r^{m} + B_{m4}r^{-m}\right)\sin(m\theta)
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

極座標表示における，応力テンソルの各成分 $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$ は The Airy stress function Φ の微分を用いて次式で表現される．

$$
\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}, \qquad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta}, \qquad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \tag{4.39}
$$

ゆえに，式 (4.39) に式 (4.38) を代入すると，$\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$ は次式のようになる．

$$
\begin{aligned}
\sigma_{rr} =& 2A_{01} + A_{02}\left\{2r\ln(r) + 1\right\} + A_{03}r^{-2} \\
&+ 2A_{11}r\cos(\theta) + A_{12}r^{-1}\cos(\theta) + 2A_{13}r^{-1}\cos(\theta) - 2A_{14}r^{-3}\cos(\theta) \\
&+ 2B_{11}r\sin(\theta) + B_{12}r^{-1}\sin(\theta) - 2B_{13}r^{-1}\sin(\theta) - 2B_{14}r^{-3}\sin(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{-A_{m1}(m+1)(m-2)r^{m} - A_{m2}(m+2)(m-1)r^{-m} \\
&\qquad - A_{m3}m(m-1)r^{m-2} - A_{m4}m(m+1)r^{-m-2}\Big\}\cos(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{-B_{m1}(m+1)(m-2)r^{m} - B_{m2}(m+2)(m-1)r^{-m} \\
&\qquad - B_{m3}m(m-1)r^{m-2} - B_{m4}m(m+1)r^{-m-2}\Big\}\sin(m\theta)
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta} =& A_{04}r^{-2} \\ &+ 2A_{11}r\sin(\theta) + A_{12}r^{-1}\sin(\theta) - 2A_{14}r^{-3}\sin(\theta) \\ &- 2B_{11}r\cos(\theta) - B_{12}r^{-1}\cos(\theta) + 2B_{14}r^{-3}\cos(\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{A_{m1}m(m+1)r^{m} - A_{m2}m(m-1)r^{-m} \\ &\qquad + A_{m3}m(m-1)r^{m-2} - A_{m4}m(m+1)r^{-m-2}\Big\}\sin(m\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{-B_{m1}m(m+1)r^{m} + B_{m2}m(m-1)r^{-m} \\ &\qquad - B_{m3}m(m-1)r^{m-2} + B_{m4}m(m+1)r^{-m-2}\Big\}\cos(m\theta)\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} =& 2A_{01} + A_{02}\big\{2r\ln(r) + 3\big\} - A_{03}r^{-2} \\ &+ 6A_{11}r\cos(\theta) + A_{12}r^{-1}\cos(\theta)2A_{14}r^{-3}\cos(\theta) \\ &+ 6B_{11}r\sin(\theta) + B_{12}r^{-1}\sin(\theta) + 2B_{14}r^{-3}\sin(\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{A_{m1}(m+1)(m+2)r^{m} + A_{m2}(m-1)(m-2)r^{-m} \\ &\qquad + A_{m3}m(m-1)r^{m-2} + A_{m4}m(m+1)r^{-m-2}\Big\}\cos(m\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{B_{m1}(m+1)(m+2)r^{m} + B_{m2}(m-1)(m-2)r^{-m} \\ &\qquad + B_{m3}m(m-1)r^{m-2} + B_{m4}m(m+1)r^{-m-2}\Big\}\sin(m\theta)\end{aligned} \tag{4.42}$$

さらに極座標系の歪み-変位関係式は (4.43) のようになる．

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad e_{r\theta} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\Big), \qquad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \tag{4.43}$$

式 (4.40)～式 (4.42), 構成式 (4.33)，および歪み-変位関係式 (4.43) を用いて u_r および u_θ を

計算すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
2\mu u_r =& D_1\cos(\theta) + D_2\sin(\theta) \\
&+ A_{01}(\kappa-1)r + A_{02}\Big\{(\kappa-1)r\ln(r) - r\Big\} - A_{03}r^{-1} \\
&+ A_{11}(\kappa-2)r^2\cos(\theta) + A_{12}\frac{1}{2}\Big\{(\kappa+1)\theta\sin(\theta) - \cos(\theta) + (\kappa-1)\ln(r)\cos(\theta)\Big\} \\
&\quad + A_{13}\frac{1}{2}\Big\{(\kappa-1)\theta\sin(\theta) - \cos(\theta) + (\kappa+1)\ln(r)\cos(\theta)\Big\} + A_{14}r^{-2}\cos(\theta) \\
&+ B_{11}(\kappa-2)r^2\sin(\theta) + B_{12}\frac{1}{2}\Big\{-(\kappa+1)\theta\cos(\theta) - \sin(\theta) + (\kappa-1)\ln(r)\sin(\theta)\Big\} \\
&\quad + B_{13}\frac{1}{2}\Big\{(\kappa-1)\theta\cos(\theta) + \sin(\theta) - (\kappa+1)\ln(r)\sin(\theta)\Big\} + B_{14}r^{-2}\sin(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{A_{m1}(\kappa-m-1)r^{m+1} + A_{m2}(\kappa+m-1)r^{-m+1} \\
&\qquad\qquad - A_{m3}mr^{m-1} + A_{m4}mr^{-m-1}\Big\}\cos(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{B_{m1}(\kappa-m-1)r^{m+1} + B_{m2}(\kappa+m-1)r^{-m+1} \\
&\qquad\qquad - B_{m3}mr^{m-1} + B_{m4}mr^{-m-1}\Big\}\sin(m\theta)
\end{aligned}
\tag{4.44}
$$

$$
\begin{aligned}
2\mu u_\theta =& -D_1\sin(\theta) + D_2\cos(\theta) + D_3 r \\
&+ A_{02}(\kappa+1)r\theta - A_{04}r^{-1} \\
&+ A_{11}(\kappa+2)r^2\sin(\theta) + A_{12}\frac{1}{2}\Big\{(\kappa+1)\theta\cos(\theta) - \sin(\theta) - (\kappa-1)\ln(r)\sin(\theta)\Big\} \\
&\quad + A_{13}\frac{1}{2}\Big\{(\kappa-1)\theta\cos(\theta) - \sin(\theta) - (\kappa+1)\ln(r)\sin(\theta)\Big\} + A_{14}r^{-2}\sin(\theta) \\
&- B_{11}(\kappa+2)r^2\cos(\theta) + B_{12}\frac{1}{2}\Big\{(\kappa+1)\theta\sin(\theta) + \cos(\theta) + (\kappa-1)\ln(r)\cos(\theta)\Big\} \\
&\quad + B_{13}\frac{1}{2}\Big\{-(\kappa-1)\theta\sin(\theta) - \cos(\theta) - (\kappa+1)\ln(r)\cos(\theta)\Big\} - B_{14}r^{-2}\cos(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{A_{m1}(\kappa+m+1)r^{m+1} - A_{m2}(\kappa-m+1)r^{-m+1} \\
&\qquad\qquad + A_{m3}mr^{m-1} - A_{m4}mr^{-m-1}\Big\}\sin(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{-B_{m1}(\kappa+m+1)r^{m+1} + B_{m2}(\kappa-m+1)r^{-m+1} \\
&\qquad\qquad - B_{m3}mr^{m-1} - B_{m4}mr^{-m-1}\Big\}\cos(m\theta)
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

ただし，式 (4.44) の $D_1\cos(\theta) + D_2\sin(\theta)$ や式 (4.45) の $-D_1\sin(\theta) + D_2\cos(\theta) + D_3 r$ は式 (4.43) を積分することで現れる不定積分の項である．

4.3　$\hat{\boldsymbol{w}}^{(I-)}$ の The Michell solution による表現

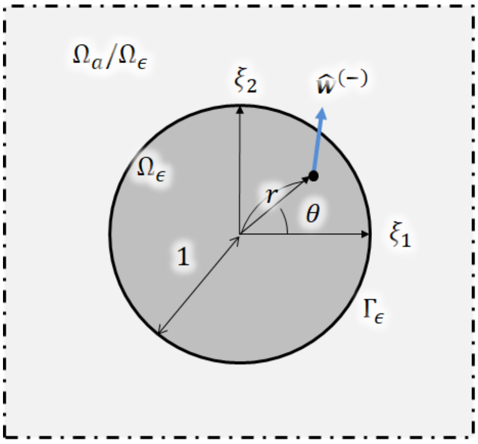

Fig.4.2　$\hat{\boldsymbol{w}}^{(-)}$ in Ω_ϵ

式 (4.46) のように (ξ_1, ξ_2) 座標を (r, θ) 座標に変換する．

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r\cos(\theta)\\ \xi_2 &= r\sin(\theta)\end{aligned} \tag{4.46}$$

