Portfolio Selection Model with Efficient Frontier and Beta Coefficient Constraints and Its Application

Ozan Kocadağlı
Mimar Sinan Fine Arts University

ETKİN SINIR VE BETA KATSAYI KISITLI PORTFÖY SEÇİM MODELİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Cansın KAYA[1], Ozan KOCADAĞLI[2]

Geliş: 30.05.2012 Kabul: 14.12.2012

ÖZET

Bu çalışmada Markowitz (1952)'in ortalama varyans, Sharpe (1964)'ın tek indeks ve Konno ve Yamazaki (1991)'nin ortalama mutlak sapma modellerini temel alan ve pazarın eğilimine göre beta katsayısı kısıtlarını içeren yeni bir portföy seçim prosedürü önerilmiştir. Uygulama bölümünde, önerilen prosedür yardımıyla İMKB 30'da işlem gören hisse senetlerinin Eylül 2011 - Ekim 2011 dönemindeki kapanış fiyatları kullanılarak optimal portföyler belirlenmiştir. Bunun için, ilk olarak Markowitz (1952) modeli yardımıyla etkin sınır belirlenerek, yatırımcıların riske karşı tutumlarına göre tercih edebilecekleri alternatif portföyler saptanmıştır. Daha sonra, etkin sınır yardımıyla belirlenen getiri düzeyinde, Markowitz (1952) ve Konno ve Yamazaki (1991) modellerine, pazarın eğilimi göz önünde bulundurularak beta katsayıları ile ilgili kısıtlar eklenmiştir. Son olarak, önerilen prosedür ile elde edilen portföylerin performansları, geleneksel portföy seçim modelleri yardımıyla elde edilenlerin performansları ile ilgili portföylerin test döneminde sağladıkları getiri oranlarına göre karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Portföy optimizasyonu, kuadratik programlama, etkin sınır, Elton-Gruber modeli, beta katsayısı, Konno-Yamazaki portföy seçim modeli.

PORTFOLIO SELECTION MODEL WITH EFFICIENT FRONTIER AND BETA COEFFICIENT CONSTRAINTS AND ITS APPLICATION

ABSTRACT

In this study, a novel portfolio selection procedure is proposed, which is based on Markowitz (1952)'s mean-variance, Sharpe (1964)'s single index and Konno and Yamazaki (1991)'s mean absolute deviation model, and includes beta coefficient constraints according to the market trend. In application section, the optimal portfolios are determined by means of the proposed procedure using the closed prices of the stocks operated in ISE30 in September – October 2011. Therefore, firstly the alternative portfolios are determined for investors having different attitudes against risk using efficient frontier evaluated via Markowitz (1952) model. After that, the beta coefficient constraints are added into Markowitz (1952) and Konno and Yamazaki (1991) models according to Market trend. Lastly, the performances of portfolios obtained by the proposed procedure are compared with ones of traditional portfolio models according to portfolio returns in the test period.

Keywords: Portfolio optimization, quadratic programming, efficient frontier, Elton-Gruber model, beta coefficient, Konno -Yamazaki portfolio selection model.

[1] *Mimar Sinan G.S.Ü., Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, cansin_kaya@yahoo.com*

[2] *Mimar Sinan G.S.Ü., Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, ozankocadagli@msgsu.edu.tr*

1. GİRİŞ

Yatırımcıların tasarruf birikimlerini sermaye piyasalarında kullanmaya başlamaları ile birlikte portföy yönetimi teknik ve modellerine duyulan ilgi ve ihtiyaç artmıştır. Portföy yönetimi, yatırımcının elindeki fonları mevcut menkul kıymet alternatifleri arasında, belirli bir risk düzeyinde en fazla getiriyi veya belirli bir getiri düzeyinde en az riski sağlayacak şekilde paylaştırmasıdır. Yatırım ortamı belirsizlik içerdiğinden portföy oluşturularak risk dağıtılabilir. Portföy seçim problemi, getiri maksimize ve risk minimize edilerek portföyde hangi varlıklara ve hangi oranlarda yer verileceğinin belirlenmesidir.

Optimal portföyün oluşturulmasında ve yönetilmesinde kullanılmak üzere çeşitli yaklaşımlar geliştirilmiştir. Geleneksel portföy teorisi, tüm yumurtaların aynı sepete konulmaması prensibinden hareketle portföydeki menkul kıymet çeşidi arttıkça portföyün riskinin azalacağını savunmaktadır. Modern portföy teorisinin temelini Markowitz (1952)'nin geliştirdiği ortalama varyans modeli oluşturmaktadır. Bu model, her bir menkul kıymet çifti arasındaki ilişkiyi dikkate alarak bir optimizasyon işlemi gerçekleştirmektedir. Markowitz (1952), portföyün riskini getirilerin standart sapması ile ölçmüş ve etkin portföy seçimini matematiksel olarak, hedeflenen getiri düzeyinde portföy varyansının minimizasyonu şeklinde bir kuadratik programlama problemi olarak ifade etmiştir. Bu model ile yatırımcı en yüksek beklenen getiri ve en düşük risk düzeyini gösteren etkin sınır üzerinde kendi riske karşı tutumuna, bir diğer ifadeyle fayda fonksiyonuna göre bir portföy bileşimi oluşturabilmektedir (Kaya, 2012).

Menkul kıymet sayısındaki artışın, optimal portföylerin beklenen getirisi ve varyansının belirlenmesinde neden olduğu zorluklar Sharpe (1964)'ın geliştirdiği tek indeks modeli ile aşılmaya çalışılmıştır. Bu modelde risk ve getiri arasında en iyi dengeyi sağlayan portföyün bulunması için Elton ve Gruber (1995) bir portföy seçim yöntemi geliştirmişlerdir. Konno ve Yamazaki (1991) ise ortalama varyans modelinin zorluklarının yanı sıra yatırımcıların çoğunun risk ölçümünde standart sapmayı kabullenmekte zorlandığını iddia etmiş ve L^2 risk fonksiyonu (varyans) yerine L^1 risk fonksiyonunu (mutlak sapma) önermişlerdir.

