

The Shape Space of Discrete Orthogonal Geodesic Nets

これは、DOGネットを用いた可展面のモデリング、からの

『変形アニメーション』

の論文



図1：直交測地線によってパラメーター化された、離散的な可展面であるDOGネットの、形状空間探索の理論を開発します。上記のアニメーションで使用されているように、この研究では、この形状空間の特性評価と、DOG上の滑らかな流れを離散化するアルゴリズムを実現しています。最初の3つのフレームは編集システムを使用して作成され、残りは曲線制約づけフロー(表面上にある曲線に制約づけすることで面の変形を実現するもの。)を使用して生成された。

離散直交測地ネット(DOGs)は、可展面の四辺形メッシュアナログ(類似物)です。本稿では、これらの**離散オブジェクトの連続的な変形を調べます**。主な理論的な貢献は、特定のネット接続に対するDOGの形状空間の特性評価(特徴づけ)です。一般的に、この空間は、一連の特異点を除いて、局所的には固定次元の多様体であり、**DOGが連続的に変形可能**であることを示しています。滑らかなフロー(スムーズな変形のこと)は、多様体の接線空間上のベクトルを滑らかに選択することによって構築でき、特定のメトリック(距離? 測定基準? 計量?)の下で所望の目的関数を最小化するように選択されます。線形システムを解くことによってそのようなベクトルを計算する方法を示し、特異点を処理するための幾何学的に意味のある方法を考案するために、我々の発見を使用します。**形状空間の測定基準は**、分析的な直交測地ネットのサンプリングの下で収束することが証明されている**新しいDOGラブラシアン演算子に基づいています**。さらに、折り目や曲線折りをサポートすることでDOGの形状空間を拡張し、開発されたツールを編集システムで編集可能なサーフェスに適用して、任意の曲げ、伸張、切断、(湾曲)折り目、およびスムージングおよびサブディビジョン操作をサポートします。

1 導入

可展面は、簡単に作成できますが、設計が困難です。展開可能な形状は、たとえば紙や金属の平らなシートを曲げたり、円筒形のCNCフライス盤を使用したりするなど、さまざまな材料を使用した手順で効果的な製造方法によって簡単に作成でき[Harik et al. 2013]、製品エンジニアリングとアーキテクチャでの卓越性に貢献します。形状に関する制約(外因性および内因性変形の豊富なセットを、同時に許容してしまう制約。)が多いため、展開可能なサーフェスは設計が困難です。フリーフォーム空間変形(FFDとかかな?)や弾性表面ベースの曲げなどの標準的な**モデリングツールを適用すると、展開可能な特性(平面状態との等尺性)にすぐに違反**します。

可展面の**形状空間を完全に自由に探索することは、困難**であることが証明されており、**既存の方法は通常、ルーリングに基づく表現**を使用するため、限られた外的変形のセットしかカバーしま

せん[Liu et al. 2006;唐ら。 2016]または、それらは等角投影をモデル化するため、固有の変形をカバーしません（この表現わからん）[Burgoon et al. 2006]。

実際には、展開可能なジオメトリは、多くの場合、円柱や円錐などの単純なプリミティブ(要素)を使用して作成されます。

このホワイトペーパーの**目的は**、より簡単で効果的な設計プロセスを促進することを目的として、展開可能な形状空間のより完全で妨げられない探索に必要な理論的およびアルゴリズム的基礎を提供することです。

可展面の離散モデルについては、ラビノビッチらの最近の研究[2018]に依存しています。

滑らかな場合の直交測地線パラメータ化の存在は、可展性と同等であり、**DOGネット**はこれを単純な局所的な角度制約(頂点周りの全ての角度は等しい)を持つ**四辺形メッシュ**としてモデル化します。

この離散モデルは、ルーリングまたは固定された等尺の参照形状への依存を回避するため、離散的な展開可能な形状空間をモデリングおよび探索するための基盤となります。

[ラビノビッチら2018]へのフォーカスは、変形よりも離散DOGモデル自体です。

本稿では、もっともらしいDOGの形状空間を効率的にナビゲートするための必須ツールを開発します。

そのために、これらの離散的な表面の連続した変形を離散化します。

より正確には、 F^0 はメッシュ接続が固定されたDOGネットで、 M は同じ接続を持つ全てのDOGのセットである(つまりその形状空間)と仮定します。

我々は、全ての t に対して、 $F(0) = F^0$ および $F(t) \in M$ となるような連続関数 $F(t)$ を見つけることに関心がある。(Fは制約付きDOGフローと呼ばれます)

このようなフローの存在は、(私たちの主な研究対象である)形状空間Mのジオメトリ(形状?)に依存します。

まず理論的なバックボーンから始めます。そのようなフローが一般に存在することを証明し、その数を正確に数えます。

主な手法は、いくつかジオメトリック(幾何学的)な観察を使用し、(依存度が最小の勾配の制約グラフを特徴づけることにより)角度制約の勾配の線形依存性を分析すること。

形状空間Mは一般に、固定次元kの多様体であることを示し、kの線形独立DOGフローの存在を示唆します。

また、Mは全体的に多様体ではなく、一連の特異点を含むことも示します。(形状空間には特異点が含まれる)

次に、我々の理論を使用し、目的関数の勾配をMのタンジェント(接続)空間に投影することにより、DOGの様々なフローを離散化します。そして、形状空間の特異点进行处理する戦略を考案します。さらに、[Rabinovichら2018]形状空間Mを拡張して、鋭い折り目や湾曲した折り目をサポートします。

形状空間で意味のあるフローを設計するために必要な必須の要素は、ラプラシアン演算子と離散平均曲率です。

これらの基本的な概念をDOGネット専用に導出し、分析ネットのサンプリングの下で収束することを示します。

特に、我々のDOGラプラシアンは、離散ラプラシアン演算子の望ましい特性を備えています。これは対称で、正の判定値であり、線形に正確です。([ここら辺よくわからない](#))

開発したツールセットを紹介するため、所望の形状に向かっていくためにしよのできる制約付き勾配を持つ目的関数のセットを導出します。

ウィルモアフローと曲線制約づけ(拘束)のフローの結果を示します。

理論的な結果を可展面の編集システムに適用します。そのシステムでは、様々なトポロジーで、任意の方向への曲げ、折り目、ストレッチをサポートします。また、形状空間内に全てとどまるスムージングおよびサブディビジョン操作も含めます。

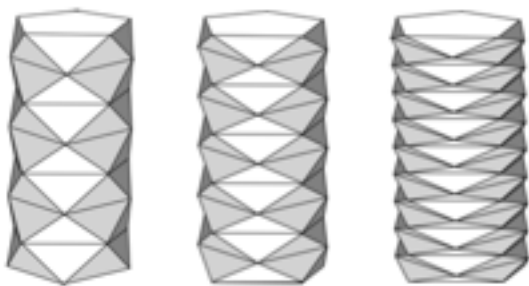


図2：シュワルツランタンの異なるサンプリングレート。コタンラプラシアン法線[Wardetzky 2007]の収束なしの表面の点ごとの収束の古典的な例。

我々の新たなDOGラプラシアン演算子は、滑らかなシュワルツランタンを含む、あらゆる分析的な直交測地ネットのサンプリングの下で収束する。

わかりやすくするために、三角形のメッシュを表示していますが、実際には、そのようなサンプリングは四辺形のみで構成されています。

2 関連研究

2.1 可展面とそれらの変形

平面パッチに対して局所的に等尺である場合、表面は展開可能です。

表面がC2である場合、展開可能性はガウス曲率を消すことによって同等に定義でき[do Carmo 1976]、表面はルーリングに沿って一定の法線で支配されます[Pottmann and Wallner 2001]、または直交測地線[Rabinovichら2018]によって局所的にパラメーター化可能。

非平面の展開可能なサーフェスは、そのルーリングの方向によって局所的に特徴付けられます。ルーリングが平行である場合は円筒形であり、すべてが点で交わる場合は円錐形で、それ以外の場合は曲線で接しており、サーフェスは接線曲面です。[do Carmo 1976]。

これらはすべて、torsal patchと呼ばれます。

一般的な展開可能な表面は、おそらく無限の数の平面パッチとねじれパッチの構成です[Pottmann and Wallner 2001]。

アイソメトリによってC2の展開可能なサーフェスを変形すると、消失するガウス曲率が保持されますが、サーフェスを展開可能な状態に保つための非等尺性の変形も多数あります。

C2展開可能サーフェス上のカーブを変形すると、変形したサーフェス全体の形状が局所的に決定されることが示されています。

たとえば、曲率線を変形することができます[Liu et al. 2006]、または所定の測地線曲率を持つ曲線[Graustein 1917; Fuchs and Tabachnikov 1999]そして、その判決から表面を局所的に構築します。

有限数の曲線に沿って面を区分的にC2とC0にすることにより、より大きく構造化された展開可能な面のセットを見ることができます。

まっすぐな「折り紙のような」折り目は、測地線によるC0折り目であり、計算折り紙の分野で広く研究されています[Demaine and O'Rourke 2007]。

これらの折り目を繰り返し適用することによって作成された形状は、区分的に平面です[Demaineら2011a]。

湾曲した折り目[Huffman 1976]は、任意の曲線の形をしたC0折り目です。

測地線に沿った折りたたみとは異なり、紙に湾曲した折り目を適用すると、通常、中間の表面をさらに曲げることができますが、折り目の片側の表面を曲げることにより、反対側の形状が局所的に決まることを示すことができます[Kilianら2008]。

したがって、C2変形は通常、微分幾何学で研究され、折り紙の折りたたみは本質的に組み合わせが多いですが、湾曲した折りたたみの比較的新しい研究は、両方の接合部に立っています[Demaineら2011b]。