Ω_ϵ 内の $\hat{\boldsymbol{w}}^{(I-)}$ に関する The Airy stress function $\Phi^{(I-)}$ は，The Michell solution (4.38) を用いて以下のように展開できる．

$$\begin{aligned}\Phi^{(I-)} =& A_{01}^{(I-)}r^2 + A_{02}^{(I-)}r^2\ln(r) + A_{03}^{(I-)}\ln(r) + A_{04}^{(I-)}\theta\\ &+ \left(A_{11}^{(I-)}r^3 + A_{12}^{(I-)}r\ln(r) + A_{14}^{(I-)}r^{-1}\right)\cos(\theta) + A_{13}^{(I-)}r\theta\sin(\theta)\\ &+ \left(B_{11}^{(I-)}r^3 + B_{12}^{(I-)}r\ln(r) + B_{14}^{(I-)}r^{-1}\right)\sin(\theta) + B_{13}^{(I-)}r\theta\cos(\theta)\\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left(A_{m1}^{(I-)}r^{m+2} + A_{m2}^{(I-)}r^{-m+2} + A_{m3}^{(I-)}r^{m} + A_{m4}^{(I-)}r^{-m}\right)\cos(m\theta)\\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left(B_{m1}^{(I-)}r^{m+2} + B_{m2}^{(I-)}r^{-m+2} + B_{m3}^{(I-)}r^{m} + B_{m4}^{(I-)}r^{-m}\right)\sin(m\theta)\end{aligned} \tag{4.47}$$

$r \to 0$ において，$|\hat{\boldsymbol{w}}^{(I-)}| < \infty$,$|\hat{\sigma}^{(I-)}| < \infty$ となる条件は以下のようになる，

$$
\begin{aligned}
A_{02}^{(I-)} &= 0, & A_{03}^{(I-)} &= 0, & A_{04}^{(I-)} &= 0 & & \\
A_{12}^{(I-)} &= 0, & A_{13}^{(I-)} &= 0, & A_{14}^{(I-)} &= 0 & & \\
B_{12}^{(I-)} &= 0, & B_{13}^{(I-)} &= 0, & B_{14}^{(I-)} &= 0 & & \\
& & A_{m2}^{(I-)} &= 0, & A_{m4}^{(I-)} &= 0 & (m \geq 2) & \\
& & B_{m2}^{(I-)} &= 0, & B_{m4}^{(I-)} &= 0 & (m \geq 2) & \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

ゆえに，式 (4.48) を用いて,$\hat{w}_r^{(I-)}, \hat{w}_\theta^{(I-)}, \hat{\sigma}_{rr}^{(I-)}, \hat{\sigma}_{r\theta}^{(I-)}$ を整理すると，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
2\mu^b \hat{w}_r^{(I-)} =& D_1^{(I-)} \cos(\theta) + D_2^{(I-)} \sin(\theta) \\
& + A_{01}^{(I-)} (\kappa^b - 1) r \\
& + A_{11}^{(I-)} (\kappa^b - 2) r^2 \cos(\theta) + B_{11}^{(I-)} (\kappa^b - 2) r^2 \sin(\theta) \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ A_{m1}^{(I-)} (\kappa^b - m - 1) r^{m+1} - A_{m3}^{(I-)} m r^{m-1} \right\} \cos(m\theta) \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ B_{m1}^{(I-)} (\kappa^b - m - 1) r^{m+1} - B_{m3}^{(I-)} m r^{m-1} \right\} \sin(m\theta) \qquad (4.49)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\mu^b \hat{w}_\theta^{(I-)} =& - D_1^{(I-)} \sin(\theta) + D_2^{(I-)} \cos(\theta) + D_3^{(I-)} r \\
& + A_{11}^{(I-)} (\kappa^b + 2) r^2 \sin(\theta) - B_{11}^{(I-)} (\kappa^b + 2) r^2 \cos(\theta) \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ A_{m1}^{(I-)} (\kappa^b + m + 1) r^{m+1} + A_{m3}^{(I-)} m r^{m-1} \right\} \sin(m\theta) \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ -B_{m1}^{(I-)} (\kappa^b + m + 1) r^{m+1} - B_{m3}^{(I-)} m r^{m-1} \right\} \cos(m\theta) \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{rr}^{(I-)} =& 2A_{01}^{(I-)} \\
& + 2A_{11}^{(I-)} r \cos(\theta) + 2B_{11}^{(I-)} r \sin(\theta) \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ -A_{m1}^{(I-)} (m+1)(m-2) r^m - A_{m3}^{(I-)} m(m-1) r^{m-2} \right\} \cos(m\theta) \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ -B_{m1}^{(I-)} (m+1)(m-2) r^m - B_{m3}^{(I-)} m(m-1) r^{m-2} \right\} \sin(m\theta) \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{r\theta}^{(I-)} =& 2A_{11}^{(I-)} r\sin(\theta) - 2B_{11}^{(I-)} r\cos(\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{A_{m1}^{(I-)} m(m+1)r^m + A_{m3}^{(I-)} m(m-1)r^{m-2}\right\}\sin(m\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{-B_{m1}^{(I-)} m(m+1)r^m - B_{m3}^{(I-)} m(m-1)r^{m-2}\right\}\cos(m\theta) \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\theta\theta}^{(I-)} =& 2A_{01}^{(I-)} \\ &+ 6A_{11}^{(I-)} r\cos(\theta) + 6B_{11}^{(I-)} r\sin(\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{A_{m1}^{(I-)} (m+1)(m+2)r^m + A_{m3}^{(I-)} m(m-1)r^{m-2}\right\}\cos(m\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{B_{m1}^{(I-)} (m+1)(m+2)r^m + B_{m3}^{(I-)} m(m-1)r^{m-2}\right\}\sin(m\theta) \end{aligned} \tag{4.53}$$

4.4 $\hat{\boldsymbol{w}}^{(I+)}$ の The Michell solution による表現

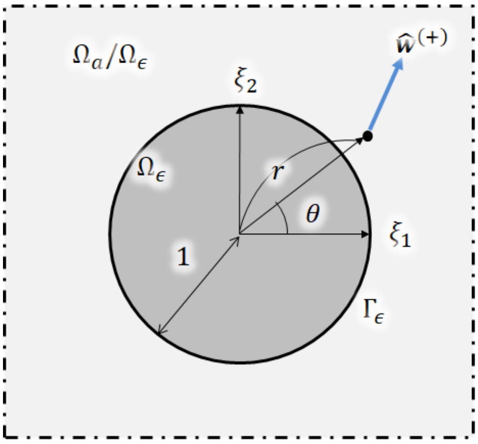

Fig.4.3　$\hat{\boldsymbol{w}}^{(+)}$ outside Ω_ϵ

一方，$\Omega_a\backslash\Omega_\epsilon$ における The Airy stress function $\Phi^{(I+)}$ に関しても同様に，The Michell solution (4.38) を用いて以下のように展開できる．

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(I+)} =& A_{01}^{(I+)} r^2 + A_{02}^{(I+)} r^2 \ln(r) + A_{03}^{(I+)} \ln(r) + A_{04}^{(I+)} \theta \\
&+ \left(A_{11}^{(I+)} r^3 + A_{12}^{(I+)} r \ln(r) + A_{14}^{(I+)} r^{-1}\right) \cos(\theta) + A_{13}^{(I+)} r\theta \sin(\theta) \\
&+ \left(B_{11}^{(I+)} r^3 + B_{12}^{(I+)} r \ln(r) + B_{14}^{(I+)} r^{-1}\right) \sin(\theta) + B_{13}^{(I+)} r\theta \cos(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \left(A_{m1}^{(I+)} r^{m+2} + A_{m2}^{(I+)} r^{-m+2} + A_{m3}^{(I+)} r^{m} + A_{m4}^{(I+)} r^{-m}\right) \cos(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \left(B_{m1}^{(I+)} r^{m+2} + B_{m2}^{(I+)} r^{-m+2} + B_{m3}^{(I+)} r^{m} + B_{m4}^{(I+)} r^{-m}\right) \sin(m\theta)
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

