Прикладные задачи анализа данных

ТЕОРИЯ НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ

Дьяконов А.Г.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

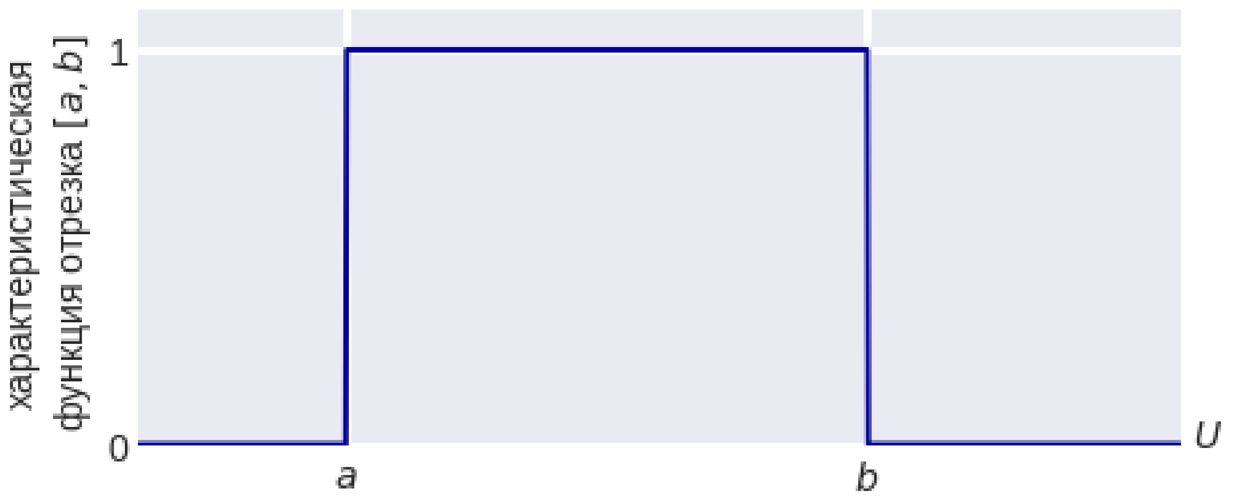
Обычное множество

Характеристическая функция обычного чёткого множества

$$h_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Где определена?

(универсальное множество)

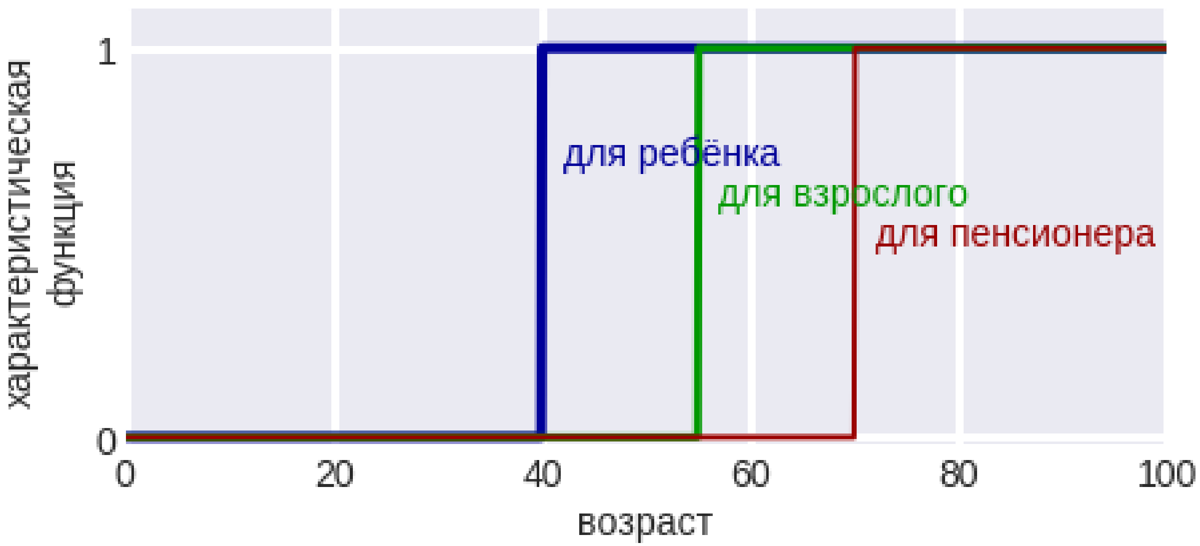


А если будет принимать значения из $[0, 1]$?

Зачем нужны нечёткие множества?

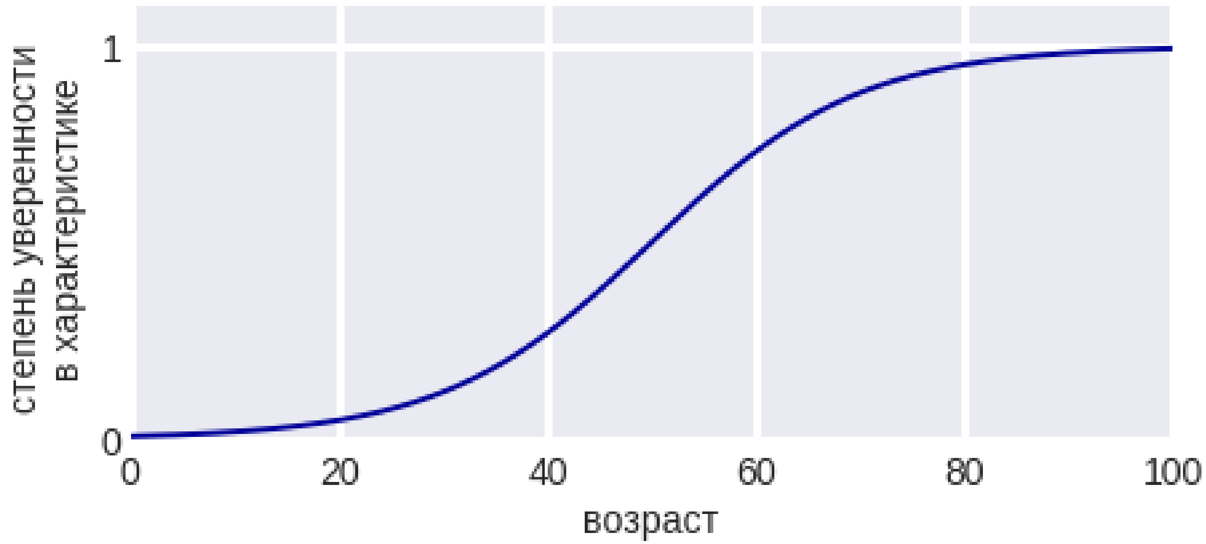
История со свидетелями…

Понятие «пожилой»

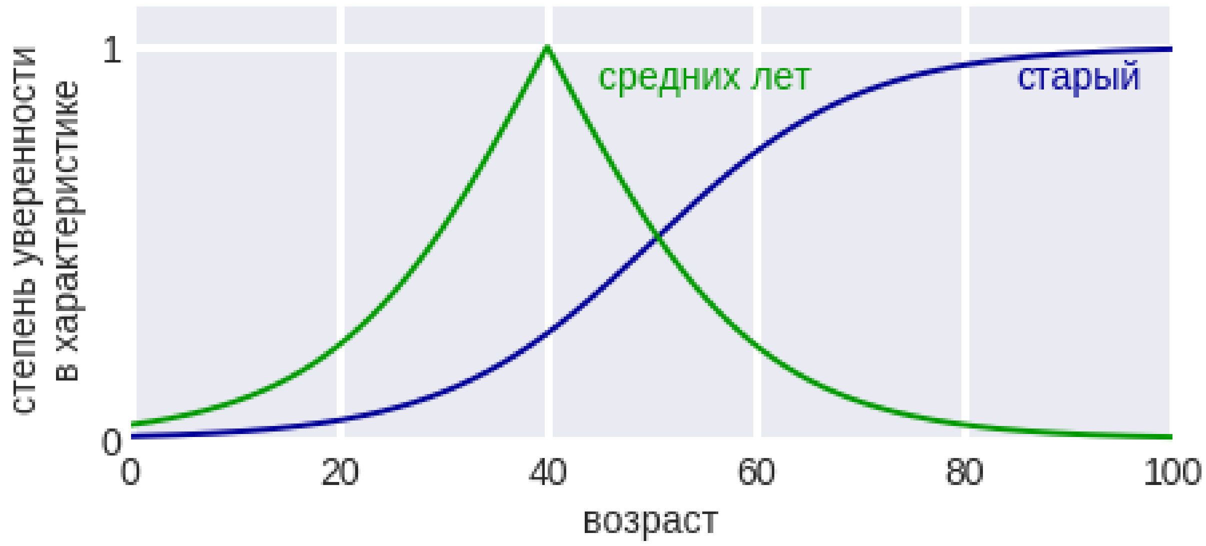


Зачем нужны нечёткие множества?

Выход – нечёткое множество



Можно пересекать «разные» понятия



Как?

Почему это не вероятность?

Нечёткий поиск

Nissan X-Trail II	2.5 CVT	169 л.с.	650 000 Р	155 000 км
Nissan Murano II (Z51)	3.5 CVT	249 л.с.	1 150 000 Р	28 000 км
Nissan Qashqai I	2.0 CVT	141 л.с.	780 000 Р	84 000 км

Запрос «Nissan Micra III 1.4 AT (88 л.с.) бензин, передний, 80 000 Р, 2010, 39 000 км, Белый Хэтчбек 5 дв. Москва»

Результат: нет

Но в базе есть

Nissan Micra III	1.4 AT	88 л.с.	85 000 Р	35 000 км
Nissan Micra III	1.4 AT	88 л.с.	80 000 Р	40 000 км

Результатов: примерно 3 120 000 (0,37 сек.)

Fuzzy set - Wikipedia, the free encyclopedia
https://en.wikipedia.org/wiki/**Fuzzy_set** ▾ Перевести эту страницу
In mathematics, **fuzzy sets** are sets whose elements have degrees of membership. **Fuzzy sets** were introduced by Lotfi A. Zadeh and Dieter Klaua in 1965 as an ...
Definition - Fuzzy logic - Fuzzy number - Fuzzy interval

Fuzzy Sets
https://www.calvin.edu/.../**Fuzzy**/**fuzzysets**.htm ▾ Перевести эту страницу
Defining **Fuzzy Sets**. In mathematics a set, by definition, is a collection of things that belong to some definition. Any item either belongs to that set or does not ...