2.2 可展面のモデリング

ジオメトリ処理モデルのいくつかの機能は、ルーリングを明示的に表すことにより、展開可能なサーフェスを滑らかにします。これは、共役ネットによってパラメーター化された展開可能なサーフェスの離散モデルとして見ることができます。

【Liuら2006】の作品[Kilianら2008]は、それぞれが平面四角形ストリップとしてモデル化された、接続された背側パッチのコレクションとして展開可能な表面をモデル化します。[Steinら2018]の作業は、このビューを三角形メッシュに拡張します。

Tangら[2016]は、一定の法線を持つルーリングによって2つのベジエ曲線を接続することによって形成される展開可能なスプラインとして、滑らかな胴表面をモデル化します。

[Tangら2016; Rabinovichら2018]、これらのメソッドは、サーフェスを展開可能に保つ変形のサブセットのみをモデル化できます。

Solomonら[2012]は、複数のまっすぐな折り目に沿って折りたたむと滑らかな展開可能な形状のモデリングに近づく、展開可能なサーフェスの折り紙ベースの編集システムを提案します。

上記の他の作品と同様に、このシステムも明示的なルーリングに依存しています。

[Burgoonら2006; FröhlichおよびBotsch 2011; Narainら2013]展開不可能な材料（紙など）で作られたオブジェクトとして展開可能な形状をモデル化するため、達成可能な変形は、固定された参照面の等尺性に制限されます。

前述のように、アイソメトリのほかに、表面を展開可能な状態に保つための変形は他にもたくさんあります。

[Rabinovichら2018]の作業では、直交測地網（DOG）を離散化することでこれらの制限を回避しています。

私たちの仕事は、これらの表面の連続的な変形を研究し、それらを離散化し、さらに編集に役立つ目的関数を導き出すことにより、DOGの理論を拡張します。

アプリケーションに関しては、[Rabinovichら2018]と比較して、優れた品質と大幅に広い範囲の変形を示します。

滑らかな展開可能な表面のモデリングは、折り目と湾曲した折りたたみの作業によって補完されます。

タチ[2009]は剛体の折り紙シミュレータを発表し、[キリアンら2008;唐ら。2016]離散共役展開可能ネット上の曲線折りたたみをモデル化します。

Mitani and Igarashi [2011]は、反射を繰り返すことにより、湾曲した折り目を持つオブジェクトを生成します。

[Kilianら2017]で、著者らはひものネットワークを引っ張って折り目パターンを折り畳むアルゴリズムを開発しました。

これらの作品は、等尺性変形のみに焦点を当てているか、可能性のある曲げ変形のサブセットにのみ、支配ベースの表現によって制限されています。

DOGの理論に折り目と湾曲した折り目を組み込むことにより、すべての方向への曲げ、展開可能な変形の伸長、折り目と湾曲した折り目をすべて統合されたフレームワークでサポートする最初の編集システムを作成できます。

2.3 形状空間とフロー

形状空間探索は、リーマンジオメトリの設定で形状を処理するためのフレームワークであり、サーフェスは、メトリックが付与された高次元空間の点として見られます。

[Kilianら2007]の作業では、三角形のサーフェスの空間を調査し、2つのメッシュ間の測地線として三角形のエッジのストレッチを測定するリーマン計量として、可能な限り等尺性の補間を計算しました。

Heerenら[2014]は、シェルの形状空間を検討し、所定の初期データで測地線を撮影する方法を示し、並行輸送のための構造を提供します。

これにより、シェル空間内のパスの自然な外挿と、1つのシェルから別のシェルへの大きな非線形変形の転送が可能になります。

[Heerenら2016]では、著者はユークリッドスプラインの概念を離散シェルのリーマン多様体に拡張し、特定のシェルキーフレームポーズのセットの時間的に滑らかな補間を可能にします。

私たちにとって最も重要なのは[Yangら2011]の作業であり、非線形制約のコレクションによって暗黙的に記述された、メッシュの制約された形状空間を局所的に特徴付ける計算フレームワークを提示します。

この作業により、1次および2次の近似、つまり接線空間と2次接触面を介して高次元形状空間にアクセスできるようになり、固定接続の共役ネットと円形ネットのローカル形状空間探索へのアプリケーションが示されます。

空間の接線方向を計算するには、制約に線形依存性がある可能性があるため、費用のかかるSVD分解が必要です。

代わりに、DOGネット制約の形状空間の研究に焦点を当てています。

制約の線形依存性を分析し、一般に、制約のヤコビアンが完全な行ランクを持ち、特定の接続の形状空間が、特異点のセットを除いて、一般に固定次元の多様体であることを示します。

さらに、特異性を検出して処理する単純な戦略を提供し、線形依存性を削除するためのコストのかかる操作を回避します。

ユークリッドL2メトリックが使用される[Yangら2011]とは対照的に、[Ecksteinら2007;の作品に触発された離散ラプラシアンに基づくメトリックを使用します。 Sundaramoorthiら2007]、および目的としての曲げエネルギーは、どちらもDOGネット用に特別に調整されています。[Ecksteinら2007]の観測結果と一貫して、メトリックとしてラプラシアンを使用することがL2よりも有益であることを示します。

DOG形状空間が一般的に滑らかな多様体であることの結果は、滑らかな流れの存在であり、私たちの仕事は、平滑化と形状補間のための流れに関する幾何学処理の文献にも影響を受けています。【Desbrunら1999; Ecksteinら2007; Kazhdanら2012; Craneら2013】。

ローカルグローバルソルバー[Sorkine and Alexa 2007; Bouazizら2012、2014; Pengら2018]は、制約付きの目的を処理するためのジオメトリ処理における一般的なアプローチですが、そのようなフローを離散化することも、最小二乗法で制約を解決するために目的を最小化し、形状空間内に留まることも保証しません。

私たちの理論は、目的を最小化する正確なDOGフローの存在を示しています。これには、時間ステップがゼロになると、離散化が収束します（図10）。

2.4 離散ラプラス演算子

三角形分割された表面上の離散ラプラシアン(なんだ?)の理論と応用は十分に開発されており、有名なコタン演算子[Pinkall and Polthier 1993]はおそらく最も有名な代表者です。

[Wardetzkyら2007]では、著者は、滑らかな設定に触発された離散ラプラシアンの一連の自然プロパティを説明し、重要な理論的制限を証明します。三角形メッシュの離散ラプラシアンは、すべての自然プロパティを満たすことができない。

有名なシュワルツランタンメッシュは、コタンラプラシアン法線の収束なしに、表面の点ごとの収束の非常に一般的な例を構成します[Wardetzky 2007]。

四辺形メッシュや、より一般的な多角形の場合については、あまり知られていません。

注目に値する多面体ラプラシアンは、[Alexa and Wardetzky 2011]で開発されました。この作業では、[Wardetzkyら2007]で列挙された対称性、正の半決定性、線形精度などの自然特性に基づいて、四辺形DOGネットに合わせたラプラシアン演算子、いわゆるDOGラプラシアンを導出します。

DOGラプラシアンによって誘導された法線と[Rabinovichら2018]で定義されているDOGガウスマップの間の強い関係を示し、滑らかな分析直交測地網のサンプリングの下で両方の量の収束を証明します。

特に、悪名高い滑らかなシュワルツランタンネットに沿ってサンプリングすると、DOGラプラシアンは収束します（図2）。

[Alexa and Wardetzky 2011]の多角形ラプラシアンは多角形のベクター領域に基づいていますが、基礎となるメッシュがDOGネットであると仮定して、別の面積の概念に基づいてDOGラプラシアンを導出します。

この仮定は2つのラプリアン間の基本的な違いであり、一般的ではないが解析的な直交測地網のサンプリングの下で収束する演算子を導出できます。

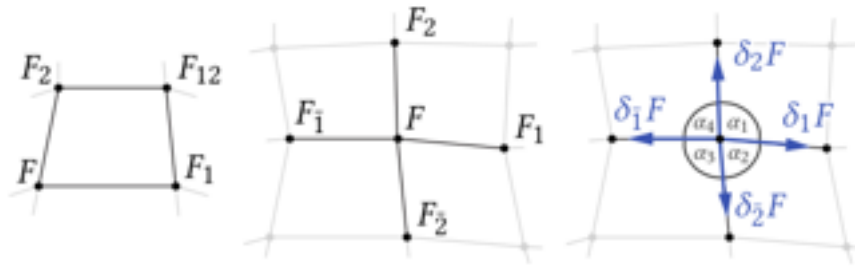


図3：クワッド(左)と星(真ん中)のシフト表記。エッジの方向と星の角度(右)。DOGでは、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ を満たします。[Rabinovichら2018]からのイラスト。

3 表記と設定

[ラビノビッチら2018]に従い、連続マップを小文字、それらの離散値を大文字で表します。 $f(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^3, (U \subseteq \mathbb{R}^2)$ は滑らかな面の(局所的な(それぞれの四角形メッシュのイメージかな?))規則的なパラメータ化を表し、 $n(x, y) : U \rightarrow S^2$ はその法線マップです。

局所的パラメータ化 f の自然な離散アナロジー(アナログ?類似物?)は、マップ $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3, V \subseteq \mathbb{Z}^2$ です。

F を離散ネットと呼び、同様に $N : V \rightarrow S^2$ は離散ガウスマップを示し、 $A : V \rightarrow \mathbb{R}$ は頂点領域の表記です。

離散ネットを純粋な四辺形グリッドメッシュとして表します。すべての内部頂点の価数は4です。内側の頂点、その4つの隣接点、およびその4つの放射するエッジをスターと呼びます。

