

Developability of Triangle Meshes

ODED STEIN and EITAN GRINSPUN, Columbia University KEENAN CRANE,
Carnegie Mellon University

(簡易日本語まとめ)

一言要約：

【平面との等尺性とルーリングを正確にとらえた「三角形メッシュの可展性」を定義】

RMS：二乗平均平方根。統計値や確率変数の散らばり具合を表す数値の一種。

縮退：2つ以上のことになったエネルギー固有状態が同じエネルギー準位をとること。

Abstract

可展面とは、伸ばしたり切断したりせずに平らな部分を滑らかに曲げることによって作成できる表面です。滑らかな可展面の2つの重要なプロパティ、「平坦化（平面の状態との等尺性）」と「直線のルーリングの存在」を正確に捉えた三角形メッシュの可展性の定義を紹介します。この定義は、可展面モデリングのアルゴリズムの開始点となります。通常の縫い目曲線によって分離された展開可能なピースに向かって特定のメッシュを駆動する変分アプローチを検討します。計算は、パッチをクラスター化したり縫い目を明示したりする必要なく、頂点スターでサポートされているエネルギーの勾配降下に相当します。展開可能な設計と製造への応用について簡単に説明します。



図1：離散的な展開性を促進することで、特定のメッシュは、非常に規則的な縫い目(シーム)曲線で区切られた平坦化可能なピースで構成される形状になります。

1 INTRODUCTION

展開可能な部品からの製作は、製造に魅力的なパラダイムを提供します。合板や板金などの平らな板材は、切断、輸送、保管が簡単です。展開可能な部品で構成される表面は、コンピューター制御のフライス加工でコストを削減し、品質を向上させます[Harikら2013]。ただし、これまでのところ、**曲面を展開可能なピースに自動変換するためのツールはほとんどありません**。ほとんどの産業用アプリケーションは、依然として**手動の操作とデザイナーの専門知識に依存**しています[Chang 2015]。

本稿の目的は、シンプルな設定で**展開可能性を示すための数学/計算の基礎を開発**し、これが展開可能な設計への新しいアプローチにどのように活かせるかを示すことです。私たちの**出発点は、三角形メッシュの展開可能性の新しい定義**です（セクション3）。この定義は、単なる連続的なものではなく、**2階微分可能な可展面の動作によって動機付けられます**。平坦化を求めるだけでなく、明確に定義された**ルーリングに自然につながる定義**も求めます。さらに、既存の離散展開可能性の概念とは異なり、これは一般的な三角形分割サーフェスに適用され、組み合わせに関する特別な条件はありません。

これらにより、私たちの定義は、可展面設計アルゴリズムの自然な出発点になります。本稿は、**各頂点の個別の展開可能性を促進するグローバルな変分アプローチ**を調査します（セクション4.1）。興味深い観察は、**この局所最適化は当然、区分的に展開可能な表面に向かう傾向がある**ということです。実際には、曲率は、それ自体が非常に規則的な（セクション4.2）継ぎ目の曲線（セクション4.1.3）のまばらなコレクションに集中します。

一般的に、与えられた滑らかな表面の「最良の」近似はありません。なぜなら、しわのあるシャツやしわくちやの紙のように、次第に小さくなっていく展開可能な部分によって、より近い近似が見つかるからです。私たちの方法では、最終的な設計は、主に入力テッセレーション（図2）と非開発性へのペナルティの選択（図10）によって決まります。最終的なアルゴリズムの実装は簡単です（セクション4.3）。セクション5で、それらを展開可能な設計に使用する方法を探ります。

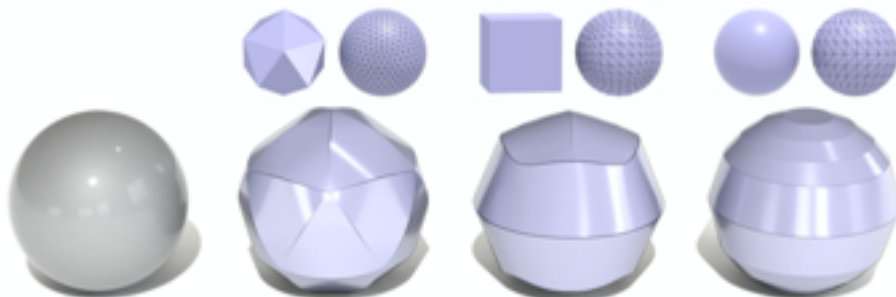


図2：展開可能なピースで完璧な球体にどのように近づけるか？ 対称性があるため、標準的な「最良の」答えはありません。代わりに、この対称性を壊す最初のテッセレーション（上部に表示）を選択して、表面を目的のデザインに導きます。

2 RELATED WORK

2.1 Discrete Developability

最近、離散微分幾何学の精神で、粗いメッシュ上でも可展面の主要な特性を正確に保持する展開可能性の模倣概念に関心が集まっています[Bobenko 2008; Crane and Wardetzky 2017]。三角形メッシュの場合、一見自然に見える定義は角度欠陥の消失ですが、この定義により、セクション3.2で説明するように、ルーリングのない非常に不規則な形状が可能になります。離散的な展開可能性の他の概念は、主に三角形分割ではなく通常の四辺形ネットに基づいており、ジオメトリの変更に簡単に適応できないグローバル四角形レイアウトが必要です。たとえば、平面四辺

形 (PQ) ストリップは、等尺的に平坦化でき、明確なルーリングがあるため、可展面の自然な類似物を提供します [Liuら2006; Zauer1970]; Pottmannら [2008]は、これと同じ視点に基づいて、半離散的な開発可能性を検討します。Solomonら [2012]は、ルーリングの方向が自由に可変であるフレームワークを提示しますが、全体的なメッシュのレイアウト構成は先験的に(あらかじめ)決定する必要があります。最近、ラビノビッチら [2018]は、直交測地線に基づく定義を提案し、グローバルクワッドレイアウトも必要とします。角度欠陥条件と同様に、この定義を正確に満たすメッシュは、依然として非常に「くしゃくしゃ」にすることができます。ルーリングは各頂点で局所的に定義されますが、一般的には全体として一貫していません (図5)。通常の可展面の編集を提供するために、この定義に補助的な滑らかさの項を追加できます。離散可展性 (定義3.1) の概念は、ゼロ角度欠陥概念 (局所的な平坦化を保証) とPQ定義 (グローバルなルーリングを提供) の両方と同時に互換性があります。また、メッシュの組み合わせに条件を課さないため、汎用の展開可能な設計に適しています。



図3.簡単に平坦化できる部品で特定の表面を近似するさまざまな方法が開発されています。左から: Juliusら [2005]、Mitani and Suzuki [2004]、Shatzら [2006]、Tangら [2016] (手動で編集する必要があります)、および私たちの方法。

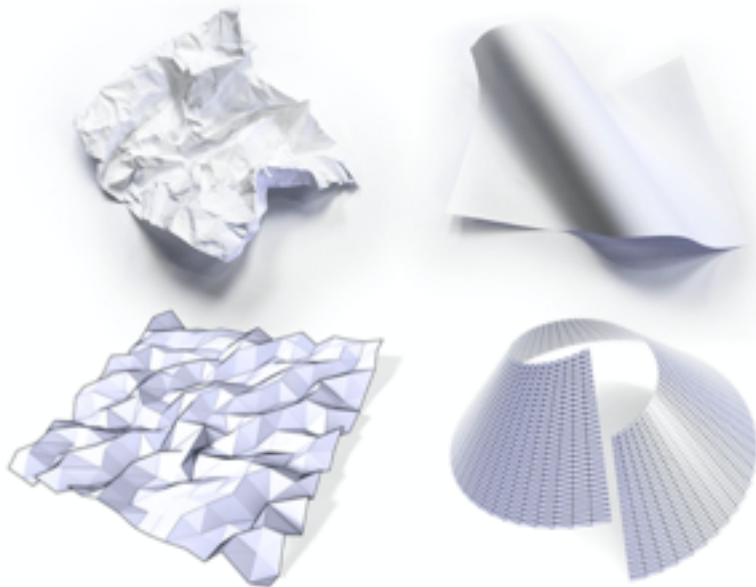


図4.平坦化性だけでは、表面の加工が容易であることを保証するには不十分です。たとえば、しわくちゃの紙片 (左上) とノイズの多い三角形メッシュ (左下) の両方を平面に正確に平らにすることができますが、実際には固い素材から組み立てることは困難です。対照的に、滑らかな紙片

（右上）と三角形のメッシュ（右下）はどちらも正確に平坦化でき、各点を通る直線のルーリングがあります。後者の表面を探します。

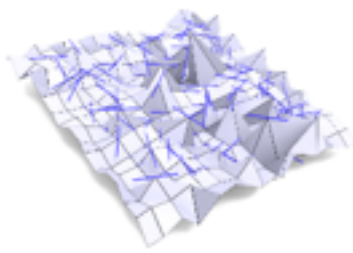


図5.角度の欠陥がゼロの三角形分割と同様に、ラビノビッチら[2018]の個別の測地線ネットは非常にくしゃくしゃにすることができます。青い線は局所的な頂点のルーリングを示します。

2.2 Developable Design

いくつかの方法は、（ほぼ）展開可能な部分によって与えられたメッシュを近似します。Wang and Tang [2004]は、角度の欠陥を直接最適化し、セクション3.2で説明したしわくちの動作をもたらします。三谷と鈴木[2004]は、平面に簡単に展開できる三角形のストリップを生成しますが、明確なルーリングがありません。代わりにShatzら[2006]は、内部円錐点を持つことができる厳密に円錐形の領域に適合します。Decaudinら[2006]は、ローカルフィッティングと投影を繰り返し実行します。Massarwiら[2007]は、サーフェスをルールドピースに分割します。これは、三角形分割によってのみ展開可能になります。Juliusら[2005]は、ジオメトリを拡張するのではなく、低歪みで平坦化できる領域を見つけます。これらの方法はすべて、理解や制御が難しいパラメータを含む、一連のメッシュ処理操作（クラスタリング、フィッティング、リメッシュなど）を適用します。さらに、セクション5.2で説明する粗いフォームの検索には適しておらず、ほとんどの場合、明確なルーリング方向（製造を容易にするため）が提供されていません。

