

Discrete Geodesic Parallel Coordinates

Nearly developable surfacesてのがいっぱい出てくる

このテキストは適当に訳したもので、抜けてる部分もあります

「測地線平行座標」は表面(パラメータラインの2つのファミリの1つが測地線であるサーフェス)上の直交ネットです。

これらの特別な表面パラメーター化の個別バージョンについて説明し、それらが特定のアプリケーションに非常に有用であることを示します。これらのほとんどは、建築における表面の設計と製造に関連しています。

新しい離散サーフェスモデルを使用すると、隣接する測地線間のストリップ幅を簡単に制御できます。

これにより、元々真っ直ぐな平らな材料のストリップで表面をクラディング(金属の表面に他の金属を被せること)したり、測地線グリッドシェルやティンバーリブシェルを設計したりといったタスクが容易になります。

ほぼ展開可能な表面をモデル化することも可能です。

これらは、ほぼ一定のストリップ幅を持つ測地ストリップによって特徴付けられ、フェルト、革、または薄い木の板などの伸縮が可能な材料(紙とは違うね。まあ工学的に応用できるからいいのか!)から製造できる形状を生成するために使用されます。

最も重要なこととして、ストリップ幅パラメーターを制約して、本質的に対称な表面のクラスをモデル化する方法を示します。これらの表面は、回転面に対して等角であり、金属シートなどの柔軟な材料を使用する場合、いくつかの金型のみで製造される二重に湾曲したパネルで覆うことができます。

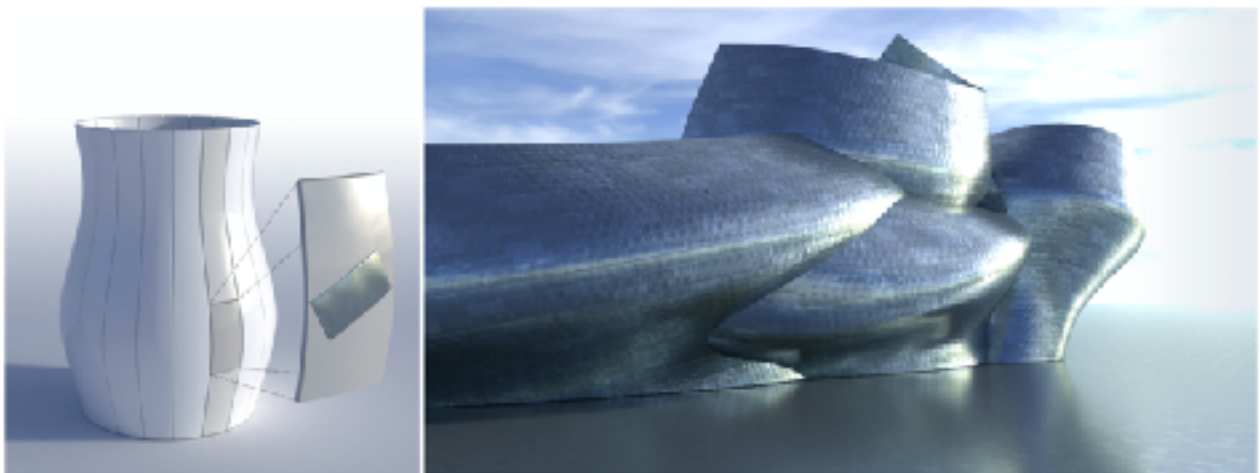


図1.建築家フランク・ゲーリーの設計を参考にした建築設計。 私たちの場合、4つのサーフェスパッチは展開できませんが、同じ回転面に対して等尺です。 表面を覆う長方形の金属シートは、対応する回転面の2つの子午線曲線の間にある1つの比較的小さなセクターを型として使用して作成できます(左および図16)。 回転面の長い垂直ストリップ(左;灰色)は、1つの大きな金型で

あるか、必要に応じて小さな金型に分割できます。 ガウスの曲率がほとんど消滅している表面領域をカバーする金属シートは、特別な金型を使用せずに、つまり可展面パッチとして作成できます。

1 初めに

計算設計における最近の研究は、機能と製造の主要な側面をインテリジェントな形状モデリングプロセスに組み込んでいます。これにより、製品開発の時間とコストが削減されますが、デジタル設計と製造を組み合わせるまったく新しい方法も提供されます。そのような研究の方向性の1つは、マテリアルアウェア形状モデリングであり、最初は、平面のシート材料から始めるのが自然です。この材料を伸ばすよりも、かなり簡単に曲げられる場合、理想的なモデル化された形状は可展面です。これらの面を用いた対話的なモデリングは、依然として活発な研究テーマです。

([Rabinovichら2018; Steinら2016])。

可展面を超えた最近の研究は、特殊な種類のオーセチック材料

(ポアソン比が負の材料のこと。ダイヤモンドフォールド構造はこの中の一つ)

を使う設計の柔軟性を獲得しています[Konakovićら2016、2018]。しかしながら、水密表面(穴の空いてない表面)の皮膚を直接得ることはできない。

フラットシートから水密3D表面を構築する注目に値する方法は、複雑な3次元形状に展開する前のストレッチ生地埋め込まれた平面ロッド(棒状のもの)ネットワークを使用することです [Perezら2017]。

直線または曲線の折り目の導入は、平らな素材から空間構造を構築するもう1つの方法です。

この方向での研究を詳細に検討するのではなく、ここでは軽く触れるだけとします。 [CallensとZadpoor 2018; DemainとO'Rourke 2007; Dudteら2016]

私たちの仕事は、平らな材料シートの表面も扱っています。

それは、可展面を超えて、パッチまたはパネルの適切なアセンブリを通じて水密表面を実現します。

アーキテクチャのアプリケーションに動機付けられ、私たちはいくつかの密接に関連した目標を追求します：

(i) 元々ほぼ直線の平らな材料のストリップで表面をカバーしたい。

(平らな材料(のストリップ=一片?)で表面をカバー覆いたい。)

(ii) これらのストリップの幅をほぼ一定に保つことにより、ほぼ展開可能な表面にアクセスしたいと考えています。

(ストリップの幅を一定に保つことで、(ほぼ)可展面を表現したい。)

(iii) 固有の対称性を持つ表面のモデリングを目指します

(ある特定の？対称性を持つ表面のモデリングを目指す。)

本質的な対称性はビューアでは簡単に見られないため、これらのサーフェスは依然としてフリーフォーム形状に非常によく似ています(本質的に対称なものは簡単には見かけないので、これらの面はフリーフォーム形状と似ている。てこと?)。図1と図2のような本質的に対称な設計面は、回転面に対して等角です。

平らなシートを曲げるだけでなく、表面を加工する新しい方法を提供することを示します。

少数の金型で製造された二重に湾曲したパネルでそれらを覆うことができます。

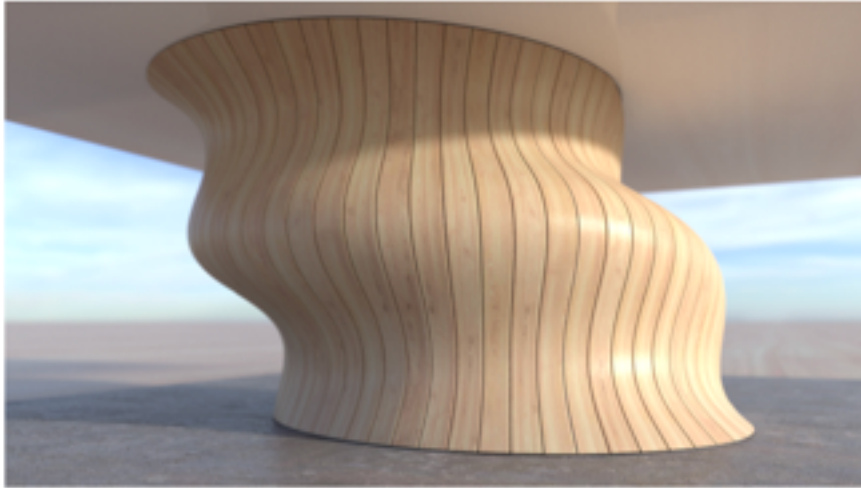


図2.木製の壁のクラディングのレンダリング。

下にある表面は、回転面(**surface of revolution**)に対して等角です。

これは、一連の曲がった材木片を取り付けることで実現できます。すべてのストリップが同じ平面形状に展開されます。

1.1 概要と貢献

新しいタイプのクアッドメッシュを導入して調査します。

これは魅力的な特性を持つ表面パラメータ化 $f(u, v)$ の離散バージョンです。

その特性は、アイソパラメータ曲線の1つのファミリー $v = \text{const}$ は測地線であり、アイソパラメータ線 $u = \text{const}$ はそれらに直交する（セクション2）、と言うもの。

これは、測地線の2つの直交ファミリーを使って、離散的な可展面をモデリングする最近の研究を拡張します[Rabinovichら2018a、b]。

グローバルに展開可能なサーフェスをモデル化するのに対し、最初に、（ローカルに）ほとんどすべての表面パッチである測地線の平行座標を可能にする(???何を???)サーフェスを検討します。

私たちの**焦点は、測地線のファミリー(ファミリーは構成要素のことかな?)のモデリング**にあります。

測地線ストリップの幅を制御し、またそれを一定に設定することにより、実際には可展面のクラスを含めます。

さらに、ラビノビッチらによる研究の焦点は展開可能な表面自体であり、そのパラメーター化ではありませんが、私たちの場合、測地線パラメーターラインのファミリーが結果の重要な部分です。

新しい離散サーフェスは、自然にサーフェスを測地線で囲まれたストリップに分解します。
ストリップの幅は、それらに直交する曲線を使用して制御でき、ほぼ可展面をモデリングおよび表現するためのツールを提供します（セクション3）。

私たちのメッシュは、与えられた参照面に測地線のレイアウトを設計するための新しい効果的なスキームを提供します。

さらに**重要なことは、表面とストリップモデルを同時に設計できる**ようになったことです。
これには、ストリップモデルのレイアウト、たとえばストリップの幅の変動に対する特定の制約を満たすサーフェスのみが生成される、という大きな利点があります。