Fuzzy Sets and Operations
www.doc.ic.ac.uk/~nd/.../report.**fuzzysets**.html ▾ Перевести эту страницу
Fuzzy Set Theory was formalised by Professor Lofti Zadeh at the University of California in 1965. What Zadeh proposed is very much a paradigm shift that first ...

Результатов: примерно 6 580 000 (0,22 сек.)

Нечёткая логика — Википедия
https://ru.wikipedia.org/wiki/Нечёткая_логика ▾
Нечёткая логика (англ. **fuzzy logic**) — раздел математики, являющийся обобщением классической логики и теории множеств, базирующийся на понятии ...
Направления исследований ... - Математические основы - Примечания

Fuzzy logic - Wikipedia, the free encyclopedia
https://en.wikipedia.org/wiki/**Fuzzy_logic** ▾ Перевести эту страницу
Fuzzy logic is a form of many-valued logic in which the truth values of variables may be any real number between 0 and 1. By contrast, in Boolean logic, the truth ...

Fuzzy Logic Toolbox - Проектирование систем управления
matlab.exponenta.ru/**fuzzylogic**/ ▾
Fuzzy Logic Toolbox обладает простым и хорошо продуманным интерфейсом, позволяющим легко проектировать и диагностировать нечеткие модели.

Результатов: примерно 436 000 (0,26 сек.)

Gradient boosting - Wikipedia, the free encyclopedia
https://en.wikipedia.org/wiki/**Gradient_boosting** ▾ Перевести эту страницу
Gradient boosting is a machine learning technique for regression and classification problems, which produces a prediction model in the form of an ensemble of ...
Informal introduction - Algorithm - Gradient tree boosting - Regularization

1.11. Ensemble methods — scikit-learn 0.17 documentation
scikit-learn.org/stable/modules/ensemble.html ▾ Перевести эту страницу
GradientBoostingClassifier supports both binary and multi-class classification. The following example shows how to fit a **gradient boosting** classifier with 100 ...

3.2.4.3.5. sklearn.ensemble.GradientBoostingClassifier ...
scikit-learn.org/.../sklearn.ensemble.**GradientBo**... ▾ Перевести эту страницу
The fraction of samples to be used for fitting the individual base learners. If smaller than 1.0 this results in Stochastic **Gradient Boosting**. subsample interacts with ...

Результатов: примерно 5 920 000 (0,48 сек.)

Logistic regression - Wikipedia, the free encyclopedia
https://en.wikipedia.org/wiki/**Logistic_regression** ▾ Перевести эту страницу
In statistics, **logistic regression**, or logit regression, or logit model is a regression model where the dependent variable (DV) is categorical. This article covers the ...
Multinomial logistic regression - Probit model - Discrete choice - Ordered logit

sklearn.linear_model.LogisticRegression — scikit-learn 0.17 ...
scikit-learn.org/.../sklearn.linear_model.**Logistic**... ▾ Перевести эту страницу
This class implements regularized **logistic regression** using the liblinear library, newton-cg and lbfgs solvers. It can handle both dense and sparse input.

[PDF] Logistic Regression - CMU Statistics
www.stat.cmu.edu/~cshalizi/uADA/.../ch12.pdf ▾ Перевести эту страницу
Chapter 12. **Logistic Regression**. 12.1 Modeling Conditional Probabilities. So far, we either looked at estimating the conditional expectations of continuous.

Определение

Пусть задано множество U (базовое множество)
и функция $\mu_A : U \to [0,1]$ (степень принадлежности),
тогда нечётким (размытым) подмножеством A называется график

$$\{(u, \mu_A(u)) \mid u \in U\}$$

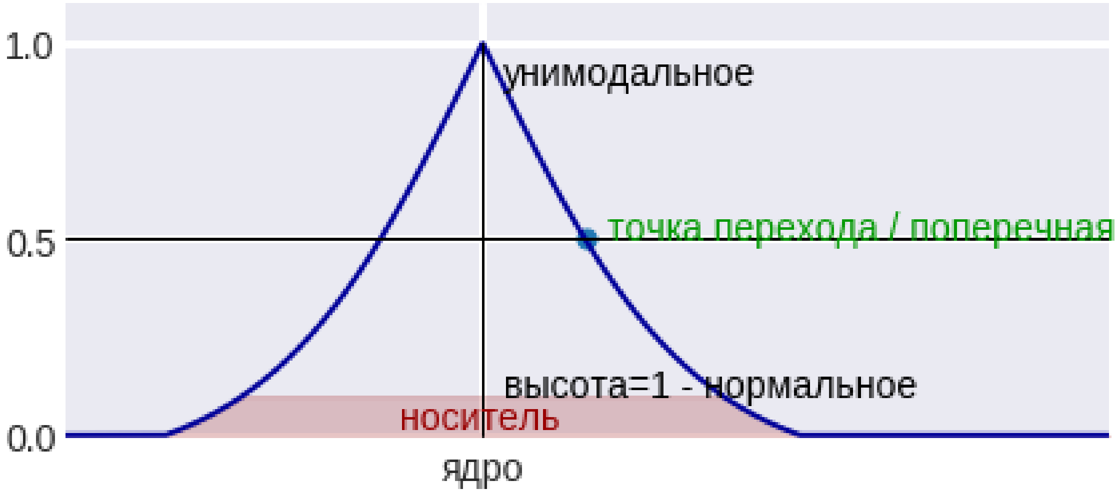
Множество (L-R)-типа

Нечётких подмножеств множества больше, чем чётких!

Трапецеидальное нечёткое множество

Треугольное нечёткое множество

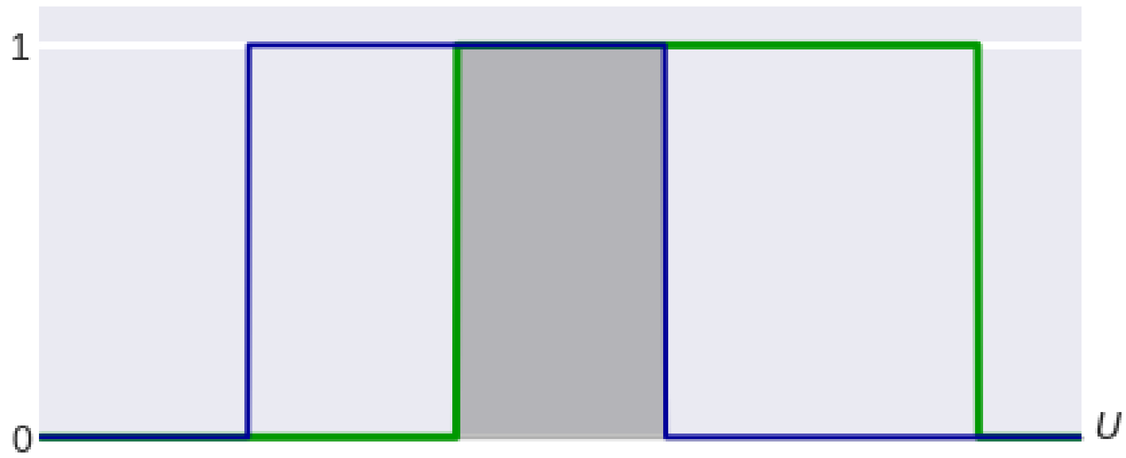
Основные понятия



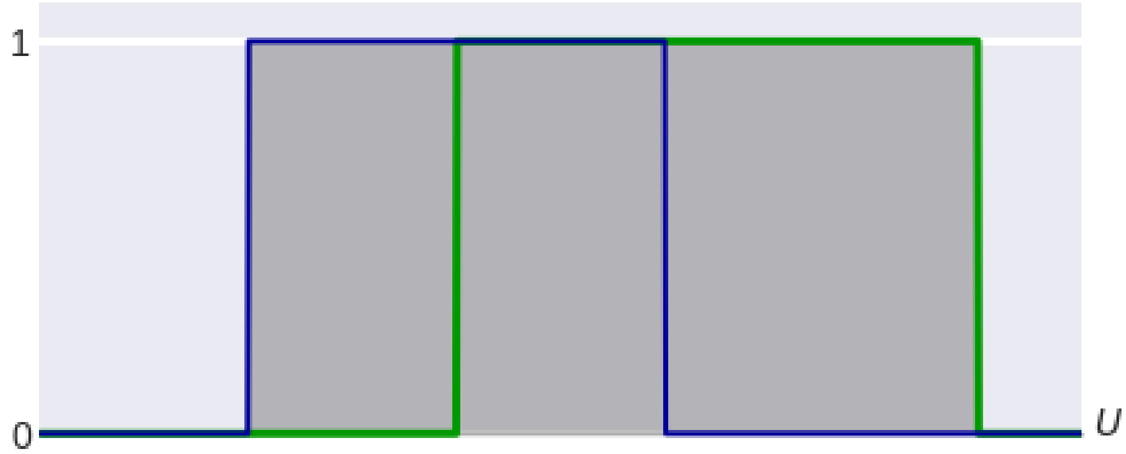
Операции

равенство	$A=B \Leftrightarrow \mu_A=\mu_B$
включение	$A\subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \le \mu_B$
дополнение	$A=\overline{B} \Leftrightarrow \mu_A = 1-\mu_B$
пересечение	$\mu_{A\cap B}=\min[\mu_A,\mu_B]$
объединение	$\mu_{A\cup B}=\max[\mu_A,\mu_B]$
алгебраическое произведение	$\mu_{A*B}=\mu_A\cdot\mu_B$
алгебраическая сумма	$\mu_{A+B}=\mu_A+\mu_B-\mu_A\cdot\mu_B$
пустое и универсальное множества	$\mu_\varnothing=0$, $\mu_U=1$

При замене функции принадлежности на характеристическую – аналогичные операции в теории множеств



Пересечение



Объединение

Алгебра – множество с введёнными на нём операциями

$$\underline{\langle \mathrm{P}(U); \neg, \cap, \cup \rangle}$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$\neg(\neg A) = A$$

Как называются свойства операций?

$$\dfrac{\langle \mathrm{P}(U);\neg,\cap,\cup\rangle}{}$$

$A\cap B=B\cap A$	**коммутативность**
$A\cup B=B\cup A$	**коммутативность**
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	**ассоциативность**
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	**ассоциативность**
$A\cap A=A$	**идемпотентность**
$A\cup A=A$	**идемпотентность**
$\neg(\neg A)=A$	**инволюция**

Задача 1

Какие из равенств всегда выполняются?