$r \to \infty$ において，$|\hat{\boldsymbol{w}}^{(I+)}| \to 0$ となる条件は以下のようになる，

$$
\begin{aligned}
&D_1^{(I+)} = 0, \quad && D_2^{(I+)} = 0, \quad && D_3^{(I+)} = 0 && \\
& && A_{01}^{(I+)} = 0, && A_{02}^{(I+)} = 0 && \\
&A_{11}^{(I+)} = 0, && A_{12}^{(I+)} = 0, && A_{13}^{(I+)} = 0 && \\
&B_{11}^{(I+)} = 0, && B_{12}^{(I+)} = 0, && B_{13}^{(I+)} = 0 && \\
& && A_{m1}^{(I+)} = 0, && A_{m3}^{(I+)} = 0 && (m \geq 2) \\
& && B_{m1}^{(I+)} = 0, && B_{m3}^{(I+)} = 0 && (m \geq 2)
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

ゆえに，式 (4.55) を用いて $\hat{w}_r^{(I+)}, \hat{w}_\theta^{(I+)}, \hat{\sigma}_{rr}^{(I+)}, \hat{\sigma}_{r\theta}^{(I+)}$ を整理すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}2\mu^a \hat{w}_r^{(I+)} =& - A_{03}^{(I+)} r^{-1} \\ &+ A_{14}^{(I+)} r^{-2}\cos(\theta) + B_{14}^{(I+)} r^{-2}\sin(\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{A_{m2}^{(I+)}(\kappa^a + m - 1)r^{-m+1} + A_{m4}^{(I+)} m r^{-m-1}\right\}\cos(m\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{B_{m2}^{(I+)}(\kappa^a + m - 1)r^{-m+1} + B_{m4}^{(I+)} m r^{-m-1}\right\}\sin(m\theta)\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}2\mu^a \hat{w}_\theta^{(I+)} =& - A_{04}^{(I+)} r^{-1} \\ &+ A_{14}^{(I+)} r^{-2}\sin(\theta) - B_{14}^{(I+)} r^{-2}\cos(\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{-A_{m2}^{(I+)}(\kappa^a - m + 1)r^{-m+1} + A_{m4}^{(I+)} m r^{-m-1}\right\}\sin(m\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{B_{m2}^{(I+)}(\kappa^a - m + 1)r^{-m+1} - B_{m4}^{(I+)} m r^{-m-1}\right\}\cos(m\theta)\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{rr}^{(I+)} =& A_{03}^{(I+)} r^{-2} \\ &- 2A_{14}^{(I+)} r^{-3}\cos(\theta) - 2B_{14}^{(I+)} r^{-3}\sin(\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{-A_{m2}^{(I+)}(m+2)(m-1)r^{-m} - A_{m4}^{(I+)} m(m+1) r^{-m-2}\right\}\cos(m\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{-B_{m2}^{(I+)}(m+2)(m-1)r^{-m} - B_{m4}^{(I+)} m(m+1) r^{-m-2}\right\}\sin(m\theta)\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{r\theta}^{(I+)} =& A_{04}^{(I+)} r^{-2} \\ &- 2A_{14}^{(I+)} r^{-3}\sin(\theta) + 2B_{14}^{(I+)} r^{-3}\cos(\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{-A_{m2}^{(I+)} m(m-1)r^{-m} - A_{m4}^{(I+)} m(m+1) r^{-m-2}\right\}\sin(m\theta) \\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{B_{m2}^{(I+)} m(m-1)r^{-m} + B_{m4}^{(I+)} m(m+1) r^{-m-2}\right\}\cos(m\theta)\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{\theta\theta}^{(I+)} =& - A_{03}^{(I+)} r^{-2} \\
& 2A_{14}^{(I+)} r^{-3} \cos(\theta) + 2B_{14}^{(I+)} r^{-3} \sin(\theta) \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ A_{m2}^{(I+)} (m-1)(m-2) r^{-m} + A_{m4}^{(I+)} m(m+1) r^{-m-2} \right\} \cos(m\theta) \\
& + \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ B_{m2}^{(I+)} (m-1)(m-2) r^{-m} + B_{m4}^{(I+)} m(m+1) r^{-m-2} \right\} \sin(m\theta)
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

4.5 Γ_ϵ 上の境界条件から得られる等式

$D_i^{*(I-)}, A_{ij}^{*(I-)}, B_{ij}^{*(I-)}, A_{ij}^{*(I+)}, B_{ij}^{*(I+)}$ を次式のように定義する．

$$
\begin{aligned}
D_i^{(I-)} &= 2\mu^b D_i^{*(I-)}, \qquad & A_{ij}^{(I-)} &= 2\mu^b A_{ij}^{*(I-)}, \qquad & B_{ij}^{(I-)} &= 2\mu^b B_{ij}^{*(I-)} \\
& & A_{ij}^{(I+)} &= 2\mu^a A_{ij}^{*(I+)}, \qquad & B_{ij}^{(I+)} &= 2\mu^a B_{ij}^{*(I+)}
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

$\Gamma_\epsilon(r=1)$ 上の変位および応力ベクトルの境界条件 (4.24)(4.25) より，次の 4 つの等式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\hat{w}_r^{(I-)} - \hat{w}_r^{(I+)} =& A_{01}^{*(I-)}(\kappa^b - 1) - \left(-A_{03}^{*(I+)}\right) \\
&+ \left\{D_1^{*(I-)} + A_{11}^{*(I-)}(\kappa^b - 2) - \left(A_{14}^{*(I+)}\right)\right\}\cos(\theta) \\
&+ \left\{D_2^{*(I-)} + B_{11}^{*(I-)}(\kappa^b - 2) - \left(B_{14}^{*(I+)}\right)\right\}\sin(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{A_{m1}^{*(I-)}(\kappa^b - m - 1) - A_{m3}^{*(I-)}m\right. \\
&\qquad \left. - \left(A_{m2}^{*(I+)}(\kappa^a + m - 1) + A_{m4}^{*(I+)}m\right)\right\}\cos(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{B_{m1}^{*(I-)}(\kappa^b - m - 1) - B_{m3}^{*(I-)}m\right. \\
&\qquad \left. - \left(B_{m2}^{*(I+)}(\kappa^a + m - 1) + B_{m4}^{*(I+)}m\right)\right\}\sin(m\theta) \\
=& u_r(\boldsymbol{z}) \\
=& u_{x_1}(\boldsymbol{z})\cos(\theta) + u_{x_2}(\boldsymbol{z})\sin(\theta)
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{w}_\theta^{(I-)} - \hat{w}_\theta^{(I+)} =& D_3^{*(I-)} - \left(-A_{04}^{*(I+)}\right) \\
&+ \left\{-D_1^{*(I-)} + A_{11}^{*(I-)}(\kappa^b + 2) - \left(A_{14}^{*(I+)}\right)\right\}\sin(\theta) \\
&+ \left\{D_2^{*(I-)} - B_{11}^{*(I-)}(\kappa^b + 2) - \left(-B_{14}^{*(I+)}\right)\right\}\cos(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{A_{m1}^{*(I-)}(\kappa^b + m + 1) + A_{m3}^{*(I-)}m\right. \\
&\qquad \left. - \left(-A_{m2}^{*(I+)}(\kappa^a - m + 1) + A_{m4}^{*(I+)}m\right)\right\}\sin(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{-B_{m1}^{*(I-)}(\kappa^b + m + 1) - B_{m3}^{*(I-)}m\right. \\
&\qquad \left. - \left(B_{m2}^{*(I+)}(\kappa^a - m + 1) - B_{m4}^{*(I+)}m\right)\right\}\cos(m\theta) \\
=& u_\theta(\boldsymbol{z}) \\
=& - u_{x_1}(\boldsymbol{z})\sin(\theta) + u_{x_2}(\boldsymbol{z})\cos(\theta)
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{rr}^{(I-)} - \hat{\sigma}_{rr}^{(I+)} =& 2A_{01}^{(I-)} - \left(A_{03}^{(I+)}\right) \\
&+ \left\{2A_{11}^{(I-)} - \left(-2A_{14}^{(I+)}\right)\right\}\cos(\theta) \\
&+ \left\{2B_{11}^{(I-)} - \left(-2B_{14}^{(I+)}\right)\right\}\sin(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{-A_{m1}^{(I-)}(m+1)(m-2) - A_{m3}^{(I-)}m(m-1)\right. \\
&\qquad \left. - \left(-A_{m2}^{(I+)}(m+2)(m-1) - A_{m4}^{(I+)}m(m+1)\right)\right\}\cos(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{-B_{m1}^{(I-)}(m+1)(m-2) - B_{m3}^{(I-)}m(m-1)\right. \\
&\qquad \left. - \left(-B_{m2}^{(I+)}(m+2)(m-1) - B_{m4}^{(I+)}m(m+1)\right)\right\}\sin(m\theta) \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{r\theta}^{(I-)} - \hat{\sigma}_{r\theta}^{(I+)} =& -A_{04}^{(I+)} \\
&+ \left\{2A_{11}^{(I-)} - \left(-2A_{14}^{(I+)}\right)\right\}\sin(\theta) \\
&+ \left\{-2B_{11}^{(I-)} - \left(2B_{14}^{(I+)}\right)\right\}\cos(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{A_{m1}^{(I-)}m(m+1) + A_{m3}^{(I-)}m(m-1)\right. \\
&\qquad \left. - \left(-A_{m2}^{(I+)}m(m-1) - A_{m4}^{(I+)}m(m+1)\right)\right\}\sin(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\left\{-B_{m1}^{(I-)}m(m+1) - B_{m3}^{(I-)}m(m-1)\right. \\
&\qquad \left. - \left(B_{m2}^{(I+)}m(m-1) + B_{m4}^{(I+)}m(m+1)\right)\right\}\cos(m\theta) \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