測地線ストリップモデルは、平面展開がほぼ直線である展開可能な表面ストリップを結合することを実現できます。

ストリップの幅は一般に一定ではないため、ストリップが異なると展開も異なります。

ただし、展開時にすべてのストリップが互いに合同であるサーフェスがあります。

このようなインスタンスの1つは、回転ストリップモデルによって提供されます。回転軸を介して規則的に配置された平面に沿って回転面を切断し、連続したスライスを展開可能な（円筒）ストリップで接続することで得られます。

このような回転ストリップモデルのアイソメトリック変形バージョンは、本質的に1種類のフラットストリップのみで構成されるという特性も備えています（図2を参照）。

セクション4では、これらの本質的に反復的なサーフェスをモデル化する方法を示します。

このプロパティを持つサーフェスの認識は、キリングベクトルフィールド[BenChenら2010]に関する以前の作業で実行できましたが、このタイプの本質的な対称性を備えたサーフェスの設計への貢献は認識していません。

セクション5では、[Tangら2014]に準拠した数値最適化スキームを使用して、新しいタイプの制約付きメッシュを効果的に計算する方法を示し、その実装に関する詳細を示します。

測地線グリッドシェル、クラディング、羽目板(壁とか天井に貼る板のこと。パネル式に接続して貼ることができる)などの建築ジオメトリのさまざまなアプリケーションについては、セクション6で説明します。

固有の対称性（回転面に対する等角性）の顕著な結果は、板金のような曲げ可能な材料で建築用面のパネルを張る可能性を大幅に拡張することです。

費用対効果の高いソリューションを得るために、もはや開発可能なパネルに限定されていませんが、対応する回転面のセグメントの形で、いくつかの金型から二重に湾曲したパネルを製造できます。

最後に、制限について説明し、将来の研究の有望な方向性を示します。

1.2 関連研究

私たちの研究に**最も密接に関連しているのは、ラビノビッチらによる最近の研究**です[2018a; 2018b]。2つの直交する測地系(測地線?)に基づいて、展開可能なサーフェスの離散モデルを注

意深く研究します。離散測地線平行座標のこの重要な特別な場合の実証された利点は、より一般的な設定の可能性を示しています。

測地線の平行座標は、サーフェス上の距離関数と密接に関連しています。

距離関数と表面の測地線を計算する関連タスクについては、これまでに大量の作業が行われています。

ここでは、高速マーチング法[Sethian 1999]と高効率加熱法[Craneら2017]の2つだけを取り上げます。

測地線または距離フィールドを計算する別の方法を提供することは私たちの目標ではないことに注意してください。

測地線のファミリを含む特別な表現でサーフェスをモデル化し、さまざまなアプリケーションでこのファミリを制御したいと考えています。

私たちの仕事の一部は、継続的な固有の対称性を持つ表面に関係しています。

このような表面は、自明ではないキリングフィールドを介して特徴付けることができます。

離散近似キリングフィールドは、表面のパターン設計[Ben-Chenら2010]や組み込みプリミティブの発見[ソロモンら2011]など、ジオメトリ処理のさまざまなタスクに使用されています。

多数の研究が離散的な固有の対称性を扱っています。たとえば、[Ovsjanikovら2008; Ravivら2010]。

微分幾何学の概念とそれに関連する物理モデルの構築を理解するためのストリップモデルの研究は、現代の離散微分幾何学の前駆体である微分幾何学[Sauer 1970]の古典的なトピックです。特に、幾何学と力学の驚くべき関係を説明するS. Finsterwalder [1899]の先駆的な研究を指摘し、計算設計と製造のさまざまなトピックに関心を寄せています。

ごく最近では、いわゆる**半離散サーフェス**が、実用的および理論的な観点から関心を集めました[Carl 2017; ミュラーとウォールナー2013; Pottmannら2008]。

これらのサーフェスは、ルールドサーフェスのストリップ、特に展開可能なサーフェスで構成され、純粋に離散的な設定とスムーズな設定の間にあるタイプのサーフェスを構成します。

私たちの作業に最も関連するのは測地線モデルです。

測地線ストリップのそのようなモデルの設計は、測地線によって形成されるパターンのレイアウトの手順に従うことができます。

それは建築と造船のアプリケーションを持っています[Kahlertら2011; Pottmannら2010]。

[Mitani and Suzuki 2004; Tangら2016]は、サーフェスを領域に分割するメソッドを提供し、展開可能なサーフェスパッチで表されます。

私たちの仕事は、建築のアプリケーションに触発されています。

金属タイルによる建築用スキンのクラディングは、フランクゲーリーの作品[Shelden 2002]で際立って取り上げられています。

ドバイのブルジュハリファオフィスロビーの木製の天井には、ほぼ**真っ直ぐな木製パネルを曲げて曲面をクラディングする方法**が採用されています[Meredith and Kotronis 2012]。

長い曲面の金属パネルで自由曲面を覆うための適切な製造技術は、[Schneider and Mehrtens 2012]によって開発されました。

元々直線の要素から生じる湾曲した構造は、さまざまな種類のグリッドシェル[Hernandez 2015]、特に測地線グリッドシェルと木材リブシェルに表示されます（[Pirazzi and Weinand 2006]および[Bianconi and Filippucci 2019]のさまざまな記事を参照）。

建築フリーフォームジオメトリの実現における主な問題は、構造要素の多様性です。

したがって、繰り返し要素を実現するさまざまな方法が調査されています（[Pottmannら2015; Schling 2018; Schlingら2018]の概要を参照してください）。

たとえ異なる要素であってもパネルは、一致しない場合があります、同じ金型または機械構成で製造される場合があるため、コスト削減に貢献します[Eigensatzら2010]。

私たちの知る限り、設計による固有の繰り返しは、建築フリーフォームスキンの構築を簡素化するための新しい方向です。

2 離散測地平行座標

このセクションでは、サーフェス上の測地線の平行座標に関するいくつかのよく知られている事実をすぐに思い出してから、離散化について説明します。

2.1 滑らかな測地平行座標

平面内の平行な直線のファミリーには、2つの直線の間の距離が一定であるという特性があります。

この特性は、たとえば、同心円のファミリー、またはより一般的には曲線のオフセットのファミリーに対しても当てはまるため、平行な直線を特徴付けるものではありません。

オフセットファミリーに直交する曲線は直線であり、少なくとも局所的には、これらの2つの曲線ファミリーは、平面領域のパラメータ化 $f(u, v)$ のアイソパラメータラインになることができます。

これは、サーフェス上の測地線平行座標（定義2.1）の特殊なケースです（たとえば、[Kühnel2003、定義4.27]を参照）。

サーフェス上の測地線は（ローカルに）最短の曲線であることを思い出してください。

定義2.1:

表面 $f: \mathbb{R}^2 \supseteq [u_0, u_1] \times [v_0, v_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ は、パラメータラインが直交（ $f_u \perp f_v$ ）かつパラメータラインの1つのファミリーの場合（すなわちuライン（ $v = \text{const}$ ））（測地線を表す）、測地平行座標に沿ってパラメータ化される。図3（左）を参照してください。

そのような測地線の平行座標の例の非常に単純ですが、それでも非常に重要なファミリーは、パラメータ化によって与えられるすべての回転面で構成されます：

$$f(u, v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$$

このパラメータ化は明確に直交しており、子午線曲線（図3（右）の赤; $v = \text{const}$ ）は測地線です。

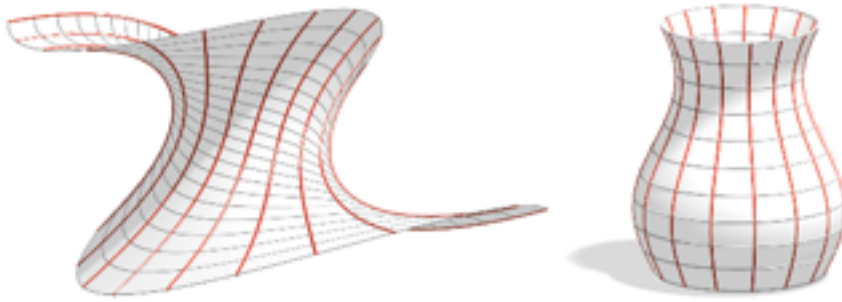


図 3 :

左：測地線の平行座標によってパラメータ化された表面。

赤いパラメータ線は測地線であり、灰色のパラメータ線はそれらに直交しています。

右：共通のパラメータ化における回転面は、常に測地線の平行座標によってパラメータ化されます。子午線曲線（赤）は測地線です。

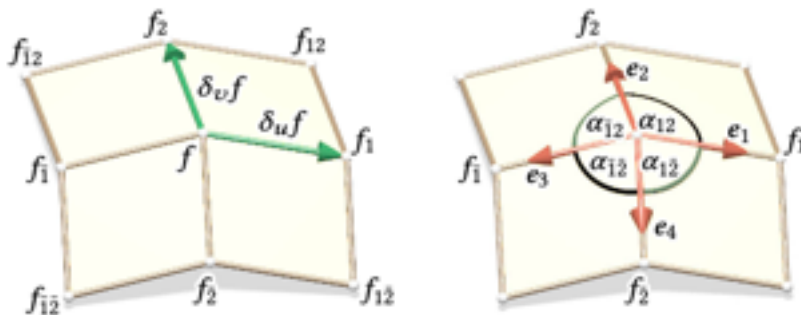


図 4: 表記

左：式を短く明確にするために、パラメーター $f(u, v) \rightarrow f$ を省略し、シフト表記 $f1 = f(u + 1, v)$ および $f\bar{1} = f(u - 1, v)$ を使用します。

エッジベクトルを $\delta_u f$ or $f1 - f$ で表します。

右：さらに、 f から発する単位長のエッジベクトルを e_i で表し、隣接するエッジ間の角度を α_{ij} で表します。

2.2 離散測地並行座標

測地線平行座標の離散化では、開発可能なネットを離散直交測地線ネットでモデル化するアプローチを一般化します [Rabinovichら2018a、b]。

主に、 \mathbb{Z}^2 (\mathbb{Z} は整数の意味で、これは整数 \times 整数の領域のこと) 格子の長方形の部分のように、通常 of 組み合わせで四辺形のネットで作業します。