他の方法は、自動近似ではなくユーザーガイドの設計に焦点を当てています。たとえば、Kilianら[2008]は曲線折りたたみを探索し、Tangら[2016]はユーザー駆動のスプラインネットワークを検討し、Roseら[2007]はスケッチされた境界を補間します。薄いシートのシミュレーション方法[Narainら2013; Schreckら2015]は、設計の探索にも使用できます。出力品質に関して、「良い」展開可能な設計を作るための基準として普遍的に受け入れられているものではありません。いくつかのアルゴリズムの結果を図3に示します。概して、私たちのアプローチは、前の作品と少なくとも同等の品質のモデルを生成し、(i) 表面をディスク状のピースに分割する必要がない、(ii) 計画線の自動平滑化、および (iii) ルーリング方向の自然な出現など、他の方法では示されない優れた特徴をいくつか示します。

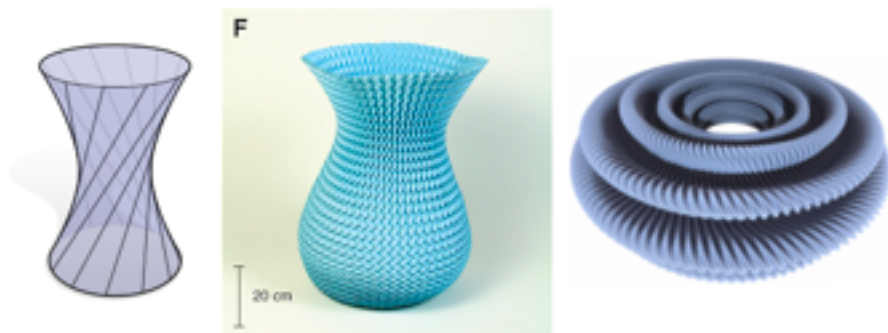
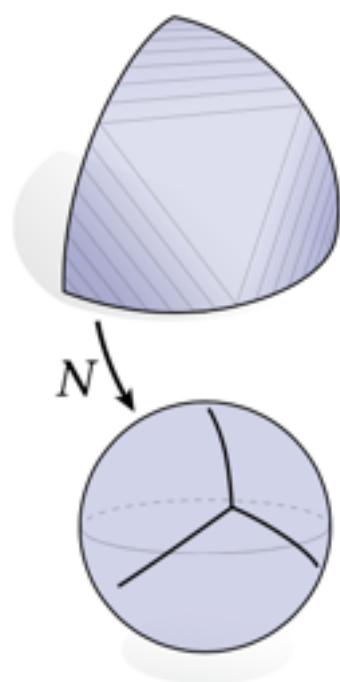


図6. 負のガウス曲率を持つ回転双曲面（左）のように、表面にルーリングを引くだけで平面を平坦化できるとは限りません。逆に、平坦化可能なサーフェスは、十分に規則的でない限り、自動的にルール化されません。 C^0 三浦織の折り紙パターン（中央）、または C^1 連続性を示していてもしわの多いフラットトーラスの等尺性埋め込み（右）を検討してください。局所的な平坦性と規則性の両方を捉えた離散化を求めています。（Dudteら[2016]およびBorrelliら[2012]からの画像、許可を得て使用）。

3 DISCRETE DEVELOPABILITY

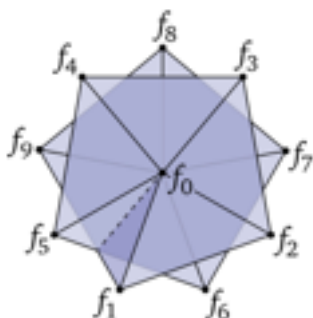
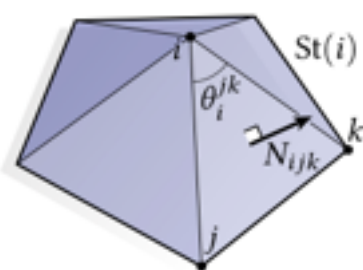
（三角形メッシュの可展性の新たな定義が書かれてる）



離散的な定義を発展させるために、まず、可展面に関するいくつかの基本的な事実を思い出します。わかりやすくするために、ユークリッド平面に対してローカルに等尺である平坦化可能な表面と、2度微分可能な (C^2) 液浸である可展面を区別します。同様に、**可展面は、ガウス曲率がゼロの C^2 液浸です ($K = 0$)**。可展面の追加の規則性により、サーフェスが単に平坦化できる場合に発生する可能性のある病理学的動作が排除されます。たとえば、平坦化可能な表面は、しわくちゃの紙や波状の折り紙のように見えますが、可展面は、円錐または円柱のような滑らかで滑らかな表面であり、直線のルーリングが各点を通過している必要があります（図4）。したがって、**ガウスマップ N の下では、可展面は、 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ の外因的に平坦な領域で交わる曲線のネットワークに縮退します**（挿入図を参照）。すべてのルールドサーフェスが展開可能であるわけではなく（図6左）、 C^1 であるが C^2 ではない平坦化可能なサーフェスはルール化されない場合がある（図6右）ことに注意してください。これらの定義からヒントを得て、三角形のメッシュは平面に等尺に展開できる限り、三角形のメッシュは展開可能であるという通常概念から逸脱しており、代わりに離散的なルーリングも必要として

います。この状態は追加の規則性を提供し、上記の「しわくちゃの」動作を軽減するのに役立ちます。この定義は、セクション4の変分定式化の開始点を提供します。

3.1 Background and Notation



全体を通して、 V 、 E 、 F を使用して、単体表面 M （つまり、多様体三角形メッシュ）の頂点、エッジ、および面を示します。有向シンプレックスは、頂点インデックスの順序付きリストとして表されます。たとえば、 ijk は、頂点 $i, j, k \in V$ 、およびその境界に沿った有向エッジ ij, jk, ki を持つ面を示します。 $u_i = \sum_{ij \in E} v_{ij}$ という形式の式は、頂点 i に関連する量 u_i が、 i を含むすべてのエッジにわたって量 v_{ij} を合計することによって得られることを意味します。

す。 $St(i)$ を使用して、頂点 i のスター、つまり i を含むシンプレックスのコレクションを示します。ジオメトリは、単純なマップ

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ によって与えられ、各頂点 $i \in V$ で座標 f_i を補間します。このようなマップは、すべての三角形にゼロ以外の面積がある場合、**縮退ではありません**。局所的な単射である場合、または同等にすべての頂点のスターが埋め込まれている場合、つまり三角形が共有されたエッジでのみ交差する場合、それは**単純な没入**です[Cervone

1996, Lemma 2.2]。

後者の条件は前者よりも強力です。たとえば、三角形が縮退していなくても、マップ f が0の単射でない差し込み図を考えてみましょう。縮退していない三角形分割の場合、 N_{ijk} を使用して三角形 ijk の単位法線を表し、 θ_{jk} を三角形 ijk の角 i の内角に使用します。頂点 $i \in V$ の角度欠陥は合計 $\Omega_i := 2\pi - \sum_{ijk \in F} \theta_i^{jk}$ であり、 i の周りの小さな近傍におけるガウス曲率の積分に対応します。

3.2 Developability of Triangle Meshes

三角形メッシュが展開可能になるとはどういう意味ですか？スムーズな場合と同様に、自然な考え方は、**ガウス曲率をゼロにすること**です。

定義：すべての頂点 $i \in V$ での角度欠陥 Ω_i がゼロの場合、非縮退単体マップ $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は離散的に平坦化できます。

この条件により、各頂点の周りの角度が 2π になるため、メッシュを平面内で局所的に平坦化できます。それでも、平坦化だけでは、製造が容易な表面を特徴付けるのに十分ではありません。たとえば、図4（左下）は、ノイズの多い外観にもかかわらず、各頂点で角度の欠陥がまったくありません。この表面は、原理的には理想的なフラットシートから構成できますが、おそらくシートメタルなどの実際の物理的材料からは構成できません。さらに、**平坦化だけでは通常の収束は保証されません**。Thibertら[2005]が示しているように、平坦化可能なメッシュは、滑らかな可展面（表面積の不十分な近似など）に刻まれている場合でも、望ましくない動作を示すことがあります。

これらの観察は、より強力な条件の必要性を動機付けています。つまり、（滑らかな設定の場合と同様に）**可展面は単に平坦化可能であるだけでなく、変性や病理学的動作を回避するある種の規則性も備えている**必要があります。スムーズな設定では、 C^2 微分可能性によって規則性が提供されます。離散的な設定（最大で1つの弱い微分がある場合）では、この分析条件を幾何学的条件に置き換えます。

特に：

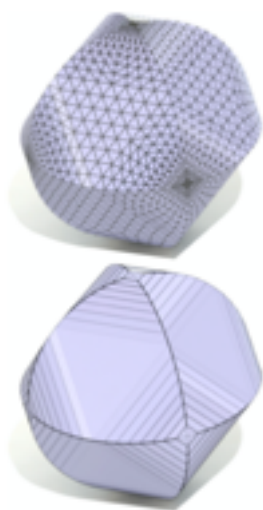
定義3.1：単純没入 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ の頂点スター $St(i)$ は、三角形 $ijk \in St(i)$ が、法線 N_{ijk} が一定である2つのエッジ接続領域に分割できる場合、ヒンジです。すべての頂点スターがヒンジの場合、 f は離散展開可能です。ヒンジではない頂点は、継ぎ目の頂点です。

図8は、ヒンジのプロトタイプ構成を示しています。2つの平面領域が1対の逆平行エッジで交差しています。特殊なケースはフラット構成（すべての頂点が共通の平面にある）であり、多くのパーティションを2つのフラット領域に許可します。ローカルに平坦化可能であることに加えて、平坦でない離散可展面は（命題A.2によって）離散的にルールド。

定義3.2：すべての頂点 $i \in V$ が、 ∂M 上のエンドポイント（線分の端点） i_0, i_n で、平行エッジ

$i_0i_1, i_1i_2, \dots, i_{n-1}i_n \in E$ のパスに含まれる場合、単純没入 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ は**離散ルールド**です。

（この定義わからん）



ただし、重要なことですが、すべての離散ルールドサーフェスが離散展開可能であるとは限りません。後者は、2つのルーリングの間の三角形がすべて共通の平面に含まれていることを意味します。したがって、定義3.1は、クワッドメッシュの離散展開可能性の標準的な概念と互換性があります[Liuら2006; ザウアー1970]：**二面角がゼロのエッジが削除された場合、残るのは平面四角形（PQ）ストリップのコレクションです**。たとえば、挿入図は展開可能な三角形分割を示しており、エッジが二面角に従ってシェーディングされ、PQメッシュが明らかになっています（図14と26もこのようにレンダリングされています）。