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\neg (A \cap B) = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cup \varnothing = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cup (\neg A) = U$$

$$A \cap (\neg A) = \varnothing$$

Решения задач – в конце слайдов

Но практически всё выполнено!

Для $\langle \mathrm{P}(U); \neg, *, + \rangle$ всё почти аналогично!

Проверить!

Нет только дистрибутивности и идемпотентности

$$A*(B+C) \neq (A*B)+(A*C)$$

Таким образом, пересечения и объединения можно вводить по-разному… но способов ещё больше!

Пересечение можно вводить по разному!

Т-нормы

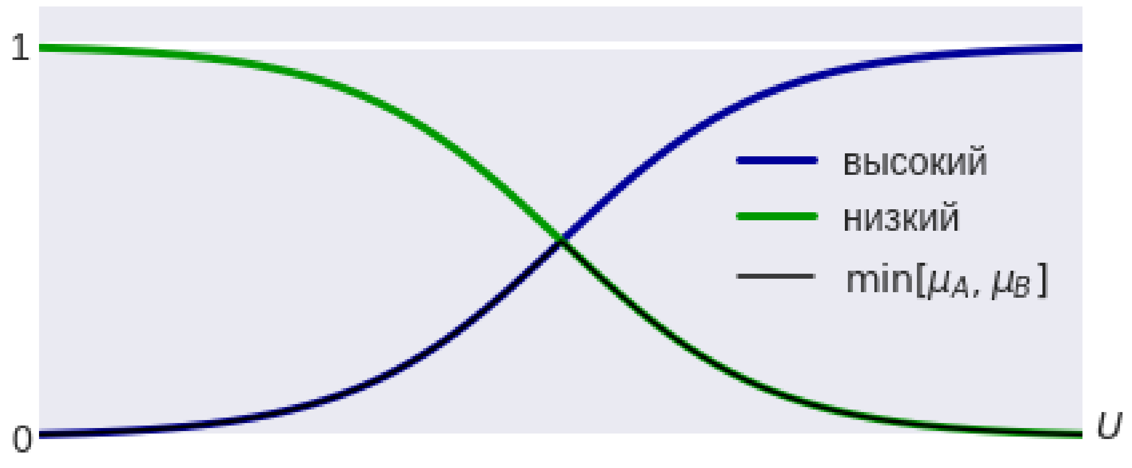
$$\mu_{A\cap B} = \min[\mu_A, \mu_B] \quad (1)$$

$$\mu_{A\cap B} = \mu_A \cdot \mu_B \quad (2)$$

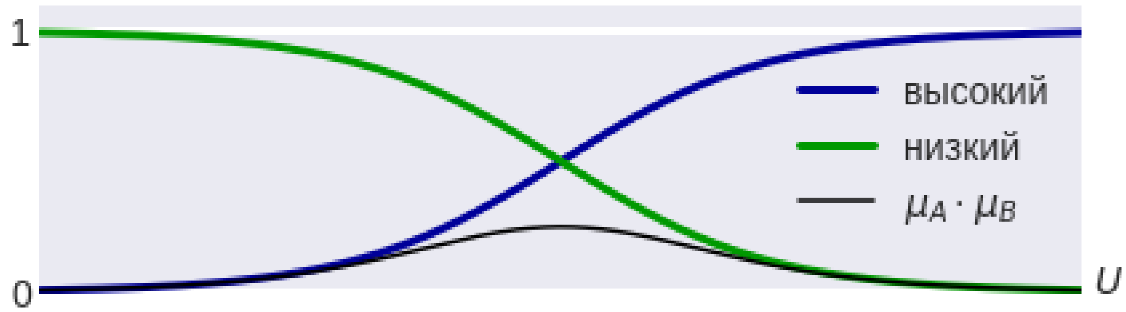
$$\mu_{A\cap B} = \max[0, \mu_A + \mu_B - 1] \quad (3)$$

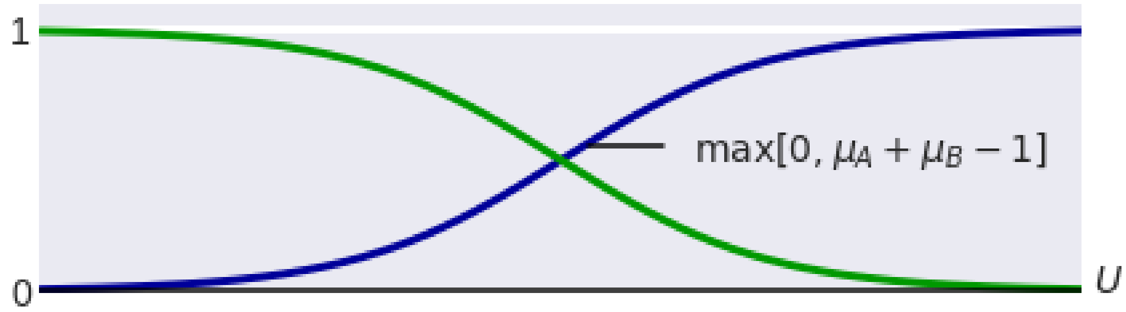
$$\mu_{A\cap B} = 1 - \min[1, ((1-\mu_A)^p + (1-\mu_B)^p)^{1/p}] \quad (4)$$

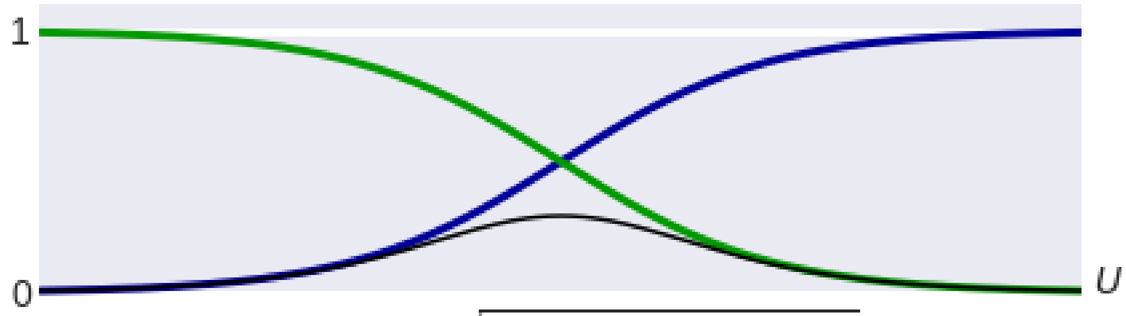
$$\mu_{A\cap B} = \max[\mu_B I[\mu_A = 1], \mu_A I[\mu_B = 1]] \quad (5)$$



Пересечение можно вводить по разному!







$1 - \min[1, \sqrt{(1-\mu_A)^2 + (1-\mu_B)^2}\,]$

Аксиоматическое определение Т-нормы

(треугольной нормы)

$$\mathrm{T}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

$$\mathrm{T}(0,0)=0$$

$$\mathrm{T}(\mu_A,1)=\mathrm{T}(1,\mu_A)=\mu_A$$

$$\mathrm{T}(\mu_A,\mu_B)=\mathrm{T}(\mu_B,\mu_A)$$

$$\mathrm{T}(\mu_A,\mathrm{T}(\mu_B,\mu_C))=\mathrm{T}(\mathrm{T}(\mu_A,\mu_B),\mu_C)$$

$$(\mu_A,\mu_B)\le(\mu_C,\mu_D)\Rightarrow\mathrm{T}(\mu_A,\mu_B)\le\mathrm{T}(\mu_C,\mu_D)$$

В чётком случае – обычное пересечение

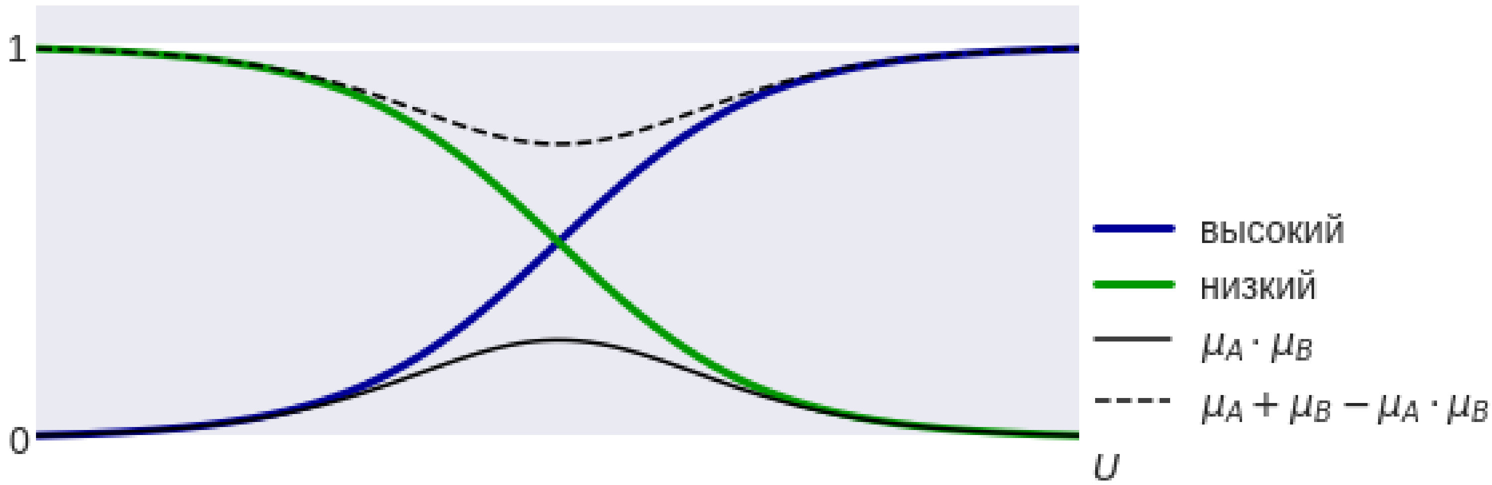
Как ввести объединения?