2.2.1 表記

離散ネット は、マップ $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ によって定義されます。

$(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ を通る離散パラメーター線は、滑らかな場合と同様に、u線とv線と呼ばれるポリライン $f(\mathbb{Z}, u), f(\mathbb{Z}, v)$ です。

主に $f(u, v)$ の周りのネットのローカルプロパティを考慮しているため、[Rabinovichら2018a]と同様に、頂点に次の略語を使用します。

$f, f_1, f_2, f_1\text{bar}, f_2\text{bar}, f_{12}$ など

表記の説明については、図4を参照してください。

離散偏微分は、最初の方差分演算子 $\text{duf}, \text{duf1bar}, \text{duf}$ などで表され、2次微分は $\text{duu} = f_1\text{bar}$ で表されます。

非縮退エッジ（これは、アルゴリズムの公平性の項によって保証されます）と仮定して、 e_1, e_2, e_3, e_4 から発生する単位エッジベクトルをさらに示します。

f から出るエッジ間の角度は、 $\alpha_{12}, \alpha_{1\bar{2}}, \alpha_{\bar{1}2}, \alpha_{\bar{1}\bar{2}}$ で表されます。 $\langle \rangle$ はユークリッドスカラー積(内積)を示します。

U方向とV方向の単位接線ベクトルを、これらの方向

$$T^u = \frac{e_1 - e_3}{\|e_1 - e_3\|}, T^v = \frac{e_2 - e_4}{\|e_2 - e_4\|}$$

の2つの連続する単位エッジベクトルの正規化された合計として定義します。

さらに、連続するポリラインセグメント間の角度が0または π ではない頂点 f で、 u および v 方向のパラメーターポリラインの単位長さの主法線を

$$N^u = \frac{e_1 + e_3}{\|e_1 + e_3\|}, N^v = \frac{e_2 + e_4}{\|e_2 + e_4\|}$$

で定義します。

単位接線ベクトルと単位主法線ベクトルは、図5の接触平面に示されています。

上記で選択した離散化では、接線ベクトルと主法線ベクトルは直交します。つまり、 $N \perp T$ と $N \perp \bar{T}$ です。

この接平面(T^u, T^v)の基準により、頂点 f でのネットの単位法線ベクトルを N で一貫して定義できます。

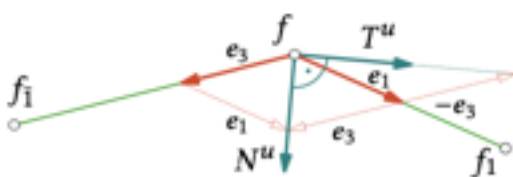


図5：

u パラメータポリライン $f\bar{1}barff1$ の接触平面。

直交正規基底からの離散正接ベクトル T_u と主法線ベクトル N_u 。

2.2.2 離散測地線。

次の定義は、表面の曲線が測地線であるというよく知られた事実の離散バージョンであり、その主法線が表面の法線と（向きまで）一致する場合に限ります。

定義2.2。 u パラメータラインは、 N_u が N に平行な場合にのみ、離散測地線です。

離散測地線の概念は内部ポリラインに対してのみ定義され、境界曲線に対しては定義されないことに注意してください。(この表現わからん)

補題2.3。 離散 u パラメータラインは、各頂点 f で、 u パラメータラインの両側の放射エッジ間の角度の余弦の合計が等しい場合、つまり $\cos\alpha_{12} + \cos\alpha_{\bar{1}\bar{2}} = \cos\alpha_{1\bar{2}} + \cos\alpha_{\bar{1}2}$ である場合にのみ、離散測地線です。

証明。NNNNNNNN。

2.2.3 離散直交ネット。

パラメータラインに正接がある場合、ネットの直交性を次のように定義するのが最も自然です。

定義2.4。 離散ネットは、各頂点でパラメータラインの接線ベクトル T_u と T_v が直交している場合にのみ、離散直交ネットです。

補題2.5。離散ネットは、各頂点で反対の角度のコサインの合計が等しい場合、つまり $\cos\alpha_{12} + \cos\alpha_{\bar{1}\bar{2}} = \cos\alpha_{1\bar{2}} + \cos\alpha_{\bar{1}2}$ の場合に限り、離散直交ネットです。

証明。XXXXXXXXX。

主張：

離散測地線の別の定義、すなわち $\alpha_{12} + \alpha_{\bar{1}\bar{2}} = \alpha_{1\bar{2}} + \alpha_{\bar{1}2}$ は、以前に多面体サーフェスに関連して使用されてきました[Polthier and Schmies 1998; Wunderlich 1951]。

同様に、コサインなしの離散直交性のバージョン ($\alpha_{12} + \alpha_{\bar{1}\bar{2}} = \alpha_{1\bar{2}} + \alpha_{\bar{1}2}$) が、多面体サーフェス、つまり、円錐ネットの理論で使用されています[Liu et al. 2006]。

補題2.3と2.5の特性方程式にコサインが存在することは、数値最適化にとって有利です。なぜなら、これらは、最適化に必要な変数（エッジ単位ベクトル）で双線形であるためです。

したがって、それらは[Tangら2014]の提案に適合し、追加の変数を導入する代償を払っても、せいぜい2次制約を使用することでガウス・ニュートン法の収束を加速します。

以下の定義は私たちの論文にとって不可欠です。

測地線の平行座標の概念を離散化します。

定義2.6。 ネットが離散直交であり、uパラメータラインが離散測地線である場合、離散ネットは離散測地平行座標によってパラメータ化されます。

命題2.7。 次の3つは同等です。

(i) f が離散測地平行座標でパラメータ化される。

(ii) f の全ての頂点で、 $\alpha_{12} = \alpha_{1\bar{2}}, \alpha_{\bar{1}2} = \alpha_{\bar{1}\bar{2}}$ 。(図6左)

(iii) かく頂点 f における u ラインズ($f_{\bar{1}}, f, f_1$ にまたがる)の離散接平面は、 v ラインエッジの二等分面である。(つまり、 e_2 と e_4 は鏡面对称(U 方向の接平面に関して))(図6右を参照)

証明。 XXXXXXXX。

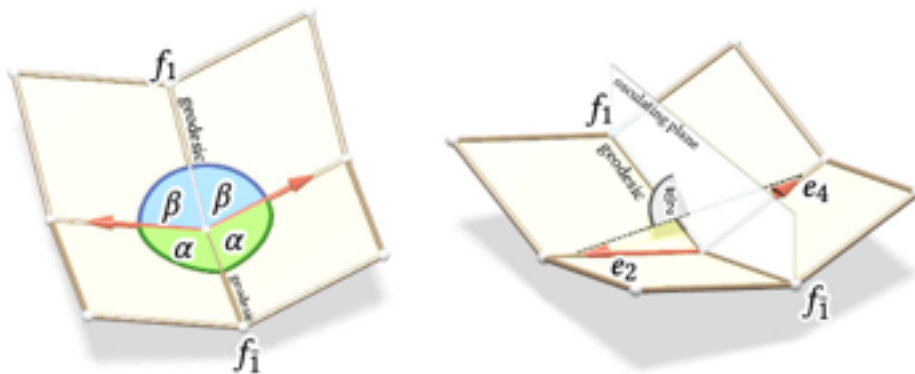


図6：命題2.7のような離散測地線平行座標の幾何学的特性。

左：角度の状態。

測地線のパスに対して「対称」な2つの隣接する角度はすべて等しい。

右：測地線を横切る単位長のエッジベクトルは、接触平面 $f_{\bar{1}} f f_1$ に対して鏡面对称です。

(iii) 3つの頂点 $f_{\bar{1}}, f, f_1$ が共通の直線上にない場合にのみ意味があることに注意してください。その場合、同等性ステートメントは (i) と (ii) に対してのみ適用されます。

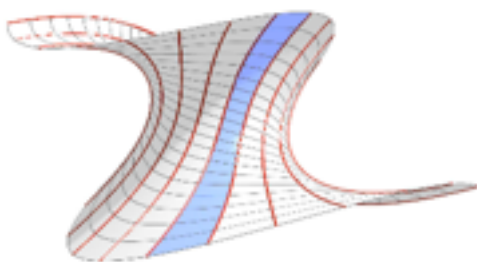


図7。

測地線ストリップによって、測地線の平行座標によるパラメーター化の2つの測地線の間の表面を理解します。

3 測地ストリップモデル

離散測地線平行座標は、サーフェスを測地線ストリップに分割します。ここでは、ストリップ全体のストリップ幅の変化がガウス曲率にどのように関連しているかを説明し、ほぼ可展面をモデル化するために幅を制御する方法を示します。

3.1 測地ストリップとストリップの幅

測地線の平行座標によるパラメーター化の2つの測地線の間の表面ストリップを、測地線ストリップと呼びます（図7を参照）。

再び、u線が測地線(赤色のやつ)のファミリを表し、v線がパラメータ線の直交ファミリを構成すると仮定します。

次に、そのストリップの境界測地線間のvパラメータラインの長さを測定する関数を使用して、測地線ストリップのストリップ幅を定量化します。

離散測地線平行座標は、サーフェスを測地線ストリップに分割します。ここでは、ストリップ全体のストリップ幅の変化がガウス曲率にどのように関連しているかを説明し、ほぼ可展面をモデル化するために幅を制御する方法を示します。

したがって、2つの ε 近傍、測地線の間のストリップ幅は

$$\int_v^{v+\omega} ||f_v(u, t)|| dt \approx \omega ||f_v(u, v)|| + \omega^2(\dots) \text{です。}$$