$|F|$ でネットの頂点の数を表します。頂点座標の総数は $n = 3 |F|$ です。(x, y, zだからっしょ?) 個々の頂点の位置は、グリッド内の2つのインデックス $F(j, h) \in \mathbb{R}^3$ 、または単一の絶対頂点インデックス $F(1), F(2), \dots, F(|F|) \in \mathbb{R}^3$ によって参照できます。

すべての頂点座標のベクトルは、 $\mathbf{F} = (F(1), \dots, F(|F|)) \in \mathbb{R}^n$ で表されます。

頂点は、離散微分幾何学で一般的なように、シフト表記を使用して相対インデックスで参照することもできます。

表記を少し乱用すると、個々の頂点は単に F と呼ばれ、その付近の頂点は低いシフトインデックスを使用して参照されます：

FFFFFFFFF、 $j, h \in \mathbb{Z}$ 、

つまり、低いインデックスはシフトする座標番号を示し、その上のバーはそれを示します 負のシフト (図3を参照)。

点 F から発生するエッジの単位長さ方向は、 $\delta_1 F, \delta_2 F, \delta_1 F, \delta_2 F$ 、つまり

GGGGGG、

GGGGGG

として示されます。

Fでの星の周りの内角を α_j として表し、時計回りに連続します（図3を参照）。

私たちのネットは、離散的な液浸であると想定しています。

これは、エッジ方向 $\delta_i F, \delta_i F, i = 1, 2$ が異なることを意味します。

座標曲線の角度を $\beta_1 F, \beta_2 F$ ：

$$\cos(\beta_1 F) = \langle \delta_1 F, \delta_1 F \rangle, \cos(\beta_2 F) = \langle \delta_2 F, \delta_2 F \rangle$$

で表します。

図については、図4を参照してください。

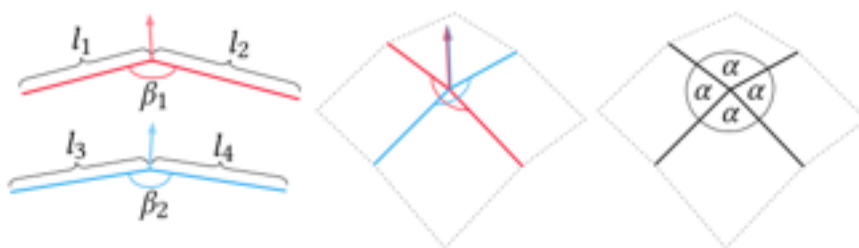


図4：DOGスターのパラメーター化。

定理4.2により、単一の適切なDOGスターは、4つのエッジ長 $l_j, j = 1..4$ および2つの曲線座標角

β_1, β_2 （左）によって剛体運動まで決定されます。

これらのパラメーターから星を再構築するには、それらの法線が一致し、離散フレンチフレームがオーバーレイ（中央）されるように、離散曲線の1つを他の周りに平行移動および回転させる必要があります。

これにより、星の周りのすべての角度が等しいことが保証されます。角度 α の値は、 β_1, β_2 によって完全に決定されます。

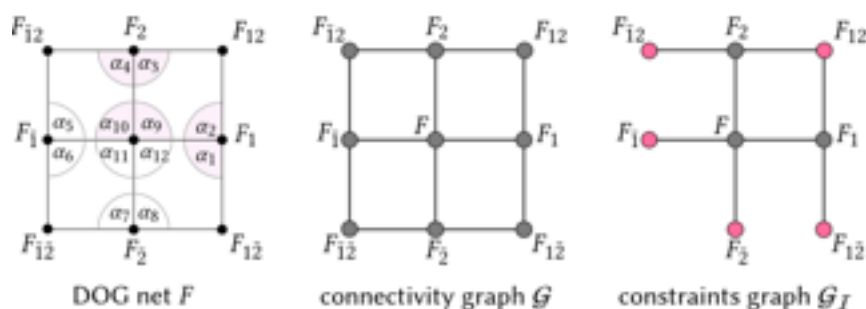


図5：3×3グリッド接続グラフGと制約グラフGIを含むDOGネットF。

この例の角度の表記は、隣接する拘束角度が連続したインデックスを持つように選択されています。

右側に、 $l = \{1, 2, 5\}$ の制約グラフGIを示します。つまり、3つの制約： $\phi 1 := \cos(\alpha 2) - \cos(\alpha 1)$ 、 $\phi 2 := \cos(\alpha 4) - \cos(\alpha 3)$ 、 $\phi 5 := \cos(\alpha 10) - \cos(\alpha 9)$ 、左側に淡いピンクでマーク。

GIの葉の頂点とコーナーの頂点はピンク色で表示されます。

4 離散直交測地(DOG)ネットの形状

本書では、DOGネットの接続性はZのサブセットであると想定しています。

これには、ディスクに穴を開けることによって作成されたトポロジが含まれますが、円筒トポロジは含まれません。

DOGネットのクワッドは必ずしも平面ではありません。ただし、私たちの分析では、形状と平面からの距離について合理的な仮定が必要です。

定義4.1。

ネットFは、そのクワッドが縮退していない場合は規則的です。

それが規則的で、四角形によって形成された四面体の平面が直交していない場合は適切です（挿入図のピンクとグレーの三角形によって形成された平面を参照）。

適切なネットのセットはオープンセットであり、適切でないネットは通常、モデリングの目的には適していません。

F0を適切な離散直交測地網とし、M (F0) をF0と同じ接続性を持つ適切な直交測地網のセットとします。

特定の固定メッシュ接続の形状空間についてよく説明するため、**通常はM (F0) を単にMと省略します。**

以下では、次の結果が得られる形状空間Mを探索するための理論を開発します。

(1) 空間Mは、希少な特異点のセット（ ∂F はFの境界頂点のセット）を除き、局所的に次元 $k = 0$ ($|\partial F|$) の滑らかな多様体です。

これは、非特異DOGネット上にk個の線形に独立した滑らかなフローが存在することを意味します。

(2) これらのフローを離散化する方法を示します。これは、線形システムを解いて形状空間多様体Mの接線を計算することになります。

これらのシステムがフルランクであることを証明します。

(3) **局所多様体ではないMの特異点を分析し、近くの多様体上の近接点を活用することに基づいて、計算コストが安い形状空間上の離散フローを計算する戦略を提案します。**

4.1 DOGの角度制約

離散直交測地ネットFは、すべての頂点の周りの角度が等しいクワッドネットです（図3を参照）。

頂点の座標の関数として角度の余弦を書くことができます（例： $\cos(\alpha_1) = \langle \delta_1 F, \delta_2 F \rangle$ ）。内部頂点の場合、条件 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ は、 $\phi_i(F) = 0$ ：(1)の形式の3つの制約によって指定できます。

これらの3つの制約は、 $\cos(\alpha_4) = \cos(\alpha_1)$ も意味することに注意してください。 p 個の近傍を持つ境界頂点の制約には、 $p - 2$ の角度の等式が必要です。したがって、制約の総数は $m = 3I + j \in \partial F (|N(j)| - 2)$ です。ここで、 **I は内部頂点の数**、 $N(j)$ はネット頂点 j の近傍のセットを示します。

4.2 単一の直交測地スターの形状空間

ローカルの観点から見ると、DOG制約は非常に単純です。

Msを単一の適切なDOG測地系スターのセットとし、中央の頂点とその4つの近傍を含み、中央の頂点の周りのすべての角度が等しくなるようにします。

定理4.2。Msは12次元の多様体であり、スターのエッジの長さ l_1, l_2, l_3, l_4 、その2つの座標ポリゴン角度 β_1, β_2 、および R^3 の剛体運動を説明する追加の6つのパラメーターによってパラメーター化できます。

証明省略。

4.3 制約勾配の線形依存を通した形状空間

一般的なDOGネットは複数の接続されたスターで構成され、異なる頂点の角度制約が依存する可能性があるため、より複雑な形状空間になります。

頂点座標 F / F に関連する制約の勾配間の線形依存関係を調べることで、この形状空間を分析します。

R^n の C を、適切なネット（ $n = 3 + |F|$ ）の頂点座標を表す許容変数のオープンセットとします。 F がDOGネットである $FFFFFFFF$ の m 個の滑らかな制約関数があるとすると、 M はすべての制約を満たす C の変数 F のセットとします。

WWWWW。

$F = (FFF) T$ と記述し、 $JF = DF$ は $m \times n$ 制約のヤコビ行列を示します。

定数ランク定理により、以下が成立します。

定理3

省略

この場合、与えられたDOGネット $F_0 \in M$ は、滑らかな制約された流れによってスムーズに変形できます。つまり、 $F(0) = F_0$ および $F(t) \in M$ である滑らかな関数 $F(t)$ があります。

本質的に異なる流れの量、または線形に独立した流れの方向は、接線空間 T_M の次元に依存します。なぜなら、各滑らかな流れは、 T_M のいくつかの基底に対する係数の滑らかな選択だからです。

図5に示すように、例として内部頂点を含む最小のDOGネット、つまり3×3グリッド接続のDOGネットFを考えてみましょう。

内側の頂点位置をFとして示し、他の8つの頂点はシフト表記を使用して名前を付けます。

7つの角度拘束があり、 $j = 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11$ の $\cos(\alpha_{j+1}) - \cos(\alpha_j)$ として定義され、 ϕ_i , $i = 1, \dots, 7$ の番号が付けられます。