Günümüzde de yukarıda değinilen modelleri temel alan birçok çalışma mevcuttur. Örneğin, Küçükkocaoğlu (2004), portföyün sistematik olmayan riskini hesaplamak için beta katsayılarını kullanmış; Atan (2005), Markowitz (1952)'in kuadratik programlama modelini kullanarak İMKB 100 endeksi ile eşit getiri düzeyinde daha düşük riske sahip ve İMKB 100 endeksi ile eşit risk düzeyinde olan fakat daha yüksek getirili portföyler oluşturmuş; Kocadağlı ve Cinemre (2006), bulanık getiri ve risk fonksiyonlarıyla Konno ve Yamazaki (1991)'nin modelini bulanıklaştırmış; Fang ve arkadaşları (2006) ile Bozdağ ve Türe (2008), likiditeye ilişkin üyelik fonksiyonu oluşturarak bulanık doğrusal programlama modeli ile yatırımcı deneyimlerinin portföy modeline aktarılmasını amaçlamış; Kocadağlı ve Cinemre (2010), pazarın trendini göz önünde bulundurarak "Sermaye Varlıklarını

Fiyatlandırma Modeli (SVMF)” ile uyumlu bir beta üyelik fonksiyonu oluşturmuş ve bu fonksiyon yardımıyla modele pazarın hassasiyetini içeren bir kısıt eklemiştir.

2. PORTFÖY ANALİZİ

2.1. Portföy Seçim Problemi

Finansal piyasalarda yatırımcıların yatırım yapabilecekleri çok sayıda finansal varlık bulunmaktadır. Birçok seçenekle karşı karşıya kalan yatırımcılar portföylerinde hangi menkul kıymetlere ve hangi oranlarda yer vereceklerine karar vermeye çalışırlar. Bu problem portföy seçim problemi olarak tanımlanır (Alexander, Sharpe ve Bailey, 2000). Modelin amacı, belirlenen n adet varlıktan elde edilebilecek mümkün portföyler kümesi içinden yatırımın beklenen getirisi ile riski arasında en iyi dengeyi sağlayacak optimal portföyü bulmaktır (Karaşin, 1987; Köse, 2001).

2.2. Portföyün Getirisi

Getiri, bir yatırımdan belirli bir dönem içinde yapılan yatırıma karşılık elde edilen geliri göstermektedir (Karan, 2001).

$$R_i = \frac{p_i^e - p_i^c}{p_i^c} \tag{1}$$

Burada; R_i, i’inci hisse senedinin getiri oranı; p_i^c, i’inci hisse senedinin dönem başındaki değeri ve p_i^e, i’inci hisse senedinin dönem sonundaki değeridir.

Portföy içindeki menkul kıymetlerin yatırım dönemi sonundaki getirileri belirsiz olduğundan portföyün getirisi de kesin olarak bilinemez. Bu durumda, getiri bir rastlantı değişkeni olarak kabul edilebilir. Finansal varlıkların gelecekte de geçmişteki performanslarını sergileyecekleri varsayılarak, geçmişteki ortalama getiri, gelecekteki beklenen getiri olarak kabul edilir. Getiri fonksiyonunun genel hali aşağıda verilmiştir:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i = R_1 x_1 + R_2 x_2 + \ldots + R_n x_n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \tag{3}$$

$$0 \le x_i \le 1 \tag{4}$$

Burada; R_p, portföyün getirisi ve x_i, i’inci hisse senedinin portföy içindeki ağırlığıdır.

2.3. Risk Kavramı

Genel anlamda risk, gelecekte arzu edilmeyen bir olay ve etkinin ortaya çıkma olasılığı olmakla beraber, finansal varlık yatırımlarında yatırımın beklenen getiriden daha az bir getiri sağlama durumu olarak tanımlanabilir (Brigham, 1996). Risk, hisse senedi yatırımlarında portföy getirisinin değişkenliği, başka bir deyişle kayıp (zarar) olasılığı olarak yorumlanır. Dolayısıyla yatırımın kalitesini belirleyen bir etmendir.

Genel olarak yatırımcıların riskten kaçındıklarını söylemekle birlikte yatırımcıları risk alma derecelerine göre; riskten kaçınan, riske karşı kayıtsız kalan ve riski seven yatırımcı olmak üzere üç gruba ayırabiliriz (Bolak, 1991). Riskten kaçınan yatırımcılar için getiri düzeyindeki aşırı artış, fayda fonksiyonunda giderek azalan bir memnuniyet yaratmaktadır. Bu nedenle bu tür yatırımcılar daha fazla risk almak istemezler (azalan marjinal fayda). Riske karşı kayıtsız kalan yatırımcılar sadece getiriye göre karar verirler (sabit marjinal fayda). Riski seven yatırımcılar için ise daha fazla getirinin sağlayacağı fayda da giderek artmaktadır. Bu nedenle bu tür yatırımcılar yüksek riskli portföyleri tercih ederler (artan marjinal fayda).

Portföy teorisine göre, portföye girecek hisse senedi sayısı arttıkça, portföy riskinde düşme görülür. Buna portföy etkisi denir. Riskin kaynakları genel olarak piyasadaki bütün varlıkları etkileyen sistematik risk kaynakları ve yalnızca söz konusu varlığın kendi özelliklerinden ileri gelen sistematik olmayan risk kaynakları olarak iki başlık altında toplanabilir. Piyasadaki menkul kıymetlerin hepsi, farklı oranlarda olmakla birlikte, genelde sistematik riskten aynı doğrultuda etkilenir. Bu nedenle, menkul kıymetler arasında çeşitlendirme yapılarak sistematik riskin ortadan kaldırılması mümkün değildir. Sistematik olmayan risk; bir şirkete veya sektöre özgü olan, çeşitlendirme yoluyla elimine edilebilen, dağıtılabilen ya da azaltılabilen risk türüdür. Önemli ihaleleri almak veya kaybetmek, yönetim değişikliği, reklam kampanyaları, tüketici tercihlerindeki değişimler, başarısız yatırım kararları, rakip işletmelerin yeni ürünleri gibi firmaya özel konular bu riskin başlıca nedenleridir (Kaya, 2012).

Portföyün kapsadığı menkul kıymet sayısını arttırarak yapılan çeşitlendirme yalın çeşitlendirme olarak adlandırılır. Ancak; portföy birbirinden farklı endüstrilere ilişkin, farklı türlerdeki menkul kıymetleri içerdiği ölçüde çeşitlendirme etkinliği başarılı olacaktır. Bununla birlikte, çeşitlendirmede portföye 15-20'den fazla hisse senedi almanın riski indirgemeye bir katkısı olmamaktadır (Bolak, 1991).