したがって、ストリップ幅の1次近似は、vラインの導関数の長さです $||f_v||$ 。

u方向の弧長パラメーター化（つまり、 $||f_u|| = 1$ ）を想定すると（これは常に測地線の平行座標で可能です（たとえば、[Kühnel2003、p. 110]を参照））、ストリップの幅は、よく知られているヤコビ微分方程式

$$\partial_{uu}w(u) + w(u)K = 0 \quad (1) \quad (\text{cf. [Kühnel2003]})$$

を介して、線形ODEを介してガウス曲率Kと密接に関連しています。ここで、w(u) は、ストリップの最小幅です。

このヤコビ微分方程式を、ほぼ展開可能な表面の離散モデルで利用します。

3.2 ほとんど可展面

可展面は、平面に対して等尺な面です。

このような表面は、ガウスの曲率 (K = 0) がどこでも消えることを特徴としています。

表面が入でスケーリングされるとガウス曲率は $1/\lambda^2$ の係数でスケーリングされるため、ほぼ可展面は、その表面のサイズと比較してガウス曲率が小さい面と見なす必要があります。

数学的にはこの概念は漠然としていますが、革やフェルトなどの一部の素材は変形中に多少の伸縮を許容するため、アプリケーションとしては重要です。

私たちの推論は、ガウスの曲率Kに関するベルトランとプイシューの定理[Spivak 1979]によって支えられています。ガウスの曲率Kは、基本的に、Kは表面の測地線の面積と平面の円の面積の差の制限によって測定されると述べています。

Kがどこでもゼロに近い場合、表面の領域はどこでも平面の領域に近くなります。ほぼ展開可能なサーフェスの例については、図8を参照してください。

ガウス曲率を消失させる場合、ヤコビ微分方程式 (1) は $\partial_{uu}(\|f_v\|) = 0$ に簡略化されます。

u方向の離散円弧長パラメータ化の仮定の下で、このヤコビ方程式を直接離散化すると $\delta_{uu}(\|\delta_v f_1\|) = 0$ が得られ、 $\|f_{12} - f_1\| - 2\|f_2 - f_1\| + \|f_{12} - f_1\| = 0$ (2) が得られます。

私たちの最適化アルゴリズムでは、辺の長さが変数になり、この離散ヤコビ方程式は、ほぼ展開可能なサーフェスの制約の1つです (式 (8) を参照)。

4 回転面に等尺な表面

私たちの主な目標の1つは、本質的に対称な表面をモデル化することであることを思い出してください。

それらは、回転面がそれ自体に移動することができるように、それらに等尺的に変形可能でなければならない。

これが、回転面に対して等尺な面に関心がある理由です。

サーフェスの等尺性変形は測地線を測地線に変換し(形状変わっても、測地線は測地線のままだよってことだよね?)、サーフェス上の曲線間の交差角度を変更しないため、測地線の平行座標の枠組み内で等尺性変形を検討するのが賢明です。

したがって、測地線の平行座標が回転面に対して等尺である面を表す基準、を導出します。

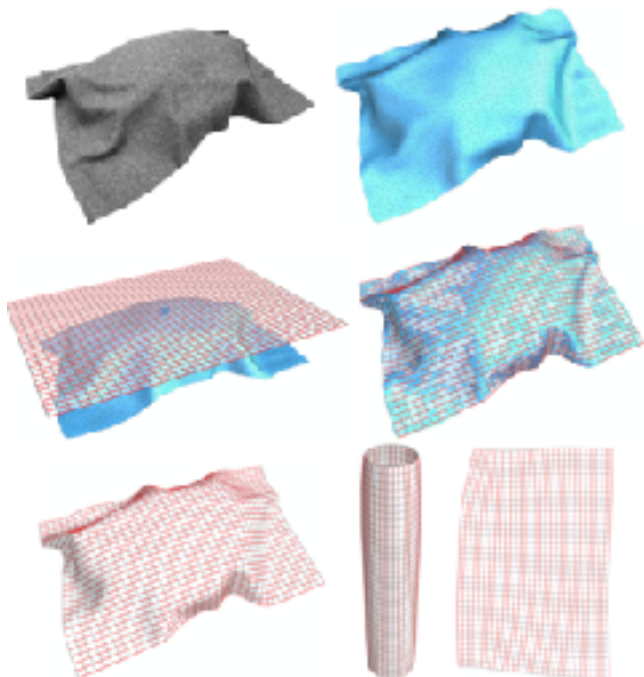


図8：ほぼ可展面

フェルトからモデル化された3D形状をスキャンし (左上)、その点群から三角形メッシュを抽出しました (右上)。

三角形メッシュは、離散的な測地線平行座標ネット (中央右および左下) を備えた、離散に近い可展面によって近似されています。

この近似タスクでは、結果のサーフェス (中央左) の適切な初期推定が必要です。

(なんか上の図を見た感じ、輪郭をしっかり重ねてる。これが初期推定???)

離散モデルと指定された三角形メッシュは非常によく一致し、参照メッシュ (バウンディングボックスの対角線長46.1を含む) とほぼ展開可能なメッシュ (両方のメッシュの中央

右側のオーバーレイ(三角モデルとネットの重ねたやつってことだな。)) の間のハウスドルフ距離 0.0111で確認されました。

対応する等角回転面は、ほぼ展開可能に見えます（つまり、直円柱のように、下部中心）。

(近似したストリップを円柱になるように並べたらやつの図と、それを広げたらこうなったよって図)ほぼ展開可能な表面が平面（右下）に展開されています。

4.1 回転面に等尺な滑らかな面

離散的な設定を検討する前に、測地線の平行座標 (命題4.2) の観点から、回転面に等尺である面をまず特徴付け ましょう。

到達する前に、次の技術的な補題を考慮する必要があります。

補題4.1 ([Kühnel2003、p. 110]) 。

f を測地平行座標による、表面のパラメータ化とする。

その時、 $\partial_v ||f_u(u, v)|| = 0$ つまり $||f_u(u, v)||$ は v に依存していない。

証明.

直交ネットの、 $(v=\text{const})u$ ラインの、測地線曲率 κ_g^u [Kuhnel 2003]は $\kappa_g^u = -\frac{\partial_v E}{2E\sqrt{G}}$ で、

ここで E, F, G は、最初の基本形(つまり $E = \langle f_u, f_u \rangle$ などなど)の座標関数。

我々の場合、 u パラメータラインは測地線で、この測地線は測地線曲率 $\kappa_g^u = 0$ が消えることを示唆する。

結果として、 $0 = \partial_v E = \partial_v ||f_u(u, v)||^2$ で、これは $||f_u(u, v)||$ が v に依存してないことを示す。

$r : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbb{R}$ を任意の関数とします。次に、Lemma 4.1では、次の関数は u にのみ依存します。

$$h(u) := \int_{u_0}^u \sqrt{||f_u(t, v)||^2 - r'(t)^2} dt \quad (3) \quad .$$

命題4.2。

f を測地平行座標による、表面のパラメータ化とする。

ここで測地平行座標が、任意の $a \in [u_0, u_1]$ $\frac{||f_v(u, v)||}{||f_v(a, v)||} =: r(u) \quad (4)$

が u のみに依存するという追加の特性を持つとする。（図9左の図を参照）

その時、 f は回転面 \tilde{f}

$$\tilde{f} = (r(u)\cos\phi(v), r(u)\sin\phi(v), h(u))$$

に対し等尺です。

ここで、 $\phi(v) := \int_{v_0}^v ||f_v(a, s)|| ds$ で、そしてhは(4)で定義されたrを用いて(3)で定義されるものです。

証明。 省略してます。

4.2 回転面に等尺な離散面

回転面に対して等尺である離散表面を取得するには、離散平行測地座標によってパラメーター化されたネットを取得し、命題4.2で述べられている必要なプロパティの離散バージョンを「追加」できます。

そのために、任意の $a, b \in [u_0, u_1]$ に対し、 $\frac{||f_v(a, v)||}{||f_v(b, v)||}$ がvから独立しているのと同様であるvからの

項 (4) の独立性を再考します。

すべての整数vに対して、定義領域

$$\frac{||\delta_v f(a, v)||}{||\delta_v f(b, v)||} = \text{const} \quad (5)$$

で整数a、bを要求することにより、このプロパティを直接離散化します。

これにより、（一般的なパラメーター化において）回転面に対して離散等尺性になる離散ネットの特性に到達します。つまり、離散測地線平行座標によってパラメーター化され、VVVVVV (5) を満たす場合です。

回転面に対して等尺である表面の概念には、等尺である実際の回転面は含まれないことに注意してください。

ただし、アプリケーションによっては、対応する回転面を計算することが望ましい場合や必要な場合があります。以下の事項に注意します（サブセクション4.2.2）。

4.2.1 固有の反復

コストと労力を削減できるという利点は、同じ表面ストリップで表面を繰り返しクラディングする場合に明らかです。

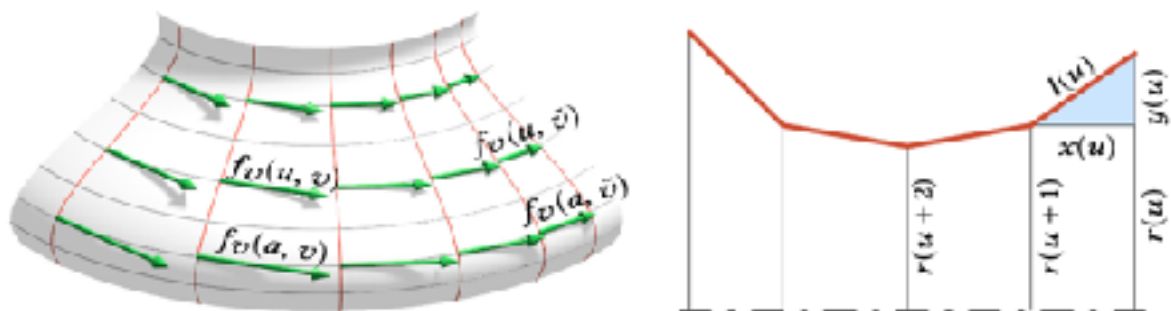
したがって、実際のアプリケーションでは、測地線緯線の各行に一定のエッジ長を必要とすることは理にかなっています。つまり、整数aの場合、 $||\delta_v f(a, v)||$ はすべての整数vで同じである必要があります。