通常のリスト：

滑らかな可展面に刻まれたメッシュの通常のリストは、平面への展開（つまり、展開）などの他のプロパティのリストを保証します。[Morvan and Thibert 2006, Theorem 1]を参照してください。離散可展性は、自動的に適切な通常のリストの近似を意味するようです。たとえば、三角形分割のシーケンスの法線が、内接する滑らかな可展面の法線に近づく場合（ガウスマップ上の小さな円弧に近づく）、三角形分割は、定理3.3により、離散可展性に近づきます。逆に、一連の離散的な展開可能な三角形分割が（どこにも平坦で十分に規則的ではない）滑らかな可展面に内接されている場

合、そのルーリングは最終的に滑らかな面のルーリングに含まれ、通常の収束を保証すると主張することもできます（ただし、ここでは厳密な引数が必要です）。



図7：角度の欠陥を最小化だけで現像可能なシート（左）をノイズ除去すると、平坦化できるがノイズの多い表面（中央）につながりますが、離散可展性を奨励すると、滑らかな規則的な表面（右）が得られます。

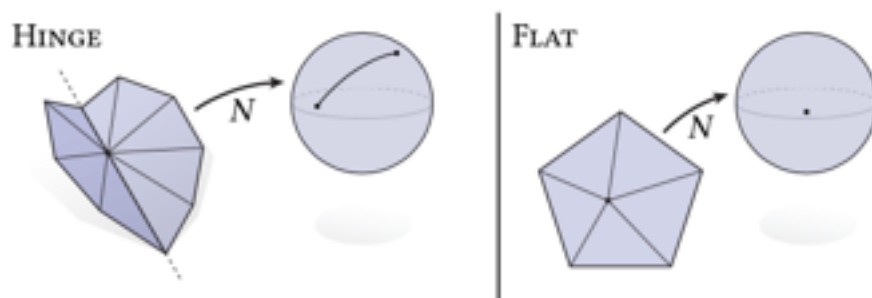


図8：頂点がヒンジのような場合か、平坦である場合、離散的に展開可能です。

3.3 Alternative Characterization

幾何学的に単純ですが、個別の可展性（定義3.1）の概念を直接最適化することは困難です。したがって、代替の特性評価を検討します。

定理3.3：

埋め込まれた頂点スター $St(i)$ は、すべての三角形の法線 N_{ijk} が共通の平面に含まれている場合にのみヒンジを形成します。

証明：

定義により、ヒンジには最大で2つの異なる法線があり、それらは常に共通の平面に含まれています。逆に、すべての法線が平面 P に含まれている場合、エッジ ij を共有する2つの異なる法線 $N_{ijk} \neq N_{ijl}$ の三角形の外積は、エッジベクトル $e_{ij} := f_j - f_i$ と P の法線 ν の両方に平行になります。

したがって、法線が3つ以上のエッジにわたって変化する場合、3つ以上のエッジは ν に平行になります。しかし、すべてのエッジは同じ頂点 i から発するため、そのような $St(i)$ を埋め込むこと

はできません。同様に、St (i) に2つの異なる法線がある場合、それらは2つのエッジ間でのみ異なる可能性があります。法線が1つしかない場合は、ちょうどいいです。

この結果はかなり驚くべきものです。すべての法線が共通の平面にあることを要求するだけで、それらはヒンジの2つの平面に対応する2つの異なる方向に「分岐」します。最初の条件（埋め込み可能性）は、図9に示すような退化したケースの種類を防ぐことにより、この分岐に役割を果たします。定理3.3の簡単な結果は、その**ガウスマップの最小幅がゼロの場合にのみ頂点がヒンジである**ということです。これは、変分定式化（セクション4.1）で活用する事実です。

コーナーケース：

図9に示す構成は、定義3.1をさらに理解するのに役立ちます。法線が同一平面上にあり、頂点スターが埋め込まれていないSpike、Needle、およびFinアプローチ構成。スムーズ設定のように、 f が（単純な）没入でなければならないという条件により、規則性が追加されます。DoubleCoverは、単に非縮退ではなく、没頭する必要性をさらに高めます。この構成には、ゼロ幅のガウスマップがありますが、局所的に単射ではないため、ヒンジにはなりません。

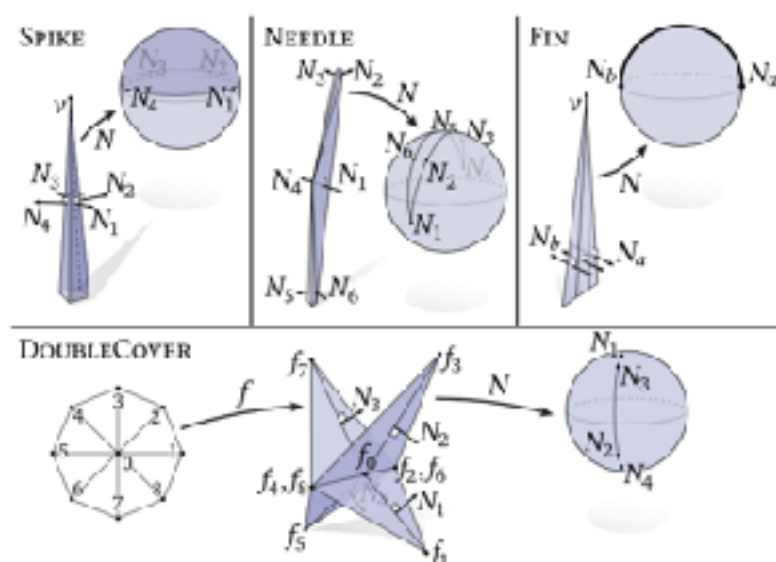


図9.滑らかな設定と同様に、表面を浸す必要があるため、上図のような縮退構成を回避できます。

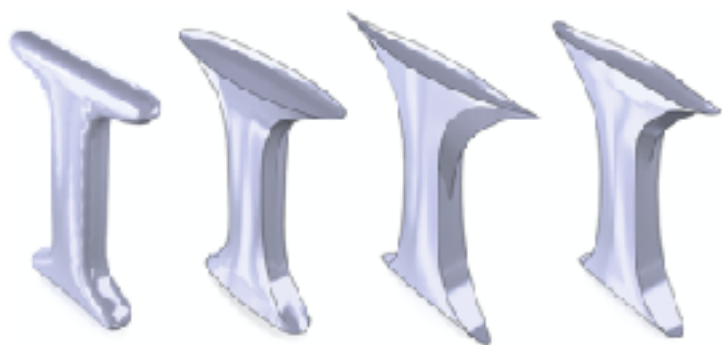


図10.与えられた表面（左）は、組み合わせエネルギー（左中央）または共分散エネルギー（中央右）を使用して区分的に展開可能な近似に向かって進化します。
共分散エネルギーを変更すると、鋭いスパイクの形成が減少します（右）。

4 DEVELOPABLE APPROXIMATION

離散可展性の定義（セクション3）は、**可展面の設計または近似を求めるアルゴリズムの開始点として使用できます**。ここでは、簡単な変分アプローチを考えます。各頂点の展開可能性を測定するエネルギーを定式化し、数値降下を適用します。他のアルゴリズムの開始点としてこの定義を使用することもできます。いくつかの魅力的なアイデアは、**形状空間探索の制約として離散展開可能性を使用すること**[Yangら2011]、または**滑らかな可展面からサンプリングされた点を補間する展開可能な三角形分割を求めること**です[ピーターネル2004; Thibertら2005]、ただし、ここではそれらの方向性を追求しません。

4.1 Energy

変分法の背後にある基本的な考え方は、各頂点のスター、つまり連続する三角形の法線によって作成された単位球上のポリゴンに関連付けられたガウス画像の幅にペナルティを課すことです。この幅を測定する正規の方法はありません。唯一の難しい要件は、ヒンジ頂点のエネルギーがゼロでなければならないことです。したがって、2つの可能性、つまり (i) 定義3.1の直接解釈に基づく単純だが計算コストが高い組み合わせエネルギー、および (ii) 三角形の法線の共分散を測定する定理3.3に基づくより安価なエネルギーを検討します。どちらかのエネルギーの勾配降下は、展開可能な設計に必要な主要な特性を示す進化をもたらします。経験的に、特定の三角形メッシュは、すべてのガウス曲率が集中している、継ぎ目の曲線のまばらなコレクションから離れて離散的に展開できる傾向があります（図22を参照）。興味深いことに、この振る舞いはスパース性を誘発する基準の使用から発生するのではなく、シームカーブがエネルギー的に重要ではないという単純な幾何学的事実（セクション4.1.3）から発生します。実際、このコンテキストでL1ノルムを使用すると、図11に示されているように、区分的に展開可能ではなく、区分的にフラットなサーフェスが生成されます。最後に、平坦な領域を離散的に支配する必要がないため、エッジのペアを逆平行にすることを明示的に推奨していません。実際、湾曲した部品を接続する平坦な領域では、逆平行のペアがない三角形分割が必要になる場合があります。



図11.エネルギーを最小化すると、所定の滑らかな表面（左）のガウス曲率がシームカーブのまばらなコレクション（中央）に集中する傾向があります。スパース性を誘発するL1ノルムを使用して同様の効果を実現すると、展開可能ではなく平坦な領域になります（右）。

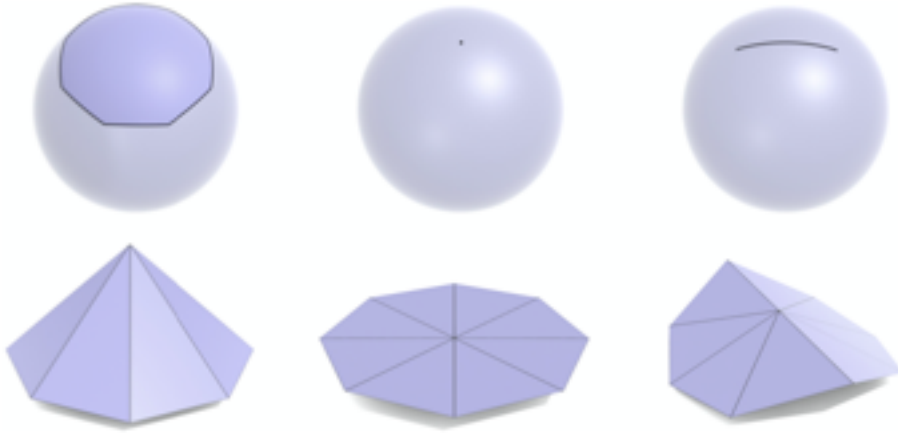


図12.下：単一の頂点（左）の場合、二乗角の欠陥を最小化するとフラットパッチ（中央）が生成されますが、エネルギー（ E_λ ）はヒンジ（右）を生成します。上：ガウスマップの下で頂点スターの画像。

