

# Discrete Geodesic Nets for Modeling Developable Surfaces

MICHAEL RABINOVICH, ETH Zurich TIM HOFFMANN, TU Munich

OLGA SORKINE-HORNUNG, ETH Zurich

ポイント

【離散測地ネットをパラメータ化して、可展面をモデリングする】

- ・ルーリングは不要
- ・トポロジに依存しない（切り込みあっても大丈夫：メビウスの輪など）

## Abstract

単純な角度制約を満たす四辺形メッシュとして可展面をモデリングするための、離散理論を提示します。本稿では、直交測地線を通じて可展面をパラメーター化し、定式化することが目的です。これは、既存のものと異なり、表面のルーリングを直接エンコードしません。よって、ねじれおよび平面パッチまたは表面トポロジーへの分解とは無関係に、離散可展面の連続変形をモデル化できます。滑らかな対応物のすべてのサンプリングが2次までの制約を満たすという定理を含め、滑らかな可展面との強いつながりを証明します。さらに、離散等尺性の局所的な定義を可能になるように、モデルを拡張します。可展面編集システムでの離散モデルの有効性と、等尺性を持つように、離散的な可展形状間の補間計算を示します。



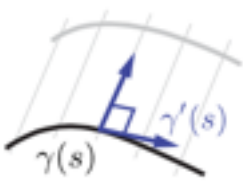
図1：可展面の離散モデルを提案します。私たちのモデルの強みはその局所性であり、表面のトポロジーまたはそのねじれ展開可能なパッチへの分解に制限されることなく、さまざまな可展面の変形を実現します。我々の編集システムでは、フリーフォームのハンドルベースの編集、カットと接着、閉じた方向のないサーフェスのモデリング、平面、円柱、円錐、接線の展開可能なパッチ間のシームレスな移行などの操作をすべて統一された方法で行うことができます。

# 1 Introduction

等尺性の概念は、表面の研究の中心です。2つのサーフェスは、一方を曲げることによって取得でき、もう一方が伸縮しない場合、等尺です。変形マップはアイソメトリと呼ばれ、アイソメトリに対して不変であるサーフェスのプロパティは固有プロパティと呼ばれます。局所的アイソメトリは、表面上のある点の近傍での、そのようなマッピングです。

平面に対して局所的に等尺であるサーフェスは、可展面と呼ばれます。現実の世界では、これらの表面は、薄い平らな材料のシートを曲げることによって形成できるため、製造（Pérez and Suárez 2007）、建築（Shelden 2002）、芸術（Wertheim 2004）で特に魅力的です。その結果、フリーフォームの可展面の設計は、数十年の間、コンピュータグラフィックス、コンピュータ支援設計、および計算折り紙で活発な研究トピックとなっています。

私たちの仕事の範囲は、設計と製造のパイプラインに適用できる、変形による可展面のモデリングです。これは、曲線の入力セットを通過する可展面と、可展面による形状近似を計算する等高線補間作業（Frey 2004; Rose et al. 2007）とは対照的です（Chen et al. 1999; Pottmann and Wallner 1999）。私たちの目標は、 $C^0$ 折り紙のような折りたたみや折り目ではなく、平面シートの円錐への回転や曲げなどの滑らかな変形をモデル化することです（Tachi 2009）。



滑らかな可展面は微分幾何学でよく研究されており（do Carmo 1976）、ガウシアン曲率が消失しているサーフェス、または各ルーリングに沿って一定の法線を持つルールドサーフェスとして特徴付けられることがよくあります。

与えられた滑らかな可展面 $S$ は、単一の曲線とその直交するルーリング（挿入図を参照）によって局所的に表すことができるため、規則的な表面として自然に離散化できます。このため、多くの個別の可展モデルは、ルーリングを明示的にエンコードします

（Bo and Wang 2007; Liu et al. 2006）。ただし、可展面のインタラクティブなモデリングに関しては、この表現には制限があります。このプロセスでは、ユーザーは最初の可展面 $S_0$ 、たとえば平面サーフェスから開始し、インタラクティブに操作して目的のサーフェス $S$ を取得します（図1および2を参照）。出力サーフェスは必ずしも正確に事前に認識されている必要はないため、このインタラクティブな設定で、達成可能な可展面の空間全体を探索したいと考えています。Tangら（2016）が述べるように、表面表現にルーリングを明示的に含めると、 $S_0$ の可能な変形のスペースが制限されます。**ユーザーの視点から見ると、局所的なルーリングを編集するよりも、局所的にポイントハンドルを操作してサーフェスを編集の方が直感的です。**このような展開可能な形状空間の探索は、可展性