これは自動的に (5) を意味するため、回転面に対し等尺です。

図9：

左：回転面に対して等尺である面では、v方向(つまり回転方向)の導関数の長さの比はvに依存しません。

つまり $\frac{||f_v(u, v)||}{||f_v(a, v)||} = r(u)$ です(命題4.2を参照)



右：離散子午線曲線(赤)を使用した離散回転面のプロファイル。
 $y(u)$ は連続する半径 $r(u+1)-r(u)$ の差です。

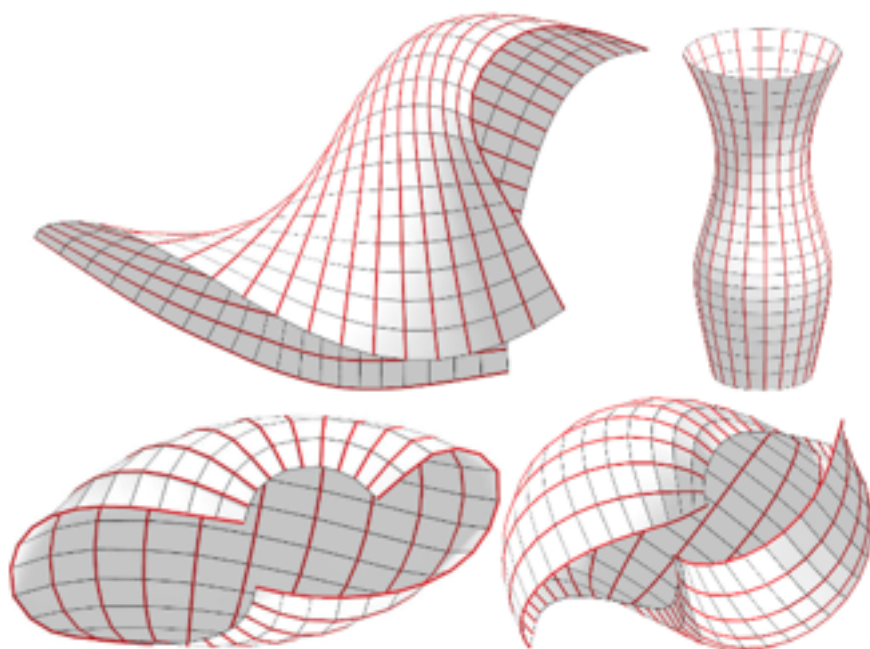


図10. 回転面（右上）に対して等尺である個別の測地線平行座標（左上）によってパラメータ化されたネット。

最終行：

半球（左）と「極冠」を削除した球（右）の等角変形。

ガウスの定理egregiumにより、これらは正の一定のガウス曲率の表面です。

4.2.2 回転面の抽出

最適化（セクション5を参照）により、サブセクション4.2.1のプロパティを持つ回転面に対して等尺である離散ネットを見つけたら、次の方法で実際に等尺である回転面を計算できます。

長方形のパッチにインデックス $[1, m] \times [1, n]$ の $m \times n$ 個の頂点があり、 m 個の頂点が u 方向、つまり測地線のある方向であると仮定します。

次に、 $u \in [1, m]$ の場合、回転面 dddd (uuuu) の平行な円に対応する正則 $(n - 1)$ 角形の平均エッジ長さを計算します。

したがって、そのような $(n - 1)$ 角形の外接円の半径は rrr (uuu) です。

ここでは、等角回転面がその軸を中心に完全に回転すると仮定します。この状態は緩和できます (以下を参照してください。提案4.3)。

さらに、 $u \in [1, m - 1]$ の場合、子午線曲線 III (uuuu) 上のポリゴンセグメントの平均長を計算します。

このデータを使用して、回転の離散参照面を作成できます。

図9 (右) に示すように、xxxx (uuuu) によって2つの平行な円の高さの差を計算します。

次に、回転の離散表面が ffffff (uuuu, vvvv) によってパラメータ化されます。ここで、 $h(u) = \text{XXXXXXXX}$ です。

長方形のサーフェスパッチ全体を完全に1回転の回転サーフェスに変換する代わりに、次の定理によりスムーズケースでも可能なように、一部のサブパッチに対して同じ手順を実行できます。

命題4.3 [Minding[1838]の定理]

$f(u, v) = (r(u)\cos v, r(u)\sin v, h(u))$ を回転面とする。

その時任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ で、 $\tilde{h}(u) := \int_{u_0}^u \sqrt{(1 - \lambda^2)r'(t)^2 + h'(t)^2} dt$ はリアルで、回転面は f に対し等尺で

す。ここで $f^\lambda = f$ です。

5 アルゴリズム

すべての変数の空間で制約多様体を定義することによって **離散表面をモデル化し、開始点を選択して、制約を満たすように「移動」** しようとしています。

さまざまな制約がさまざまな重みで乗算されます。

最適化の重要なポイントは、適切な方法で重みを選択することです。

Tangら[2014]は、Gauss-Newtonの変形であるこのような方法を提案し、制約が線形または2次関数として定式化される場合に最もよく機能するという観察を行いました。

二次ではないアприオリな制約の中には、追加の変数を使用して二次項に再定式化できるものもあります。これらの変数は、最適化の対象となります。以下では、さまざまな組み合わせとさまざまな重みで、探しているジオメトリを記述する制約のリストについて説明します。

5.1 制約のリスト

変数のリスト。

Z^2 ラティスの **$(m \times n)$ 長方形サブパッチの組み合わせでメッシュ $M = (V, E, F)$ を操作しています。**

したがって、一般的なメッシュには $|V| = nm$ 頂点、 $|F| = (n - 1)(m - 1)$ 面、および

$|E| = n(m - 1) \cdot m(n - 1)$ エッジ。

システムの変数は次のとおりです。

<i>variables for</i>	<i>notation</i>	<i>number</i>
coordinates of vertices	$f_i \in \mathbb{R}^3$	$3 V $
components of (unit) edge vectors	$e_{ij}, e_{ji} \in \mathbb{R}^3$	$6 E $
edge lengths	$w_{ij}, w_{ji} \in \mathbb{R}$	$2 E $

したがって、これらは合計 $8|E| + 3|V|$ 変数です。

以下では、制約をリストし、考慮される方程式の数を角括弧で囲みます。

私たちの離散測地線平行座標は、パラメーターラインの両方のファミリーが異なる役割を果たすネットであるため、座標方向から独立してすべての制約を表現することはできません。

ネット制約。

前述のように、ネットを記述するために実際に必要な変数よりも多くの変数を使用しますが、結果として、代数方程式および多くても2次方程式を制約として取得します。

したがって、適切なネットを記述するために、エッジ長の変数 w_{ij} 、 w_{ji} を

実際のエッジ $(f_i - f_j) - w_{ij}e_{ij} = 0, (f_j - f_i) - w_{ji}e_{ji} = 0$ 、および $(f_i - f_j)^2 - w_{ij}^2 = 0, (f_j - f_i)^2 - w_{ji}^2 = 0$ に関連付ける必要があります。

これら2つの制約セットは、ベクトル e_{ij} と e_{ji} が単位長であることを意味します。つまり、 $e_{ij}^2 = e_{ji}^2 - 1 = 0$ です。

負の幅 w_{ij} の理論的な外観は、 e_{ij} 方向の不要な反転と w_{ij} の符号変更を防ぐフェアネス項（下記参照）を使用することで改善されます。

そうでない場合、対応する制約は、いくつかの追加変数 $d_{ij} \in \mathbb{R}$ に対して $w_{ij} - d_{ij} = 0$ として簡単に実装できます。

離散測地線平行座標制約：

この制約は角度条件として定式化できます。命題2.7 (ii) または同等の余弦の条件として（補題2.5の後の注釈を参照）。

中心頂点 f_i とエッジ隣接頂点 f_j, f_k, f_l, f_m があり、 f_i, f_j, f_k が離散測地線である頂点スターの場合、角度制約は $\langle e_{ij}, e_{ik} \rangle - \langle e_{im}, e_{ij} \rangle = 0$ 、reads $e_{il}, e_{ik} \rangle - \langle e_{im}, e_{il} \rangle = 0$ 。 (6)

u方向の離散的な弧長のパラメーター化：

測地線の平行座標では、すべてのuパラメーターラインを、弧の長さに比例して同時にパラメータ化できます。

したがって、u方向の連続するエッジを同じ長さ $w_{ij} - w_{li} = 0, w_{ji} - w_{il} = 0$ に制約します。

等しいストリップ幅関数：

固有の反復性、つまり、互いに等尺なストリップのシーケンスだけで表面を被覆すること（図2を参照）を得ることが、**この論文の1つの目標**であるため、**ストリップの長さを等しくし、各ストリップに沿ったストリップ幅の均等な分布。**

そのためには、直交するパラメーターライン（v方向）に沿った連続するエッジの長さを
 $w_{ik} - w_{im} = 0, w_{ki} - w_{mi} = 0$ (7)

に**制限する必要があります**。

同じ長さのストリップが自動的に取得されることに注意してください。

これは測地平行座標のプロパティ（cf. [Kühnel2003、Def. 4.27]）で、離散化に引き継がれるため、上記のような対応する制約をオンにすることすらありません。

ほぼ展開可能な制約：

ほぼ展開可能なサーフェスの場合、 $K = 0$ の簡略化されたヤコビ方程式（2）を制約として定式化するだけです。v方向のエッジの長さのu方向の2番目の違いは

$$\delta_{uu}w_{ij} = w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j} = 0, \delta_{uu}w_{ji} = 0 \quad (8)$$