4.1.1 Combinatorial Width（組み合わせ幅）

特定の頂点スター $St(i)$ の面を、（それぞれ）カーディナリティ n_1, n_2 の F 内の2つのエッジ接続領域

F_1, F_2 に分割すると仮定します。 $\bar{N}_p := \frac{1}{N_p} \sum_{ijk \in F_p} N_{ijk}$ を領域 F_p の三角形の法線 N_{ijk} の平均とすると、

パーティション $P := \{P_1, P_2\}$ がヒンジのように見える度合いは、各領域の法線の平均からの偏差によって定量化できる：

$$\pi(P) := \sum_{p=1,2} \frac{1}{n_p} \sum_{\sigma \in F_p} |N_\sigma - \bar{N}_p|^2 = \sum_{p=1,2} \frac{1}{n_p^2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in F_p} |N_{\sigma_1} - N_{\sigma_2}|^2 \quad (1)$$

ここで、 N_σ は三角形の単位法線 $\sigma \in F$ を表します。頂点 i は、 $\pi(P)$ がゼロである2分割 P が存在する場合に限り、ヒンジになります。 P_i を $St(i)$ のすべてのエッジ接続された2分割のセットを表す取ると、局所的エネルギー

$$\epsilon_i^P := \min_{P \in P_i} \pi(P) \quad (2)$$

が定義されます。

組み合わせエネルギー ϵ^P は、すべての頂点の ϵ_i^P の合計です。価数 k の頂点の場合、 $O(k^2)$ パーティションごとに $O(k^2)$ 項を合計する必要があるため、このエネルギーの評価にはコストがかかります。それにもかかわらず、これは頂点位置 f_i の区分的に区別可能な関数であり、セクション4.3で説明されているように、標準の劣勾配法によって最適化できます。

4.1.2 Covariance

または、定理3.3で与えられた特性を検討してください。これは、その三角形の法線がすべて共通の平面に含まれている場合にのみ、埋め込まれた頂点スター $St(i)$ がヒンジを形成することを示しています。したがって、頂点がどのようにヒンジに近いを定量化するために、最適な平面の単位法線 $u \in \mathbb{R}^3$ で法線の平均配置を測定できます。

$$\lambda_i := \min_{|u|=1} \sum_{ijk \in F} \theta_i^{jk} \langle u, N_{ijk} \rangle^2 \quad (3)$$

角度の重みは、同じ区分的線形表面の異なるテッセレーションを考慮した場合に、エネルギーが変化しないことを保証します。この量もスケール不変であることに注意してください。式3は固有値問題の変分形式にすぎないため、 λ_i は 3×3 正規共分散行列

$$A_i := \sum_{ijk \in F} \theta_i^{jk} N_{ijk} N_{ijk}^T \quad (4)$$

の最小固有値として表すこともできます。

正規共分散行列は、表面記述子[Berkmann and Caelli 1994]および2次ベースのメッシュ簡略化[Garland and Heckbert 1997]のコンテキストでも発生します。ここで、固有値が主曲率の2乗に関連していることが示されています。たとえば[Garland 1999, Section 4.4]。

この事実は、このエネルギーの振る舞いにいくつかの直感を提供します。たとえば、ガウス球では面積ではなく最小幅にペナルティを課すことに対応するため（図12を参照）、離散的なガウス曲率 Ω_i にペナルティを課すよりも、頂点スターの形状にあまり積極的な変更を加えません。

メッシュ全体の展開可能性は、 $\epsilon^\lambda := \sum_{i \in V} \lambda_i$ によって測定されます。エネルギー ϵ^P と同様に、唯一の自由度は頂点位置 f_i です。繰り返される固有値から離れて、このエネルギーは滑らかで、標準的な技術を使用して最小化することができます。主なコストは、固有値 λ_i とそれに関連する固有ベクトルの計算です（詳細については、セクション4.3を参照）。ただし、法線が共通の平面に近づくスパイクのような頂点を奨励する場合があります（図9）。簡単な対策は、球体の指数マップを介して本質的に同じエネルギーを測定することです。詳細については、付録B.5を参照してください。

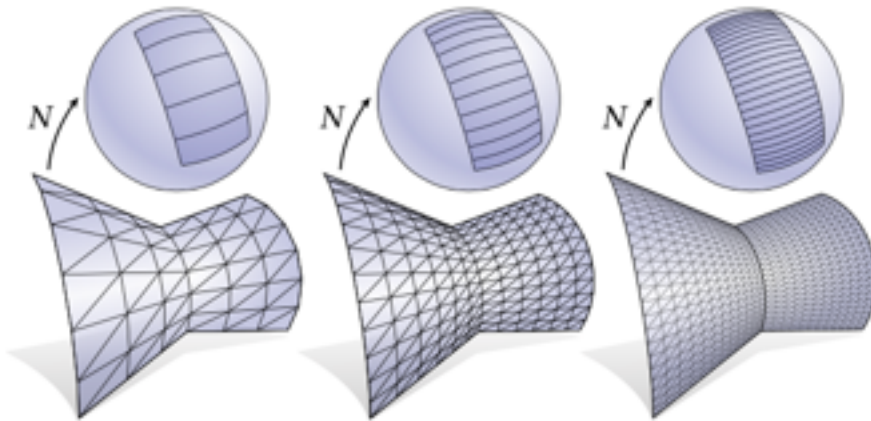


図13：区分的可展面に内接する離散展開可能三角形分割の場合、ガウスマップが非縮退である継ぎ目の頂点でのみエネルギーは非ゼロです。このエネルギーは、定期的な調整の下でゼロになります。

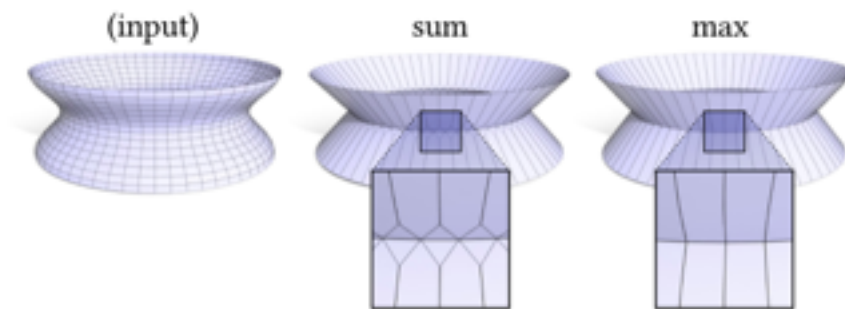
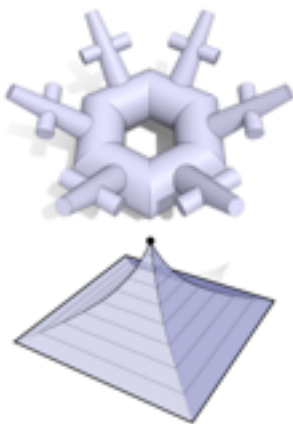


図14：共分散エネルギーを最小限にすると、入力（左）は区分的に可展面に向かって自然に押し出されますが、ルーリングは継ぎ目（中央）に沿って「V」字型に分岐する場合があります。合計を最大化で置き換えると、直線のルーリングが生成されます（右）。

4.1.3 Piecewise Developable Surfaces



エネルギー ϵ^P および ϵ^λ の興味深い振る舞いは、グローバルに展開可能な表面だけでなく、区分的な可展面も促進する傾向があることです。この動作は、図13に示されている通常の細分化シーケンスを検討することで理解できます。メッシュは、展開不可能なシームに沿って出会う1組の展開可能なピースに刻まれています。

これらのメッシュは継ぎ目から離れて展開できるため、継ぎ目頂点でのみエネルギーは非ゼロになります。ただし、 ϵ^P と ϵ^λ は、ガウス球上のポリゴンの最小幅の2乗を効果的に測定するので、このような継ぎ目によってもたらされるエネルギーは、通常の細分割の下でゼロになります。2乗された幅の合計は、合計のわずかな割合であると考

えてください。幅はほぼ一定です。その結果、多くの展開可能なピース（挿入図、上部）で構成されるサーフェスは、洗練の限界でゼロエネルギーに近づく可能性があります。いくつかの継ぎ目が交わる点（挿入図、下部）ではエネルギーは非ゼロになります。

4.1.4 Branching

2つの展開可能な要素が交わる継ぎ目で、両方のエネルギーが2つに分岐するルーリングを生成できます（図14、中央）。単純な例を図15に示します。分岐構成（左）と完全にルール化された構成（右）は、最小幅が等しいガウスイメージを生成します。ただし、 ϵ^P と $E\epsilon^P$ の両方が項の和を取るため、分岐構成ではエネルギーが低くなり、ポリゴン幅の平均的な概念が提供されます。合計を最大化に置き換えるだけでこの動作を回避できます。つまり、式1の $\pi(P)$ が

$$\pi^{max}(P) := \max_{x_{F_k} \in P} \max_{x_{N_1, N_2} \in F_k} (N_2 - N_1)^2 \quad (5)$$

になり、式3の目的が代わりに

$$\lambda_i^{max} := \min_{|u|=1} \max_{x_{ijk} \in F} \langle u, N_{ijk} \rangle^2 \quad (6)$$

になります（角度の重みは省略できるため、合計を考慮してください。）図15の場合、継ぎ目の頂点の2つの構成は同じエネルギーになり、メッシュの残りの頂点はクリーンなルーリングラインに向かって自由に展開できます。最適化にはコストがかかりますが、この戦略は、図14の右に示すように、よりきれいなルーリング作成するために使用できます。

トリプルポイント：

区分的な可展面では、シームは一般に3点で交わります。この観察は、価数3のヒンジ頂点がフラットでなければならないという事実（命題A.3）とよく一致しています。このような頂点を強制的に展開可能にするのではなく、単純にエネルギーへの寄与を省略して、それらがトリプルポイントとして機能できるようにします。図16に一例を示します。