のあまり知られていない局所的な条件を離散化することによって可能になります：直交測地線パラメーター化。ルーリングではなく不変量を調べることにより、可展面アイソメトリを理解する別の方法を提案します。

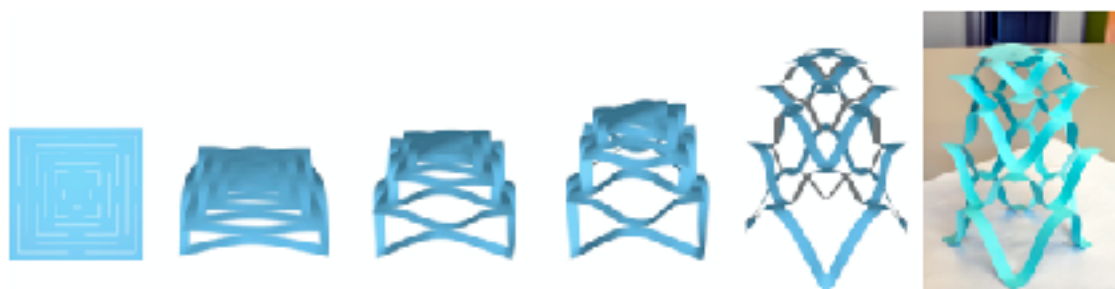


図2：ランタン型の可展面。離散モデルが、簡単なトポロジで可展面をシームレスかつ簡単にモデル化できる方法を示します。この図は、正方形のシート（左）の交互のカットパターンから作成されました。中央の形状は、中央の頂点を引き上げ、コーナーを初期平面に固定することで形成されました。右：同じカットパターンの紙で作られた物理モデル（角をテーブルに接着し、細い糸を使って中心点を持ち上げました）。

## 1.1 Contributions

—離散直交直交測地ネットを導入して、角度制約のある四辺形ネットとして可展面をモデル化します。私たちの条件は単純で局所的であり、モデルはルーリングの明示的なエンコードや**表面トポロジに依存していません**（どーゆー意味??）。

—このモデルを使用して、UIとしてポイントハンドルを備えた可展面用の編集システムを構築します。当社のシステムは、**従来の方法とは異なり、可展性を維持しながら広範囲の形状間をスムーズに遷移でき、ユーザーが未知の形状の全体的なルーリングやその他の全体的な構造を指定する必要がありません。**

—新しい離散モデルをさらに研究し、平行線を描画して滑らかな可展面にします。2次までのスムーズなケースで離散制約が満たされていることを証明し、モデルの自由度を分析し、接線や法線などの量を離散化し、局所的なスキームを提案して、ルーリングを近似します。曲率線のパラメーター化、測地線のパラメーター化、および可展面をリンクする既知の連続定理に離散類似体を定式化して証明します。

—離散4Q直交測地線と呼ばれるネットの一般化を導入します。これにより、表面間の局所的な離散等尺性を定義できます。等尺的に展開可能な形状間のアイソメトリック補間を計算することにより、このような4Qネットの有効性と柔軟性を実証します。

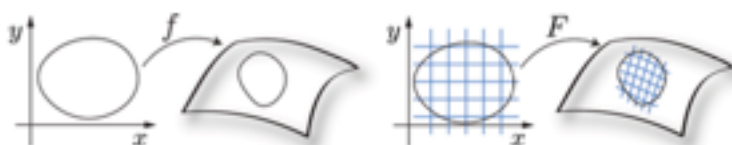


図3：滑らかなネット  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  と離散ネット  $F: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^3$