α_{12} と α_9 の等価性に関する制約は含まれていないことに注意してください。これは、その星の周りの他の3つの制約によって保証されているためです。要約すると、 $m = 7$ の制約、 $n = 3 \times 9 = 27$ の変数が9つの頂点の3D座標を表し、JFはJF (2) 形式の7×27行列です。

補題

省略

証明

省略

対称性により、これは他の角度と他の方向の隣接する頂点にも当てはまります。つまり、クレーム内の角度 α_9 と頂点F1、F2を、たとえば α_{11} 、 F_1 、 F_2 。

定理4.2、定理4.3、補題4.4の結果、次の結果が得られます。

定理4.5。 式の制約 (1) 適切なDOGスターの周囲は線形独立です。

証明

省略

次のセクションでは、必要なツールを設定して、一般的にヤコビアンJFに完全な行ランクがあることを示します。

重要な手法には、JFの線形従属行の「小さな」サブセットをグラフで表し、補題4.4で説明されている制約のジオメトリを使用することが含まれます。

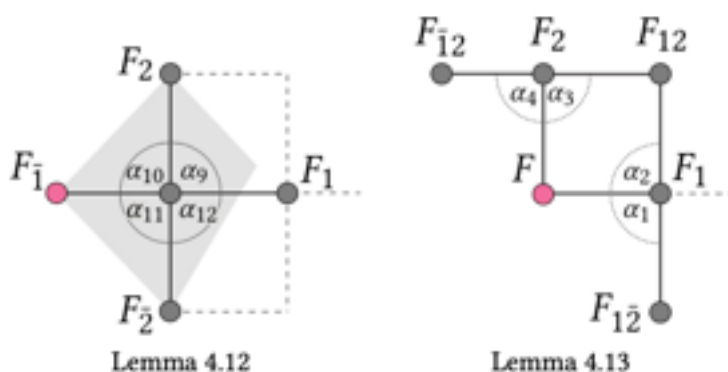


図6：回路の制約グラフ G_I のリーフとコーナーに関する補題の図。 F_1 が F に接続された葉の頂点である場合、 F のすべての近傍は G_I にあり、 F_1, F, F_2, F_{12} は平面上にあります。 F が隣接する F_1, F_2 を持つコーナー頂点である場合、 F_{12}, F_{12}, F_{12} も G_I にあります。

4.4 線形依存のDOG制約勾配

以下では、行列 J は適切なネットのDOG制約のヤコビ行列です。

$I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ を一連のインデックスとする。私は基本的に、ネット上のDOG制約のサブセットの選択に対応しています。

$|I|$ を CI で表します。これらのインデックスに対応する J の行を取ることによって形成される $\times n$ 制約行列。

定義4.6。

J の行の最小線形依存セットを回路と呼びます。

つまり、回路は行の依存セットであり、そのすべての適切なサブセットは独立しています。

行のインデックスのセット $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$ で回路を表します。

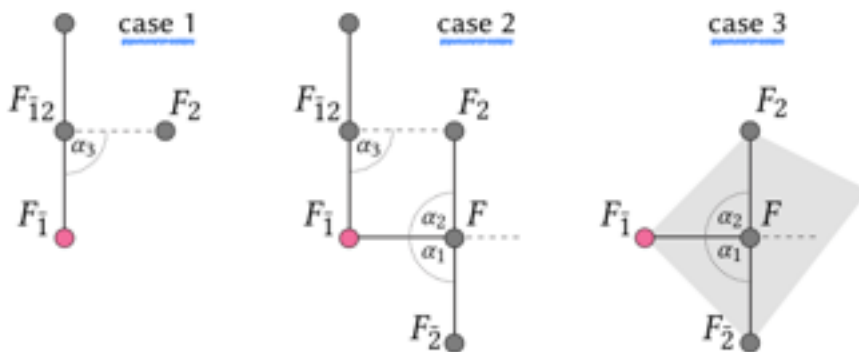


図7：命題4.14：

4.5 DOGネットの形状空間

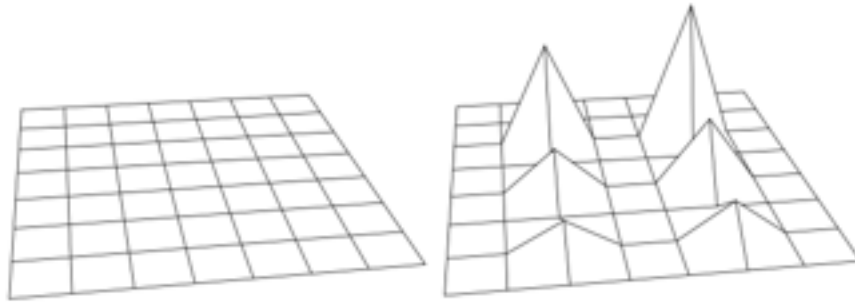


図8：平面DOGネットは、一般的な一般的なDOGネットよりも多くのフローを持ち、内部の頂点を他の頂点とは独立してz方向に押すことができるため、滑らかでないフローを許可します。

通常、DOGネットは局所的な変形を許可しないため、この自由度はそのような特異なネット上のみ存在する離散的なアーチファクトです。

5 DOG離散化フロー

定理4.18の結果は、一般的なDOG、または形状空間M上の流れの多数の連続した変形の存在です。

このセクションでは、これらのフローを離散化する方法と、セクション4で開発された理論に基づいて特異点を変形する方法を示します。

結果のアルゴリズムは、アルゴリズム1に要約されています。

5.1 制約勾配フロー

[Ecksteinら2007]の作業に続いて、さまざまな勾配フローを定義したいと思います。

Fを与えられたDOGネットとし、**E (F) を最小化したい目的関数**とします。

私たちの目標は、表面の微小変化で対物レンズを減少させるメッシュジオメトリFの進化を考案することです。

確立されたさまざまな目的エネルギーE (F) を簡単に使用できますが、表面の微小変化を正確に定義する必要があります。

これには、急勾配の測定値、つまりMの接線ベクトルまたはTMで定義されたDOGネットMの空間上のメトリックM（これ何???）が必要です。

よく使用される測定基準は、**Mの標準L²内積（L2乗ノルム）によって誘導される測定基準**であり、関連する勾配演算子は $\nabla E(F)$ で表されます。

ただし、[Ecksteinら2007]で示されているように、接線空間で他のメトリックを使用することはしばしば有益です。

$\langle F, \tilde{F} \rangle_M = \langle MF, \tilde{F} \rangle_{L^2} = \langle F, M\tilde{F} \rangle_{L^2}$ という形式のより一般的な内積を使用することにより、メトリックMによって引き起こされるさまざまな**勾配演算子 ∇_M を定義**できます。

ここでのメトリックは、対称の正の定義行列 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ です。

次に、右側がL2勾配である線形システムを解くことにより、関数の勾配を計算できます：

$$\nabla_M E(F) = M^{-1} \nabla F.$$

すべての結果は、メトリックMとしてラプラシアン行列Lを使用します。これは、セクション6でDOGネット用に特別に導出したものです。

このメトリックの使用と標準のL2メトリックの使用の比較を図9（左）に示します。

[Ecksteinらの設定との顕著な違いとして。2007]、DOG制約から逸脱しない、つまり形状空間Mに留まる制約付きフローに関心があります。

これは、選択されたメトリックMを使用して、点Fでの接線空間TMへのE（F）の勾配の投影を計算することになります。

この投影された勾配を $\bar{\nabla}_M E(F) := \operatorname{argmin}_t ||\nabla_M E(F) - t||_M, t \in TM$ (4) で表す。

勾配をT Mに投影する場合としない場合のウィルモアフローの比較を図9（右）に示します。

FをDOGネット、E(F)をいくつかの目的関数、 $\nabla E(F)$ in \mathbb{R}^n をEのFにおける標準 L^2 勾配、そしてJ in $\mathbb{R}^{m \times n}$ をセクション4で定義されたようなFの制約ヤコビ行列とします。

射影勾配 $\bar{\nabla}_M E(F) \in \mathbb{R}^n$ は、以下のKKTシステムを計算することにより計算されます。

ここで $\lambda \in \mathbb{R}^m$ はラグランジュ乗数です。

(5)。

定理4.18までに、Jにはジェネリックネットの完全な行ランクがあります。

これは、式1のシステムが（5）は、計量Mが正定の場合、非特異です[Nocedal and Wright 2006]。

システムはまた、メトリックMの下でE（F）の勾配に対応するT M上のベクトルを計算するため、正確です。

したがって、式（5）で計算された方向に変数のステップサイズtを反復的に進めることでフローを計算できます。ここで、フローは $t \rightarrow 0$ として連続フローに近づきます。

実際には、安定したフレームレートとのスムーズな相互作用を可能にするために、完全な収束を排除する限られた時間バジェットがあることが多いため、正確にDOGネットではなく、 $\phi（F） = \varepsilon$ を満たすネットからすべての反復が計算されます。（小さなノルムで $||\varepsilon|| < \varepsilon$ ）。

したがって、次のシステムを解決します。

(6)。

5.2 特異点の処理

ああああ

ああああああああああああ

ああああああ

ああああああああ

ああああ

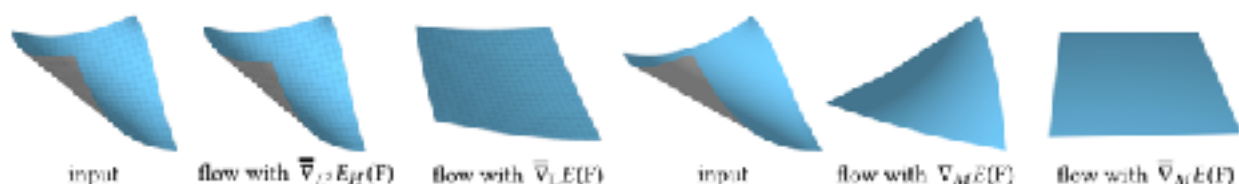


図9：形状空間メトリック M (左)と勾配投影(右)が、二乗平均曲率を最小化する流れに与える影響(定義6.8で定義されている)。

左：射影勾配 $\bar{\nabla}_M E(\mathbf{F})$ のDOGラプラシアンメトリック L に対するメトリック L として標準 L^2 を使用して、フローの200回の反復（20×20グリッドで1.4秒かかる）の入力モデルと結果を示します。 L^2 メトリックを使用する場合、反復はほとんど進みません。