Как ввести объединения

Можно по правилам де Моргана

$$\min[\mu_A,\mu_B] \to 1-\min[1-\mu_A,1-\mu_B] = \max[\mu_A,\mu_B]$$

$$\mu_A\cdot\mu_B \to 1-(1-\mu_A)\cdot(1-\mu_B) = \mu_A+\mu_B-\mu_A\cdot\mu_B$$



Объединение тоже можно вводить по-разному!

Т-конормы

$$\mu_{A\cup B} = \max[\mu_A, \mu_B] \quad (1)$$

$$\mu_{A\cup B} = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B \quad (2)$$

$$\mu_{A\cup B} = \min[1, \mu_A + \mu_B] \quad (3)$$

$$\mu_{A\cup B} = \min[1, ((\mu_A)^p + (\mu_B)^p)^{1/p}] \quad (4)$$

$$\mu_{A\cup B} = \begin{cases} \mu_A, \ \mu_B = 0, \\ \mu_B, \ \mu_A = 0, \\ 1, \ \mu_A > 0, \mu_B > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Аналогично – есть аксиоматический подход…

Поэтому это не теория вероятностей – больше алгебры и эвристик

Задача 2

Кстати,

$$\mu_{A\cup B} = \min[1, ((\mu_A)^p + (\mu_B)^p)^{1/p}], p \geq 1$$

Чему равен

$$\lim_{p\to+\infty}[((\mu_A)^p + (\mu_B)^p)^{1/p}]?$$

Докажите.

Задача (решение сразу)

Как определить выпуклое нечёткое множество?

Как определить декартово произведение нечётких множеств?

Задача (решение сразу)

Как определить выпуклое нечёткое множество?

$$\forall x, y \in R \; \forall \gamma \in [0,1] \quad \mu_A(\gamma x + (1-\gamma) y) \geq \min[\mu_A(x), \mu_A(y)]$$

тогда и только тогда, когда все уровни выпуклые!

Как определить декартово произведение нечётких множеств?

$$\mu_{A\times B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

Декомпозиция нечётких множеств

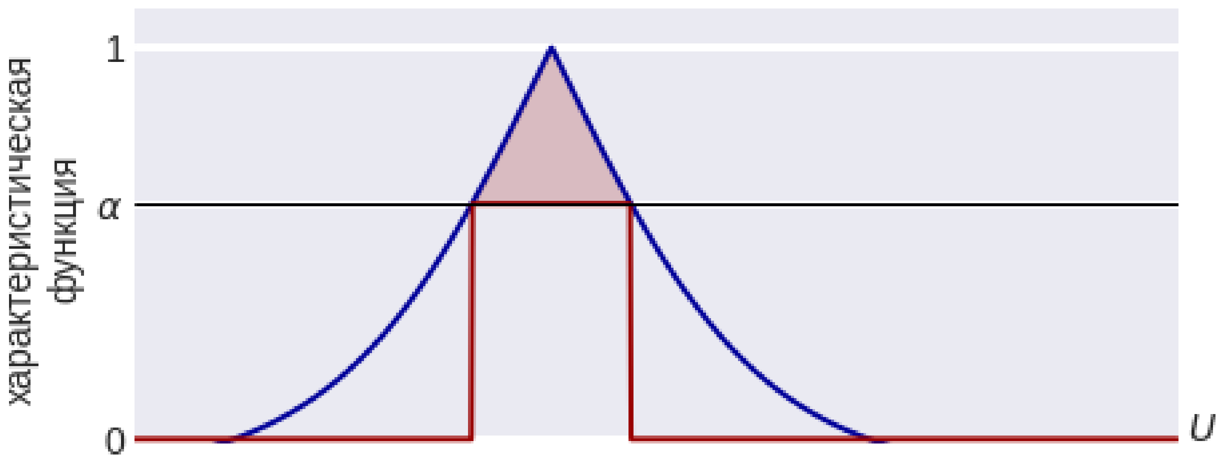
α-уровень множества A –

$$A_\alpha = \{u \in U \mid \mu_A(u) \geq \alpha\}$$

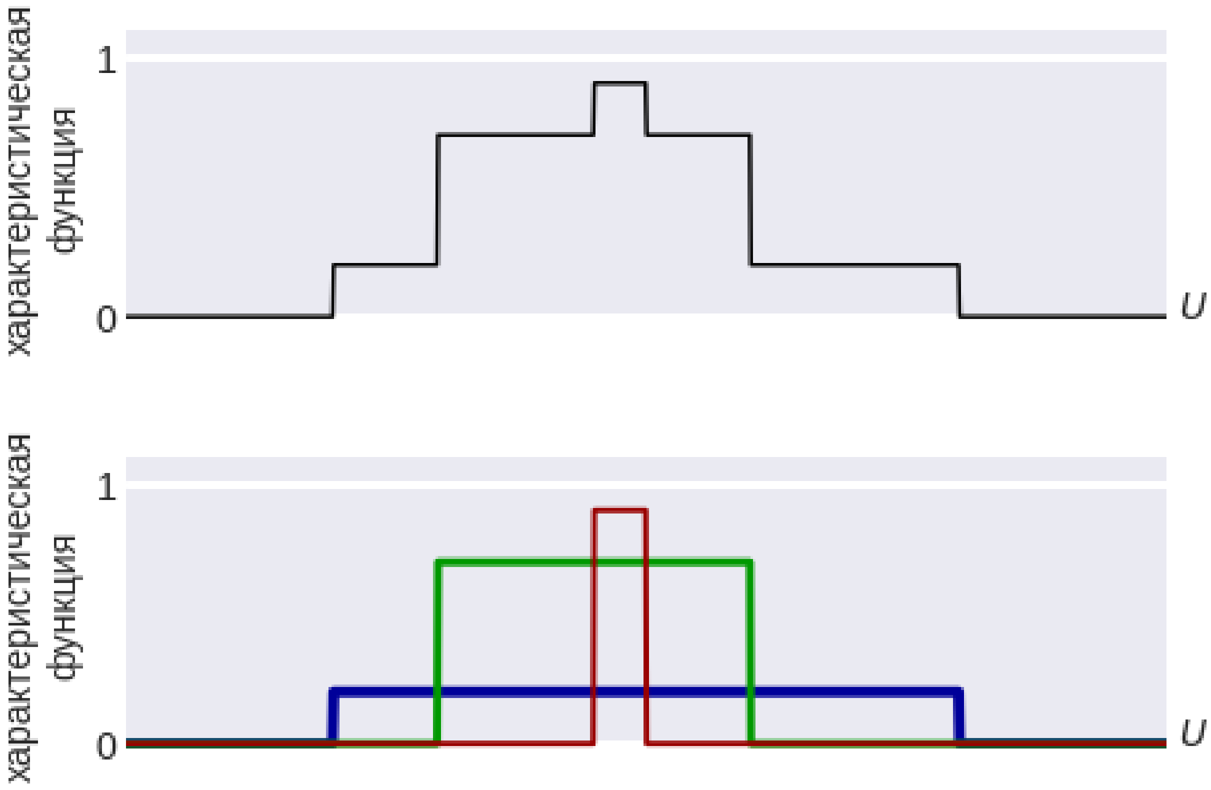
Декомпозиция: $A = \bigcup_{0<\alpha\leq 1} (A_\alpha, \alpha)$

Пример декомпозиции:

$$\{(1,0.1),(2,0.4),(3,0.1),(4,0.5)\} =$$
$$= \bigcup_{\max} [0.1 \cdot \{1,2,3,4\},\ 0.4 \cdot \{2,4\},\ 0.5 \cdot \{4\}]$$



Декомпозиция нечётких множеств



Декартово произведение

Вернёмся и обоснуем...

Хотим чтобы $A \times B = \bigcup_{0 \le \alpha \le 1} (A_\alpha \times B_\alpha, \alpha)$

тогда $(A \times B)_\beta = \bigcup_{\beta \le \alpha} (A_\alpha \times B_\alpha, \alpha)$

т.е. $\mu_{A \times B}(x, y) \ge \beta \Leftrightarrow \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \ge \beta$

Получаем:

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

Важно:

Смысл многих операций можно объяснить через декомпозиции!

Задача 3

При каком определении пересечения

$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ **для всех** $\alpha \in [0,1]$**?**

Решение дальше...

Расстояния между нечёткими множествами, $|U|=n$

Расстояние Хэмминга –

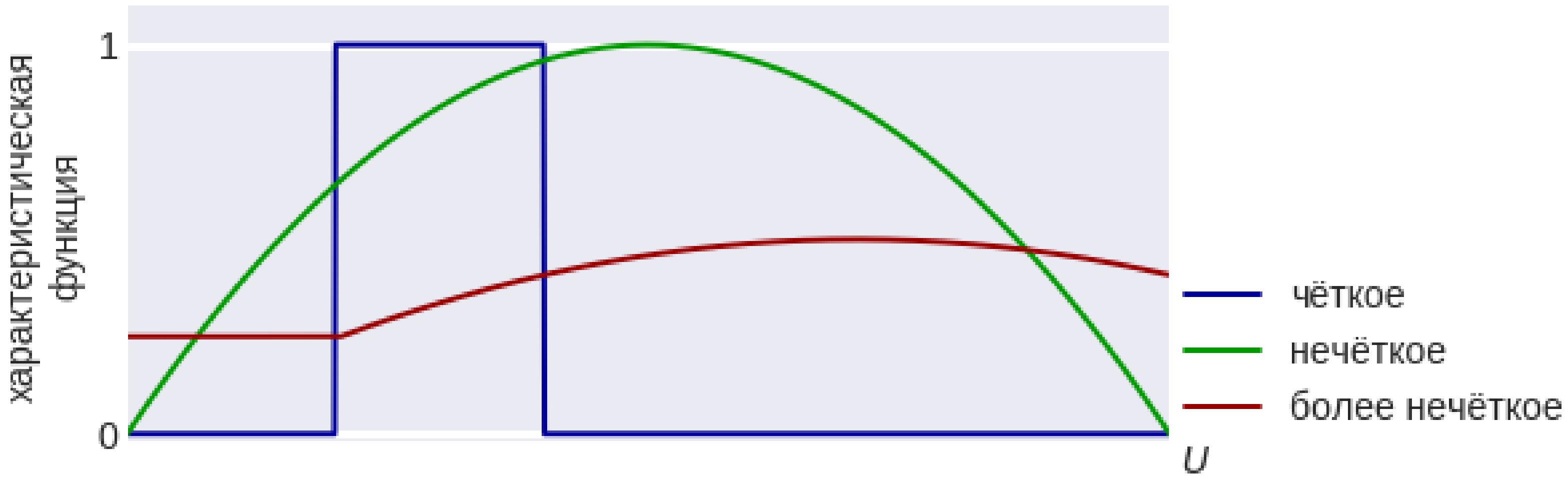
$$\sum_{u\in U}|\mu_A(u)-\mu_B(u)|$$

Расстояние Евклида –

$$\sqrt{\sum_{u\in U}|\mu_A(u)-\mu_B(u)|^2}$$

Что для бесконечных множеств?