を読み取ります。

ここで使用するヤコビ方程式には、u方向の弧長のパラメーター化が必要です。

したがって、上から対応する制約を強制する必要があります。

等尺性制約：

アイソメトリを計算する対象のメッシュのエッジ長を w_{0ij} で示します。

その時、 $w_{ij} - w_{0ij} = 0$ 、 $w_{ji} - w_{0ji} = 0$ です。

近似制約：

頂点 p_k と法線ベクトル n_k を持つ参照面が与えられます。

ネットの各頂点 f_i について、 p_{ki} を f_i への参照表面の最も近い点とします。

$\langle f_i - p_{ki}, n_{ki} \rangle = 0$ 。

最も近い点は、GaussNewtonステップの反復ごとに計算されます。

ハンドルベースの変形の制約：

頂点位置 p_k を指定します。

その後、 $f_i - p_{ki} = 0$ 。

公平性?????の制約：

最適化の結果として**良好なメッシュ品質を得る**には、いくつかの公平性の**条件**が必要です。

制約は、2番目の前方差分を消失させることによって実現されます。

$$f_l - 2f_i + f_j = 0, f_k - 2f_i + f_m = 0$$

次の表は、**制約の数と、個々の制約の結果の自由度**をまとめたものです。

constraint	no. of constraints	dof
net constraints	$8 E $	$3 V $
disc. geod. par. coord.	$2(mn - n - 2m + 2)$	$mn + 2n + 4m - 4$
arc length u -direction	$2n(m - 2)$	$mn + 4n$
equal strip widths	$2m(n - 2)$	$mn + 4m$
nearly developable	$2(2n - 1)(m - 2)$	$8n + 2m - mn - 4$
isometry	$2 E $	$mn + m + n$
approximation	$ V $	$2mn$
handle based def.	$3l$	$3mn - 3l$
fairness	$2(mn - n - m)$	$mn + 2n + 2m$

アルゴリズムの制約ソルバーとして、[Tangら2014]のガイド付き投影アルゴリズムを使用します。

5.2 計算時間

次の表の計算時間 T は、1.80 GHz、8 GB RAMのIntel®Core™ i5-6260U CPUでのPythonの実装を示しています。

時間は、モデリング手順がハンドルベースの編集方法でインタラクティブであるため、反復ごとに秒単位で測定されます。

マウスで頂点をドラッグしている間、マウスボタンが離されるまでアルゴリズムの反復を繰り返し実行します。その後、さらに5回の反復が続きます。

制約の重みは、公平性条件の重みを除いて、1または0に設定されます。

小さな矢印（.01A0など）は、対応する制約を削除してもジオメトリに大きな変化が予想されない場合、編集プロセス中に対応する重みをゼロに下げることの意味します。

次の表は、最適化でオンになっている制約も示しています。

Fig.	$ V $	$ var $	w_{go}	w_{iso}	w_{esw}	w_{al}	w_{dev}	w_{prox}	w_{fair}	$T/iter$
1	441	8043	1	1	0	0	0	0	.01→0	0.25
2	391	742	1	1	0	0	0	0	.01→0	0.11
8	1147	21249	1	0	1	1	1	1	.1→.01	1.43
10-1	441	8043	1	1	0	0	0	0	.01→0	0.17
10-2	187	3329	1	1	0	0	0	0	0	0.07
11-1	330	5942	1	1→0	1→0	0	0	1	–	0.23
11-2	4797	89879	1	1→0	1→0	0	0	1	–	6.62
14	1458	27054	1	0	1→0	0	0	1	.1→0	1.38
15	441	8043	1	0	1	1	1	0	.001	0.43

上記の表の重みは、以下を制御します。 **w_{go} = 離散測地線平行座標。** **w_{iso} = 参照面のアイソメ;** **w_{esw} = ストリップの幅が等しい。** **w_{al} = u 方向の円弧長のパラメーター化。** **w_{dev} = ほぼ開発可能性。** **w_{prox} = 参照面への近さ;** **w_{fair} = 公平。**

6 結果と応用

6.1 承認? Verification

Clairautの関係：

測地線の品質を検証するために、自明ではない離散測地線の平行座標によって回転面を近似し、それをClairautの関係と比較します。

回転面上の測地線はすべて

$$r(t)\cos\alpha(t) = \text{const} \quad (9)$$

を満たすと述べています。

ここで、 $r(t)$ は測地線から回転軸までの距離であり、 $\alpha(t)$ は測地線と緯度の間の角度を測定します。

離散モデル（図11）では、ネットの各測地線に沿って $r_i \cos \alpha_i$ を計算します。ここで、 r_i は頂点 p_i の回転軸までの距離であり、 α_i は接線ベクトル T_i と平行円の間の角度です。

図11に示すように、これらの値は妥当な許容範囲内で一定であることがわかります。

細分割と再最適化の後、離散測地線が滑らかな対応物に収束するという厳密な証拠はありませんが、エラーが減少するという強力な数値的証拠があります。

可展面のルーリングベクトル場：

可展面はルールドサーフェスである(可展面はルーリングで構成される)ため、平坦でない領域で一意のルーリングベクトル場があります。隣接する接平面の交点としてルーリングを表示すると、隣接する法線ベクトル $N \times N_1$ または $N \times N_2$ の外積を計算するだけで、方向場を簡単に計算できます。図12は、ほぼ展開可能な表面のルーリング方向のベクトル場をうまく示しています。

アイソメトリの測定：

元の表面 f^0 と変形した表面 f の間のアイソメトリ(等尺性?)を、固体力学からのよく知られた2次元ひずみテンソルを使用して測定します[Sadd 2009]。

私たちの離散平行測地座標に適合したひずみ行列は、頂点で定義され、接線ベクトル T_1 、 T_2 に基づいて定式化されます。

$D =$ (論文みて)

を読み取り、ここでは

000000、000000

などです（表記については図4も参照）。

ここで、 λ_1 、 λ_2 を D の固有値、 v_1 、 v_2 を固有ベクトルとします。主な歪み方向は $v_1 \times T_1 + v_1 y T_2$ および $v_2 \times T_1 + v_2 y T_2$ です。ここで、 T_1 、 T_2 はパラメーターに沿って配置された接平面の直交基底です。離散直交性を最適化することに注意してください（補題2.5および制約（6）を参照）。したがって、常に $T_1 \perp T_2$ と仮定できます。このアイソメトリ測定のカラープロット図を図13に示します。

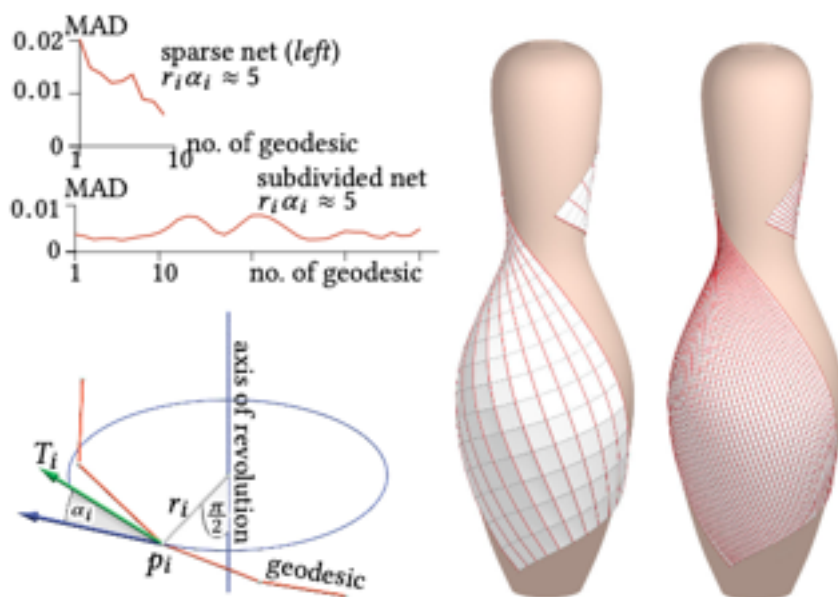


図11：
測地線（赤）が子午線曲線
に対応せず、それらに比べて
ねじれている（左のボウリ
ングピン）ように、回転面上

に離散測地線平行座標のネットを配置します。

ネットを再分割して再度最適化した後、より密な離散測地線平行座標（右ボウリングピン）を取得します。各頂点の $r_i \cos \alpha_i$ （左下を参照）を測定します。これは、クレラウトの関係（式（9）を参照）に従って、各離散測地線に沿って（許容誤差内で）一定でなければなりません。

$r_i \cos \alpha_i \approx 5$ の平均値では、スパースネットの平均絶対偏差（MAD）は最大で0.02であり、メッシュを細分割して0.01未満に最適化すると、エラーはさらに減少します（左上の図を参照）。

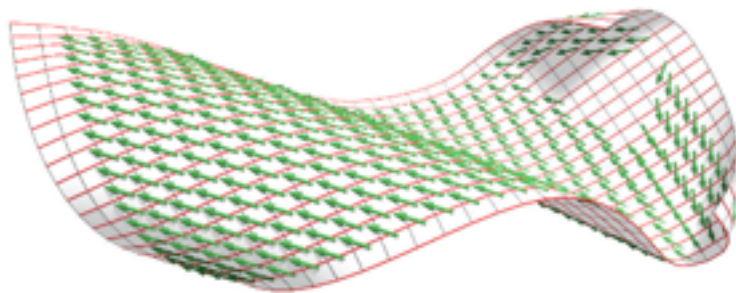


図12：

測地線ストリップに（ほぼ）一定のストリップ幅を要求することで、（ほぼ）展開可能な表面が得られます。可能な限り、隣接する法線ベクトル $N \times N1$ または $N \times N2$ の外積として支配方向を計算します。明らかに、平坦な領域では、固有の決定方向はありません（図に示されているように）。

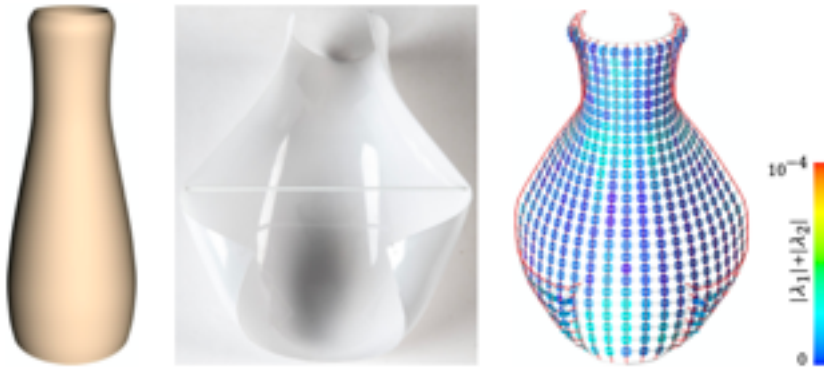


図13：
回転面の等尺性変形。

(中央) 変形したプラス

チックボトルの写真と（左）等角的に同じ回転面の3Dデジタルモデルの画像。（右）変形後のひずみのイラスト。色付きの楕円の主な方向は歪みの方向を示し、歪みの量 ($|\lambda_1| + |\lambda_2|$) は色で示されています。

最大歪みは0.00004です。

6.2 応用

離散測地線平行座標は、非常に自然にさまざまな方法で建築用途につながります。

6.2.1 測地線グリッドシェル。

グリッドシェルは、良好な静的特性を備えた二重曲面であり、グリッドネットワークとして実現されます。

非常に基本的なアイデアは、細長い四辺形の木材ストリップを単純に取得することで、そのストリップの表面の曲がる方向が推測しやすいです。??