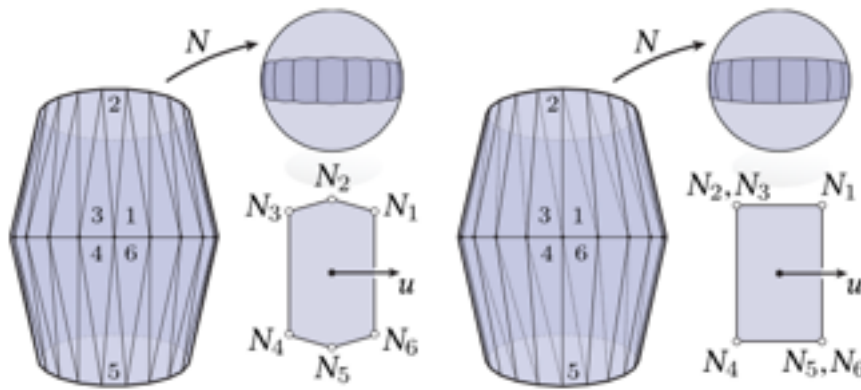


図15.平面性からの平均偏差を測定すると、2つの展開可能な要素が交わる継ぎ目の頂点（左）で「分岐」動作が発生する可能性があります。法線との最低のアライメントを最小限に抑えると、真っ直ぐな裁定が促されます（右）。

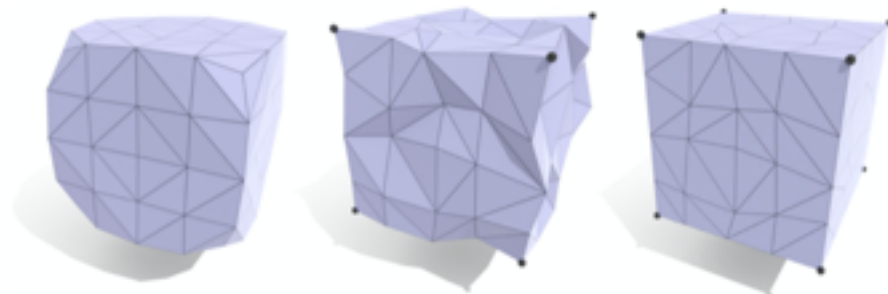
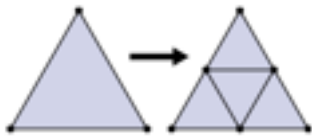


図16. Valence-3頂点は、3つの継ぎ目が交わる点で発生します。ヒンジのようにするためには、そのような頂点は平坦でなければならない、立方体のコーナーなどのフィーチャが丸められます（左）。したがって、全体のエネルギーから価数3の頂点の寄与を省略し、たとえばノイズの多い立方体（中央）を区分的に展開可能な立方体（右）にすることができます。

4.2 Regularity



洗練の限界では、縫い目はエネルギーに寄与しません（セクション 4.1.3）。ただし、有限メッシュの場合、シーム頂点のエネルギーはゼロではありません。これらのカーブを明示的に検出または抽出することは何もしませんが、このエネルギーを最小化すると、シームカーブの自然な平滑化が実現します（図17を参照）。継ぎ目の領域がゼロになるとエネルギーの大きさが小さくなるため、メッシュの長さスケールを使用して、正則化の度合いを制御できます。最初に、初期の粗いメッシュのエネルギーを最小化して、基本形状を取得します。エネルギーグラディエントのノルムが特定のしきい値を下回ると（または全体の設計が単純に満足できるものになると）、すべての三角形（挿入図を参照）に通常の4-1サブディビジョンを適用し、最小化を続けて継ぎ目を洗練し、展開性を向上させます。実際には、かなり粗いメッシュで開始する傾向があり、2ラウンドまたは3ラウンド以下のサブディビジョンを使用します。たとえば図1では、約1kの三角形のメッシュから始めて、2回細分割します。顔の輪郭の自然な平滑化に注目してください。

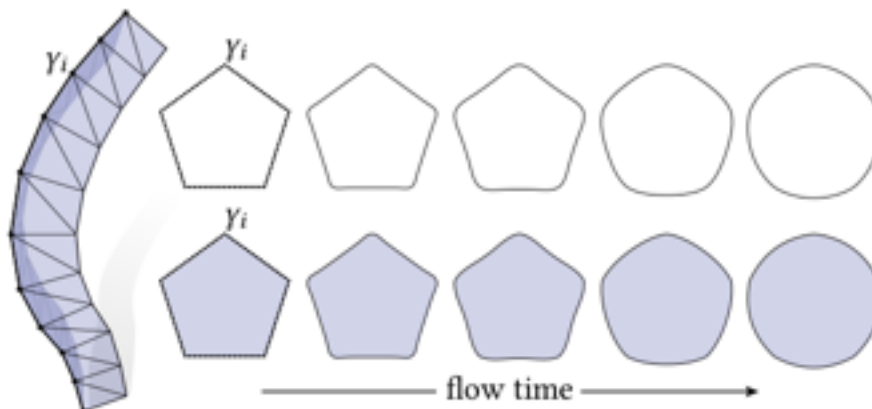


図17：エネルギーを最小化すると、シームカーブが自動的に滑らかになります。平面曲率フローと比較するために、所定の平面曲線の周りにサーフェスメッシュを作成します（左）。このメッシュで、平面（上）の標準的な弾性曲線フローとほぼ同じ進化（下）が得られます。

4.3 Numerical Optimization

エネルギーの最小化は、滑らかでない最適化のための標準的な数値手法を介して実行できます。**勾配**の明示的な式は、付録Bに記載されています。さまざまな方法で実験を行ったところ、LewisとOverton [2013]の**直線探索を使用したL-BFGSが最良の結果**をもたらすことがわかりました。基本的な実装を稼働させるには、Armijo-Wolfe直線探索で標準（サブ）勾配降下法を使用することもできます[Nocedal and Wright 2006、第3.1章]。実際には、小さな内角が直線探索のパフォーマンスに悪影響を及ぼす可能性があることもわかりました。**2つの小さな角度を持つ三角形**

の場合、エッジフリップを実行します。小さな角度が1つしかない三角形の場合は、エッジの折りたたみを実行するだけです（挿入図を参照）。それ以外の場合は、再メッシュは行いません。すべての計算は倍精度で実行されました。エネルギー e^2 に対して、収束を達成するには正確な3×3固有ソルバー[Kopp 2008]が必要であることがわかりました。

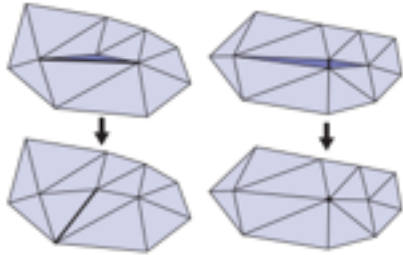


図18.数値の安定性を向上させるために、小さな角度で三角形を反転（左）または縮小（右）します。それ以外の場合は、展開性を促進するための特別な再メッシュは行いません。

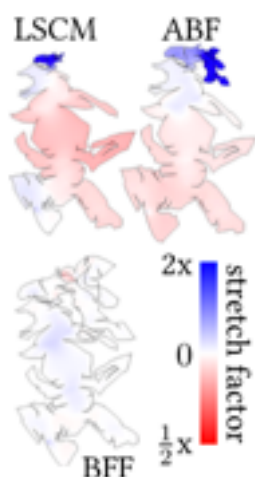


図19：表面をパッチに分割しないため、それらをカットして平坦化して1つの連続したピースにすることができます（左上）。下：小さな「クラック（ヒビ）」を接着すると、さらに優れたレイアウトが得られます。（ほとんどが白色の場合は、平坦化によってメトリックの歪みが実質的にゼロになることを示します。）

4.4 Cutting and Flattening

最小化中に、どの頂点が展開可能で、どの頂点が継ぎ目であるかを識別する必要はありません。ただし、製造またはその後の処理のために、モデルを明示的に展開可能な部分にカットしたい場

合があります（図19のように）。単純な自動戦略を使用します。最初にユーザー指定の許容誤差 $\varepsilon > 0$ を超えるエネルギーを持つ頂点を特定し、次にEricksonおよびHar-Peled [2004]の方法でそのようなすべての頂点を通過するカットを計算します（球トポロジのサーフェスの場合）、最小限のスパンニングツリー）。許容値は、材料の剛性の非常に大まかなプロキシと見なすことができます。膜の剛性が強い材料（紙など）は、伸ばしやすい材料（革など）よりも非平坦な頂点を積極的に切断する必要があります。



美しく魅力的なカットを得るために、エッジの重みを (i) 長さ と (ii) エッジ方向と各エンドポイントでの行列 A_i の小さい固有ベクトルとの間の内積の線形積に設定します。これにより、カットを主方向に合わせるように奨励します（ただし、そのようなウェイトは平坦化に厳密には必要ありません）。切断面にはガウス曲率がほとんどないため、コンフォーマルな平面化は、原則として平面にほぼ等尺のマップを生成するはずですが。ただし、実際には、最小二乗コンフォーマルマップ（LSCM）または角度ベースの平坦化（ABF）などの方法では、薄い領域で接続された部分をほとんどペナルティなしで個別にスケーリングできるため、大きな領域の歪み（挿入図を参照）が生成されます。代わりに、境界優先平坦化（BFF）アルゴリズム[Sawhney and Crane 2017]を使用します。これにより、境界に沿って等尺性を適用できます。図20は、カットに対する

公差 ε の影響を示し、時間の経過とともに単純なカットが得られることを示しています。すべての図で、赤と青のスケールで示される、平坦化の対数等角係数を介してスケールの歪みを定量化します。実際には、パラメータ空間の小さな「クラック」（最終的なレイアウトにはほとんど影響しない）を接着し、平坦化を繰り返します（図19の下を参照）。自動ツールを代わりに使用することもできますが（図19、右上のように）、平坦化を手動でセグメント化することにより、グローバルな重複を回避できます[Sorkineら2002]。今後の作業で興味深い質問は、おそらく自動テクスチャチャート化に関する最近のアイデアを使用して、グローバルな重複を自動的に回避できるかどうかです[Poranneら2017]。

4.5 Discussion

経験的に、図10に示すように、エネルギー、表面テッセレーション、または数値降下戦略のさまざまな選択が、結果として得られる区分的に展開可能な近似に影響を与えます。この事実は、問題自体の不適切な性質を考慮しても、まったく驚くべきことではありません。**一般に、展開可能な部分で滑らかな表面を近似する明確な「最良の」方法はありません。**図2に示されているように、この効果は球形に近い領域（ κ_1 が κ_2 に近い）で特に顕著であり、ルーリングの明確な優先方向はありません。したがって、特に初期段階では、メッシュとエネルギーの選択が最終設計に大きな影響を与えます。より細かいレベルのテッセレーションでは、すべてのエネルギーが非常に類似した動作をする傾向があります。