4.6　The Michell solution の係数に関する連立方程式

任意の $0 \leq \pi \leq 2\pi$ に対して (4.62)〜(4.65) が成立するためには 1,cos$(m\theta)$,sin$(m\theta)$$(m \geq 1)$ の係数が 0 である必要がある．ゆえに，次下の連立方程式が得られる．

1 の係数：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\mu^b} & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu^a} \\ 0 & \frac{\kappa^b-1}{2\mu^b} & \frac{1}{2\mu^a} & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_3^{(I-)} \\ A_{01}^{(I-)} \\ A_{03}^{(I+)} \\ A_{04}^{(I+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

$\cos(\theta), \sin(\theta)$ の係数：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\mu^b} & \frac{\kappa^b-2}{2\mu^b} & -\frac{1}{2\mu^a} \\ -\frac{1}{2\mu^b} & \frac{\kappa^b+2}{2\mu^b} & -\frac{1}{2\mu^a} \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1^{(I-)} \\ A_{11}^{(I-)} \\ A_{14}^{(I+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_1}(\boldsymbol{z}) \\ -u_{x_1}(\boldsymbol{z}) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\mu^b} & \frac{\kappa^b-2}{2\mu^b} & -\frac{1}{2\mu^a} \\ \frac{1}{2\mu^b} & -\frac{\kappa^b+2}{2\mu^b} & \frac{1}{2\mu^a} \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_2^{(I-)} \\ B_{11}^{(I-)} \\ B_{14}^{(I+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{x_2}(\boldsymbol{z}) \\ u_{x_2}(\boldsymbol{z}) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

$\cos(m\theta), \sin(m\theta)$ の係数 $(m \geq 2)$：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\kappa^b - m - 1}{2\mu^b} & -\dfrac{m}{2\mu^b} & -\dfrac{\kappa^a + m - 1}{2\mu^a} & -\dfrac{m}{2\mu^a} \\ \dfrac{\kappa^b + m + 1}{2\mu^b} & \dfrac{m}{2\mu^b} & \dfrac{\kappa^a - m + 1}{2\mu^a} & -\dfrac{m}{2\mu^a} \\ -(m+1)(m-2) & -m(m-1) & (m+2)(m-1) & m(m+1) \\ m(m+1) & m(m-1) & m(m-1) & m(m+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{m1}^{(I-)} \\ A_{m3}^{(I-)} \\ A_{m2}^{(I+)} \\ A_{m4}^{(I+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.69}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\kappa^b - m - 1}{2\mu^b} & -\dfrac{m}{2\mu^b} & -\dfrac{\kappa^a + m - 1}{2\mu^a} & -\dfrac{m}{2\mu^a} \\ -\dfrac{\kappa^b + m + 1}{2\mu^b} & -\dfrac{m}{2\mu^b} & -\dfrac{\kappa^a - m + 1}{2\mu^a} & \dfrac{m}{2\mu^a} \\ -(m+1)(m-2) & -m(m-1) & (m+2)(m-1) & m(m+1) \\ -m(m+1) & -m(m-1) & -m(m-1) & -m(m+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{m1}^{(I-)} \\ B_{m3}^{(I-)} \\ B_{m2}^{(I+)} \\ B_{m4}^{(I+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

これらの連立方程式を解くと，

$$\begin{aligned} D_1^{(I-)} = 2\mu^b u_{x_1}(\boldsymbol{z}), \quad D_2^{(I-)} = 2\mu^b u_{x_2}(\boldsymbol{z}), \quad D_3^{(I-)} = 0 \\ A_{ij}^{(I\pm)} = 0, \quad B_{ij}^{(I\pm)} = 0, \quad (i \geq 0, 1 \leq j \leq 4) \end{aligned} \tag{4.71}$$

以上から，$\hat{\boldsymbol{w}}^{(I)}$ は以下のように求まる．

$$\begin{aligned} \hat{w}_r^{(I-)} &= u_{x_1}(\boldsymbol{z})\cos(\theta) + u_{x_2}(\boldsymbol{z})\sin(\theta) \\ \hat{w}_\theta^{(I-)} &= -u_{x_1}(\boldsymbol{z})\sin(\theta) + u_{x_2}(\boldsymbol{z})\cos(\theta) \end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\hat{w}_r^{(I+)} = 0, \qquad \hat{w}_\theta^{(I+)} = 0 \tag{4.73}$$

4.7　$\hat{\boldsymbol{w}}^{(II-)}$，$\hat{\boldsymbol{w}}^{(II+)}$ の導出

境界 Γ_ϵ 上の極座標 $(1,\theta)$ における ξ_1,ξ_2 座標は $(\xi_1,\xi_2)=(\cos(\theta),\sin(\theta))$, 法線ベクトルの ξ_1,ξ_2 成分は $(n_{\xi_1},n_{\xi_2})=(\cos(\theta),\sin(\theta))$ である．ゆえに Γ_ϵ 上の境界条件 (4.28) における変位 $\boldsymbol{u}^{(II)}$ の ξ_1,ξ_2 成分は次式で表される．

$$
\begin{aligned}
u_{\xi_1}^{(II)} =&\xi_j u_{x_1,j}(\boldsymbol{z}) \\
=&u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})\cos(\theta)+u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})\sin(\theta) \qquad (4.74)\\
u_{\xi_2}^{(II)} =&u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\cos(\theta)+u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\sin(\theta) \qquad (4.75)
\end{aligned}
$$

ゆえに，$\boldsymbol{u}^{(II)}$ の r,θ 方向成分は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
u_r^{(II)} =&u_{\xi_1}^{(II)}\cos(\theta)+u_{\xi_2}^{(II)}\sin(\theta)\\
=&u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})\cos^2(\theta)+\left\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\right\}\sin(\theta)\cos(\theta)+u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\sin^2(\theta)\\
=&\frac{1}{2}\left\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\right\}+\frac{1}{2}\left\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\right\}\cos(2\theta)\\
&+\frac{1}{2}\left\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\right\}\sin(2\theta) \qquad (4.76)\\
u_\theta^{(II)} =&-u_{\xi_1}^{(II)}\sin(\theta)+u_{\xi_2}^{(II)}\cos(\theta)\\
=&-\left\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\right\}\cos(\theta)\sin(\theta)-u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})\sin^2(\theta)+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\cos^2(\theta)\\
=&-\frac{1}{2}\left\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\right\}+\frac{1}{2}\left\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\right\}\cos(2\theta)\\
&-\frac{1}{2}\left\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\right\}\sin(2\theta) \qquad (4.77)
\end{aligned}
$$

