NPDE 第 1 次实验报告

朱浩然 PB21000234

September 26, 2024

1　作业要求

函数:

$$v(x) = \frac{1}{2}(\pi - x), v_N(x) = \sum_{\omega=1}^{N} \frac{sin(\omega x)}{\omega}, x \in \Omega = (0, 2\pi].$$

将 Ω 均匀剖分 $x_j = j * \Delta x$,$j = 1, \cdots, m$,$\Delta x = \frac{2\pi}{m}$, 对于 $m = 20$ 和 $m = 160$ 分别绘出 $v(x)$、$v_N(x)$ 和 $v(x) - v_N(x)$ 的图形。这儿 N 分别取 10 和 100。

对于修正的

$$\tilde{v}_N = \sum_{\omega=1}^{N} \frac{sin\frac{\omega\pi}{N}}{\frac{\omega\pi}{N}} \frac{sin\omega x}{\omega}$$

重复上面的工作；比较二者的结果，并进行评述。

2　方法

假设 $f \in C^1_{(-\infty,\infty)}$ 是 2π 周期的函数，则 $f(x)$ 可由傅里叶级数表示为:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x},$$

其中傅里叶系数 $\hat{f}(\omega)$ 为

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\omega x} dx,$$

且该傅里叶级数一致收敛于 $f(x)$。

则

$$v(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$$

的傅里叶级数应为

$$v_N(x) = \sum_{\omega=1}^{N} \frac{sin(\omega x)}{\omega}.$$

当存在不连续跳跃点的周期函数由傅里叶级数去表示时，在不连续的跳跃点附近会出现振荡现象，这种现象称为 Gibbs 现象，本问题中的函数 $v(x)$ 正如此，具有跳跃间断点 0 与 2π。通过引入 Fejér 核，可以消除这种影响，Fejér 核来自于对傅里叶级数进行 Cesàro 求和:

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N} = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$

故修正后的傅里叶级数为:

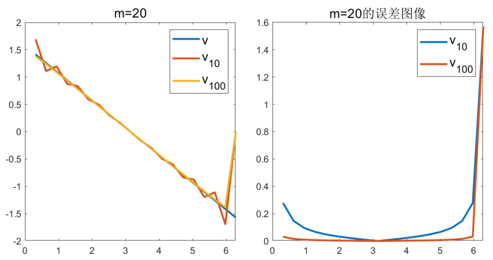
$$\tilde{v}_N = \sum_{\omega=1}^{N} \frac{sin\frac{\omega\pi}{N}}{\frac{\omega\pi}{N}} \frac{sin\omega x}{\omega}.$$

根据以上原理，使用不同的 N 和 m 值，计算 $v_N(x)$ 和 $\tilde{v}_N(x)$，并比较结果。

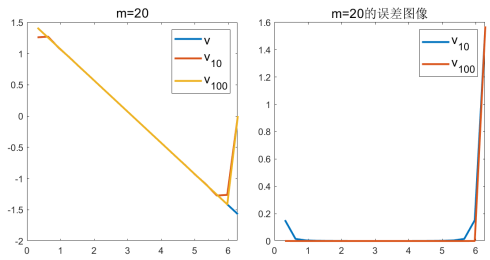
文件 HW1.cpp 使用 c 语言编程计算，文件 HW1_plot.m 使用 MATLAB 绘图。

3 结果

下述结果中 v 表示原函数，v_{10} 和 v_{100} 表示 $N=10$ 和 $N=100$ 时的傅里叶级数，误差图像表示 $|v-v_{10}|$ 和 $|v-v_{100}|$ 的差值。

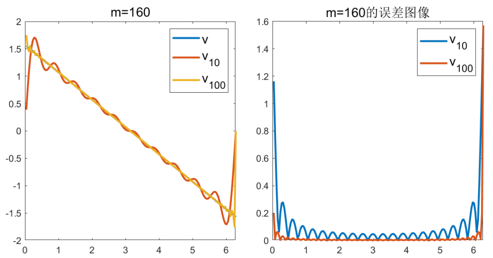


(a) 未修正

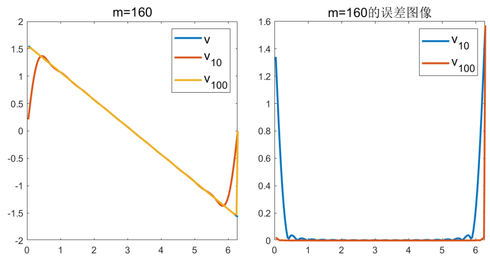


(b) 修正

Figure 1: m=20



(a) 未修正



(b) 修正

Figure 2: m=160

4 总结

可以明显看出其他条件相同时，N 越大，傅里叶级数逼近的误差越小。m 的大小只影响绘图精度。修正前的函数在 $v(x)$ 的跳跃间断点 $(0$ 与 $2\pi)$ 处误差最大，即发生了 Gibbs 现象。修正后的函数则有效消除了这种影响。