右：投影なしで勾配 $\nabla_M E(\mathbf{F})$ を繰り返し計算して流れると、非DOGネットになります。

具体的には、目的の流れは、双曲線面に沿った直線の線になるように、両方のファミリの座標線をプッシュします。

対照的に、投影勾配 $\bar{\nabla}_M E(\mathbf{F})$ の流れは、DOG形状空間に沿って平面ネットに向かって進みます。

両方の例は、追加のDOG制約の最適化なしで、勾配に沿って流れるだけで計算されました。

5.3 アルゴリズム

ラインサーチ(直線探索)を使用して、各フローステップで目的 $E(\mathbf{F})$ を最小化します。

(直線探索：最初に目的関数 f の値が小さくなる降下方向を求め、次にその方向に x (推定値。この極少値を探す)をどのくらい動かすかを表すステップサイズを計算する。(解を求める方法は、最急降下ほう、ニュートン法、準ニュートン法など))

[Rabinovichら2018]セクション6.3で行ったように、流れの方向はDOG制約を1次までしか維持しないため、各流れステップの後に、LBFGS [Nocedal 1980]でペナルティベースの方法を使用して、結果のメッシュをDOG形状空間に投影します。

ただし、今回のケースでは、投影するジオメトリは既に形状空間に非常に近いため、このステップの方が効率的であり、変形がスムーズになります（図16と補足ビデオを参照）。

要約すると、フローの1ステップは、スパースで対称な不定システムを解くことであり、LBBFSがそれに続きます。

以下のアルゴリズム1の手順をリストします。論文全体で、パラメーター値 $t_0 = 1, \epsilon = 1e - 8$ を使用しています。

アルゴリズム 1：離散直交測地フロー

入力：

離散直交測地ネット F^k と目的関数 $E(\mathbf{F})$

出力：離散直交測地ネット F^{k+1}

1: x ルールと y ルールの頂点の集まり、 I^x, I^y を見つける。

2: l を2つのセット I^x, I^y の小さい方として設定する。

3: F^* を取得するために、距離 $\epsilon > 0$ でランダムな方向 $r_i \in \mathbb{R}^3$ にある l の各頂点の位置を摂動させる。

4: 制約(拘束)ヤコビアン $J = J(F^*)$ を計算する。

5: 式(5)を解き、 $\bar{\nabla}_M E(\mathbf{F})$ を計算する。

6: F' を計算するために、ステップサイズ $t=t_0$ から始め、方向 $\bar{\nabla}_M E(\mathbf{F})$ で目的 $E(\mathbf{F})$ に対して直線検索を実行する。

7: [Rabinovichら2018]のセクション6.3のように、F'のDOG角度制約を最小化することで、 F^{k+1} を得る。

(7のDOGの角度制約の最小化)

各フレームで $\arg \min F D(F)$ する。(対象となるのは $c_i(F)=0, i=1, \dots, m$ のところ)

二次ペナルティ法 (Nocedal and Wright 2006) を使用します。

これは、上記の制約付き最小化を

$\arg \min (wE(F) + \sum_i c_i(F)^2)$ (9) ($\arg \min F(t)$ は $F(t)$ を最小とする t の集合)

形式の一連の制約なし問題に変換します。

上記は、制約が数値的に満たされるまで、つまり、になるまで、 $w = w_0$ から始まり、後続の各反復で重み w を持つように繰り返されます。

最小化 (9) は、L-BFGS (Nocedal 1980) を使用して解決されます。ここで、指定された位置制約でARAP (Sorkine and Alexa 2007) を使用して、初期推定を取得します。

この記事の図と付随するビデオは、パラメーター $w_0 = 1$ 、 $w_{iso} = 1$ 、 $w_{pos} = 0.1$ 、 $\varepsilon = 1e-12$ で生成され、入力メッシュは最初に平均エッジ長が1になるようにスケーリングされました。

ここで言う $c_i(F)=0$ の制約は、制約式(3)(4)[ラビノビッチら2018]のこと。 i はすべての内部頂点と境界頂点、およびそれらに関連する入射辺のことを表している。

(3)は e_j, e_{j+1} のなす角が e_{j+1}, e_{j+2} のなす角と等しいと言う制約。

(4)は、2つの入射辺 e_1, e_2 と、1つの角度のみを持つ、コーナー境界頂点の場合の制約。ここで α は e_1 と e_2 のなす角です。

ちなみに e_j は頂点 v で始まる辺のセット($e_j, j=1, \dots, l$)

滑らかさと等尺性の正規化について：

上の角度制約の最小化では、滑らかさや等尺性を保証(出力)しないため、そのまま扱うと不適切な場合がある。

滑らかな変形をさせるために、変形エネルギー $E(F)$ を最小化するような、解を求めるべき。

単純な滑らかさの項、つまり**現在の形状の状態に関連する**変位のラプラシアンエネルギー、または現在の「フレーム」 F^k : (F^k が現在の状態を表しているGODネット)

(式5) (ここで、 L は単純な一様ラプラシアン)

を使用する。

2番目のエネルギー項は、等尺性を維持し、直感的な変形を制御するのに役立つ：

(式6)

ここで、 ∂F は F の境界辺のセットであり、 l_j たちは、 F_0 のエッジ長です。

最後に、ハンドル頂点の位置をソフト制約として追加します。これはユーザが展開可能性の制約と矛盾する方法でハンドルを操作する可能性が高いためです。

したがって全体のエネルギーは(7)です。

vc はユーザが指定したハンドル位置で、 w_{iso} 、 w_{pos} は重みのスカラー値です。

ジェネリックネットでは、フローの離散化は既存のスムーズフローに収束し、 t_0 がゼロになると目標を最小化します。特異ネットの保証はありませんが、測定結果は、低速ではありますが、さまざまな例で収束を示しています（図10）。

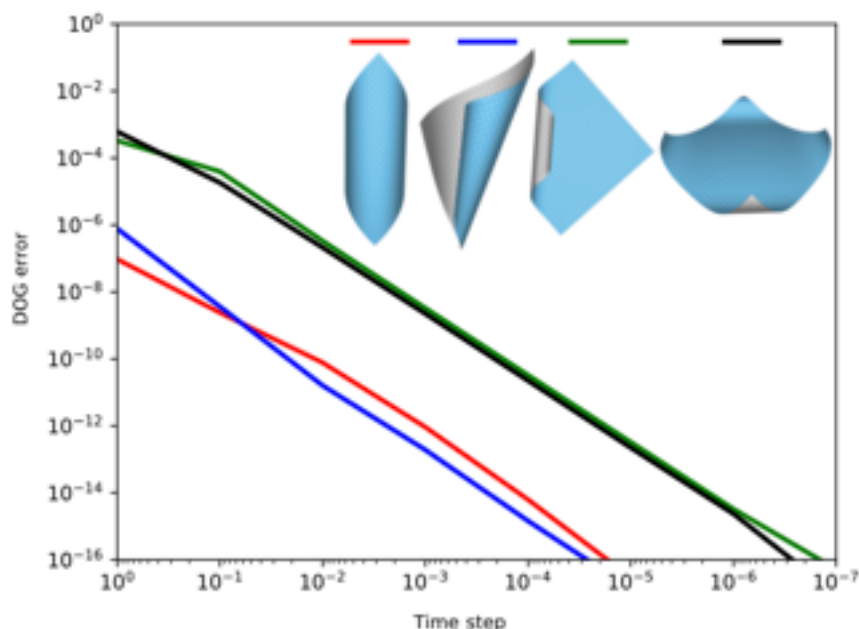


図10：フロータイムステップがゼロになるときの、Willmoreフロー下の一般的なネット（赤と青）と特異ネット（緑と黒）の収束プロット。

各メッシュが平面になるまでウィルモアフローを実行します。

縦軸（「DOGエラー」）は、フロー全体で得られた、DOG制約の2乗誤差の合計の最大値を表します。

6 DOGラプラシアンと平均曲率

ここでは、アルゴリズム1に直接接続して、DOGラプラシアンをメトリックとして使用し、平均曲率を目的関数の基礎として使用するさまざまなフローを計算するための基本的なツールを提供します。

Rabinovichら[2018]は、最適化に均一なラプラシアンを使用しました。

すべてのエッジ長がほぼ等しい非常に規則的なネットではうまく機能しますが、DOGネットで任意の伸縮変形をモデル化する場合は、均一なラプラシアンでも平面ネットでは消えないため、不十分です。（???とあえて普通のラプラシアンだとあんまよくないってこと）

DOGラプラシアンの導出は、滑らかなラプラシアンの顕著な特性によって導かれます。局所性、対称性、正の半正定性、線形精度、および演算子の収束です。詳細については、[Alexa and Wardetzky 2011; Wardetzkyら2007]。

[Pinkall and Polthier 1993; Alexa and Wardetzky 2011] DOGネットの表面積の勾配を導出することにより、DOGネットのラプラシアン演算子を定義します。