その場合、**測地線の曲率が消滅しているため(アイソメトリでは不変です)、これらの木材ストリップはその（架空の）表面上の測地線に従います。**

私たちの方法では、そのような表面の設計は非常に簡単です。

ハンドルベースの設計のための手段があり、離散測地線平行座標で表面を近似できます。

図14のグリッドシェルでは、三角形のネットで見られる所定の参照面を、離散測地線平行座標の2つの横方向ネットで見近します。

次に、木製の長方形のストリップを曲げて2つの測地線ファミリ(要素の集まり?みたいなイメージ)を構築し、直交する軌跡の2つのファミリを残します。

6.2.2 ほぼ展開可能な表面。

互いに一定の距離を持つ測地線のファミリで表すことができる場合、サーフェスは展開可能です。離散測地線平行座標を使用すると、パラメーターラインの直交ファミリに沿って測定されたストリップ幅関数を制御するための優れたアクセスが得られます。

ほぼ一定のストリップ幅は、ほぼ展開可能な表面を意味します。

ほぼ開発可能なものに関する以前の研究は薄いガウス画像に基づいていましたが[Gavriil et al. 2018]では、図8のように、ガウス画像が曲線の近くに集中していない形状も処理できます。

クラッド：

木材は、曲げると変形する素材です。

薄いラスとボードは定常状態である程度の曲がりを許容しますが、さらに厚い木材片は、例えば、水蒸気で加熱した後など、驚くほど大きな変形を可能にします。

このプロセス内で、**木材の表面はある程度等尺性の変形を受けますが、多少の伸縮も示します。**

図2では、曲がった材木片を組み立てることによるファサード(しばしば建物の外見を表す意味)クラッドを示しています。

すべてのストリップの平面展開は合同です。

図15は、曲がった木材ボードのデザインを示しています。

やや伸縮性のある素材：

フェルトと革は、基本的に展開可能な表面の例ですが、そのサイズと比較して、**表面を少し伸縮させることができます(離散測地並行座標のことだよね?)。**

図8では、1つの平面フェルトからモデル化された3D形状を近似しています。

6.2.3 モールド(型のこと?)としての回転面。

「 v 方向の速度の一定比率」条件 (**式 (5)**) を満たす離散測地線平行座標は、**回転面に対して等角な面**です。

金属シートのような柔軟な材料からそのような表面を構築するためには、1つの型、つまり対応する回転面を構築するだけで済みます。

実際、その回転面の一部だけをモールド(型)として作成する必要があります。これは、最大のパネルが取り付けられるのに十分な大きさです。

(隣接する2つの子午線曲線の間の) 回転面のセグメント (ストリップ) のサイズの1つのモールド(型)が、モールド(型)のサイズ制限を超える可能性があることに注意してください。**???意味?** 回転面のセグメントを充填するために必要な数の金型を製造する必要があります。

図16は、**表面のどの領域が回転表面のどの部分に対応するかを示しています。**

平坦な領域 (ガウス曲率が消える) の場合、対応するパネルは単純に開発可能であるため、金型を作成する必要はありません (図17を参照)。

回転面の半径については、命題4.3によりある程度の柔軟性があります。

図1のレンダリングは、すべて同じ回転面に対して等角である4つの異なる表面パッチを示しています。図1のフランクゲーリースタイルの建物では、実際には平面ではなく、回転の金型表面の特定の領域に対して等尺である長方形の金属シートでファサードを覆うことができます。

図19に、回転面に対して等角の面として取得できる可能な形状の短いリストを示します。

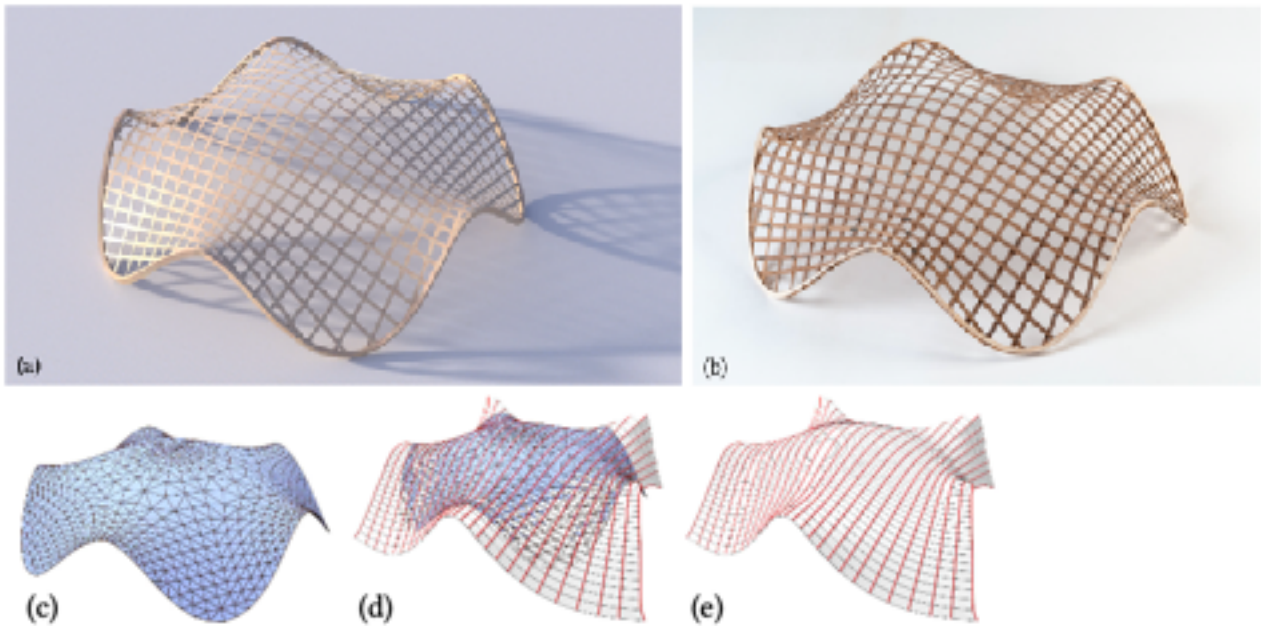


図14：グリッドシェル。

三角形のメッシュ（c）として与えられた参照サーフェスを、2つの横方向の測地線を使用し、参照サーフェスを超えて、離散測地線平行座標の2つの異なるネット近似します。

参照メッシュと2つの離散測地線平行座標の1つとのオーバーレイは、近似した品質（d）を示しています。

個別の測地線平行座標を持つ1つの結果のネットは、（e）で示されます。

グリッドシェルの場合、測地線のみが細長い四角形の木材ストリップによって構築されます（実際に構築された木材ストリップモデルのレンダリング（a）と写真（b））。

指定されたメッシュ（境界ボックスの対角線の長さ25）と測地線平行座標ネットの間のハウスドルフ距離は0.031です。????

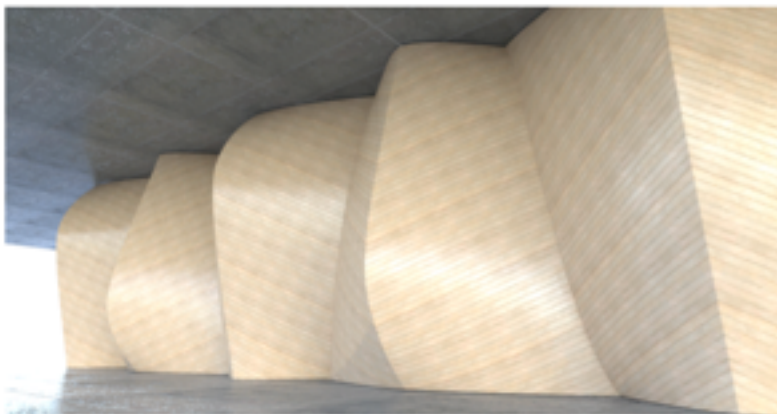


図15：内部の木製の壁のクラディングのレンダリング

平面の木製ボードを曲げることによって得られる形状は、材料が曲げられるときにわずかに伸びたり縮んだりする可能性があるため、ほぼ展開可能な表面によってモデル化できます。

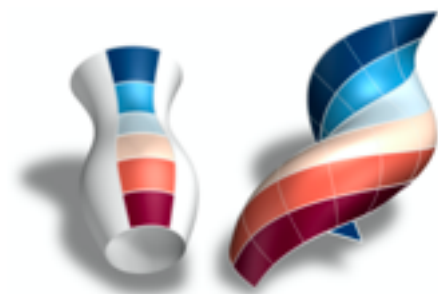


図16：モールドとしての回転面

変形したサーフェス上の四角形の各パネル（右）は、回転サーフェス上の四角形（左）と同じ色で等角です。

このようにして、図1のフランクゲーリータイプのデザインから4つの表面のスタイルで二重に湾曲したパネル(複曲面パネルのこと)を取得します(この文章がわけわかめ)。

6.2.4 ストリップモデルの本質的な反復性。

回転面に対して等角である表面（図10、左上）は、等角ストリップを結合することにより、ストリップモデルとして生成できます（図18）。

これは、曲げることのできる材料から同じ形状のストリップのコピーをいくつか製造するだけでよいので、そのような二重に湾曲した表面(複曲面のこと)の製造にとって明らかな利点です。