Riskin hesaplanmasında kullanılan temel ölçüler, ortalamadan sapma ve varyanstır. Portföy seçiminde risk, hisse senetlerinin getirileri arasındaki kovaryansla belirlenebilir. Kovaryans, değişkenler arasındaki doğrusal ilişkinin yönünü ortaya koyan sayısal bir ölçüttür. Buna göre n adet varlıktan oluşan portföyün riski aşağıda verilen formül yardımıyla bulunur:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} x_i x_j \mathrm{Cov}_{ij}} \tag{5}$$

Burada; σ_p , portföyün riski; σ_i , i'inci hisse senedinin getirilerinin varyansı, Cov_{ij} ise i ve j'inci hisse senetlerinin getirileri arasındaki kovaryanstır.

Risk ile ilişkilendirilebilecek bir diğer kavram olan beta katsayısı, pazar indeksindeki bir birimlik değişimin, herhangi bir menkul kıymet üzerinde yarattığı sistematik değişkenliğin bir ölçüsüdür. Diğer bir ifadeyle, hisse senedinin getirisinin pazarın getirisine olan duyarlılığıdır (Kolb ve Rodriguez, 1996). Bu katsayı aşağıdaki eşitlikte gösterildiği gibi hisse senedi getirisinin pazar getirisine göre kovaryansı ile pazarın varyansının bölümü ile bulunabilir:

$$\beta_i = Cov(R_i, R_m) / \sigma^2(R_m) \qquad (6)$$

Pazarın betası "1" olarak kabul edilirse, artan pazarlarda bir portföyün betasının "1"den büyük olması portföyün pazardan daha fazla getiri sağlayacağı, azalan pazarlarda ise daha fazla kaybettireceği anlamına gelmektedir. Pazarın betasının "1"den küçük olması ise yukarıdaki durumun tam tersini ifade etmektedir. Portföyün "1"e eşit olması ise, portföyün pazarla aynı yönde hareket edeceğini göstermektedir. Ancak Sermaye Varlıkları Fiyatlama Modeline göre beklenen getiri ile sistematik risk arasında pozitif bir korelasyon söz konusu olduğundan, portföy betasının "1"den büyük olması riski arttırmaktadır. Tersine, artan bir pazarda portföy betasının "1"den küçük olması ise daha az risk ve pazardan daha az bir getiri anlamı taşımaktadır. Negatif beta değerleri ise portföyün pazarla ters yönde hareket ettiğinin bir göstergesi kabul edilmektedir (Kocadağlı ve Cinemre, 2010).

Belli bir varlığın toplam portföy riskine olan katkısı, o varlığa özgü beta yardımıyla ölçülebildiği gibi, çeşitlendirilmiş portföy seçeneklerinin riskleri de betalar ile karşılaştırılabilir. Belli dönemlerde, genellikle de bir aylık dönemde belli bir hisse senedinin getirisindeki değişmenin pazar indeksinin getirisindeki değişmeyle karşılaştırılmasının grafiksel gösterimi karakteristik doğrusunun çizilebilmesini sağlar.

Bir portföyün performans düzeyini etkileyen faktörleri üç grup altında toplamak mümkündür. Bunlar; portföy için hedeflenen risk düzeyi, hisse senedi piyasasının performans düzeyi ve portföy yöneticisinin beceri düzeyidir. Performans değerleme ölçütlerinden en çok bilinen ve uygulama alanına sahip olanlar Sharp, Treynor ve Jensen ölçütleridir. Bunlardan Sharpe ölçütü standart sapmayı, Treynor ve Jensen ölçütleri ise sistematik riski (beta katsayısını) esas almaktadır. Sharpe (1964), portföy performansını değerlendirirken sermaye piyasası doğrusunu esas almıştır ve orijini risksiz getiri olan portföyün, sermaye piyasası doğrusunun eğimine eşit olduğunu savunmaktadır. Sharpe ölçütünün değeri, portföyün beklenen değeri ve risksiz faiz oranı arasındaki fark olarak tanımlanan risk priminin portföyün standart sapmasına bölünmesiyle hesaplanır.

3. PORTFÖY TEORİLERİ

Portföy yönetiminde kabul edilen iki temel yaklaşım söz konusudur. Geleneksel portföy yaklaşımı ve modern portföy yönetim yaklaşımı olarak adlandırılan bu iki yaklaşım türünün temelinde çeşitlendirme yolu ile riskleri azaltarak getiriyi maksimum kılmak yatmaktadır.

3.1. Geleneksel Portföy Yaklaşımı

1950'li yıllara kadar kabul gören ve varlıklar arasındaki ilişkiyi gözetmeden rasgele seçilen menkul kıymetlerin portföye dahil edilmesine dayalı, basit çeşitlendirme düşüncesiyle hareket eden bir yaklaşımdır. Birden fazla varlığa yatırım yapılması görüsüne dayandığı için bütün yumurtaların aynı sepete konulmaması olarak da tanımlanabilir (Evans ve Archer, 1968). Portföyü oluşturan varlıkların sayısı ne kadar fazla olursa riskin o kadar azaltılacağını ileri sürer. Buna karşılık aşırı çeşitlendirmeden kaynaklanan; portföyde taşıdığı riske göre gerekli getiriyi sağlayamayan menkul kıymetlere de yer verilmesi, portföy yönetiminin güçlüğü, çok sayıda menkul kıymet ile ilgili bilgi edinmenin maliyetli olması ve işlem giderlerinin yüksek olması gibi birtakım dezavantajları bulunmaktadır.

3.2. Modern Portföy Yönetim Yaklaşımı

1950'li yıllardan sonra ortaya çıkan ve varlıklar arasındaki ilişkileri göz önüne alarak portföy oluşturmaya dayanan bir yaklaşımdır. Markowitz (1952), 1952 yılında yayımlanan "Portfolio Selection" adlı makalesi ile ortalama varyans modelini ortaya koymuş ve modern portföy teorisinin temellerini atmıştır. Modern portföy kuramının varsayımları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- Bir portföyün riski, portföyü oluşturan varlıkların riskinden daha az olabileceği gibi belli koşullarda portföyün sistematik olmayan riskini sıfıra düşürmek mümkündür.
- Yatırımcılar, aynı getiri düzeyinde olan portföylerden daha az riske sahip olanları, aynı risk düzeyinde olanlardan da daha fazla getiriye sahip olanları tercih ederler. Dolayısıyla bazı portföyler diğerlerine göre daha üstündür. Bu durum üstünlük ilkesi olarak adlandırılmıştır.
- Getirilerin olasılık dağılımı normaldir.
- Yatırımcılar riskten kaçınan bireylerdir.