AlexaとWardetzky [2011]は一般的なポリゴンメッシュのラプラシアンを提案していますが、特定のネットの高度に構造化された性質を利用してエリアを導出しているため、分析的な直交測地網のサンプリングの下で収束する対称的な正定ラプラシアンになります。

6.1 DOG頂点領域

DOGネットのクワッドは通常、非平面です。

したがって、最も基本的な定義から始めます。

DOGクワッドの領域とDOG頂点です。

これらは、DOGネットを平面ネットに平坦化することに基づいています。

最も単純なケースは、Fがすでに平面DOGネットである場合です。つまり、Fは平面直交グリッドです。

次に、（平面）四角形領域が明確に定義され、頂点に関連付けられた領域は、隣接する面の重心を接続することによって形成される、その二重面の領域として定義できます（図11を参照）。

したがって、Fのインデックス*i*を持つ頂点の場合、面積は $A_i = (1/4) * \sum_{j \in Quads(i)} Q_j$ であり、 Q_j は面*j*の4つの平面四角形領域です。

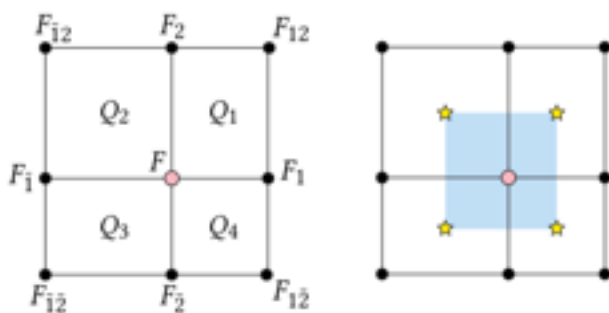


図11：左：頂点F（淡い赤色）とその周囲の4つの四角形の周りの平面DOGネット。面積は Q_i で示されます。

右：頂点の領域は、隣接する面（星印でマークされている）の重心を接続することによって形成される、その二重面（青色）の領域です。

この頂点領域の定義を非平面のDOGネットに直接一般化することの問題は、DOGスターを等角的に平坦化できることですが、**DOGネットは一般的に平坦化できない**ことです。図12を参照してください。

図に示されているように、**反対側のエッジの長さが完全に同じではないため**です。

反対側のエッジの長さが同じである離散ネットは、離散チェビシェフネットと呼ばれます [Bobenko and Suris 2008]。

それらは、滑らかなチェビシェフネットの類似物と見なすことができます：

$\|f_x\|_y = \|f_y\|_x = 0$ を満たすネットf。

滑らかな直交測地線ネットもチェビシェフネット（定理6.1）であるため、DOGネットはほぼ離散的なチェビシェフネットであり、（滑らかな）極限(limit???)で1つに近づきます。

定理6.1。滑らかな直交測地ネットfもチェビシェフネットです。つまり、 $\|f_x\|y = \|f_y\|x = 0$ を満たします。

証明。付録Cを参照してください。

したがって、DOGネットの四角形の面積を対称式で定義します。

定義6.2。DOGネットのクワッドjの連続するエッジの長さを l_1, l_2, l_3, l_4 とすると、 $l_1 \sim l_3$ 、

$l_2 \sim l_4$ (この数学的表現がわからない)になります。

クワッドjの面積を $Q_j = (l_1 + l_3)(l_2 + l_4)/4$ と定義します。図12を参照してください。

定義6.3: DOGネットのトータルの表面領域を、四辺形領域の合計 $A = \sum Q_i$ で表す。

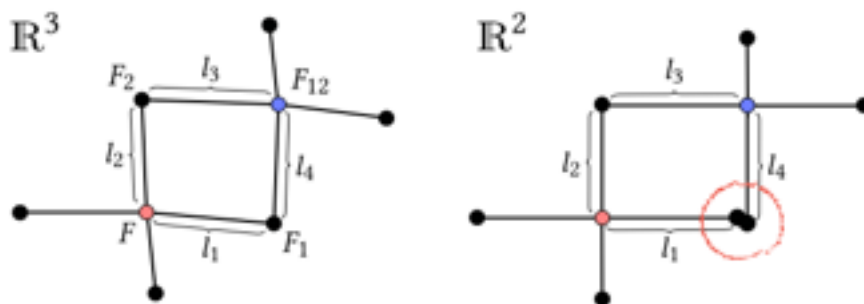


図12：平面DOGネットは直交グリッドですが、一般的なDOGネットの場合、エッジの長さを正確に維持しながら各スターを局所的に平坦化できますが、通常はネット全体ではありません。

左：2つの星（赤と青）を含む R^3 のDOGネット。

右：長さ l_1, l_3 と l_2, l_4 はほぼ同じですが、滑らかな限界では等しいため、長さ l_1, l_3 と l_2, l_4 は一般に異なるため、個別に平坦化された赤と青の星を「接続」してコヒーレントメッシュを形成することはできません。

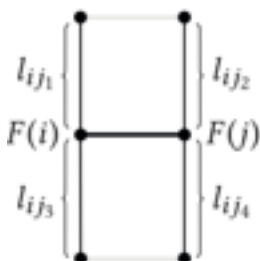
したがって、DOGネットのクワッドの面積を $(l_1 + l_3)(l_2 + l_4)/4$ として定義します。

6.2 DOGラプラシアン

DOGネットの面積勾配により、弱い（積分された）ラプラシアン演算子Lが生成されます。

$$\mathbb{L}F(i) = \frac{\partial A}{\partial F(i)} = \sum_{j \in N(i)} \omega_{ij}(F(i) - F(j)), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{4} \cdot \frac{l_{ij1} + l_{ij2} + l_{ij3} + l_{ij4}}{\|F(i) - F(j)\|} \quad (7)$$

ここで、 l_{ijk} は、エッジ(i, j)に隣接し、エッジ(i, j)を共有する2つの面に入射する4つのエッジの長さです（挿入図を参照）。



式 (7) の導出は付録D1にあります。

重みは対称的で正です： $\omega_{ij}=\omega_{ji}>0$ 、これは[Wardetxkyら2007]で指摘されている2つの望ましいプロパティです。

結果として、 L は対称で半正定値です。

頂点が平面星の中心にある特殊なケースでは、これらの重みは平面メッシュの三角形分割の余接重みと一致します（付録D.2を参照）。

後者は、 L が平面ネットの内部頂点で消失することも意味します。つまり、 L はラプラシアン線の線形精度プロパティを満たします。

6.3 ラプラシアン平均曲率法線

滑らかな表面 f 上のラプラシアン Δ は

$$\Delta f = -2Hn \quad (8)$$

を満たします。

ここで、 H は平均曲率、 n は表面に垂直な単位長さです。

f が滑らかな直交測地網である場合、次のことが成り立ちます。

定理6.4。

$$-\Delta f = 2Hn = k^x n^x + k^y n^y \quad (9)。$$

証明

したがって、スムーズなケースでは、ネットの法線と平均曲率は、主法線と座標曲線の曲率、 $k_x n$ 、 $k_y n$ を調べることによって推定できます。

これは、[Rabinovichら2018]で離散曲線の接触平面の交点として定義された、DOGの離散ガウスマップ N の場合にも当てはまります。

定義6.5。測地線ネット F の離散ガウスマップは $N = \text{XXXXX}$ で、 $T_j = \text{XXXXX}$ 、 $j = 1, 2$ です。

また、(10) を満たします。

つまり、 N は接触面における離散曲線の二等分線であり、ポリライン (F_1 、 F 、 F_1) および (F_2 、 F 、 F_2) の離散主法線と見なすことができます。

次の補題は、ラプラシアンが法線マップ N にどのように準拠するか、および k_x 、 k_y の離散表記に基づいてDOGの離散平均曲率を定義する方法を理解する上で重要です。

LEMMA 6.6。 F をチェビシェフDOGネットの内部頂点とします。

DOGラプラシアン L は以下を満たします。

式(11)。

証明。付録D3を参照してください。

結果として、DOGがチェビシェフネットの場合、頂点 $L F$ (i) のラプラシアンが頂点法線 N (i) に平行であることがわかります。

ラプラシアンLは弱いラプラシアンで、面積がAの頂点の周りの積分量を $\int_A (k_x + k_y) dA$ の形式で表します。これは、補題6.6を使用して離散化できます。

その意味で、補題6.6は、ラプラシアン平均曲率が定理6.4に類似していることを示しています。

ここで、 K_1 、 K_2 は離散座標曲線の曲率です。

定義6.7。DOGネットの通常の曲率 K_1 、 K_2 は次のように定義されます。

式(12)。

定義6.8。DOGネットの平均曲率は $H = (K_1 + K_2) / 2$ です。

エッジの長さによってのみ誘導される重みを使用してスターの領域を定義し、定義6.2での平均化を回避することにより、必ずしもチェビシェフではなく、すべてのDOGネットの離散ガウスマップを正確に復元するラプラシアンを考案できます。

ただし、これを行うと、ラプラシアンLの重要な対称性 ($w_{ij} = w_{ji}$) が失われます。

滑らかなDOGはおおよそチェビシェフであるので、私たちの定義は正確に対称なラプラシアンを生成しますが、近似法線と平均曲率です。

次のセクションでは、滑らかな直交測地線ネットfがチェビシェフネットであるため、この小さな不一致が限界で解決されることを示します。

6.4 サンプリング下の収束

離散ガウスマップNによって誘導される平均曲率法線、離散H、およびラプラシアンLの離散平均曲率はすべて、サンプリング下で解析的な直交測地線ネットfの正しい滑らかな対応物に収束することを示します。

fを任意の解析的で滑らかな直交測地線ネットとし、 $p = f(x, y)$ を表面上の点とします。

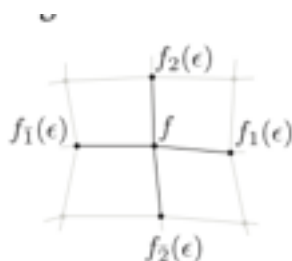
pの近くの点をサンプリングして、離散スターを生成できます。

$\varepsilon > 0$ とし、短縮形 $f(\varepsilon) = \{f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon)\}$ を定義します。