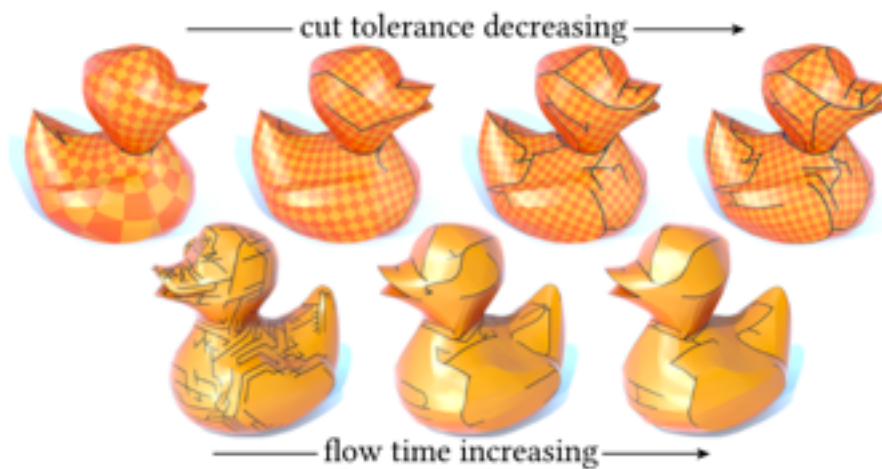


図20.上段：カット許容差 ε を大きくすると、次第に硬い材料に対応できます。ここで $\varepsilon = .01$ 、 $.005$ 、 $.002$ 、 $.001$ を設定すると、平均スケール歪みが2.4、.09、.006、.0004、またはそれぞれ徐々に低くなります。（チェッカーボードパターンによっても示されます）。
下の列：固定公差 ε の場合、時間の経過とともにカットが短くなります。

5 RESULTS

ここでは、数値実験を実行し、表面近似と開発可能な設計への予備的なアプリケーションを探索します（セクション5.2）。また、製造に向けた簡単な前向きな調査も行います（セクション5.3および5.4）。

5.1 Validation

いくつかの実験は、離散的な展開可能性の最適化が期待される動作することを示しています。図22は、曲率がシームに集中し、他の場所では高度に平坦化できることを示しています（図19を参照）。図7は、二乗角の欠陥 Ω （すなわち、離散ガウス曲率）を最小化するだけで、完全に平坦化できるが、紙のように非常に「しわくちゃ」になっている表面を生成することを確認しています。図17は、4.2で説明したように、継ぎ目が自動的に平滑化されることを示しています。図2は、多くの表面（球など）に対して、明確な「最良の」区分的に展開可能な近似がない場合があることを強調しています。代わりに、重要な幾何学的特徴を大まかに示唆する最初の三角形分割を選択することにより、解を望ましい結果に導くことができます。

図26は、すでに展開可能に近いサーフェスに対するテッセレーションの影響を示しています。ここで、共分散エネルギー $\varepsilon \lambda$ を最小化します。前処理は実行されず、制約や投影はメッシュを初期表面に近づけません。これらの単純な例では、テッセレーションは全体的な形状にほとんど影響しませんが、それでもルーリングのパラメーター化を促進します。メッシュの選択はルーリン

グの数に影響することにも注意してください。たとえば、中央の円錐の上部境界コンポーネントの頂点は下部よりはるかに少ない—（命題A.2により）ルーリングは境界に端点を持つ必要があるため、すべての下部境界頂点を通過するルーリングのある離散的な可展面は存在できません。同様の理由で、「細かい」領域のすべての頂点が独自の裁定に属することができるとは限らないため、局所的な適応性はほとんど価値がありません。

5.2 Developable Designs

デジタル製造における長年の課題は、高品質の規則的な展開可能な部品による一般的な曲面の自動近似です。私たちの方法は、このようなパイプラインの最初の段階であり、非構造化メッシュを1つ以上の区分的に展開可能な設計に適用します。より完全なパイプラインは、たとえば、展開可能なスプラインのクリーンなネットワークへの変換を必要とする場合があります（Tangら[2016]で検討）、これにより、円筒フランクフライス加工のツールパス計画が容易になります[Chu and Chen 2005]。図1、22、および21に示すモデルを含む、さまざまなモデルでメソッドを実行しました。

アルゴリズムのトップダウンの説明は次のとおりです。私たちのアルゴリズムへの入力は、最も一般的には、ターゲットサーフェスの粗いメッシュであり、粗面化（以下で説明）を介して、または粗いサブディビジョンケージのモデリングに似た粗いターゲットデザインを「スケッチアウト」することによって取得されます。この初期メッシュを前提として、勾配が十分に小さくなるまで、または大まかな形状に満足するまで、エネルギー最小化（セクション4.3）を実行します。次に、通常の4-1サブディビジョン（セクション4.2）を適用し、細かいメッシュの品質に満足するまでこのプロセスを繰り返します。精緻化ステップは現在、設計プロセスの一部である美的判断に基づいて「手動」で実行されています。勾配のノルムに基づいて自動調整を実装することもできます。

例を図23に示します。各モデルは、基本的な設計意図を捉えていますが、ユーザーが元々考えていなかった設計の可能性も示唆しています。与えられたサーフェスにはさまざまな区分的に展開可能な近似があるため、入力メッシュの選択が最終結果に影響します。この効果は粗いメッシュで最も顕著で、異なるテッセレーションがグローバルジオメトリに大きな影響を与える可能性があります（図27）。より細かいメッシュの場合、それらは効果的に異なるパラメーター化として機能し、それほど重要ではない幾何学的効果があります（図26）。図3の右端、10、21、22、23、25、24の大まかな入力を取得するために、三角対称性と外部配列のフィールドを使用して、Jakobら[2015]の無料のメッシュツールを実行しました。このツールは均一な要素サイズを目的としているため、図21の左側でウィルモアフロア[Bergouら2006]も実行して、スイングアームの前面にある細いハンドルをキャプチャしました。

図10に示すように、エネルギーが異なれば、ソリューションも異なります。図1、2、25には組み合わせエネルギー E_P を、図11の中央7には共分散エネルギー E_λ を使用しました。図20、21、および22では、付録B.5.1で説明されているこのエネルギーの固有バージョンを使用しました。図23および24では、粗い段階で E_P を使用し、細かい段階で E_λ を使用しました。異なるエネルギーを使用して設計を微調整することもできますが、一般的に、エネルギーの1つ（たとえば、 E_λ ）を使用するだけで、ほとんどのモデルで妥当なデフォルト設計が生成されます。

すべての例のランタイムは、32GBのRAMを搭載した3.4GHz Intel Core i7ラップトップで数秒から数分程度でした。マルチスレッドは使用しませんでした。勾配計算は簡単に並列化できました。特に初期の粗い段階では、メッシュは急速に進化して、最終的な設計によく似た形状になります。特にL-BFGSと適切なラインサーチ（セクション4.3）を使用すると、その後の調整に数分しかかかりません。



図 2 1：ここでは、与えられた形状（各画像の左端）を、シームカーブから離れて展開可能なサーフェスで近似します。

表面を個々の部分に分割する方法とは異なり、縫い目はデザインに有機的に溶け込むことができます。

左から右：トポロジー最適化によって生成されたスイングアームモデル（提供：Autodesk）。ドリルのハンドル。

ギターのボディは、実際のギターデザインに現れる特徴を自然に生み出します（右下）。

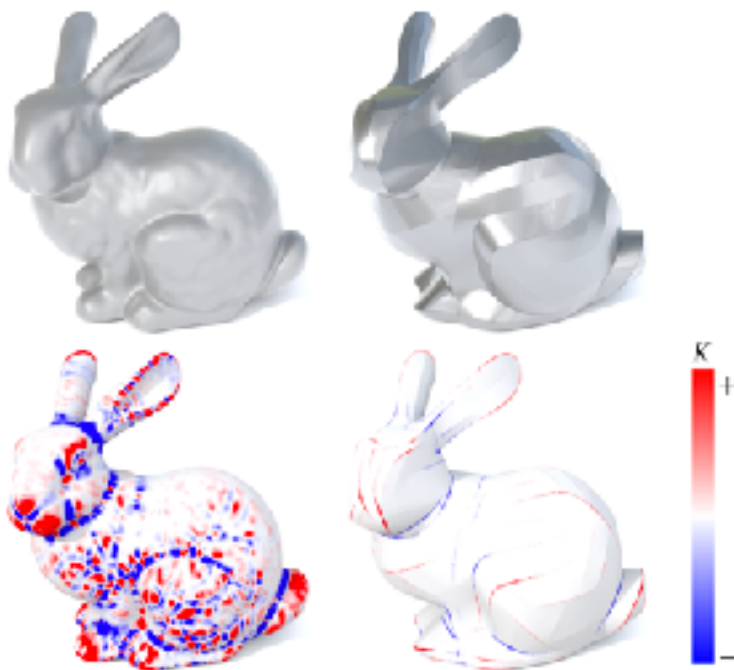


図2 2：スタンフォードのバニー（上の行）では、ガウスの曲率 K が曲線のまばらなコレクション（下の行）に集中しています。

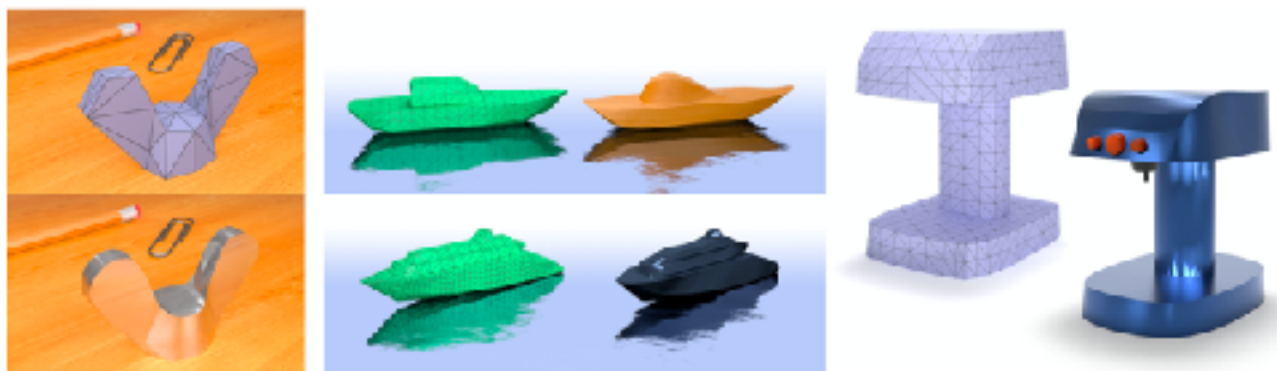


図2 3：従来の形状近似のタスクを超えて、この方法では、粗いメッシュから始めて、有機的なフローラインで区分的に展開可能な表面に向けて最適化/調整することにより、展開可能な形状の探索が可能になります。（各図の入力メッシュはワイヤーフレームで表示されています。）