Markowitz (1952) portföy seçim problemi için aşağıdaki kuadratik modeli oluşturmuştur:

$$Z_{min} = x^T Q x \qquad (7)$$

$$\sum x_i R_i \geq E(R) \qquad (8)$$

$$\sum x_i = 1 \qquad (9)$$

$$x_i \geq 0 \ , \quad i = 1, 2, ..., n \qquad (10)$$

Yukarıda verilen kuadratik portföy modelinde Z amaç fonksiyonunu minimize eden vektör etkin portföye karşılık gelmektedir. Burada, x_i, i'inci hisse senedine yapılan yatırım oranını, Q ise hisse senedi getirilerinden oluşturulan kovaryans matrisini göstermektedir. Bu model yardımıyla, farklı getiri düzeylerinde optimal portföyler ve portföy içinde hangi hisse senedine ne oranda yatırım yapılacağı belirlenebilmektedir.

3.3. Tek İndeks Modeli

Etkin sınırın hesaplanabilmesi için gerekli olan veriler, hisse senetlerinin beklenen getirileri, varyansları ve getiriler arasındaki korelasyon katsayılarıdır. Portföydeki hisse senedi sayısı arttıkça hesaplama işlemi zorlaşmaktadır. Çeşitli hisse senetlerinin getirilerini ortak ilişkili oldukları tek faktöre bağlama varsayımından hareketle, Sharpe (1964) tarafından geliştirilen modelde, hisse senetlerinin getirilerinin arasındaki korelasyon yerine her bir hisse senedinin getirisinin piyasa ortalama getirisi veya piyasa indeksi ile olan beta katsayıları kullanılmaktadır. Bu modelde her bir hisse senedinin getirisi aşağıdaki regresyon doğrusu ile hesaplanır:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{11}$$

Burada; R_i, i'inci hisse senedinin getirisi; R_m, pazarın getirisi; α_i, i'inci hisse senedinin pazarın durağan olduğu durumdaki getirisi; β_i, i'inci hisse senedinin beta katsayısı ve ε_i, hata değişkenidir.

Sharpe (1964)'ın tek indeks modelinde, risk ve getiri arasında en iyi dengeyi sağlayan portföyü bulmak için Elton ve Gruber (1995), portföy seçim yöntemi geliştirmişlerdir. Bu yöntemde hisse senetleri performanslarına göre sıralanmakta ve bu sıralamada her bir hisse senedinin betaya göre fazla getirilerini veren aşağıdaki indeksten yararlanılmaktadır:

$$\frac{\overline{R}_i - R_f}{\beta_i} \tag{12}$$

Burada $\overline{R}_i$, i'inci hisse senedinin ortalama getirisine; R_f ise risksiz finansal varlığın getirisine karşılık gelmektedir.

Yüksek oranlı hisse senetlerinden kaçının portföye alınacağı ise bir C^* kesim noktası yardımıyla bulunur. C^* kesim noktasının bulunabilmesi için her bir hisse senedinin aşağıdaki formül yardımıyla C_j değerleri hesaplanmalıdır:

$$C_j = \frac{\sigma_m^2 \sum_{i=1}^{j} \frac{(\overline{R}_i - R_f)\beta_i}{\sigma_i^2}}{1 + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{j} \frac{\beta_i^2}{\sigma_i^2}} \tag{13}$$

Burada; σ_m^2, pazar indeksinin varyansı ve σ_i^2, sistematik olmayan riski göstermektedir. C_j değerleri bulunduktan sonra, bu değerler her bir hisse senedi için getiri fazlası oranları ile karşılaştırılır. $\dfrac{\overline{R}_i - R_f}{\beta_i}$ değeri C_j değerinden büyük olan hisse senetleri portföye alınır. Portföye alınan son hisse senedinin C_j değeri C^* kesim noktasını verir. Portföye girecek hisse senetlerinin belirlenmesinden sonra, bu senetlerin portföy içindeki paylarının tespit edilmesi aşamasına geçilir. Bu aşamada öncelikle hisse senetlerinin her biri için aşağıda formülü verilen Z_i değerleri hesaplanmalıdır. Burada i'inci hisse senedinin portföy içindeki payı, Z_i değerinin Z_i değerleri toplamına bölünmesiyle bulunur:

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_i^2}\left(\frac{\overline{R}_i - R_f}{\beta_i} - C^*\right) \tag{14}$$

$$x_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{k} Z_i} \tag{15}$$

Portföyün varyansının hesaplanabilmesi için ise aşağıdaki formül kullanılır:

$$\sigma_p^2 = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i\right)^2 \sigma_m^2\right] + \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_i^2\right] \tag{16}$$

Böylece, çok sayıda varlık performanslarına göre değerlendirilerek, en iyi risk-getiri dengesini sağlayan portföylerden biri elde edilmiş olur.

3.4. Konno - Yamazaki Doğrusal Programlama Modeli

Konno ve Yamazaki (1991), Markowitz (1952)'in portföy optimizasyon modelinin kuadratik programlama gerektirdiği, kuadratik programlamanın ise kovaryans matrislerinin oluşturulmasındaki zorluklar nedeniyle büyük ölçekli portföylere uygulanmasının zor olduğunu iddia etmişler ve alternatif olarak bir doğrusal programlama modeli önermişlerdir. Söz konusu iki model birbirleri ile benzerliklerine karşın, risk fonksiyonu konusunda birbirlerinden ayrılmıştır. Konno ve Yamazaki (1991), ortalama varyans modelinin zorluklarının yanı sıra yatırımcıların çoğunun risk ölçümünde standart sapmayı kabullenmekte zorlandığını iddia etmiş ve risk ölçütü olarak standart sapma yerine ortalamadan mutlak sapmayı önermişlerdir. Konno ve Yamazaki (1991)'nin portföy optimizasyonu konusunda geliştirdikleri doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibidir (Kocadağlı ve Cinemre, 2010):

$$\text{Min } Z = \sum_{t=1}^{T} y_t / T \tag{17}$$

$$y_t - \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j \geq 0 \tag{18}$$

$$y_t + \sum_{j=1}^{n} a_{tj} x_j \geq 0 \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_0 \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = M_0 \tag{21}$$

$$0 \leq x_j \leq u_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{22}$$

$$y_t \geq 0 \quad , \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{23}$$