Оценка нечёткости (индекс нечёткости)

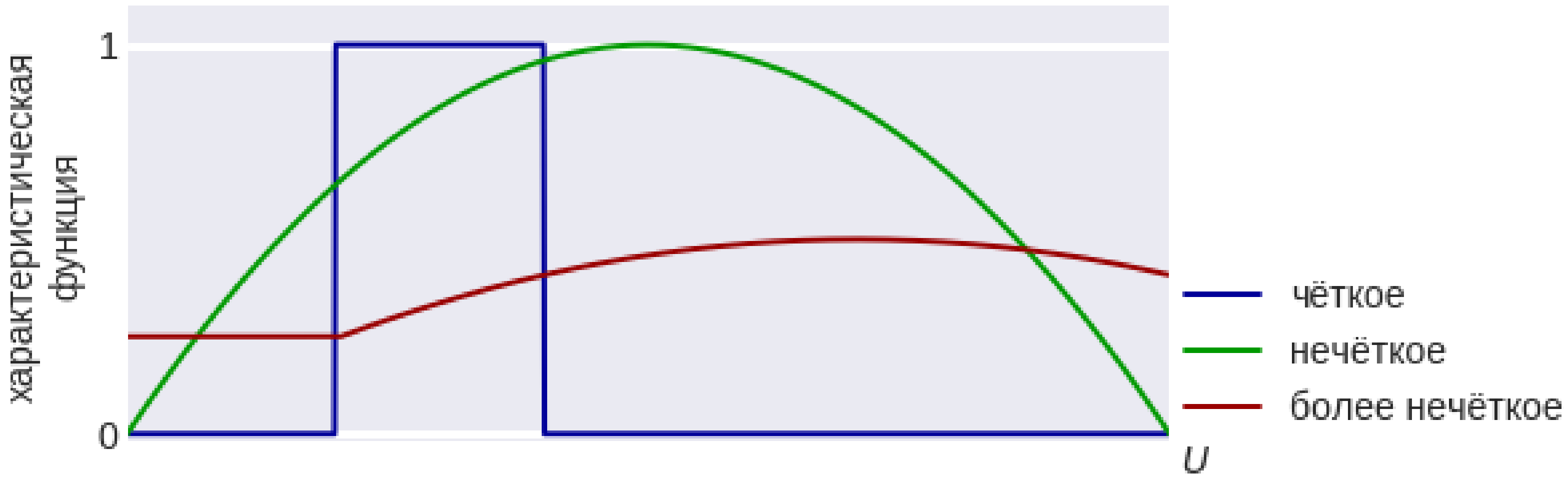


Есть энтропийный подход…

$$-\frac{1}{\ln|U|}\sum_{u\in U}\frac{\mu_A(u)}{C}\ln\frac{\mu_A(u)}{C},\ C=\sum_{u\in U}\mu_A(u)$$

В чём недостаток?

Оценка нечёткости (индекс нечёткости)



Есть энтропийный подход...

$$-\frac{1}{\ln|U|}\sum_{u\in U}\frac{\mu_A(u)}{C}\ln\frac{\mu_A(u)}{C},\; C=\sum_{u\in U}\mu_A(u)$$

В чём недостаток?

минимальна у одноэлементных множеств

(неважно, чётких или нечётких)

Почему «более нечёткое»?

Оценка нечёткости: метрический подход

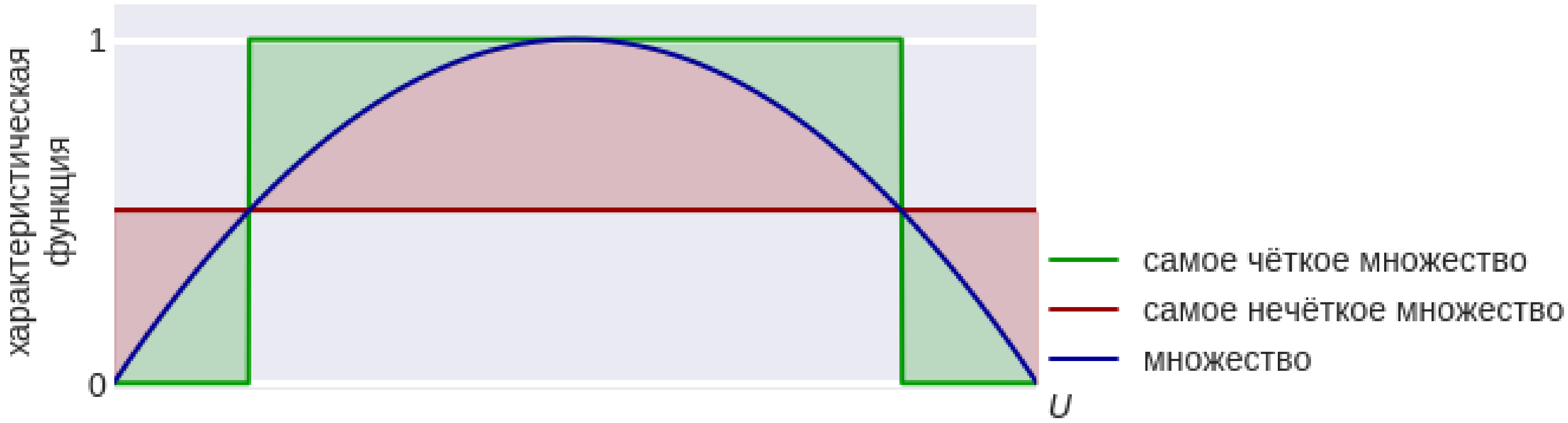
1. Расстояние до «ближайшего» чёткого множества

$$\mu_{\breve{A}}(u) = \mathrm{round}(\mu_A(u))$$

за меру нечёткости можно взять

$$f(\rho(A, \breve{A}))$$

2. Расстояние до самого нечёткого множества $I_{0.5}$



Оценка нечёткости: аксиоматический подход

$\xi(A)=0$ **для чёткого множества** A**,**

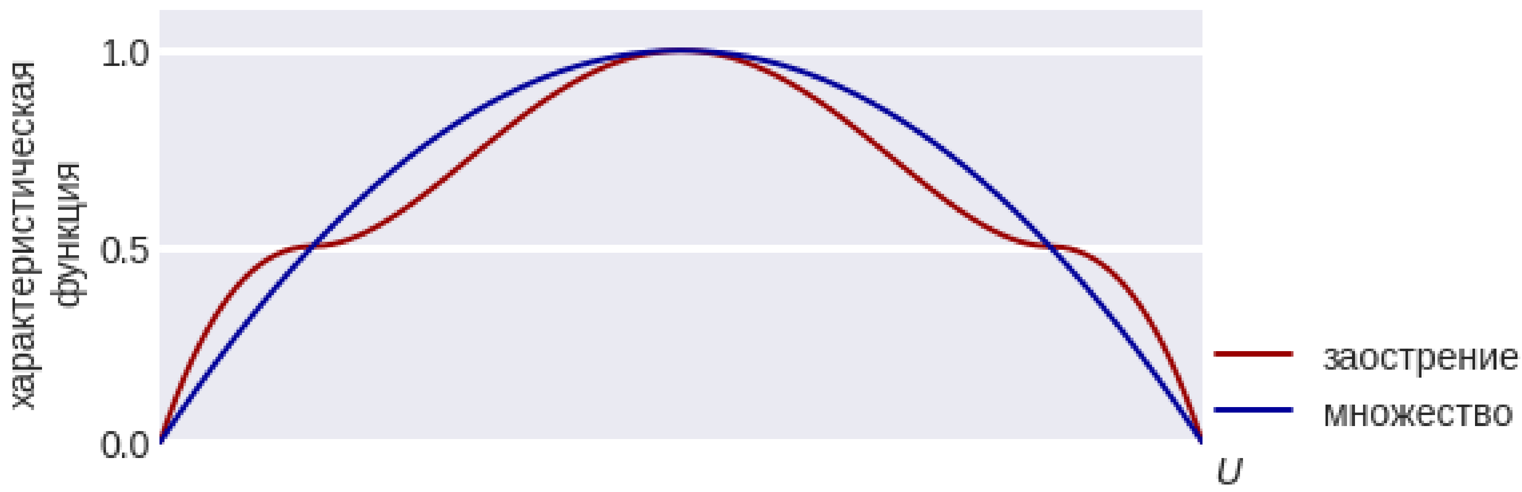
$\xi(I_{0.5})=1$ **для самого нечёткого множества,**

$\xi(A)=\xi(\overline{A})$**,**

$\xi(A)\le\xi(B)$ **при** $(\mu_A(u)\le\mu_B(u)<0.5)\vee(\mu_A(u)\ge\mu_B(u)>0.5)$

(заострение множества)

$\xi(A\cup B)+\xi(A\cap B)=\xi(A)+\xi(B)$ **(иногда)**



Задача 4

$$\xi(A) = 1 - 2\rho_{\text{хэм}}(A, I_{0.5})$$

нормировать надо...