与えられた $\varepsilon > 0$ に対して、fの周りの星は必ずしもDOGスターではありませんが、 $\varepsilon \rightarrow 0$ [Rabinovichら2018]のように極限で1に収束することが示されました。

$N\varepsilon$ 、 $H\varepsilon$ 、 $L\varepsilon$ を離散ガウスマップとする上記で定義した平均曲率とDOGラプラシアン。

これらはすべて、次の定理によってサンプリングの下で収束します。



定理6.9。fが解析的な滑らかな直交測地線ネットである場合、以下が成り立ちます：

- (1)
- (2)。

証明については、付録Eを参照してください。

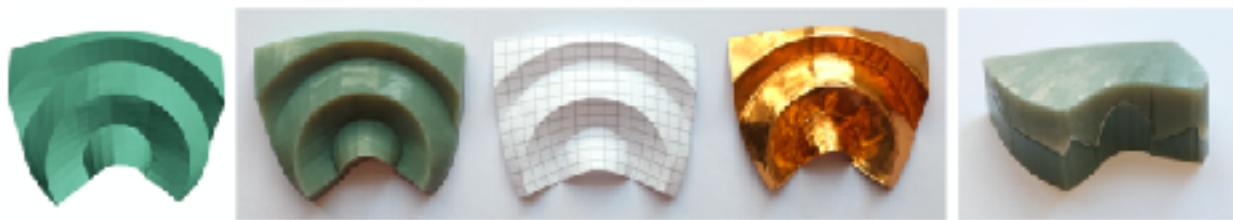


図1 3：湾曲した折り目(4つの同心円)を持つ表面の設計と製造。

左から右へ：レンダリングおよび3D印刷のために三角化されたDOGメッシュ。

3Dプリントされた「モールド」；金型によって手動で形成された長方形の紙とホイル；3Dプリントされた「サンドイッチ」で紙の形状を固定します。

長方形の紙シートがしわになることなくサンドイッチに完全にフィットすることに注意してください。これは、DOG表面が物理的な意味で合理的に展開可能であることを示しています。

フォイルシートは柔軟性が高く、取り扱い時に簡単に変形し、モールドの粗い三角形の印象も示します。

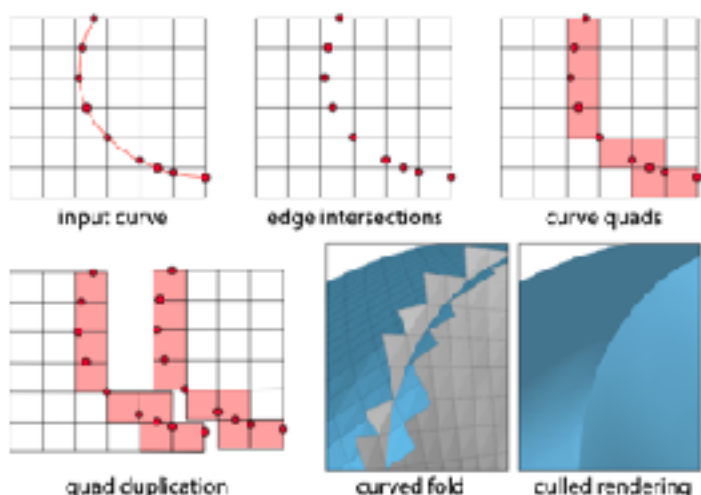


図1 4：DOGの折り目曲線。

サーフェス上のカーブは、メッシュエッジとの交差によって表されます。鋭い折り目をモデル化するために、曲線と交差する面を複製してメッシュを分割し、 C^0 連続性制約を追加します。曲線の折り目については、曲線に沿って平坦化条件も組み込みます。(曲線を平坦化とは？できなくな)レンダリングのために、複製された面の無関係な部分が間引かれます。

7 折り目と曲線折り

この時点まで、ラプラシアンメトリックと平均曲率ベースの目的（セクション6で言及され、セクション8.1で定式化されている）は滑らかな関数であるため、私たちの議論は展開可能なサーフェスの滑らかな変形の離散化に限定されていました。

このような変形を平面シートに適用すると、表面のみが曲がりますが、鋭い折り目は生成されません。これは、接線が非連続な、表面上の曲線です。

変形のセットを拡張して区分的に滑らかな展開可能なサーフェスをモデル化し、サーフェス上の任意のカーブに沿って接線の非連続性を許可します。

任意の折り目方向をサポートする簡単な解決策を探します。

したがって、表面上の曲線を、ネット上のエッジとの交点で表します： $c=\{c(1),\dots,c(s)\}$ （図14左を参照）。

各点 $c(i)$ は、ネット上の2つの頂点の線形結合です： $c(i)=tF(i_1)+(1-t)F(i_2)$ 、ここで $0\leq t\leq 1$ および i_1,i_2 は、エッジ頂点。

このカーブに沿った不連続性を可能にするために、メッシュをさらに分割し、カーブのエッジに接する面を複製し、両方のエッジ上の重複したポイント $c_1(i),c_2(i)$ を制約することによりネットの C^0 連続性を強制します 等しい座標を持つメッシュ（図14を参照）。

$c_1(i),c_2(i)$ は頂点の線形結合であるため、これは $\psi_i=c_1(i)-c_2(i)=0$ の形式の線形制約として定式化でき、アルゴリズム1の制約ヤコビアンJに追加されます。

レンダリングでは、カットを過ぎて折り曲線と交差する面の余分な部分をカリングしていることに注意してください（図14を参照）。

7.1 ローカル(局所的)平坦可能性条件

区分的に滑らかな可展面 f は、表面が C^1 ではない曲線 c_j に沿って交差する複数の滑らかな可展面 f_i で構成されます。

一般に、各パッチ f_i は平面上で平坦化できますが、そのような非連続曲線を共有する2つのパッチは、両方のパッチで同じ測地線曲率がない限り、一緒に平坦化できません[Kilianら2008]。

カーブ c_j の周りのすべてのパッチをローカル(局所的)に平坦化できる場合、 c_j は曲線の折り目または直線の折り目です。

後者は、 c_j が測地線である特殊なケースです。

私たちのフレームワークで湾曲した折り目をモデル化するには、複製された四角形のエッジ長の二次差にペナルティを課すか（図14右を参照）、またはセクション8で定義されている E_{iso} を使用します。

8 応用

アルゴリズム1を使用すると、滑らかな変換を使用して特定のDOG形状空間をローカルに探索できます。形状空間で適切な目的関数 $E(F)$ およびメトリックMを選択することにより、モデリングフレームワークに直接統合できます。

メトリックのベースとしてDOGラプラシアン \mathbb{L} を使用し、外因性、内因性、および接線（パラメータ化を制御する）項の加重組み合わせとして $E(F)$ を選択します。



図 1 5：複数の切り込みと直線の折り目を適用した後、平面シートから折り曲げられた切り紙。左側は厚い紙で作られた物理的なモックアップを示し、右側はシステムで設計された対応する DOG メッシュの物理ベースのレンダリングです。

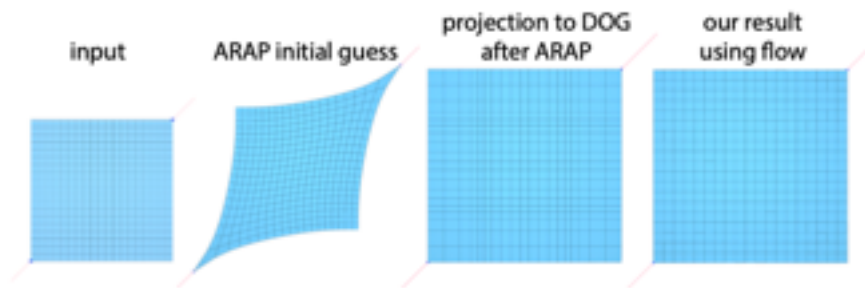


図 1 6：対角線上の2つの対角にあるポイントハンドルを移動して、対角線に沿って平面直交グリッドをストレッチします。

[Rabinovichら2018]のアルゴリズムは、ARAPを使用して初期推定を計算し、その推定を近くの DOG に投影します。

表面を強く伸ばすと、歪んだARAPの初期推測がDOGシェイプスペースから遠く離れて位置し、ジッターのある編集エクスペリエンス（付属のビデオを参照）と不均一なグリッドが発生します。対照的に、フローアルゴリズムを使用する場合、編集は時間的にスムーズであり、フローの目的のグリッド規則性のおかげでメッシュグリッドは均一に保たれます。

この単純な例では、DOGスペースへの投影を伴うフローに従っても、メッシュは変更されません。目的の流れで $wH = 1$ 、 $wuni-all = 0$ 、 $wiso = wuni-opp = 0$ 、 $wp = 0.5$ を使用しました。