Burada; T, incelenen dönem sayısı; t, T dönem içindeki herhangi bir t. dönem; ρ, beklenen getiri oranı; r_j, j. hisse senedinin T dönemdeki ortalama getiri oranı; r_{tj}, j. hisse senedinin t. dönemde gerçekleşen getiri oranı; x_j, j. hisse senedinin toplam yatırım içindeki payı; u_j, j. hisse senedine yapılan yatırımın üst sınırı; M_0, toplam yatırım miktarı; ρM_0, beklenen getiri miktarı; y_t, yardımcı değişken ve a_{tj}, j. hisse senedinin t. dönem ve ortalama getirisi arasındaki farktır ($a_{tj} = r_{jt} - r_j$).

Modeldeki amaç fonksiyonu beklenen getiriden sapma olarak tanımlanan riski minimize etmek için kullanılmaktadır. Modelde kısıtlar doğrusal denklemlerden oluşmaktadır. (18) ve (19) kısıtları, hisse senetlerinin ortalamadan mutlak sapmalarını minimize etmek için kullanılan $y_t - \sum_{j=1}^{n} | a_{tj} x_j | \geq 0$ eşitsizliğindeki mutlak değerin açılması sonucu ortaya çıkmaktadır. Konno ve Yamazaki (1991) modelinin etkinlik sınırının her bir noktasının belirlenebilmesi için model en fazla $2T + 2$ kısıt içermelidir. Amaç fonksiyonu ve (18) eşitsizliğinden elde edilen T kısıt yardımıyla belirli bir beklenen getiri seviyesinde $a_{tj} = r_{jt} - r_j$ katsayısı pozitif olan hisse senetlerinden en küçük olanları belirlenir. (19) eşitsizliğinden elde edilen T kısıt yardımıyla ise, $a_{tj} = r_{jt} - r_j$ katsayısı en az sıfıra eşit hisse senetleri belirlenerek negatif sapmalı hisse senetleri elimine edilir (Kocadağlı ve Cinemre, 2010). (20) kısıtı yardımı ile ortalama getiri oranı beklenen getiriye eşit veya bu değerden büyük olan portföyler belirlenebilir. (21) kısıtı ise toplam yatırım miktarıdır. Son olarak, x_j ve y_t ’ler çözüm tekniği gereği sıfır veya sıfırdan büyük olmalıdır.

4. PORTFÖY SEÇİMİNİN ADIMLARI

Bu çalışmada, belirli bir getiri düzeyinde portföyün riskini minimize etmekle beraber pazarın ilgilenilen periyottaki eğilimini de göz önünde bulunduran bir prosedür önerilmektedir. Bu prosedüre göre etkin portföylerin oluşturulması için aşağıdaki adımlar takip edilmiştir:

1. Markowitz (1952)'in modelini farklı getiri düzeylerinde çöz,

2. Etkin portföyleri belirle,

3. Hisse senetlerinin betalarını hesapla,

4. Pazarın eğilimi ve beta katsayılarına göre portföye alınacak hisse senetlerinin yatırım payları ile ilgili kısıtlar oluştur,

5. Bu kısıtları Markowitz (1952)'in ve Konno ve Yamazaki (1991)'nin modellerine ekle,

6. Markowitz (1952) ve Konno ve Yamazaki (1991) modelleri için beklenen getiri düzeyini etkin sınır ile belirlenen getiri olarak al.

Burada, pazarın betası "1" olarak kabul edilirse, pazarın eğilimine göre Markowitz (1952) ve Konno ve Yamazaki (1991) modellerine aşağıdaki kısıtlar eklenebilir (Kocadağlı ve Cinemre, 2010):

- Pazarda artış eğilimi var ve dalgalanmalar az ise, betası "1"den büyük olan hisse senetlerinin portföydeki ağırlıklarını arttır.
- Pazarda artış eğilimi var ve dalgalanmalar mevcut ise, portföye alınacak hisse senetlerinin betalarının ağırlıklı ortalamasını "1"e eşitle.
- Pazarda düşüş eğilimi var ise betası negatif veya "1"den küçük olan hisse senetlerinin portföydeki ağırlıklarını arttır.

Pazarın eğilimi göz önünde bulundurularak yukarıdaki stratejiler yardımıyla belirli bir beklenen getiri düzeyinde riski minimize ederek etkin portföyler oluşturmak mümkündür.

5. UYGULAMA

Bu bölümde Markowitz (1952), Sharpe (1964) ve Konno ve Yamazaki (1991) modelleri kullanılarak, en iyi risk-getiri dengesine sahip olan optimal portföyler oluşturulmuştur. İşlemler İMKB 30'da yer alan hisse senetlerinin Eylül 2011-Ekim 2011 dönemleri günlük kapanış fiyatlarından hareketle Microsoft Excel programı içerisinde yer alan Çözücü eklentisi kullanılarak yapılmıştır. Yöntemlerin uygulanabilmesi için İMKB 30'da yer alan hisse senetlerinin ve endeksin günlük getirileri (1) denklemi kullanılarak hesaplanmıştır.