5.3 Paper Craft

物理的な実現可能性の簡単なテストとして、図24に示すように、コンシューマーカッティングプロッター（シルエットCAMEO）を使用して区分的に展開可能な表面を作成しました。ここでは、平坦化されたドメインでの重複を避けるために、追加のカットを行う必要がありました。将来の作業の興味深い方向は、湾曲した折り目を持つ表面に向けて表面を最適化することです[Kilianら2008]。これにより、1枚のシートから形成できるようになります。ここでの1つの可能性は、（EPまたは $E\lambda$ ではなく）湾曲した折り目に沿った角度欠陥 Ω_i のみにペナルティを課すことです。

5.4 Flank Milling

私たちの方法では、より大きなパイプラインで小さなピースを1つだけ提供しますが、フランクフライス加工による設計がどのように容易になるかを垣間見ることができます。切削工具の先端のみを使用して材料を切り出す従来のポイントフライス加工とは異なり、フランクフライス加工は表面に沿って円柱状のビットをスイープし、より高速な切削と高品質の表面を可能にします[Harikら2013]。ツールパスに沿ったビットの面外ねじれが原因で、材料が誤って追加されたり、製造された部品に差し引かれたりしないように、区分的に展開可能な設計から始めることができます。一般的な方法は、最初にバルクニアネットシェイプをキャストまたは3Dプリントし（それにより過剰な無駄を避けます）、次にフランクフライス加工を使用して、正確に接触する必要がある正確な合わせ面、ねじ山などを取得します。図25このようなプロセスのプロトタイプをプロトタイプで開始し、続いてポリゴンメッシュエディターでPQストリップを手動で抽出し、その後、Autodesk Fusion 360でツールパスを生成します。ミリングは、ポケットNC V1を使用して行われました。5軸ミル。個々の輪郭は簡単に加工できますが、グローバルスプラインネットワーク

を抽出し、グローバルに実行可能なツールパスを計画することは、今後の作業にとって興味深い課題です。



図24.物理的実現可能性の簡単なテスト：面の初期メッシュ（左）を最適化して区分的に展開可能な近似（中央）を取得し、それを紙から切り取り、接着し、スプレーペイントして物理モデル（右）。

6 LIMITATIONS AND FUTURE WORK

理論的側面では、適切な問題として「最良の」区分的に展開可能な近似の探索をどのように定式化するかという問題がまだあります。単に（たとえば、ハウスドルフの意味で）最も近い近似を求めるだけでは意味がありません。与えられた表面に任意に近い「しわくちの」解を見つけることができるからです。変分的アプローチは、そのような質問について考えるための魅力的なフレームワークを提供します。実際、この研究は、滑らかなエネルギー

$$\epsilon(f) := \int_M \kappa_1^2 dA$$

の勾配フローから発想を得ました。これは、表面 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ のより小さい（大きさの）主曲率 κ_1 にペナルティを課します。したがって、この滑らかなエネルギーと私たちの離散変分定式化との関係を探ることは、将来の作業にとって自然なトピックです。

より実際のレベルでは、現在の最適化戦略では、かなり単純なメッシュを除いて、完全に真っ直ぐなルーリングは決定されません。この問題を理解すると、より洗練された再メッシュを組み込むことにより、よりクリーンなPQ構造のメッシュが得られる可能性があります。より広義には、この方法は完全に自動化されたパイプラインの最初のステップにすぎず、展開可能な近似、クリーンな展開可能なピース（PQストリップやスプライン展開可能なアイテムなど）への分解、およびロール曲げまたはフランクフライス。フライス加工の場合、完全なソリューションでは、おそらくジオメトリとツールパスの共同最適化によって、衝突回避などの機械的制約に対応する

必要があります。一般的な三角形メッシュの離散的な可展性の概念と変分的な視点が、可展な表面処理、近似、および設計における将来の作業のための肥沃な土壌を提供することを期待しています。

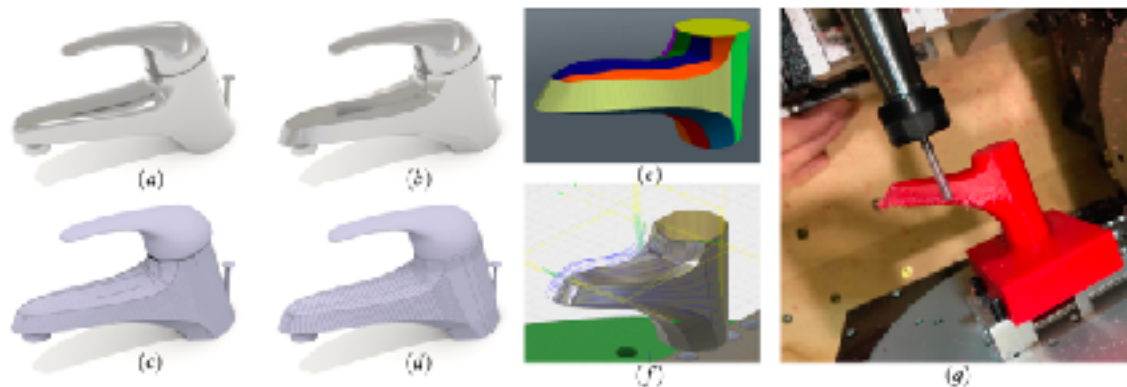


図25.フランクフライス加工による製造のプロトタイプ。元々滑らかな蛇口のデザイン (a) は、区分的な可展面 (b) にかなり明確なシームカーブとルーリング (c) があり、ポリゴンメッシュエディターで手動で抽出 (d) され、PQストリップ (e) に分割されます。これらのストリップは、NURBSパッチを介して半自動的にツールパス (f) に変換されます。次に、最終的な部品の輪郭は、趣味の5軸CNCミル (g) を使用して側面フライス加工されます。

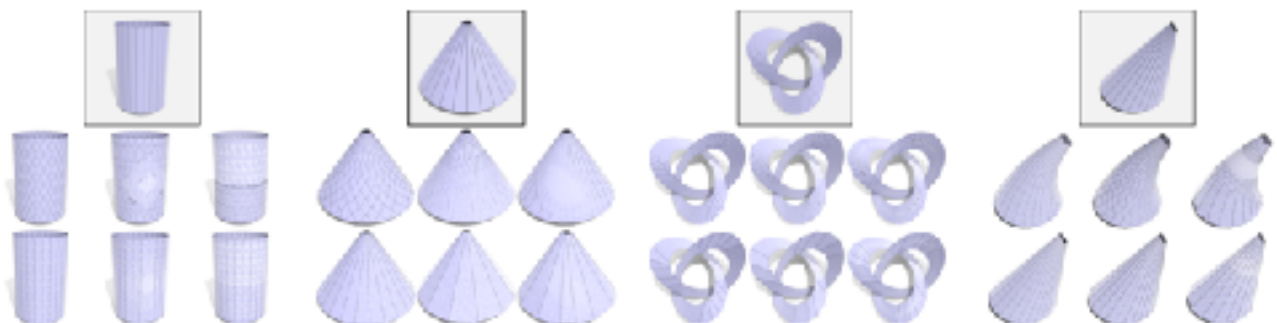


図26.ここでは、展開可能（左端、中央左、中央右）またはほとんど展開可能（右端）の表面に対するテッセレーションの影響を調べます。どちらの場合も、中央の行は入力を示し、下の行は最適化の結果を示しています。参照用に、滑らかな可展面が上部に表示されています。暗いエッジは大きな二面角を示し、白いエッジはゼロの二面角を示します。

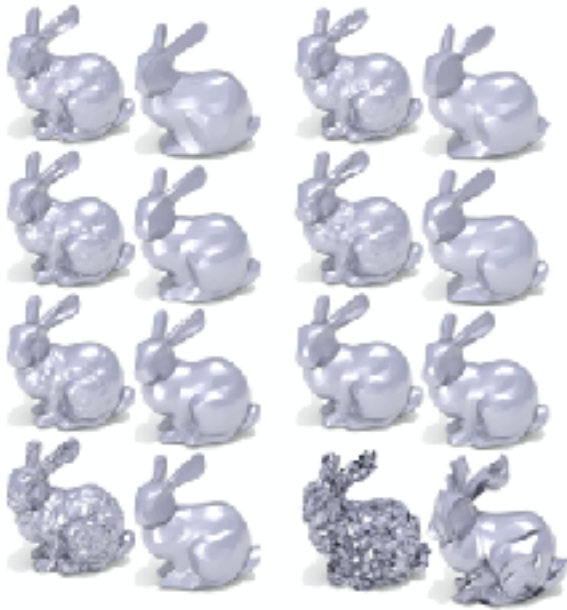


図27.バルク形状は通常入力に非常に近いままで
すが、初期メッシュが異なると区分的に展開可能
な近似が異なります。全体として、細かいメッ
シュはより多くのピースによってより近い近似を
生成する傾向があります。主曲率と大まかに位置
合わせされたエッジは、幾何学的特徴をよりよく
保持する傾向があります。通常、中程度のノイズ
は平滑化されます。大量のノイズは全体的な形状
に影響を与える可能性があります。

A PROPERTIES OF DISCRETE DEVELOPABLE TRIANGULATIONS

定義3.1で説明したように、 $St(i)$ が埋め込まれ、その三角形が2つのエッジで接続された平坦な領域に分割できる場合、頂点 i はヒンジです。すべての三角形の法線が平行である場合、平面です。

命題A.1 :

内部頂点 i が非平坦ヒンジ頂点である場合、それは1対の逆平行エッジ $ia, ib \in St(i)$ に含まれます。

証明 :

$N1, N2$ を $St(i)$ の2つの平坦領域の法線とする。これらの領域はエッジ接続されているため、両方の法線を共有する2つのエッジ ia, ib が存在します。 i はフラットではないので、法線は明確でなければなりません($N1 \neq N2$)。埋め込まれているため、逆平行($N1 \neq N2$)であってはなりません。したがって、外積 $N1 \times N2 = -N2 \times N1$ は、2つのエッジ ia, ib に平行な非ゼロベクトルを生成します。

命題A.2 :