また，Γ_ϵ 上の境界条件 (4.29) における応力ベクトル $\boldsymbol{t}^{(II)}$ の ξ_1,ξ_2 成分は次式になる．

$$
\begin{aligned}
t_{\xi_1}^{(II)} =&C^a_{1jkl}u_{k,l}(\boldsymbol{z})n_j\\
=&\mu^a\left\{\frac{\kappa^a+1}{\kappa^a-1}u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})+\frac{3-\kappa^a}{\kappa^a-1}u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\right\}\cos(\theta)\\
&+\mu^a\left\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\right\}\sin(\theta) \qquad (4.78)\\
t_{\xi_2}^{(II)} =&C^a_{2jkl}u_{k,l}(\boldsymbol{z})n_j\\
=&\mu^a\left\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\right\}\cos(\theta)\\
&+\mu^a\left\{\frac{3-\kappa^a}{\kappa^a-1}u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})+\frac{\kappa^a+1}{\kappa^a-1}u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\right\}\sin(\theta) \qquad (4.79)
\end{aligned}
$$

ゆえに，$\boldsymbol{t}^{(II)}$ の r,θ 方向成分は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
t_r^{(II)} =& t_{\xi_1}^{(II)}\cos(\theta) + t_{\xi_2}^{(II)}\sin(\theta)\\
=& \mu^a\Big\{\frac{\kappa^a+1}{\kappa^a-1}u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + \frac{3-\kappa^a}{\kappa^a-1}u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\Big\}\cos^2(\theta)\\
&+ 2\mu^a\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(\theta)\cos(\theta)\\
&+ \mu^a\Big\{\frac{3-\kappa^a}{\kappa^a-1}u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + \frac{\kappa^a+1}{\kappa^a-1}u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\Big\}\sin^2(\theta)\\
=& \frac{2\mu^a}{\kappa^a-1}\Big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\Big\}\\
&+ \mu^a\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(2\theta)\\
&+ \mu^a\Big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\Big\}\cos(2\theta)
\end{aligned}
\tag{4.80}
$$

$$
\begin{aligned}
t_\theta^{(II)} =& -t_{\xi_1}^{(II)}\sin(\theta) + t_{\xi_2}^{(II)}\cos(\theta)\\
=& -2\mu^a\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\cos(\theta)\sin(\theta)\\
&+ \mu^a\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\big(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\big)\\
=& -\mu^a\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(2\theta)\\
&+ \mu^a\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\cos(2\theta)
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

Γ_ϵ 上の変位および応力の境界条件 (4.28)(4.29) より次の 4 つの等式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\hat{w}_r^{(II-)} - \hat{w}_r^{(II+)} =& A_{01}^{*(II-)}(\kappa^b-1) - \Big(-A_{03}^{*(II+)}\Big)\\
&+ \Big\{D_1^{*(II-)} + A_{11}^{*(II-)}(\kappa^b-2) - \Big(A_{14}^{*(II+)}\Big)\Big\}\cos(\theta)\\
&+ \Big\{D_2^{*(II-)} + B_{11}^{*(II-)}(\kappa^b-2) - \Big(B_{14}^{*(II+)}\Big)\Big\}\sin(\theta)\\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{A_{m1}^{*(II-)}(\kappa^b-m-1) - A_{m3}^{*(II-)}m\\
&\qquad - \Big(A_{m2}^{*(II+)}(\kappa^a+m-1) + A_{m4}^{*(II+)}m\Big)\Big\}\cos(m\theta)\\
&+ \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{B_{m1}^{*(II-)}(\kappa^b-m-1) - B_{m3}^{*(II-)}m\\
&\qquad - \Big(B_{m2}^{*(II+)}(\kappa^a+m-1) + B_{m4}^{*(II+)}m\Big)\Big\}\sin(m\theta)\\
=& u_r^{(II)}\\
=& \frac{1}{2}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} + \frac{1}{2}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}\cos(2\theta)\\
&+ \frac{1}{2}\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(2\theta)
\end{aligned}
\tag{4.82}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{w}_\theta^{(II-)} - \hat{w}_\theta^{(II+)} =& D_3^{*(II-)} - \left(-A_{04}^{*(II+)}\right) \\
&+ \left\{-D_1^{*(II-)} + A_{11}^{*(II-)}(\kappa^b + 2) - \left(A_{14}^{*(II+)}\right)\right\} \sin(\theta) \\
&+ \left\{D_2^{*(II-)} - B_{11}^{*(II-)}(\kappa^b + 2) - \left(-B_{14}^{*(II+)}\right)\right\} \cos(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \Big\{ A_{m1}^{*(II-)}(\kappa^b + m + 1) + A_{m3}^{*(II-)} m \\
&\qquad - \left(-A_{m2}^{*(II+)}(\kappa^a - m + 1) + A_{m4}^{*(II+)} m\right)\Big\} \sin(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \Big\{ -B_{m1}^{*(II-)}(\kappa^b + m + 1) - B_{m3}^{*(II-)} m \\
&\qquad - \left(B_{m2}^{*(II+)}(\kappa^a - m + 1) - B_{m4}^{*(II+)} m\right)\Big\} \cos(m\theta) \\
=& u_\theta^{(II)} \\
=& -\frac{1}{2}\left\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\right\} + \frac{1}{2}\left\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\right\} \cos(2\theta) \\
&- \frac{1}{2}\left\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\right\} \sin(2\theta)
\end{aligned} \tag{4.83}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{rr}^{(II-)} - \hat{\sigma}_{rr}^{(II+)} =& 2A_{01}^{(II-)} - \left(A_{03}^{(II+)}\right) \\
&+ \left\{2A_{11}^{(II-)} - \left(-2A_{14}^{(II+)}\right)\right\} \cos(\theta) \\
&+ \left\{2B_{11}^{(II-)} - \left(-2B_{14}^{(II+)}\right)\right\} \sin(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \Big\{ -A_{m1}^{(II-)}(m+1)(m-2) - A_{m3}^{(II-)} m(m-1) \\
&\qquad - \left(-A_{m2}^{(II+)}(m+2)(m-1) - A_{m4}^{(II+)} m(m+1)\right)\Big\} \cos(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \Big\{ -B_{m1}^{(II-)}(m+1)(m-2) - B_{m3}^{(II-)} m(m-1) \\
&\qquad - \left(-B_{m2}^{(II+)}(m+2)(m-1) - B_{m4}^{(II+)} m(m+1)\right)\Big\} \sin(m\theta) \\
=& t_r^{(II)} \\
=& \frac{2\mu^a}{\kappa^a - 1}\left\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\right\} \\
&+ \mu^a\left\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\right\} \sin(2\theta) \\
&+ \mu^a\left\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\right\} \cos(2\theta)
\end{aligned} \tag{4.84}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{r\theta}^{(II-)} - \hat{\sigma}_{r\theta}^{(II+)} =& - A_{04}^{(II+)} \\
&+ \left\{ 2A_{11}^{(II-)} - \left(-2A_{14}^{(II+)} \right) \right\} \sin(\theta) \\
&+ \left\{ -2B_{11}^{(II-)} - \left(2B_{14}^{(II+)} \right) \right\} \cos(\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ A_{m1}^{(II-)} m(m+1) + A_{m3}^{(II-)} m(m-1) \right. \\
&\qquad \left. - \left(-A_{m2}^{(II+)} m(m-1) - A_{m4}^{(II+)} m(m+1) \right) \right\} \cos(m\theta) \\
&+ \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ -B_{m1}^{(II-)} m(m+1) - B_{m3}^{(II-)} m(m-1) \right. \\
&\qquad \left. - \left(B_{m2}^{(II+)} m(m-1) + B_{m4}^{(II+)} m(m+1) \right) \right\} \sin(m\theta) \\
=& t_{\theta}^{(II)} \\
=& - \mu^a \left\{ u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z}) \right\} \sin(2\theta) \\
&+ \mu^a \left\{ u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z}) \right\} \cos(2\theta)
\end{aligned}
\tag{4.85}
$$

任意の $0 \leq \pi \leq 2\pi$ に対して (4.82)〜(4.85) が成立するためには，
1,cos($m\theta$),sin($m\theta$)($m \geq 1$) の係数が 0 である必要がある．ゆえに，以下の連立方程式が得られる．

1 の係数：

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2\mu^b} & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu^a} \\
0 & \frac{\kappa^b - 1}{2\mu^b} & \frac{1}{2\mu^a} & 0 \\
0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
D_3^{(II-)} \\ A_{01}^{(II-)} \\ A_{03}^{(II+)} \\ A_{04}^{(II+)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
-\frac{1}{2}\left\{ u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z}) \right\} \\
\frac{1}{2}\left\{ u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z}) \right\} \\
\frac{2\mu^a}{\kappa^a - 1}\left\{ u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z}) \right\} \\
0
\end{pmatrix}
\tag{4.86}
$$