Portföye girecek etkin hisse senedi sayısını belirlemek için Elton-Gruber (1995) yöntemine başvurulmuştur. Modelde kullanılan hisse senetlerinin beta katsayıları kapanış fiyatları baz alınarak ve MATLAB programı kullanılarak hesaplanmıştır. Daha sonra hisse senetlerinin $\frac{\overline{R}_i - R_f}{\beta_i}$ oranları bulunmuştur. Sharpe oranı olarak ifade edilen bu oran, her birim riske düşen getiriyi hesaplamaya yaramaktadır. Özellikle yüksek getiri beklenilen hisse senetlerinin aynı zamanda çok yüksek riske sahip olduğu durumlarda hangi hisse senedinin tercih edileceği kararını vermede etkili bir araçtır. Böylece hisse senetlerinin etkinlik sıraları ve hangi hisse senetlerinin portföye alınacağı tespit edilebilir. Bu çalışmada risksiz varlık kullanılmadığı için R_f değeri sıfır olacaktır. İMKB 30 indeksinin varyansı 0.00046 olarak bulunmuştur. Her bir hisse senedinin C_j değeri (13) denklemi yardımıyla hesaplanmıştır. Hesaplanan C_j değerleri, her bir hisse senedi için hesaplanan Sharpe oranı ile karşılaştırılmıştır. $\frac{\overline{R}_i}{\beta_i}$'si C_j'den büyük olan 4 hisse senedi portföye alınmıştır. Portföye alınan son hisse senedinin C_j değeri C^* kesim noktasıdır (0.00329). Portföye girecek hisse senetlerinin belirlenmesinden sonra, bu senetlerinin portföy içindeki payları (14) ve (15) formülleri çözülerek tespit edilmiştir.

Tablo 1. Elton ve Gruber Yöntemi ile Elde Edilen Sonuçlar

Hisse Senedi	$\overline{R}_i$	β_i	σ_i^2	$\frac{\overline{R}_i}{\beta_i}$	C_i	Z_i	x_i
TKFEN	0.00385	0.55711	0.00046	0.00691	0.00165	4.43088	0.406
TCELL	0.00328	0.57118	0.00048	0.00574	0.00244	2.91942	0.268
TUPRS	0.00475	0.87968	0.00062	0.00539	0.00321	2.99625	0.275
AKSA	0.00258	0.68636	0.00058	0.00375	**0.00329**	0.55490	0.051
ARCLK	0.00248	0.82785	0.00052	0.00300	0.00323		
TOPLAM						**10.90145**	**1.000**

Tablo 1'de görüldüğü üzere; birinci etkin hisse senedi TKFEN ($\overline{R}_1 = 0.00385$, $\beta_1 = 0.55711$, $\sigma_1^2 = 0.00046$), ikinci etkin hisse senedi TCELL ($\overline{R}_2 = 0.00328$, $\beta_2 = 0.57118$, $\sigma_2^2 = 0.00048$) ve üçüncü etkin hisse senedi TUPRS ($\overline{R}_3 = 0.00475$, $\beta_3 = 0.87968$, $\sigma_3^2 = 0.00062$)'tır.

(2) ve (16) formülleri kullanılarak portföyün getirisi 0.00388; varyansı 0.00036 ve standart sapması 0.01886 olarak elde edilmiştir.

Sharpe (1964) modeli ile bulunan bu sonuçlardan sonra Markowitz (1952)'in ortalama varyans optimizasyonuyla her bir beklenen getiriye karşılık gelen risk hesaplanarak getiri-risk koordinatlarının oluşturduğu etkin sınır tespit edilmiş ve

İMKB 30 endeksinde yer alan hisse senetlerinden farklı beklenen getiri ve risk düzeylerinde belirlenen etkin sınırın üzerinde yer alan optimal portföyler elde edilmiştir. Markowitz (1952) modelinde, korelasyon katsayıları ile portföy riski arasında doğrusal bir ilişki söz konusu olduğu için portföy çeşitlendirmesi yaparken, hisse senetleri arasındaki korelasyon katsayılarının dikkate alınması gerekmektedir. Kuadratik terim için gerekli olan kovaryans matrisi hesaplanmış ve Markowitz (1952) modelinin %0.14 beklenen getiri düzeyinde çözülmesi ile amaç fonksiyonu değeri 0.00014 olarak hesaplanmış, portföye alınacak hisse senedi sayısı 9 olarak belirlenmiş, modele giren hisse senetleri ve ağırlıkları Tablo 2'de gösterilmiştir.

Tablo 2: Markowitz Modelinin Belirlediği Yatırım Payları

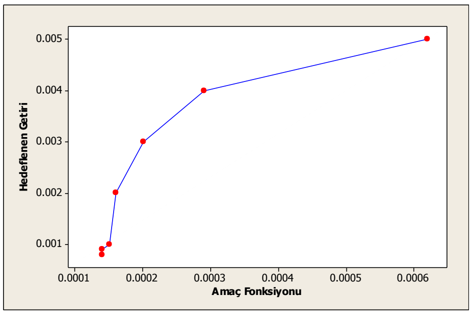
DOHOL	BIMAS	KOZAA	KOZAL	KRDMD	PETKM	TCELL	TKFEN	TTKOM
0.032	0.223	0.076	0.206	0.111	0.225	0.059	0.039	0.030

Etkin sınırın belirlenmek için yatırımcıların risk tercihlerine göre seçebilecekleri 7 adet portföy Tablo 3'te verilmiştir. Elde edilen portföylerin tamamı etkin sınırın üzerinde olduğundan, mümkün olan diğer portföylerle karşılaştırıldıklarında aynı risk düzeyinde daha yüksek getiri, aynı getiri düzeyinde daha düşük risk verdikleri söylenebilir.

Tablo 3: Etkin Sınırı Oluşturan Portföyler

Hisse Senedi	**Portföy No**						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
AKSA	0.031	0.037	0.041	0.078	0.076		
DOHOL	0.051	0.054	0.056	0.067			
BIMAS	0.164	0.155	0.146	0.021			
KOZAL	0.216	0.218	0.219	0.215	0.148		
KRDMD	0.065	0.058	0.050				
PETKM	0.198	0.196	0.191	0.137	0.014		
TCELL	0.116	0.124	0.132	0.228	0.319	0.297	
TKFEN	0.108	0.118	0.129	0.254	0.336	0.347	
TUPRS					0.107	0.356	1.000
Hedeflenen Getiri	**0.0008**	**0.0009**	**0.001**	**0.002**	**0.003**	**0.004**	**0.005**
Amaç Fonksiyonu	**0.00014**	**0.00014**	**0.00015**	**0.00016**	**0.00020**	**0.00029**	**0.00062**

Etkin sınırı oluşturan portföyler arasında bir tercih söz konusu olduğunda; amaç fonksiyonundaki bir birimlik artışa karşılık elde edilen getiri miktarları karşılaştırılarak karar verilebilir. Etkin portföylerin getiri ve risklerindeki artışı gösteren Şekil 1 incelendiğinde; %0.4 hedeflenen getiri düzeyine kadar portföyün riskinde kabul edilebilir bir artış gözlemlenirken; getiri düzeyi arttırılmaya devam edildiğinde eğim azalmakta yani; katlanılan risk düzeyine karşılık getiride daha düşük bir artış sağlanmaktadır. Bu sebeple modelin %0.4 hedeflenen getiri düzeyinde çözülmesi önerilmektedir.