удовлетворяет аксиомам

Каким аксиомам удовлетворяет функция

$$\frac{2}{\int\limits_U 1\partial u}\int\limits_U \mu_{A\cap\bar{A}}(u)\partial u \text{ ?}$$

Нечёткое бинарное отношение –

нечёткое множество на $U_1 \times U_2$

t**-я проекция бинарного отношения** R **–**

$$\mu_R^{(t)}(u_t) = \max_{u_{3-t}} \mu_R(u_1, u_2)$$

Носитель отношения R **–**

$$S(R) = \{(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2 \mid \mu_R(u_1, u_2) > 0\}$$

Дополнение, пересечение, объединение, алгебраическое произведение отношений, алгебраическая сумма отношений… ясно как

Отношение L **содержит** R**, если**

$$\forall (u_1, u_2) \in U_1 \times U_2 \quad \mu_R(u_1, u_2) \le \mu_L(u_1, u_2)$$

Декомпозиция отношений

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} = \max\left(0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, 0.4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0.5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

max-min-композиция отношений

$$R \sim X \times Y$$
$$L \sim Y \times Z$$
$$R \circ L \sim X \times Z$$

$$\mu_{R \circ L}(x, z) = \max_y [\min[\mu_R(x, y), \mu_L(y, z)]]$$

для композиции надо выполнить своеобразное умножение матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0.2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

в композиции

можно использовать max-произведение

и max-среднее арифметическое

Задача 5

Какие равенств всегда выполняются?

$$(R \circ L) \circ M = R \circ (L \circ M)$$

$$R \circ (L \cup M) = (R \circ L) \cup (R \circ M)$$

$$R \circ (L \cap M) = (R \circ L) \cap (R \circ M)$$

$$L \subseteq M \Rightarrow (R \circ L) \subseteq (R \circ M)$$

Отношение R в $U \times U$

рефлексивное, если $\forall u \in U \ \mu_R(u,u) = 1$

симметричное, если $\forall (u_1, u_2) \in U \times U \ \mu_R(u_1, u_2) = \mu_R(u_2, u_1)$

транзитивное, если $\forall (x, y, z) \in U^3 \ \mu_R(x, z) \geq \max_y(\min[\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)])$

можно «красивее»: $R \circ R \subseteq R$

Подобие = рефлексивное + симметричное + транзитивное

~ декомпозируется на чёткие эквивалентности

Как это использовать в машинном обучении?

Примеры…

Если $R^k = R \circ \ldots \circ R$**, то**

транзитивное замыкание R **–** $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

оно транзитивное Почему? (задача 6)

Композиция транзитивных отношений не всегда транзитивна

На экзамене – пример.

Нечёткий предпорядок – нечёткое бинарное транзитивное и рефлексивное отношение.

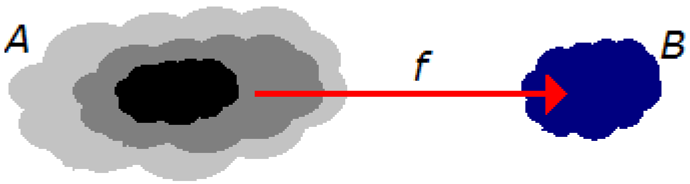
Для предпорядка $R = R^2 = R^3 = \ldots$ **Доказать (задача 7)**

Отношение R **антисимметричное, если**

$$\forall (x,y) \in U^2 \setminus \{(u,u) \mid u \in U\} \left[\begin{array}{l} \mu_R(x,y) \neq \mu_R(y,x) \\ \mu_R(x,y) = \mu_R(y,x) = 0 \end{array} \right.$$

Порядок – антисимметричный предпорядок

Образ нечёткого множества при отображении



$$f : X \to Y$$

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

Принцип обобщения (внимание!)

– основан на этой формуле

Пусть, например, нечёткие множества – нечёткие числа, тогда

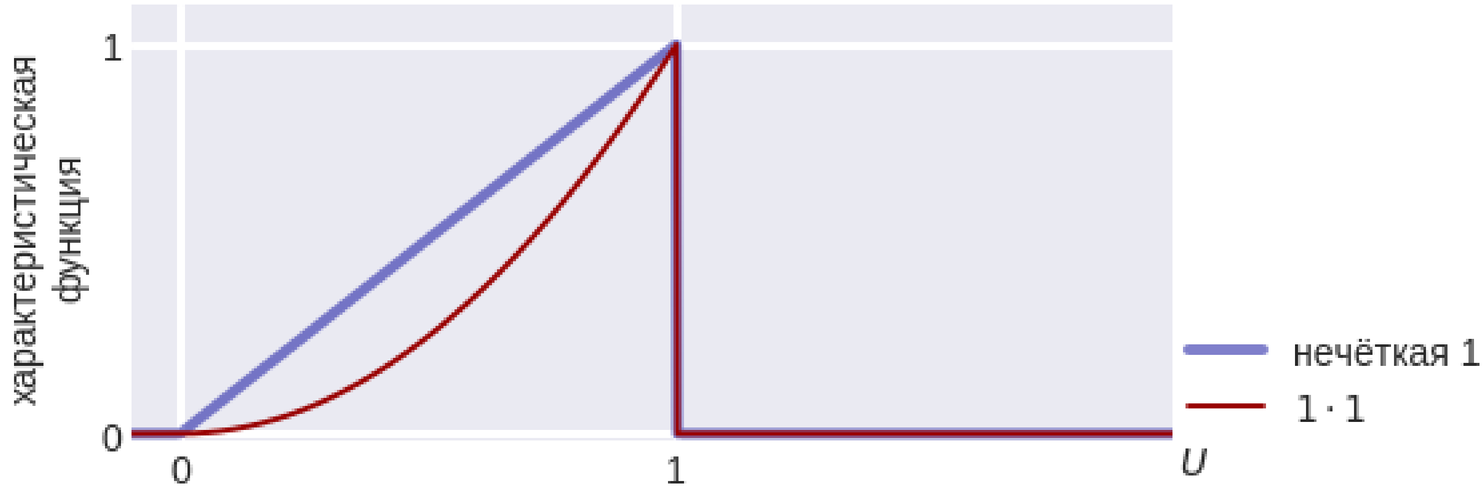
$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

аналогично другие операции над нечёткими числами

~ уравнения с нечёткими числами

Пример применения принципа обобщения

Дана такая нечёткая единица: $\mu_A(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$



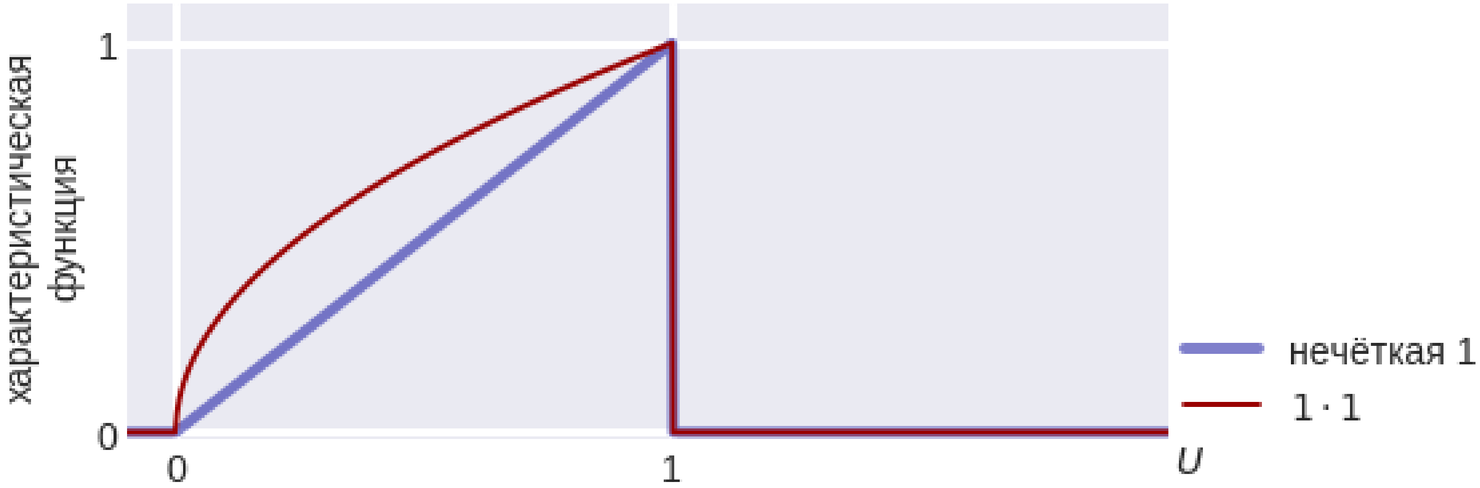
Чему будет равен её квадрат?

$$\mu_B(z) = \sup_{z=x*x} \min[\mu_A(x), \mu_A(x)] = \sup_{z=x*x} \mu_A(x) = \mu_A(\sqrt{z})$$

Квадрат единицы не равен единице!

Где ошибка?

Пример применения принципа обобщения



$$\mu_B(z) = \sup_{z=x*x} \min[\mu_A(x), \mu_A(x)] = \sup_{z=x*x} \mu_A(x) = \mu_A(\sqrt{z})$$

Ошибка в графике…

Задача (д/з)

Верно ли для нечёткой единицы 1

$1 + 1 = 2 * 1$

(здесь 2 – обычное чёткое число)?

В каком случае «ноль» + «один» = «один»?

Нечёткое число – нечёткое множество при $U = \mathbb{R}$

(м.б. + доп. условия)

Связь разных понятий

$\lambda \bullet A$ **умножение обычного числа на нечёткое ($\lambda \neq 0$):**

$$\mu_{\lambda \bullet A}(y) = \sup_{x:\lambda x = y} \mu_A(x) = \mu_A(y/\lambda)$$

Сумма множеств: $\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

Внимание, тут другая – не алгебраическая сумма!

Выполняется много хороших свойств…

$$A + (B + C) = (A + B) + C\text{ , }\lambda \bullet (\mu \bullet A) = (\lambda\mu) \bullet A$$

Доказать, какие ещё (экзамен)?