$\cos(\theta), \sin(\theta)$ の係数：

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2\mu^b} & \frac{\kappa^b - 2}{2\mu^b} & -\frac{1}{2\mu^a} \\
-\frac{1}{2\mu^b} & \frac{\kappa^b + 2}{2\mu^b} & -\frac{1}{2\mu^a} \\
0 & 4 & 4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
D_1^{(II-)} \\ A_{11}^{(II-)} \\ A_{14}^{(II+)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
\tag{4.87}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{2\mu^b} & \frac{\kappa^b - 2}{2\mu^b} & -\frac{1}{2\mu^a} \\
\frac{1}{2\mu^b} & -\frac{\kappa^b + 2}{2\mu^b} & \frac{1}{2\mu^a} \\
0 & -4 & -4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
D_2^{(II-)} \\ B_{11}^{(II-)} \\ B_{14}^{(II+)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ 0 \\ 0
\end{pmatrix}
\tag{4.88}
$$

$\cos(2\theta), \sin(2\theta)$ の係数：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\kappa^b-3}{2\mu^b} & -\dfrac{1}{\mu^b} & -\dfrac{\kappa^a+1}{2\mu^a} & -\dfrac{1}{\mu^a} \\ \dfrac{\kappa^b+3}{2\mu^b} & \dfrac{1}{\mu^b} & \dfrac{\kappa^a-1}{2\mu^a} & -\dfrac{1}{\mu^a} \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{21}^{(II-)} \\ A_{23}^{(II-)} \\ A_{22}^{(II+)} \\ A_{24}^{(II+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\} \\ -\dfrac{1}{2}\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\} \\ \mu^a\Big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\Big\} \\ -\mu^a\Big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\Big\} \end{pmatrix} \tag{4.89}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\kappa^b-3}{2\mu^b} & -\dfrac{1}{\mu^b} & -\dfrac{\kappa^a+1}{2\mu^a} & -\dfrac{1}{\mu^a} \\ -\dfrac{\kappa^b+3}{2\mu^b} & -\dfrac{1}{\mu^b} & -\dfrac{\kappa^a-1}{2\mu^a} & \dfrac{1}{\mu^a} \\ 0 & -2 & 4 & 6 \\ -6 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{21}^{(II-)} \\ B_{23}^{(II-)} \\ B_{22}^{(II+)} \\ B_{24}^{(II+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\} \\ \dfrac{1}{2}\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\} \\ \mu^a\Big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\Big\} \\ \mu^a\Big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\Big\} \end{pmatrix} \tag{4.90}$$

$\cos(m\theta), \sin(m\theta)$ の係数 $(m \geq 3)$：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\kappa^b-m-1}{2\mu^b} & -\dfrac{m}{2\mu^b} & -\dfrac{\kappa^a+m-1}{2\mu^a} & -\dfrac{m}{2\mu^a} \\ \dfrac{\kappa^b+m+1}{2\mu^b} & \dfrac{m}{2\mu^b} & \dfrac{\kappa^a-m+1}{2\mu^a} & -\dfrac{m}{2\mu^a} \\ -(m+1)(m-2) & -m(m-1) & (m+2)(m-1) & m(m+1) \\ m(m+1) & m(m-1) & m(m-1) & m(m+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{m1}^{(II-)} \\ A_{m3}^{(II-)} \\ A_{m2}^{(II+)} \\ A_{m4}^{(II+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.91}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\kappa^b-m-1}{2\mu^b} & -\dfrac{m}{2\mu^b} & -\dfrac{\kappa^a+m-1}{2\mu^a} & -\dfrac{m}{2\mu^a} \\ -\dfrac{\kappa^b+m+1}{2\mu^b} & -\dfrac{m}{2\mu^b} & -\dfrac{\kappa^a-m+1}{2\mu^a} & \dfrac{m}{2\mu^a} \\ -(m+1)(m-2) & -m(m-1) & (m+2)(m-1) & m(m+1) \\ -m(m+1) & -m(m-1) & -m(m-1) & -m(m+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{m1}^{(II-)} \\ B_{m3}^{(II-)} \\ B_{m2}^{(II+)} \\ B_{m4}^{(II+)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.92}$$

これらの連立方程式を解くと，

$$
\begin{aligned}
D_1^{(II-)} = 0, \quad D_2^{(II-)} = 0, \quad D_3^{(II-)} &= -\mu^b\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\} \\
A_{01}^{(II-)} &= \frac{\mu^a\mu^b(\kappa^a+1)}{\big(\mu^a(\kappa^b-1)+2\mu^b\big)(\kappa^a-1)}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
A_{03}^{(II+)} &= -\frac{2\mu^a\big\{\mu^a\big(\kappa^b-1\big)-\mu^b\big(\kappa^a-1\big)\big\}}{\big(\mu^a(\kappa^b-1)+2\mu^b\big)(\kappa^a-1)}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
A_{04}^{(II+)} = 0, \quad A_{21}^{(II-)} &= 0, \quad B_{21}^{(II-)} = 0 \\
A_{23}^{(II-)} &= -\frac{\mu^a\mu^b\big(\kappa^a+1\big)}{2\big(\mu^a+\kappa^a\mu^b\big)}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
A_{22}^{(II+)} &= \frac{\mu^a\big(\mu^a-\mu^b\big)}{\mu^a+\kappa^a\mu^b}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
A_{24}^{(II+)} &= -\frac{\mu^a\big(\mu^a-\mu^b\big)}{2\big(\mu^a+\kappa^a\mu^b\big)}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
B_{23}^{(II-)} &= -\frac{\mu^a\mu^b\big(\kappa^a+1\big)}{2\big(\mu^a+\kappa^a\mu^b\big)}\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\} \\
B_{22}^{(II+)} &= \frac{\mu^a\big(\mu^a-\mu^b\big)}{\mu^a+\kappa^a\mu^b}\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\} \\
B_{24}^{(II+)} &= -\frac{\mu^a\big(\mu^a-\mu^b\big)}{2\big(\mu^a+\kappa^a\mu^b\big)}\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\} \\
A_{ij}^{(II\pm)} = 0, \quad B_{ij}^{(II\pm)} &= 0, \quad (i=1, i\geq 3, 1\leq j\leq 4)
\end{aligned}
\tag{4.93}
$$

以上から，$\hat{\boldsymbol{w}}^{(II-)}$,$\hat{\boldsymbol{w}}^{(II+)}$ は以下のように求まる．

$$
\begin{aligned}
\hat{w}_r^{(II-)} =& \frac{\mu^a\bigl(\kappa^b-1\bigr)(\kappa^a+1)}{2\bigl(\mu^a(\kappa^b-1)+2\mu^b\bigr)(\kappa^a-1)}\bigl\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\bigr\}r \\
&+\frac{\mu^a\bigl(\kappa^a+1\bigr)}{2\bigl(\mu^a+\kappa^a\mu^b\bigr)}\bigl\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\bigr\}r\cos(2\theta) \\
&+\frac{\mu^a\bigl(\kappa^a+1\bigr)}{2\bigl(\mu^a+\kappa^a\mu^b\bigr)}\bigl\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\bigr\}r\sin(2\theta) \qquad (4.94)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{w}_\theta^{(II-)} =& -\frac{1}{2}\bigl\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\bigr\}r \\
&-\frac{\mu^a\bigl(\kappa^a+1\bigr)}{2\bigl(\mu^a+\kappa^a\mu^b\bigr)}\bigl\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\bigr\}r\sin(2\theta) \\
&+\frac{\mu^a\bigl(\kappa^a+1\bigr)}{2\bigl(\mu^a+\kappa^a\mu^b\bigr)}\bigl\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\bigr\}r\cos(2\theta) \qquad (4.95)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{w}_r^{(II+)} =& \frac{\mu^a\bigl(\kappa^b-1\bigr)-\mu^b\bigl(\kappa^a-1\bigr)}{\bigl(\mu^a(\kappa^b-1)+2\mu^b\bigr)(\kappa^a-1)}\bigl\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\bigr\}r^{-1} \\
&+\frac{\mu^a-\mu^b}{2\bigl(\mu^a+\kappa^a\mu^b\bigr)}\bigl\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\bigr\}\bigl\{(\kappa^a+1)r^{-1}-r^{-3}\bigr\}\cos(2\theta) \\
&+\frac{\mu^a-\mu^b}{2\bigl(\mu^a+\kappa^a\mu^b\bigr)}\bigl\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\bigr\}\bigl\{(\kappa^a+1)r^{-1}-r^{-3}\bigr\}\sin(2\theta) \qquad (4.96)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{w}_\theta^{(II+)} =& -\frac{\mu^a-\mu^b}{2\bigl(\mu^a+\kappa^a\mu^b\bigr)}\bigl\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\bigr\}\bigl\{(\kappa^a-1)r^{-1}+r^{-3}\bigr\}\sin(2\theta) \\
&+\frac{\mu^a-\mu^b}{2\bigl(\mu^a+\kappa^a\mu^b\bigr)}\bigl\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\bigr\}\bigl\{(\kappa^a-1)r^{-1}+r^{-3}\bigr\}\cos(2\theta) \qquad (4.97)
\end{aligned}
$$