Şekil 1. Hedeflenen Getiri Düzeylerine göre Amaç Fonksiyonu Değerleri

Sonraki aşamada, Konno ve Yamazaki (1991)'nin Markowitz (1952)'in modeline alternatif olarak önerdiği doğrusal programlama modelinden faydalanarak portföy optimizasyonu yapılmıştır. Modeldeki amaç fonksiyonu, beklenen getiriden sapma olarak ifade edilen riski minimize etmek için kullanılmaktadır. Getiri oranları ile ortalama getiri oranı arasındaki farklardan elde edilen matris kullanılarak, belirli bir getiri düzeyinde yardımcı değişkenlerin minimize edilmesiyle, risk de ilgili kısıtlar yardımıyla minimize edilmiş olmaktadır. Modelin %0.14 beklenen getiri düzeyinde çözülmesiyle amaç fonksiyonu değeri 0.009 olarak bulunmuş olup portföye girmesine karar verilen 12 hisse senedi ve portföy içindeki ağırlıkları Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4: Konno - Yamazaki Modelinin Belirlediği Yatırım Payları

AKENR	ASYAB	BIMAS	IHLAS	KOZAA	KOZAL
0.052	0.073	0.093	0.039	0.016	0.155
KRDMD	**PETKM**	**SISE**	**SNGYO**	**TCELL**	**THYAO**
0.154	0.158	0.073	0.003	0.121	0.063

Konno ve Yamazaki (1991) modelinin, Markowitz (1952)'in etkin sınırı ile belirlenen getiri (%0.4) düzeyinde çözülmesiyle amaç fonksiyonu değeri 0.01343 olarak bulunmuş, portföye girmesine karar verilen hisse senetleri ve portföy içerisindeki oranları Tablo 5'te sunulmuştur:

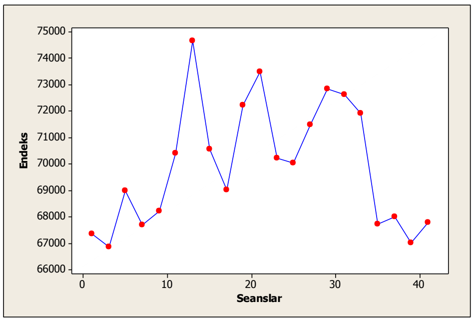
Tablo 5. Konno - Yamazaki Modelinin Etkin Sınır Kullanılarak Çözülmesi ile Belirlenen Yatırım Payları

TCELL	TKFEN	TUPRS
0.336	0.282	0.382

Bu çalışmada baz alınan dönemde Şekil 2'de görüldüğü üzere belirli günlerde pazarda ciddi düşüşler gözlendiğinden ve pazarın son dönemlerdeki eğilimi negatif yönde olduğundan betası "1"den küçük olan hisse senetlerinin portföydeki ağırlıklarının yüksek tutulması uygundur. Buna göre, denemeler sonucunda modelde betası "1"den küçük olan hisse senetlerinin oranı 0.9 ve betası "1"den büyük olanlarınki de 0.1 olarak belirlenmiştir. Böylece, Markowitz (1952) ve Konno ve Yamazaki (1991) modellerine aşağıdaki kısıtlar eklenmiştir:

$$\sum_{\beta_i > 1} x_i = 0.9 \tag{24}$$

$$\sum_{\beta_j < 1} x_j = 0.1 \tag{25}$$



Şekil 2. Seanslara göre Endeks Değerleri

Markowitz (1952) ve Konno ve Yamazaki (1991) modellerinin (24) ve (25) kısıtları eklenerek çözülmesi ile oluşturulan portföyler Tablo 6 ve Tabo 7'de verilmiş, amaç fonksiyonu değerleri sırasıyla 0.00036 ve 0.01499 olarak hesaplanmıştır.

Tablo 6. Markowitz Modelinin Beta Katsayısı Kısıtı Eklenerek Çözülmesi ile Belirlenen Yatırım Payları

EKGYO	TCELL	TKFEN	TUPRS
0.100	0.137	0.250	0.513

Tablo 7. Konno - Yamazaki Modelinin Beta Katsayısı Kısıtı Eklenerek Çözülmesi ile Belirlenen Yatırım Payları

EKGYO	TCELL	TKFEN	TUPRS
0.100	0.143	0.239	0.517

Son olarak; modellerin beklenen getiri düzeyinde, etkin sınır kullanılarak belirlenen getiri düzeyinde ve beta katsayıları ile ilgili kısıtlar eklenerek çözülmesi ile seçilen portföylerin Kasım 2011 ayında test edilmesi ile elde edilen sonuçlar Tablo 8'de verilmiştir:

Tablo 8. Seçilen Portföylerin Test Edilmesi

Kullanılan Model	Portföyün Getirisi		
	Beklenen Getiri kıstlı	**Beta kısıtlı**	**Etkin Sınır**
Markowitz Kuadratik Programlama Modeli	-0.0373	0.0108	0.0185
Konno - Yamazaki Doğrusal Programlama Modeli	-0.0407	0.0115	0.0227
Sharpe Tek İndeks Modeli	0.0107		

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada portföy seçim problemi için önerilen Markowitz (1952), Sharpe (1964) ve Konno ve Yamazaki (1991) modelleri incelenmiştir. En iyi risk-getiri dengesini sağlayan portföyleri seçmeyi amaçlayan bu modellerden Markowitz (1952) modelinde, hisse senetlerinin getirileri arasındaki kovaryans dikkate alınarak bir portföy oluşturulması amaçlanırken; Sharpe (1964) modelinde, hisse senetlerinin getirileri ile indeksin getirisi arasındaki ilişkiyi ifade etmek için kullanılan regresyon denklemlerinden faydalanılır. Konno ve Yamazaki (1991) modelinde ise risk ölçütü olarak ortalamadan mutlak sapma kullanılır.