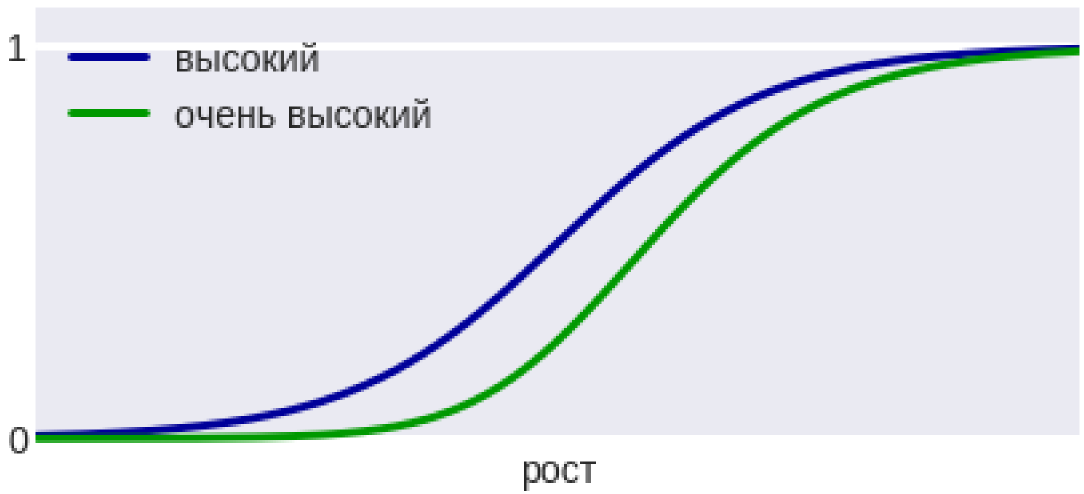
Интересно, что множество выпукло тогда и только тогда, когда

$(\lambda \bullet A) + ((1-\lambda) \bullet A) = A$ **для всех** $\lambda \in [0,1]$

Немного о нечётком выводе и т.п.

Модификатор «очень» – возведение в квадрат

$$\mu_R(u) \to \mu_{R'}(u) = [\mu_R(u)]^2$$



(здесь всё эвристично)

Пример эвристического вывода

«Если товар дорогой, то надёжный»

«Товар очень дорогой» ⇒ «Товар очень надёжный»

Немного о нечётком выводе и т.п.

Обобщение импликации

$$\mu_{A\to B}(u,v)=\min[1,1-\mu_A(u)+\mu_B(v)]$$

Есть разные способы обобщения импликации...

например, даже так $\mu_{A\to B}(u,v)=\min[\mu_A(u),\mu_B(v)]$

Важно сделать правило вывода $*$ **:** $A*(A\Rightarrow B)=B$

Как?

Немного о нечётком выводе и т.п.

Есть разные способы обобщения импликации…

например, даже так $\mu_{A\to B}(u,v)=\min[\mu_A(u),\mu_B(v)]$

Важно сделать правило вывода $*$ **:** $A*(A\Rightarrow B)=B$

Попробуем так:

$$\mu_{A*(A\Rightarrow B)}(v)=\sup_{u\in U}\min[\mu_A(u),\mu_{A\Rightarrow B}(u,v)]$$

тогда:

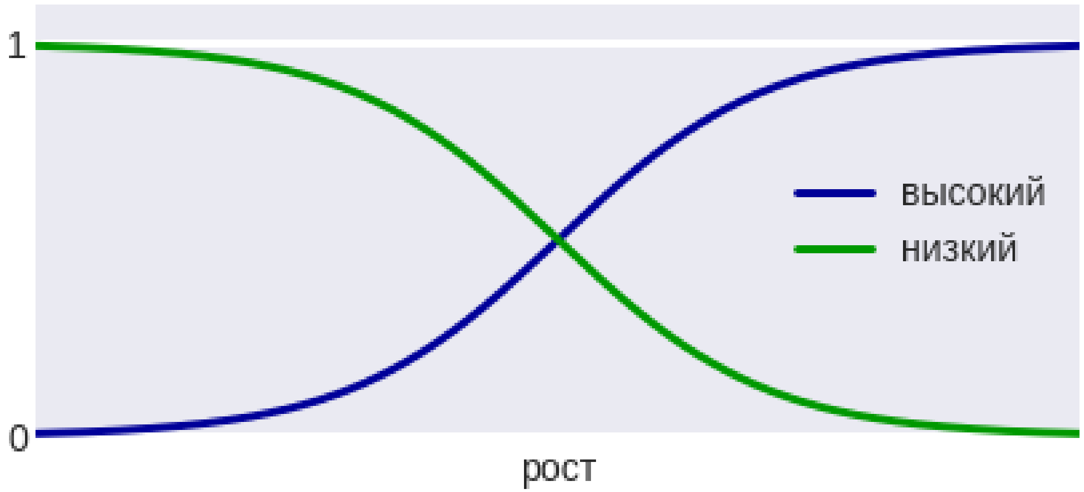
$$=\sup_{u\in U}\min[\mu_A(u),\min[\mu_A(u),\mu_B(v)]]=$$

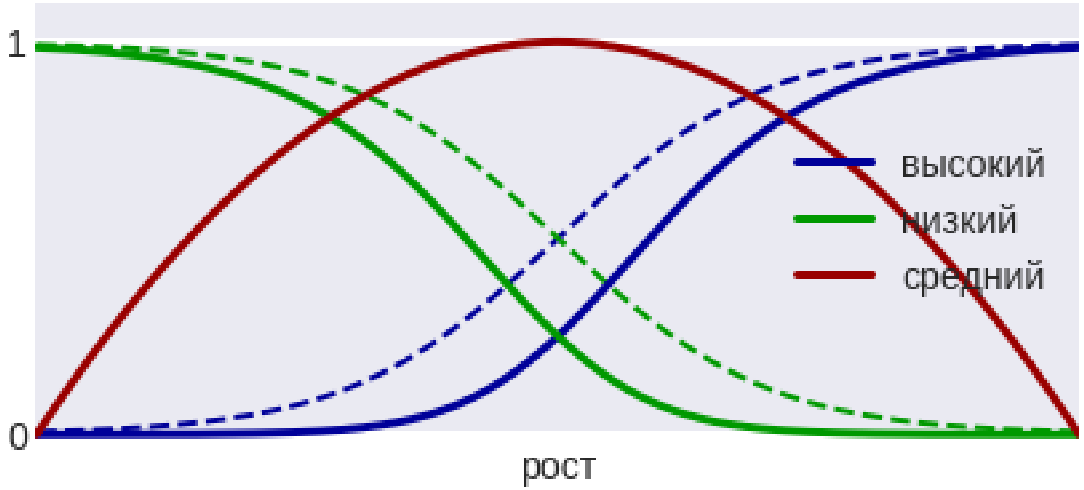
$$=\sup_{u\in U}\min[\mu_A(u),\mu_B(v)]$$

Это $\mu_B(v)$**, кроме случаев** $\forall u\in U\;\mu_A(u)<\mu_B(v)$

Проблемы формализации

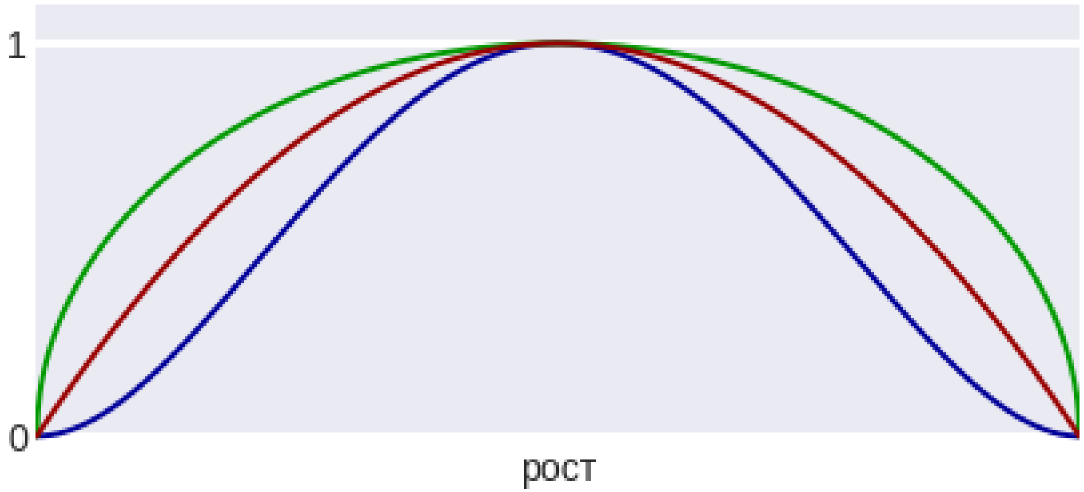
Если появляется дополнительное понятие, то модифицируются уже имеющиеся!





Проблемы формализации

Трудно перевести понятие в модель



Что такое «средний»?

Ещё сложнее: «совсем молодой»

Есть понятие ПОСП

(полное ортогональное семантического пространство)

~ набор функций $\{\mu_j\}$

1. Нормальность $U_j^1 = \{u \in U \mid \mu_j(u) = 1\}$ **– отрезок**

2. μ_j **неубывает слева от** U_j^1 **и невозрастает справа**

3. Не более двух точек разрыва первого рода

4. Полнота $\{u \in U \mid \exists j : \mu_j(u) > 0\} = U$

5. Ортогональность $\forall u \in U \ \sum_j \mu_j(u) = 1$

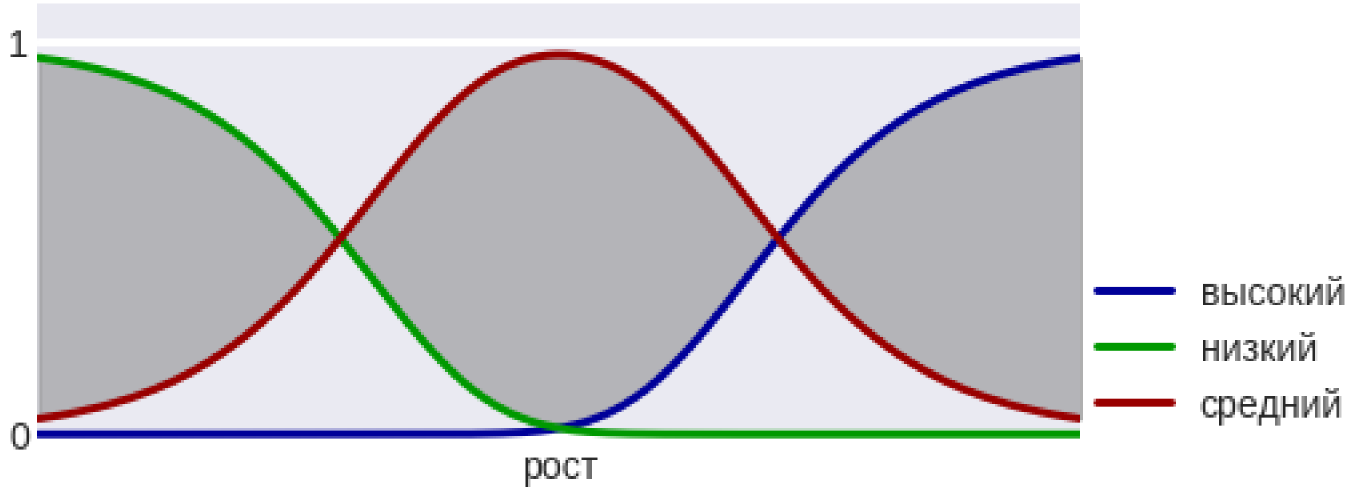
Степень нечёткости ПОСП

часто используют

$$\xi = \frac{1}{|U|}\int_U f(\mu_t(u) - \mu_k(u))\,du$$

$$\forall u \in U \ \mu_t(u) \geq \mu_k(u) \geq \mu_i(u) \text{ **при** } i \notin \{t,k\}$$