8.1 目的関数

8.2 スムージングとサブディビジョン

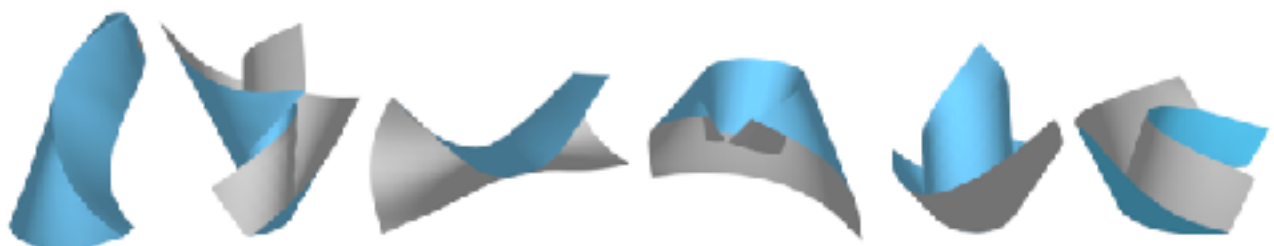


図 1 7：我々のポイントハンドルベースの編集システムを使って作成した離散可展面

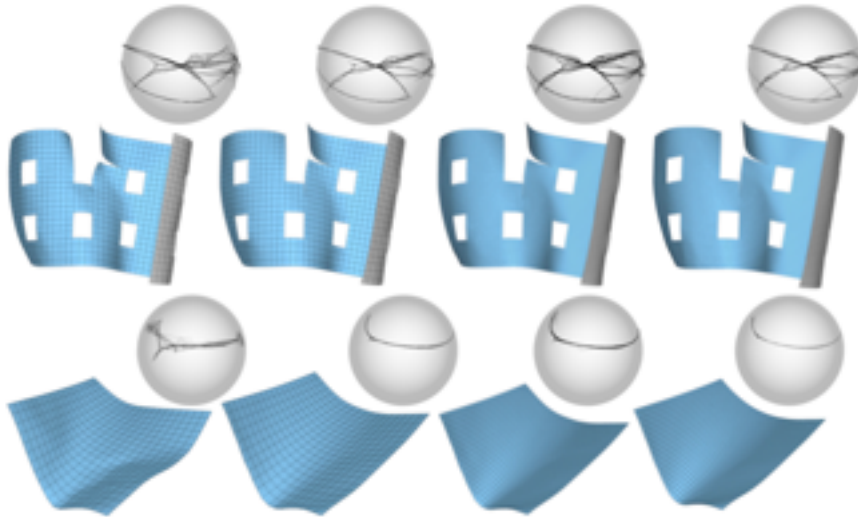


図 1 8：DOGネットとその離散ガウスマップ。

滑らかな直交測地線ネットのガウスマップの画像は、局所的に点または曲線であり、滑らかなDOGネットのガウスマップは、1次元に近いですが、直接最適化されていません。

左から右へ：入力DOGネット。下部の水平境界曲線にソフト制約を適用し、EHを最小化することにより、DOGを平滑化します。Catmull-Clarkサブディビジョンを適用した後のメッシュ。別のスムージング操作後の細分割メッシュ。ガウスマップが薄くなります。

8.3 フリーフォームの編集

フローを直接編集システムに組み込むことができます。

特に明記しない限り、このホワイトペーパーで作成した例は、目的の重み $w_H = w_{uni-opp} = 1$ 、 $w_{iso} = 0.1$ 、 $w_{uni-all} = 0$ 、 $w_p = 0.5$ を使用して生成されています。[Rabinovichら2018]と同様に、ルーリングの方向やその他のグローバルメッシュ情報に制約されない幅広いトポロジをサポートします。[Rabinovichら2018]の作業とは異なり、当社のシステムはストレッチ変形をスムーズかつ直感的に処理し（図16）、直線の折り目と湾曲した折り目（図1、13、17、15）をサポートし、スムージングとサブディビジョン操作を提供します（図18）。

8.4 曲線制約づけフロー

私たちのフレームワークは、位置の制約を伴う変形に関する興味深いバリエーションを提供します：表面上の曲線全体を制約することによって引き起こされる流れ。

セクション7のように、頂点の線形結合によって指定された、エッジ上の一連の点によって曲線を本質的に表します。

次に、曲線のターゲット位置を選択し、カーブの初期座標とターゲット座標間の補間を計算します。

曲線が変化すると、(DOG制約を満たすために)表面もグローバルに変化する必要があります。

剛体運動に対して不変のパラメーター化を使用して、曲線を幾何学的に補間します。

辺の長さ l 、内側(内部)頂点の曲率 κ 、およびすべての内側の辺 F_1-F 上のねじれ τ 、

$$\kappa = \frac{2\sin(\beta_1)}{||F_1 - F_1||}, \tau = \frac{\sin(\theta)}{||F_1 - F||} \quad (16)$$

ここで θ はエッジの頂点の接触面間の回転角です[Hoffmann 2009]。

ソースとターゲットの間の l 、 κ 、および τ の値を線形補間します。

回転不変表現をユークリッド座標に変換するには、剛体運動を指定する必要があります。これは、プロクラステスを使用して、メッシュ上の、前の曲線の座標に検出します。

私たちの曲線補間法は、[Sederbergら1993]の固有の2D曲線モーフィングを非平面の3D曲線に拡張したものと見ることができます。

最後のステップとして、曲線の再構築された位置をソフト位置制約としてフローアルゴリズムにフィードし、制約を補間しながら曲げとグリッドの規則性を最小化します(図19を参照)。

図1のフレーム4~8も、曲線拘束フローを使用して作成されました。

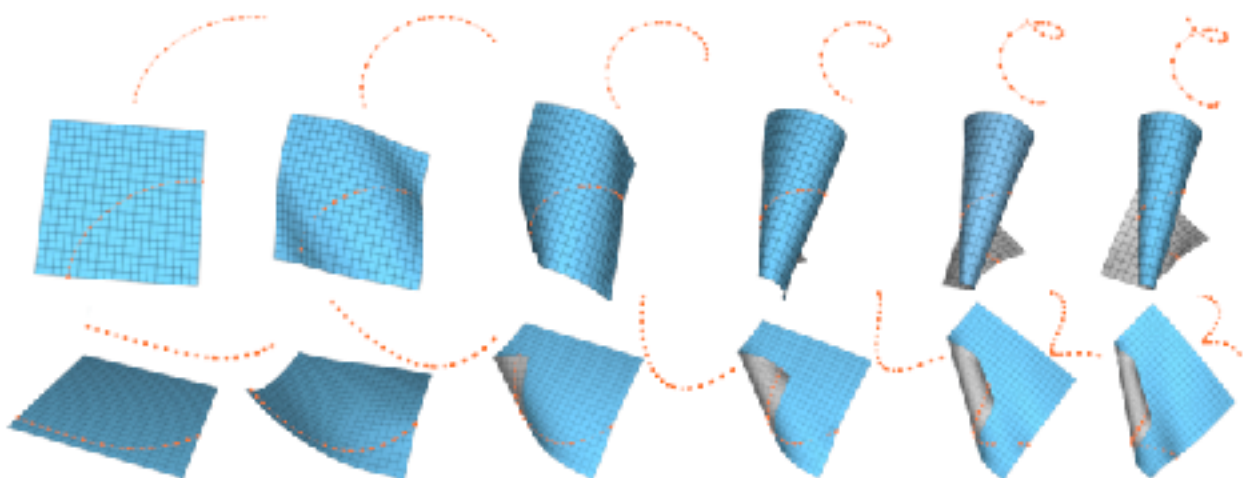


図19：位置を拘束する制約を用いて面上の曲線全体を固定することにより起こる曲線制約づけフロー。

最初に曲線を本質的に辺上の点の集合として表し、次に目的の曲線の位置を設計し、曲線の初期状態と目的状態の間の補間を計算します。

最後に、それぞれの補間フレームの曲線位置を、フローアルゴリズムのソフトな位置制約としてフィードし、曲げおよびグリッドの規則性の目的を最適化します。

9 結論と今後の課題

このペーパーでは、[Rabinovichら2018]で導入されたDOGモデルに基づいて、DOGネットを連続的に変形する離散理論とアルゴリズムを紹介します。回路制約グラフ（circuit constraints graphs??）を研究することによって制約勾配の線形依存性を分析する我々の手法は、非常に一般的である。そして、共役または円形ネットの空間などの他の形状空間を研究するために拡張できる可能性があります。我々の理論は穴のある接続性に適用されますが、**我々の形状空間解析は円筒形状には適用されません**。この制限は、補題4.14で使用されている、**円形の測地線が存在しない**という前提に基づいています。

(↓この表現わからん。。。)

DOGネットの高度に構造化された性質により、サンプリングの下で収束する特定のラプラシアン演算子を導出できます。将来の研究にとって興味深い手段は、離散微分幾何学におけるネットの様々なクラスのための他のラプラス演算子の研究です。

[Rabinovichら2018]と同様に、現在の作業の明らかなボトルネックは、インタラクティブな編集の速度です。これは、約1000頂点のかなり粗いモデルに制限されています。

そのようなメッシュでは、反復速度はLBFGS投影ルーチンによって支配されます。

ただし、メッシュの解像度を向上させるために、編集中にサブディビジョンオペレーターを同時に使用できることに注意してください。

もう1つの制限は、複雑な折り目パターンのサポートです。現在、**各折り目曲線は単純であり、メッシュ境界で開始および終了すると想定しており、交差する折り目および湾曲した折り目はモデル化しません**。

[Steinら2018]のルーリングベースの三角形モデルで行われているように、折り目交差の周囲の領域は三角形で離散化される可能性が高いため、このようなパターンをサポートするには特別な処理が必要です。

同じ研究に触発され、DOGの理論を区分的に展開可能な表面を使用した任意の形状の近似に適用することは、今後の研究として残します。

APPENDIX

A

あああ

あああ