Sharpe (1964)'ın tek indeks modelinin çözümü için Elton ve Gruber (1995) yöntemi yardımıyla 4 hisse senedinin etkin olduğu tespit edilmiş ve portföyün getirisi 0.00388, varyansı ise 0.00036 olarak hesaplanmıştır (Tablo 1). Daha sonra Markowitz (1952) modeli ortalama beklenen getiri düzeyinde çözülmüş olup 9 hisse senedinin portföye girmesine karar verilmiş ve amaç fonksiyonu değeri 0.00014 olarak bulunmuştur (Tablo 2). Markowitz (1952) modelinin farklı getiri düzeylerinde çözülmesiyle (Tablo 3) etkin sınır belirlenerek farklı yatırımcı tiplerine hitap edebilecek alternatif portföyler oluşturulmuştur. Kuadratik programlama ile oluşturulan getiriyi arttırmak üzerine kurulu olan alternatif senaryolar getirideki artışa paralel olarak üstlenilen riski de arttırmıştır. Amaç fonksiyonundaki bir birimlik artış sonucu elde edilen getiriler karşılaştırılarak hedeflenen getiri düzeyi 0.004 (%0.4) olan 6 numaralı portföyün seçilmesi önerilmiştir. Bir sonraki aşamada, Konno ve Yamazaki (1991) tarafından kuadratik programlamaya alternatif olarak önerilen doğrusal programlama modelinin beklenen getiri (%0.14) düzeyinde çözülmesi ile 12 hisse senedinin portföye girmesine karar verilmiş ve amaç fonksiyonunun değeri 0.009 olarak bulunmuştur. Söz konusu modelin etkin sınır kullanılarak belirlenen %0.4 getiri düzeyinde çözülmesiyle 3 hisse senedinin portföye girmesine karar verilmiş ve amaç fonksiyonu değeri 0.01343 olarak bulunmuştur. Son olarak, incelenen dönemde pazarda ciddi düşüşler gözlendiğinden ve pazarın son dönemlerdeki eğilimi negatif yönde olduğundan Markowitz (1952) ve Konno ve Yamazaki (1991) modellerine betası "1"den küçük olan hisse senetlerinin portföydeki ağırlıklarının yüksek tutulmasını sağlayacak kısıtlar eklenmiştir. Her iki modelin etkin sınır kullanılarak belirlenen getiri düzeyinde çözülmesi ile aynı 4 hisse senedinin portföye alınmasına karar verilmiş ve birbirine çok yakın yatırım oranları belirlenmiştir.

Tablo 8'den görüldüğü gibi seçilen portföylerin Kasım 2012 döneminde test edilmesi sonucu, Markowitz (1952) ve Konno ve Yamazaki (1991) modellerinin beklenen getiri düzeyinde çözülmesi ile oluşturulan portföyler yaklaşık %4 oranında zarara sebep olurken, söz konusu modellerin etkin sınır kullanılarak belirlenen getiri düzeyinde çözülmesi ile oluşturulan portföyler ile yaklaşık %2 oranında kâr elde edilmektedir. Benzer şekilde; beta katsayısının modele eklenmesi ile %1 oranında kâr elde edilmesi mümkün olmaktadır. Yapılan analizler neticesinde, ortalama getiri hedefleyen muhafazakâr bir yatırımcı zarar edebilirken, pazarın eğilimini ve etkin portföyleri göz önünde bulundurarak portföy seçimi yapan yatırımcının kâr etmesinin mümkün olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKÇA

Alexander, G.J., Sharpe W.F. Ve Bailey J.V., (2000), Fundamentals of Investments, Printice Hall, New York.

Atan, M., (2005), Karesel Programlama ile Portföy Optimizasyonu, VII. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, İstanbul Üniversitesi, İstanbul.

Bolak, M., (1991), Sermaye Piyasası Menkul Kıymetler ve Portföy Analizi, Beta Yayınları, İstanbul.

Bozdağ N.ve Türe H., (2008), "Bulanık Doğrusal Programlama ve İMKB Üzerine Bir Uygulama", Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 10/1, 1-18.

Brigham, E. F., (1996), Fundamentals of Financial Managements, The Dryden Press, New York.

Elton, E.J. Ve Gruber M.J., (1995), Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, Wiley, New York.

Evans, J. Ve Archer S.H., (1968), "Diversification and Reduction of Dispersion, An Emprical Analysis", Journal of Finance, 23, 761-767.

Fang Y., Lai K.K. Ve Wang S.Y., (2006), "Portfolio Rebalancing Model with Transaction Costs Based on Fuzzy Decision Theory", European Journal of Operational Research, Elsevier, 175, 879–893.

Karan, B., (2001), Yatırım Analizi ve Portföy Yönetimi, Gazi Kitabevi, Ankara.

Karaşin, G., (1987), Sermaye Piyasası Analizleri, Sermaye Piyasası Kurulu Yayınları, Ankara.

Kaya, C., (2012), Doğrusal Olmayan Programlama ile Portföy Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Kocadağlı, O. ve Cinemre, N. (2006) "Bulanık Matematiksel Programlama ile Portföy Analizi", Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 26. Ulusal Kongresi (YA/EM 2006) Bildiriler kitabı, Kocaeli.

Kocadağlı, O. Ve Cinemre, N. (2010), "Portföy Optimizasyonunda SVFM ile Bulanık Doğrusal Olmayan Model Yaklaşımı", İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi, 39 (2), 359-369.

Kolb, R.W. Ve Rodriguez R.J., (1996), Financial Management, Blackwell Publishers, Cambridge.

Konno H. Ve Yamakazi, H., (1991), "Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market", Management Science, 37, 519-531.

Köse, E., (2001), Doğrusal Olmayan Programlama Yöntemlerinden Kuadratik Programlama ile İMKB 30'da Portföy Oluşturma Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.

Küçükkocaoğlu, G., (2004), "Alfa, Beta, Standart Hata ve Portföy Seçimi", Muhasebe ve Denetime Bakış, 13.

Markowitz, H., (1952), "Portfolio Selection, The Journal of Finance", 7, 77-91.

Sharpe, F.W. (1964), "Capital Asset Prices, A Theory of Market, Equilibrium Under Conditions of Risk", The Journal of Finance, 19, 425-442.

http://www.imkb.gov.tr