第 5 章

トポロジー導関数の導出

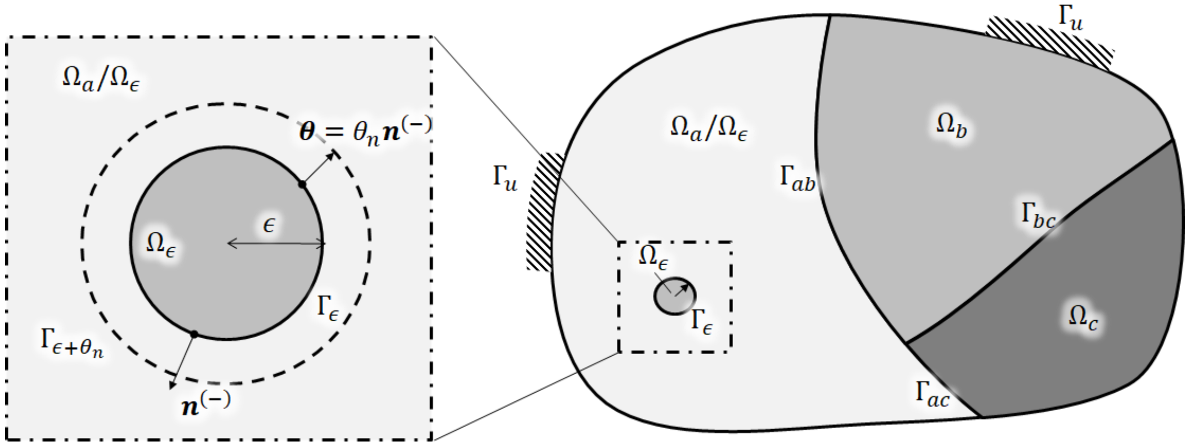

Fig.5.1　Shape derivative for computing the topological derivative

$\boldsymbol{\theta}$ を次式のように設定する．

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_n \boldsymbol{n}^{(-)} \qquad \text{on} \quad \Gamma_\epsilon \tag{5.1}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0} \qquad \text{on} \quad \Gamma/\Gamma_\epsilon \tag{5.2}$$

この時，固有値 λ の形状微分は，(3.33) に $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^\epsilon, \lambda = \lambda^\epsilon$ を代入することで以下のように

なる．

$$
\begin{aligned}
&D\lambda^{a\to b}(\Omega_{p\{1\leq p\leq n\}})\cdot\boldsymbol{\theta}\\
=&\int_{\Gamma_\epsilon}(\theta_n n_\gamma^{(-)}n_\gamma^{(-)})\Big(u_{i,j}^{\epsilon(-)}C_{ijkl}^b u_{k,l}^{\epsilon(-)}-\lambda^\epsilon\rho^b u_i^{\epsilon(-)}u_i^{\epsilon(-)}\Big)d\Omega\\
&+\int_{\Gamma_\epsilon}(\theta_n n_\gamma^{(-)}n_\gamma^{(+)})\Big(u_{i,j}^{\epsilon(+)}C_{ijkl}^a u_{k,l}^{\epsilon(+)}-\lambda^\epsilon\rho^a u_i^{\epsilon(+)}u_i^{\epsilon(+)}\Big)d\Omega\\
&-\int_{\Gamma_\epsilon}(\theta_n n_\gamma^{(-)}n_\gamma^{(-)})\Big(C_{ijkl}^b u_{k,l}^{\epsilon(-)}n_j^{(-)}-C_{ijkl}^a u_{k,l}^{\epsilon(+)}n_j^{(+)}\Big)(u_{i,m}^{\epsilon(-)}n_m^{(-)}-u_{i,m}^{\epsilon(+)}n_m^{(-)})d\Gamma\\
=&\theta_n\int_{\Gamma_\epsilon}\Big(u_{i,j}^{\epsilon(-)}C_{ijkl}^b u_{k,l}^{\epsilon(-)}-\lambda^\epsilon\rho^b u_i^{\epsilon(-)}u_i^{\epsilon(-)}\Big)d\Omega\\
&-\theta_n\int_{\Gamma_\epsilon}\Big(u_{i,j}^{\epsilon(+)}C_{ijkl}^a u_{k,l}^{\epsilon(+)}-\lambda^\epsilon\rho^a u_i^{\epsilon(+)}u_i^{\epsilon(+)}\Big)d\Omega\\
&-\theta_n\int_{\Gamma_\epsilon}\Big(C_{ijkl}^b u_{k,l}^{\epsilon(-)}n_j^{(-)}+C_{ijkl}^a u_{k,l}^{\epsilon(+)}n_j^{(-)}\Big)(u_{i,m}^{\epsilon(-)}n_m^{(-)}-u_{i,m}^{\epsilon(+)}n_m^{(-)})d\Gamma \qquad (5.3)\\
=&\theta_n\int_{\Gamma_\epsilon}\Big(e^{\epsilon(-)}:\sigma^{\epsilon(-)}-\lambda^\epsilon\rho^b|\boldsymbol{u}^{\epsilon(-)}|^2\Big)d\Omega-\theta_n\int_{\Gamma_\epsilon}\Big(e^{\epsilon(+)}:\sigma^{\epsilon(+)}-\lambda^\epsilon\rho^a|\boldsymbol{u}^{\epsilon(+)}|^2\Big)d\Omega\\
&-\theta_n\int_{\Gamma_\epsilon}\Big\{\Big(t_i^{\epsilon(-)}+t_i^{\epsilon(+)}\Big)\Big(\frac{\partial u_i^{\epsilon(-)}}{\partial n}-\frac{\partial u_i^{\epsilon(+)}}{\partial n}\Big)\Big\}d\Gamma \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

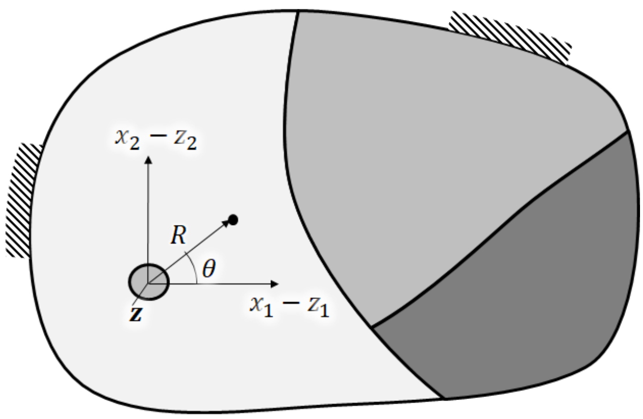

Fig.5.2　(R,θ) coordinate

ここで，

$$
\begin{aligned}
x_1 - z_1 &= R\cos(\theta)\\
x_2 - z_2 &= R\sin(\theta) \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

と座標変換すると R,θ 方向の変位は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
u_R^{\epsilon(-)}(r,\theta) =& \hat{w}_r^{(I-)}(\theta) + \epsilon \hat{w}_r^{(II-)}(r,\theta) + O(\epsilon^2) \\
u_\theta^{\epsilon(-)}(r,\theta) =& \hat{w}_\theta^{(I-)}(\theta) + \epsilon \hat{w}_\theta^{(II-)}(r,\theta) + O(\epsilon^2) \\
u_R^{\epsilon(+)}(R,r,\theta) =& u_{x_1}(\boldsymbol{x})\cos(\theta) + u_{x_2}(\boldsymbol{x})\sin(\theta) + \epsilon \hat{w}_r^{(II+)}(r,\theta) + O(\epsilon^2) \\
u_\theta^{\epsilon(+)}(R,r,\theta) =& - u_{x_1}(\boldsymbol{x})\sin(\theta) + u_{x_2}(\boldsymbol{x})\cos(\theta) + \epsilon \hat{w}_\theta^{(II+)}(r,\theta) + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