$f(0)=1$, $f(1)=0$, f **убывает.**

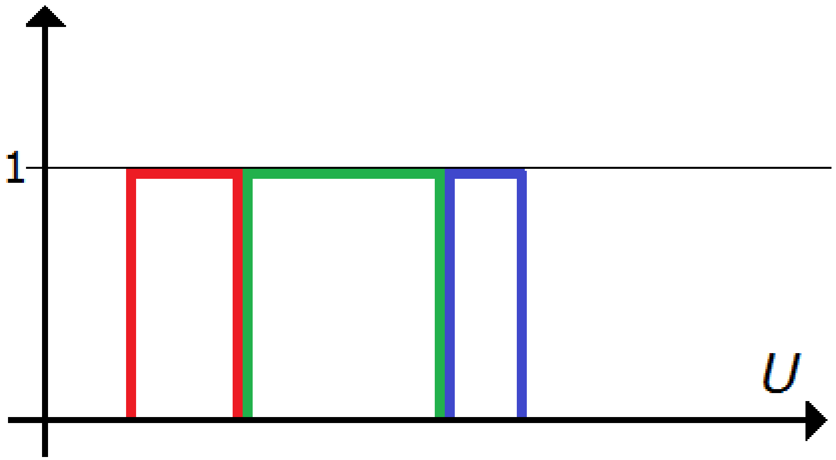


А каким свойствам должна удовлетворять «степень нечёткости ПОСП»? Зачем она нужна?

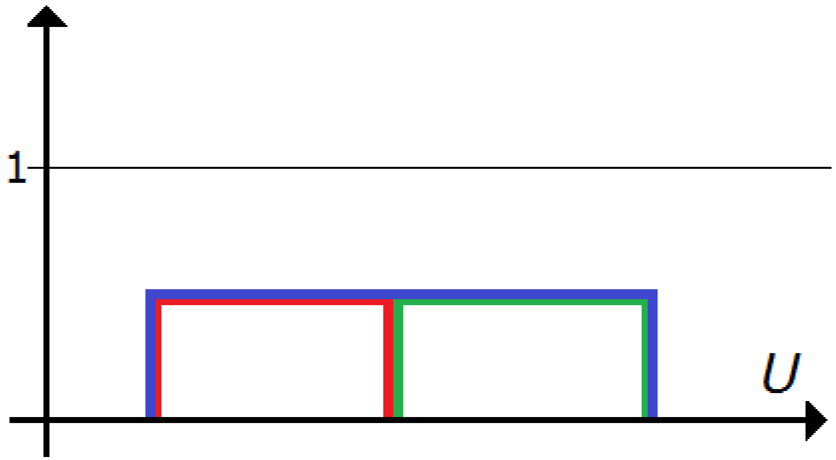
Зачем нужна степень нечёткости ПОСП

Это трудность описания ситуаций в заданных терминах…

Совсем легко описать



Тяжело описать



Нечёткие задачи…

Какое из множеств более нечёткое:

$\{(1,0.3),(2,0.6),(3,0.9)\}$, $\{(1,0.25),(2,0.75)\}$?

Решение задачи 1

Какие из равенств всегда выполняются?

	$\langle \mathrm{P}(U);\neg,\cap,\cup \rangle$	$\langle \mathrm{P}(U);\neg,*,+ \rangle$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$		**Неверно!**
$\neg(A\cap B)=\overline{A}\cup\overline{B}$		
$A\cap\varnothing=\varnothing$		
$A\cup\varnothing=A$		
$A\cap U=A$		
$A\cup U=U$		
$A\cup(\neg A)=U$	**Неверно!**	**Неверно!**
$A\cap(\neg A)=\varnothing$	**Неверно!**	**Неверно!**

Как решать: непосредственная проверка

$$\min[a,\max(b,c)]=\max[\min(a,b),\min(a,c)]$$

Решение задачи 1

Часто проще проверить используя правила де Моргана

$$\langle \mathrm{P}(U); \neg, *, + \rangle$$

$$A*(B+C)=(A*B)+(A*C)$$

$$\overline{A*(B+C)}=\overline{(A*B)}*\overline{(A*C)}$$

$$1-a(b+c-bc)=(1-ab)(1-ac)$$

$$1-ab-ac+abc=1-ab-ac+a^2bc$$

$$abc=a^2bc$$

Дистрибутивность справедлива лишь при

$$\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{array}\right.$$

Решение задачи 2

Чему равен

$$\lim_{p\to+\infty}[((\mu_A)^p+(\mu_B)^p)^{1/p}]\text{?}$$

$$\lim_{p\to+\infty}[((\mu_A)^p+(\mu_B)^p)^{1/p}]=\max[\mu_A,\mu_B]$$

Пусть $\mu_A\geq\mu_B$, $\lim_{p\to+\infty}[((\mu_A)^p+(\mu_B)^p)^{1/p}]=\mu_A\lim_{p\to+\infty}\left[1+\left(\frac{\mu_B}{\mu_A}\right)^p\right]^{1/p}=\mu_A$.

$$\lim_{p\to+\infty}\ln\left[1+x^p\right]^{1/p}=\frac{\ln(1+x^p)}{p}=0,\ 0<x\leq 1$$

Решение задачи 3

При каком определении пересечения

$(A\cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ **для всех** $\alpha\in[0,1]$**?**

$$\mu_{A\cap B}(x)\ge\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\mu_A(x)\ge\alpha\\ \mu_B(x)\ge\alpha\end{cases}$$

$$\mu_{A\cap B}(x)\ge\alpha \Leftrightarrow \min[\mu_A(x),\mu_B(x)]\ge\alpha$$

Ответ:

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min[\mu_A(x),\mu_B(x)]$$

Решение задачи 4

$\xi(A) = 1 - 2\rho_{\text{хэм}}(A, I_{0.5})$ **удовлетворяет аксиомам**

Например, $\xi(A \cup B) + \xi(A \cap B) = \xi(A) + \xi(B)$

Проверяем $|0.5 - \max(a,b)| + |0.5 - \min(a,b)| = |0.5 - a| + |0.5 - b|$

нормировать надо...

Решение задачи 4 (часть 2)

Каким аксиомам удовлетворяет функция

$$\frac{2}{\int\limits_U 1\partial u}\int\limits_U \mu_{A\cap\bar{A}}(u)\partial u \text{ ?}$$

Всем. Докажем последнюю.

Пусть в какой-то точке u

$$\mu_A(u)\equiv a\geq\mu_B(u)\equiv b$$

тогда под знаками интеграла функции этой точке

$$\min(a,1-a)+\min(b,1-b)$$ **(слева и справа)**

Решение задачи 5

Какие равенств всегда выполняются?

$$(R\circ L)\circ M = R\circ(L\circ M)$$

Непросто

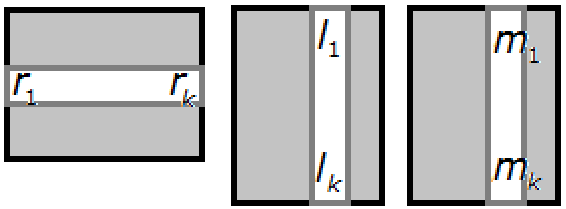
$$R\circ(L\cup M) = (R\circ L)\cup(R\circ M)$$

$$R\circ(L\cap M) = (R\circ L)\cap(R\circ M)$$

Неверно!

$$L\subseteq M \Rightarrow (R\circ L)\subseteq(R\circ M)$$

Как рассмотреть (2) и (3):



$$\max_t(\min(r_t, \max(l_t, m_t))) = \max\left(\max_t(\min(r_t, l_t)),\quad \max_t(\min(r_t, m_t))\right),$$

Решение задачи 6

Транзитивное замыкание $L = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$ **транзитивно.**

$$L^2 = (R \cup R^2 \cup \ldots) \circ (R \cup R^2 \cup \ldots) = R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq L$$

Решение задачи 7

Для предпорядка $R = R^2 = R^3 = \ldots$

$$\mu_{R^2}(x, z) = \max_y [\min[\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)]]$$

$$\mu_{R^2}(x, z) \geq [\min[\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)]]\Big|_{y=x} = \min[\underbrace{\mu_R(x, x)}_{=1}, \mu_R(x, z)] = \mu_R(x, z)$$

С другой стороны, по транзитивности $R^2 \subseteq R \Rightarrow \mu_{R^2}(x, z) \leq \mu_R(x, z)$

поэтому $\mu_{R^2}(x, z) = \mu_R(x, z)$ **и** $R^2 = R$

«Домножаем на R**» получаем и другие равенства.**

Литература

Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости. Москва, Диалог-МГУ, 1998, 116 с.
http://www.intsys.msu.ru/staff/ryzhov/FuzzySetsTheory&Applications.pdf

Основные понятия теории нечетких множеств, нейронных сетей и генетических алгоритмов // Вспомогательные материалы к курсу проф. Рыжова А.П.
http://www.mba-topman.ru/files/Osnovnye_ponyatiya1064.pdf

Ухоботов В. И.Избранные главы теории нечетких множеств // Учеб. пособие. Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. – 245 с.
http://www.lib.csu.ru/texts/UhobotovVI.pdf