これらのサーフェスは、すべての測地線ストリップに沿ったストリップ幅の均等分布の追加制約を使用して、離散測地線平行座標（図18中段左）でモデル化します（7）。

私たちの離散測地線は可展性の条件を組み込んでいないことに注意してください。

ただし、製造目的では、ストリップを平面に展開する必要があります。

そのために、まず各ストリップを個別の展開可能なストリップ（平面の四辺形の面を持つストリップ）に変換します。

図18（中央の列が右）を参照してください。

図12でルーリングベクトル場を計算する場合と同様に、最初に隣接する接平面を交差させて横方向の積 $N \times N1$ を計算することで、ルーリング方向を推定します。

法線ベクトルがほぼ平行な領域（ストリップの平坦な部分）では、理論的には任意の方向を選択できます。

したがって、ストリップの平坦でない部分から最も近い隣接方向を平均します。

次に、ストリップの2つの個別の測地線を、ルーリングベクトルと法線ベクトルが張られ、 v 平行エッジの中点を通る平面と交差させます。

(へ？ストリップ(ルーリングベクトルと法線ベクトルが張られてて、 v 並行エッジの中点を通るやつ)の二つの離散測地線を交差させる。)

このようにして、各ストリップに沿ってほぼ平面の四角形を生成します。

ストリップ展開は、（ほぼ）平面の四辺形を平面に展開することによって行われます（図18の下部）。

すべての展開されたストリップのオーバーレイ(全部重ねてみたってやつ)は、ストリップがほぼ合同であることをうまく示しています（図18右下）。

水平エッジの強い変化は、展開可能な表面のルーリングが等角的に曲げられている間、大きく変化する(平面の曲がりが大きいつつ)可能性があるという事実によるものです。

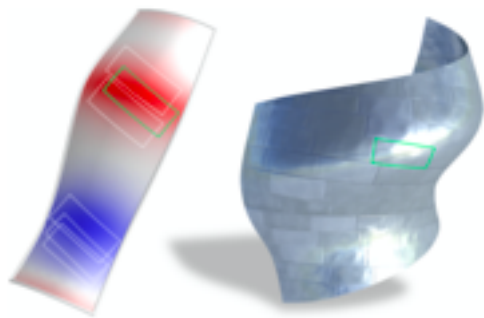


図17：

回転面に等角な面のパネル（右）。

各パネルは、対応する回転面（左）のパッチに対応しています。

緑の境界線を使用して、そのようなペアを強調表示します。

革命の表面のセグメントは、最大のパネルを運ぶことができるだけの大きさでなければなりません。

図16では、表面のどの領域が回転表面のどの部分（金型）に対応するかを示しています。

実際には、金型のサイズ制限により、2つの隣接する子午線曲線の間の領域をカバーする金型をいくつか製造します。

特に、これらのパネルはフラットであるため、ガウス曲率が消失している領域の金型は必要ありません。

ストリップ（左）で、正のガウス曲率で表面領域を赤で、負で青で、白でゼロに近い色付けます。

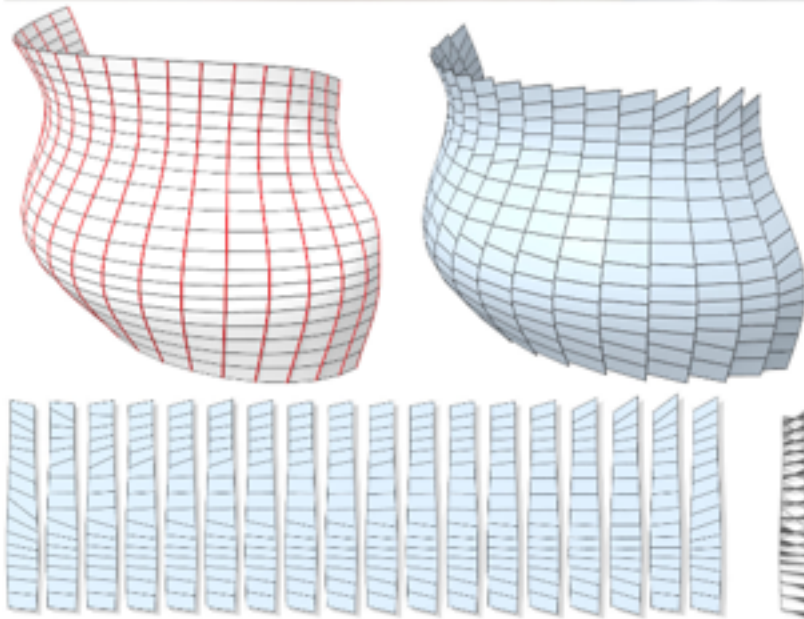


図18：回転面に等角な
(革命の表面?)表面のストリップモデル

上段：合同の曲げ可能なストリップ（ポリスチレン）を取り付け（縫い上げ）て作製された回転面のストリップモデルの2つの変形の写真。

中央の行左：離散測地線
平行座標による同じ表面

のモデル。

中段右：測地線を個別の展開可能な帯に変換するために、帯を区分的な平面で近似します。

ルーリングの方向（測地線を横切るエッジ）は一般に測地線に直交しなくなっていることに注意してください。

左下：個々のストリップの開発。

右下：すべてのストリップのオーバーレイ（面なし）。

測地線（垂直）の境界がどれだけうまく一致しているかを確認してください。

6.2.5分析。

最適化問題の非線形性により、アルゴリズムは初期化に依存する極小値に収束します。

その結果、通常はアプリケーションにとって望ましくないアーティファクトであり、ハンドルベースの編集モードで削除できる、サーフェスの自己交差が発生する可能性があります。

選択された初期化メッシュの影響は、与えられた表面を近似するために最適化されている間ハンドドルでメッシュを手動で変更しない近似タスク、に対してより大きくなります。

変数ベクトル

$$x \in \mathbb{R}^{3|V|+8|E|}$$

の2次制約は、

$$\phi_i(x) = x^T h_i x + b_i x + c_i, h_i \in \mathbb{R}^{(3|V|+8|E|) \cdot (3|V|+8|E|)}, b_i \in \mathbb{R}^{3|V|+8|E|}, c_i \in \mathbb{R}$$

のシステムとして記述できます。

次の表に、ソリューションが制約を満たさない程度を示します。

メッシュを平均エッジ長1に再スケーリングした後、 $R = (\sum_i \phi_i(x)^2)^{\frac{1}{2}}$ で測定します。

Fig. no.	method	error R
1	interactive	2.75e-7
2	interactive	3.45e-7
8	approximation	0.29
10-1	interactive	2.10e-7
10-2	interactive	1.32e-8
14	approximation	0.031

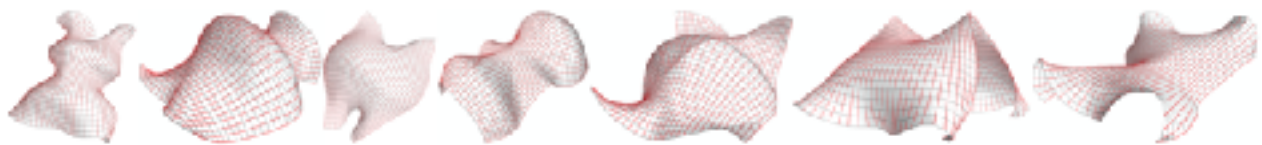


図19.この図に描かれている回転面に対して等尺性のさまざまな表面パッチは、表現可能な形状が豊富であることを示します。

6.3 制限と今後の課題

制限：

使用するメッシュ（約300から5000の頂点）は、アルゴリズムの最初の反復内で既にターゲットシェイプにすばやく移動しますが、**現在の実装はまだインタラクティブではありません。**

私たちの方法は**材料を意識した製造に主に焦点を当てているので、材料の挙動のより多くの特性を最適化に組み込むとよいでしょう。**

実際のグリッドシェル（図14）と回転面に対して等角の表面のストリップモデル（図18）を構築することを除いて、たとえば（他の）物理シミュレーションで検証サイクルを実行するなどして、メソッドを物理的に検証しませんでした。

今後の研究：

マテリアルアウェアジオメトリックモデリングは、将来の研究に多くの余地を提供する領域です。

等尺に変形する材料を扱ういくつかのケースに対処しましたが、おおよその等尺性の処理を拡張して、曲げや伸張動作の制限などの特定の材料特性を正確に考慮することができます。

本質的な連続対称性が建築用途に有利であることを示しました。

実用的な観点から、ここではいくつかの公差を追加することができ、回転の表面に対して等尺である表面のクラスにそれほど厳密に制限されなくなります。

連続的な固有の対称性を持つこれらの表面は、外因性の繰り返しの形を示す表面に関連していることは注目に値します。

Julius Weingarten [1861]は、主曲面間の関係を有する表面の焦点面として、回転面に等角である表面を特徴付けました。

後者のいわゆるWeingarten面は、湾曲パラメータの1つのパラメータファミリしか持たないため、アプリケーションにとっても興味深いものであり、パネルの製造に必要な金型の大幅な削減につながるはずです。

局所的設計（曲率要素、単純な表面パッチを局所的に近似する）の繰り返しを増やすために初期設計面を最適化することは、今後の作業のもう1つの興味深い方向性です。

結論：

離散測地線平行座標の新しいモデルと、建築アプリケーションの製造を意識した設計のための多面的な可能性を提示しました。

ストリップが等しいクラディングサーフェスや、非常に少数のモールド(型とかの意)のみが必要な二重湾曲パネルによるフリーフォームアピールのあるパネルサーフェスなど、本質的に反復的なプロパティを持つサーフェスをモデル化する方法について説明しました。

測地線に沿って細長い四角形の木材ストリップで構築できるグリッドシェル構造の設計方法を紹介しました。

最大で2次制約を持つ最適化問題としての定式化は、ほぼ対話的な編集ツールになります。