$R = \epsilon r$ の関係から，

$$
\frac{\partial}{\partial R} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial r} \tag{5.7}
$$

であることに注意して歪みや応力を計算すると以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
e_{RR}^{\epsilon(-)} - e_{RR}^{\epsilon(+)} =& \frac{\partial u_R^{\epsilon(-)}}{\partial n} - \frac{\partial u_R^{\epsilon(+)}}{\partial n} \\
=& 2A\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
&+ (\kappa^a - 1)B\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}\cos(2\theta) \\
&+ (\kappa^a - 1)B\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(2\theta) + O(\epsilon) \\
2\Big\{e_{R\theta}^{\epsilon(-)} - e_{R\theta}^{\epsilon(+)}\Big\} =& \frac{\partial u_\theta^{\epsilon(-)}}{\partial n} - \frac{\partial u_\theta^{\epsilon(+)}}{\partial n} \\
=& - \big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
&- (\kappa^a + 1)B\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}\cos(2\theta) \\
&+ (\kappa^a + 1)B\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(2\theta) + O(\epsilon) \\
e_{\theta\theta}^{\epsilon(-)} = e_{\theta\theta}^{\epsilon(+)} =& \frac{(\kappa^b - 1)}{2}C\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
&- \frac{D}{2}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}\cos(2\theta) \\
&- \frac{D}{2}\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(2\theta) + O(\epsilon) \\
\sigma_{RR}^{\epsilon(-)} = \sigma_{RR}^{\epsilon(+)} =& 2\mu^b C\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
&+ \mu^b D\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}\cos(2\theta) \\
&+ \mu^b D\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(2\theta) + O(\epsilon) \\
\sigma_{R\theta}^{\epsilon(-)} = \sigma_{R\theta}^{\epsilon(+)} =& - \mu^b D\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}\cos(2\theta) \\
&+ \mu^b D\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(2\theta) + O(\epsilon) \\
\sigma_{\theta\theta}^{\epsilon(-)} - \sigma_{\theta\theta}^{\epsilon(+)} =& - 4\mu^a A\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\} \\
&+ 4\mu^a B\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z}) - u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}\cos(2\theta) \\
&+ 4\mu^a B\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z}) + u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}\sin(2\theta) + O(\epsilon)
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
A =& \frac{\mu^a(\kappa^b-1)-\mu^b(\kappa^a-1)}{\big(\mu^a(\kappa^b-1)+2\mu^b\big)(\kappa^a-1)} \\
B =& \frac{\mu^a-\mu^b}{\mu^a+\kappa^a\mu^b} \\
C =& \frac{\mu^a(\kappa^a+1)}{\big(\mu^a(\kappa^b-1)+2\mu^b\big)(\kappa^a-1)} \\
D =& \frac{\mu^a(\kappa^a+1)}{\mu^a+\kappa^a\mu^b}
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

とおいた．式 (5.10) と $\lambda^\epsilon = \lambda + O(\epsilon)$ を式 (5.9) に代入すると，形状微分は以下のようになる

$$
\begin{aligned}
& D\lambda^{a\to b}(\Omega_{p\{1\le p\le n\}})\cdot\boldsymbol{\theta} \\
=& \theta_n\epsilon\int_0^{2\pi}\Big(\big\{e^{\epsilon(-)}_{RR}-e^{\epsilon(+)}_{RR}\big\}\sigma^{\epsilon(-)}_{RR}+2\big\{e^{\epsilon(-)}_{R\theta}-e^{\epsilon(+)}_{R\theta}\big\}\sigma^{\epsilon(-)}_{R\theta}+e^{\epsilon(-)}_{\theta\theta}\big\{\sigma^{\epsilon(-)}_{\theta\theta}-\sigma^{\epsilon(+)}_{\theta\theta}\big\}\Big)d\theta \\
& -\theta_n\epsilon\int_0^{2\pi}\lambda^\epsilon\Big(\rho^b|\boldsymbol{u}^{\epsilon(-)}|^2-\rho^a|\boldsymbol{u}^{\epsilon(+)}|^2\Big)d\theta \\
& -\theta_n\epsilon\int_0^{2\pi}\Big(2\big\{e^{\epsilon(-)}_{RR}-e^{\epsilon(+)}_{RR}\big\}\sigma^{\epsilon(-)}_{RR}+4\big\{e^{\epsilon(-)}_{R\theta}-e^{\epsilon(+)}_{R\theta}\big\}\sigma^{\epsilon(-)}_{R\theta}\Big)d\theta \\
=& \theta_n\epsilon\int_0^{2\pi}\Big(-\big\{e^{\epsilon(-)}_{RR}-e^{\epsilon(+)}_{RR}\big\}\sigma^{\epsilon(-)}_{RR}-2\big\{e^{\epsilon(-)}_{R\theta}-e^{\epsilon(+)}_{R\theta}\big\}\sigma^{\epsilon(-)}_{R\theta}+e^{\epsilon(-)}_{\theta\theta}\big\{\sigma^{\epsilon(-)}_{\theta\theta}-\sigma^{\epsilon(+)}_{\theta\theta}\big\}\Big)d\theta \\
& -\theta_n\epsilon\int_0^{2\pi}\lambda^\epsilon\Big(\rho^b|\boldsymbol{u}^{\epsilon(-)}|^2-\rho^a|\boldsymbol{u}^{\epsilon(+)}|^2\Big)d\theta \\
=& 2\pi\epsilon\theta_n\Big[-2\big\{\mu^a(\kappa^b-1)+2\mu^b\big\}AC\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}^2 \\
& \quad -\big(\mu^b\kappa^a+\mu^a\big)BD\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}^2 \\
& \quad -\big(\mu^b\kappa^a+\mu^a\big)BD\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}^2 \\
& \quad -\lambda\Big(\rho^b-\rho^a\Big)|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z})|^2\Big]+O(\epsilon^2) \\
=& 2\pi\epsilon\theta_n\Big[-\frac{2\mu^a(\kappa^a+1)\Big\{\mu^a(\kappa^b-1)-\mu^b(\kappa^a-1)\Big\}}{\big(\mu^a(\kappa^b-1)+2\mu^b\big)(\kappa^a-1)^2}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}^2 \\
& \quad -\frac{\mu^a(\mu^a-\mu^b)(\kappa^a+1)}{\mu^a+\kappa^a\mu^b}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}^2 \\
& \quad -\frac{\mu^a(\mu^a-\mu^b)(\kappa^a+1)}{\mu^a+\kappa^a\mu^b}\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}^2 \\
& \quad -\lambda\Big(\rho^b-\rho^a\Big)|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z})|^2\Big]+O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

ゆえに, 式 (1.8) より，トポロジー導関数は以下のように導出される.

$$
\begin{aligned}
D_T\lambda^{a\to b} =& \lim_{\epsilon\to 0}\frac{D\lambda^{a\to b}\cdot\boldsymbol{\theta}}{2\pi\epsilon\theta_n} \\
=& \frac{2\mu^a(\kappa^a+1)\Big\{\mu^b(\kappa^a-1)-\mu^a(\kappa^b-1)\Big\}}{\big(\mu^a(\kappa^b-1)+2\mu^b\big)(\kappa^a-1)^2}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}^2 \\
&+\frac{\mu^a(\mu^b-\mu^a)(\kappa^a+1)}{\mu^a+\kappa^a\mu^b}\big\{u_{x_1,x_1}(\boldsymbol{z})-u_{x_2,x_2}(\boldsymbol{z})\big\}^2 \\
&+\frac{\mu^a(\mu^b-\mu^a)(\kappa^a+1)}{\mu^a+\kappa^a\mu^b}\big\{u_{x_1,x_2}(\boldsymbol{z})+u_{x_2,x_1}(\boldsymbol{z})\big\}^2 \\
&-\lambda\Big(\rho^b-\rho^a\Big)|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z})|^2
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$