NPDE 第 2 次实验报告

朱浩然 PB21000234

October 10, 2024

1 问题描述

求下述偏微分方程初值问题在时刻 $t = 0.3$ 的近似解:

$$\begin{cases} u_t = u_x, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = sin(2\pi x), & -\infty < x < \infty, \\ \text{周期性边界条件, 且周期为:1} \end{cases}$$

2 方法

该方程的精确解为 $u(x,t) = sin(2\pi(x+t))$，对时空区域 $[0,1] \times [0,1]$ 剖分 (均分) 如下:

时间:$t_n = n \cdot \Delta t, n = 0,1,2,...,N$, 时间步长 $\Delta t = \frac{1}{N}$。

空间:$x_j = j \cdot \Delta x, j = 0,1,2,...,J$, 时间步长 $\Delta x = \frac{1}{J}$。

定解条件: 初始条件:$v_j^0 = \sin(2\pi x_j)$, 边界条件:$v_j^n = v_{j+J}^n$。

记 $v_j^n \approx u(x_j, t_n)$，时间导数用 $u_t \approx \frac{u(x,t+\Delta t)-u(x,t)}{\Delta t}$ 近似，空间导数分别用前差 $u_x \approx \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x}$ 和中心差 $u_x \approx \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}$ 近似。

得到

$$\text{离散方程 A} : v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(v_{j+1}^n - v_j^n),$$

$$\text{离散方程 B} : v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n).$$

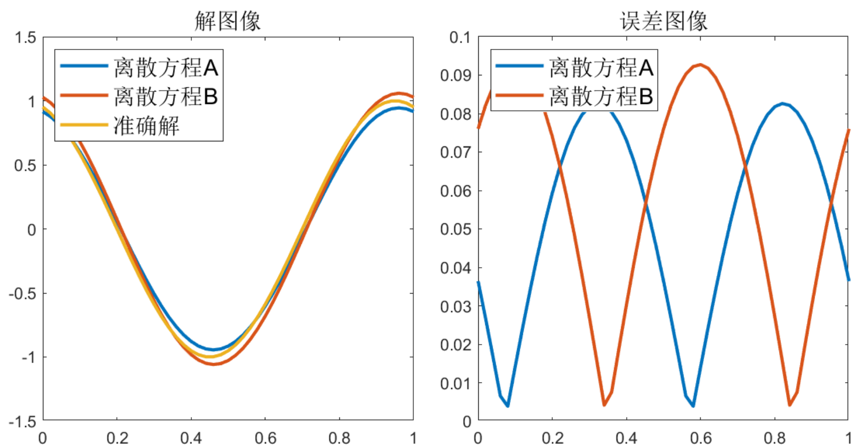
即分别为 FTFS 格式和 FTCS 格式的离散方程。

文件 HW2.cpp 使用 c++ 编程计算，文件 HW2_plot.m 使用 MATLAB 绘图。

3 结果

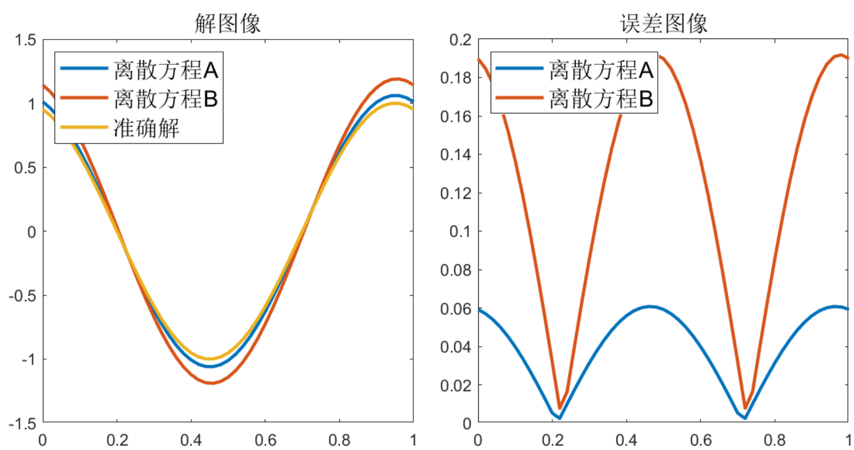
问题 1: 取 $\Delta x = 0.02, \Delta t = 0.01$，分别用离散方程 A 和离散方程 B 求上述偏微分方程初值问题在时刻 $t = 0.3$ 的近似解和精确解。

Figure 1: 问题 1 的解图像和误差图像



问题 2: 取 $\Delta x = 0.02, \Delta t = 0.03$，分别用离散方程 A 和离散方程 B 求上述偏微分方程初值问题在时刻 $t = 0.3$ 的近似解和精确解。

Figure 2: 问题 2 的解图像和误差图像



4 总结

这个问题中离散方程 A 是 FTFS 格式，离散方程 B 是 FTCS 格式。当 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 小于 1 时，FTFS 是稳定格式，否则是不稳定格式。FTCS 格式总是不稳定。

在本问题中问题 1 比问题 2 误差更小，两个问题中都是离散方程 A 误差更小。