平らな頂点のない離散的な展開可能なイマージョン f を考えます。次に、 f は離散ルールドです。

証明 :

命題A.1により、すべての内部頂点 i には一対の逆平行エッジ ia, ib が必要です。 $N1, N2$ をエッジの方向を決定する個別の法線とします。 $St(a)$ と $St(b)$ はそれぞれ、法線 $N1, N2$ と1組の三角形を共有するため、同じ線に沿った1組の逆平行エッジ(境界頂点の場合は1つのエッジ)が含まれます。

命題A.3 :

価数3のヒンジ頂点 $i \in V$ は必ず平坦です。

証明：

i が平坦でなかったとしましょう。次に、命題A.1によって、1対の逆平行エッジ va 、 vb ができます。ただし、 i には価数3があるため、 va と vb は同じ三角形のエッジである必要があります。つまり、 i 、 a 、 b は同一線上にあります。したがって、 $St(i)$ は埋め込まれていないため、ヒンジではありません。

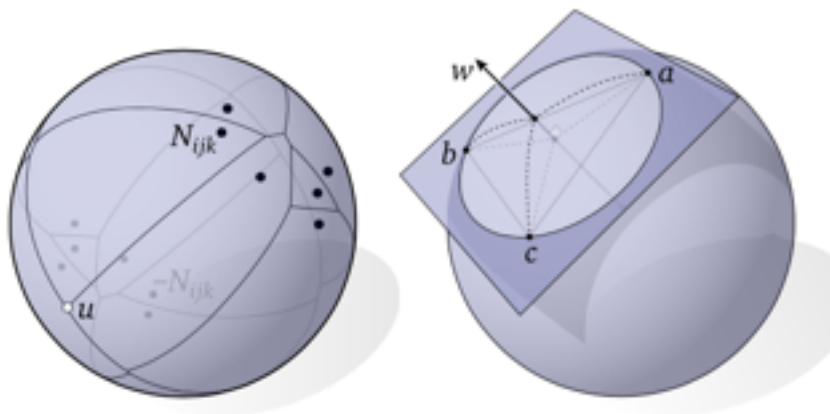


図 28：最大共分散エネルギーは、球形ボロノイ図（左）の頂点で目的？(Objective)をサンプリングすることで簡単に評価できます。これは、単位球（右）上の3点によって形成される三角形の単位法線です。

B ENERGY AND GRADIENT EVALUATION

このセクションでは、セクション4.1で説明したエネルギーとその勾配を評価するための明示的な式を示します。

B.1 Derivatives of Basic Quantities

私たちのエネルギーは、三角形の領域 A_{ijk} 、三角形の法線 N_{ijk} 、および内角 θ_{jki} にのみ依存します。これらは、位置 f に関して次の勾配を持っています。

(7)、(8)、(9)。これらの量は頂点 i 、 j 、 k の位置にのみ依存するため、他の頂点に関する勾配はゼロです。

B.2 Combinatorial Energy

頂点 i に関連付けられた組み合わせエネルギー E_iP の勾配を評価するには、最初に $\pi(P)$ を最小化するパーティション P を特定します（式1）。頂点 $p \in V$ の位置 f_p に関するこの合計の単一项の勾配は、 ∇f_p で表すことができます。ここで、通常の勾配は式8で与えられます。エネルギー勾配は、このようなすべての項の合計です。等しいエネルギーの2つ以上のパーティションがある場合、それらのいずれかの勾配は、区分的平滑エネルギー E_λ の部分勾配になります。これは、セクショ

ン4.3で概説されている1次降下戦略に依然として適しています。分岐を回避するために（セクション4.1.4）、任意の最大項の勾配は、式5の部分勾配を提供します。

B.3 Covariance Energy（共分散エネルギー）

すべての頂点 $i \in V$ で、 λ を、固有値ベクトル x に関する行列 $A_i := \sum_{ijk \in F} \theta_i^{jk} N_{ijk} N_i^T jk$ の固有値とする。そのとき、すべての頂点 $p \in V$ の位置 $f_p \in \mathbb{R}^3$ に関する λ の勾配は、

(10)

ここで、チェインルールとその固有値 $\nabla_A \lambda = x x^T$ を単純に適用する。 $\nabla_{f_p} N_{ijk}, \nabla_{f_p} \theta_i^{jk}$ の表現はそれぞれ式8と9で与えられる。

B.4 Maximal Covariance（最大共分散）

エネルギー：式6で与えられたエネルギーを評価するために、

$$\phi(u) := \max_{ijk \in F} \langle u, N_{ijk} \rangle^2$$

この関数は、単位法線 N_{ijk} およびそれらの対掌体- N_{ijk} に関連付けられた球形ボロノイセル上で区分的に滑らかです（図28の左を参照）。したがって、その最小値は、球面ボロノイ図の頂点にあります。これは、いくつかのサイトのトリプルの球面重心になります。 ϕ はボロノイ頂点で最小値を達成するため、すべてのトリプルに対して ϕ を最小化すると、必然的に最適値 λ_{\max} が得られます。パフォーマンスと数値の安定性の観点から、ボロノイ図を明示的に作成するよりも、すべてのトリプルについて単に ϕ を評価するほうが魅力的です。特に、異なるトリプルの数は通常非常に少ないためです。3つの単位ベクトル a, b, c の球の重心を計算するには、球の三角形の測地線外心が、三角形の頂点を含む平面の単位法線と一致することに注意してください（図28、右）。サイトの位置は、したがって、 $w = (b-a) \times (c-a) / |(b-a) \times (c-a)|$ です。ゼロ分母を回避するために、冗長なサイトを単に省略します。

サブグラディエント

ϕ は凸微分可能関数のコレクションの最大値であるため、任意の最大化項の勾配は、最適化に使用できる部分勾配を提供します（セクション4.3）。特に、 v を ϕ を最小化する単位ベクトルとし、 M を最大化する法線とし、 $a, b, c \in F$ を、その法線が v を定義する三角形のトリプルとする。次に、頂点 $p \in V$ の位置 f_p に関する部分勾配 $\nabla \lambda_{\max}$ は、 $2 \langle v, M \rangle$ として表すことができます。ここで、 N_σ は三角形の単位法線 $\sigma \in F$ であり、 AM と Ap は、法線 M および p （それぞれ）、 A_{abc} は頂点 a, b, c を持つ三角形のユークリッド領域、 e_p は法線 M を持つ三角形の頂点 p の反対側のエッジベクトル（または p がこの三角形に含まれていない場合はゼロ）、および $e_\sigma | p$ は、三角形 σ の頂点 p の両端です。

B.5 Intrinsic Width（固有の幅）

エネルギー：

エネルギー e^A （セクション4.1）は、外部の単位ベクトル $N_{ijk} \in R^3$ の共分散を介して球上のポリゴンの幅を定量化します。これは、大きなポリゴンのアーティファクト（スパイクなど）につながる可能性があります。幅の本質的な概念は、代わりにこの多角形を多角形の中心にある指数マップで表すことによって得られます（図29）。特に、 N_i が頂点 $i \in V$ （つまり、 $\sum_{ijk \in F} A_{ijk} N_{ijk}$ 方向の単位ベクトル）での面積重み付き頂点法線であり、 ϕ_i が N_i から $St(i)$ の三角形の法線 N_{ijk} までの角度である場合、三角形法線自体は、いくつかの単位正接ベクトル v に対して $N_{ijk} = \exp_{N_i}(\phi_i^{jk} v_i^{jk})$ として表すことができます。ここで、 \exp_p は、2球 S^2 上の点 p での指数マップを示します（図29を参照）。より明確には、このベクトルは、 N_{ijk} を N_i の平面に投影し、正規化することで取得できます：

$$\tilde{v}_i^{jk} := N_{ijk} - \langle N_{ijk}, N_i \rangle N_i, v_i^{jk} := \tilde{v}_i^{jk} / |\tilde{v}_i^{jk}|$$

$\tilde{N}_i^{jk} := \phi_i^{jk} v_i^{jk}$ とし、球面ポリゴンの幅が、式4をミラーリングする 2×2 行列 $\tilde{A}_i := \sum_{ijk \in F} \theta_i^{jk} \tilde{N}_i^{jk} (\tilde{N}_i^{jk})^T$ の最小固有値を経由して定量化できる。

勾配：

N_i を頂点 $i \in V$ における面積加重法線とし、 $v_i^{jk} := N_i \hat{\times} N_{ijk}, \mu_i := v_i^{jk} \hat{\times} N_i, \mu_f := v_i^{jk} \hat{\times} N_{ijk}$ とします。ここで、 $u \hat{\times} v := u \times v / |u \times v|$ は正規化された外積を表します。次に、 V の頂点 p の位置 f_p に対する \tilde{N}_i^{jk} の勾配は、

（省略）（11）

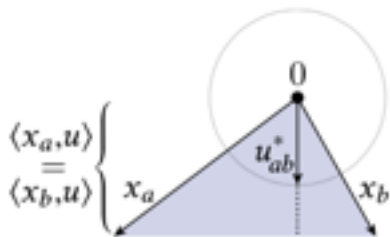
として表すことができます。 N_i と N_{ijk} の勾配は、付録B.1の式で表すことができます。全体的なエネルギーの勾配は、式10の \tilde{N}_i^{jk} を N_{ijk} に置き換えることで表すことができます。

B.5.1 ブランチング

エネルギー：

固有のケースでは、 n 点 $\tilde{N} \in \mathbb{R}^2$ の凸包の最小幅にペナルティを課すことで、セクション4.1.4で説明されている分岐アーティファクトを回避できます。この幅は、凸包の構築を含め、キャリパーを $O(n \log n)$ 時間で回転させる方法で計算できます。ただし、 n は常に非常に小さい（平均で約6）ため、より単純な実装は、ベクトル $x_a = \pm \tilde{N}_i^{jk}, x_b := \pm \tilde{N}_i^{pq}$ のすべての異なるペアを列挙して、エネルギーXXXXXを最小限に抑えることです。

そのようなペアの最小化ベクトル u_{ab}^* は、三角形の高度



$(0, x_a, x_b)$ に沿ったベクトル（挿入図参照）であり、凸包の最小幅は、そのようなすべてのベクトル u_{ab}^* の ψ の値であることを簡単に示すことができます。部分勾配は、 ψ を最大化する項の勾配を取るだけで見つかります。ここで新しい式は、XXXXXで与えられる単位高度 u_{ab}^* の勾配です。ここで、 w ：

$= x_b - x_a$ （および x_b についても同様））。

（XXXXXなどの部分は省略したところ）