## 2 Preliminaries

### 2.1 Nets in Discrete Differential Geometry

離散微分幾何学における以前の作品の精神 (Bobenko and Suris 2008; Crane and Wardetzky 2017; Desbrun et al. 2005) では、可展面を、ネットと呼ばれるクアドグリッドメッシュとして離散化します。スムーズなパラメーター化の離散アナログ (しばしばスムーズネットと呼ばれます)。このアプローチは、一定のガウス曲率サーフェス (BobenkoおよびPinkall 1996; Wunderlich 1951)、最小サーフェス (Bobenko et al. 2006)、等温サーフェス (BobenkoおよびSuris 2009) など、さまざまなサーフェスタイプを離散化および構築するために以前に採用されました。**滑らかな表面がパラメーター化  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  によって局所的に表現できるのと同様に、離散表面は離散マップ  $F: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  によって局所的に表現できます (図3)。**この構造ビューは、接線、法線、サーフェス変換などのサーフェス上の滑らかな概念と離散的な概念の間の変換、および離散的なサーフェスの構築と連続する対応物への収束の分析に使用できるため、特に魅力的です。滑らかな微分幾何学の定理の離散類似体は、ネットのコンテキストで体系的に研究されています。Bobenko and Suris (2008) のレビューを参照してください。

同じ滑らかな表面は、多くの異なるパラメーター化またはネットで表すことができ、一部は他よりも便利です。これらは通常、座標曲線  $f(x_0 + t, y_0)$ 、 $f(x_0, y_0 + t)$  のプロパティによって異なります。代表的な例には、座標曲線が主曲率線である曲率線ネットと、座標曲線が表面の漸近方向をトレースする漸近ネットがあります。さまざまなネットを選択する自由は離散設定にも存在し、通常、サーフェスの離散モデルは特定のパラメーター化と結合されます。たとえば、離散最小表面は曲率線ネットを介して定義され、離散定数負ガウス曲率表面は漸近線のネットを介して定義されています (Bobenko and Pinkall 1996; Bobenko et al. 2006)。パラメータ化の各選択は、 $F$  の値、つまりネットの頂点の位置に関して定式化された、離散表面上の特定の条件を意味します。

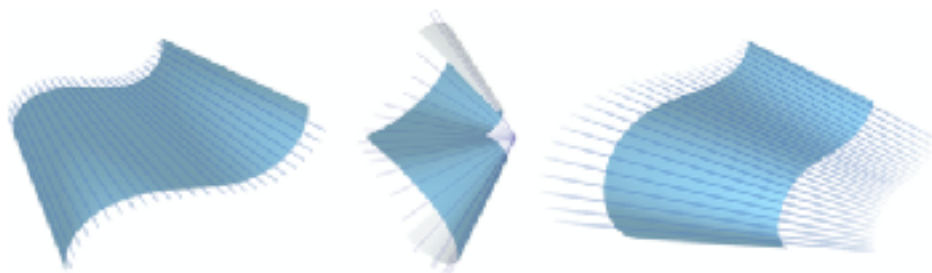


図4：異なるタイプの可展面とそのルーリング。(左) 平行なルーリングを持つ円筒形。(中央) 円錐形の一点へルーリングが集まる。(右)。タンジェント可展面、ここではルーリングの端点は同一曲線上にある。



## 2.2 Developable Surfaces through Conjugate Nets

可展面 $S$ 上の非平面点 $p$ の近傍は、表面に含まれる直線であるそのルーリングによって局所的にパラメーター化できます。これは、 $p \in U$ と $U$ のすべての点が

$$x(s, t) = \gamma(s)tr(s)$$

によってパラメーター化されるような近隣 $U \subseteq S$ が存在することを意味します。ここで、 $r(s)$ はルーリングの方向ベクトルに対応し、パラメーターを修正します。 $t$ は、表面上に、消滅しない曲率 $\gamma(s)$ を持つ別の曲線を与えます。そこから決定が発せられます。

サブセット $U \subseteq S$ は、背側表面と呼ばれます。胴体表面は、そのルーリング方向に基づいて分類できます。それらが平行である場合、それは円筒形であると言われます。それらがすべて1つの点で交差する場合、それは一般化された円錐です。それ以外の場合は、いわゆるタンジェントサーフェスです（図4を参照）。

ルーリングによる可展面のパラメーター化は、展開可能な共役ネットと呼ばれます（Liu et al. 2006）。前のステートメントを明確にするために、より一般的なコンテキストでの共役ネットの定義について詳しく説明します。ここで、 $f$ は、必ずしも展開可能ではない滑らかなネットです。

$$\langle n_x, f_y \rangle = 0, n = \frac{f_x \times f_y}{\|f_x \times f_y\|}$$

の場合、滑らかなパラメーター化 $f$ は共役ネットです。ここで、 $n$ は $f$ の法線マップであり、添え字は添え字の座標に対する微分を表します。この場合、接線 $f_x$ 、 $f_y$ は共役方向と呼ばれます。この条件は、 $f_{xy} \in \text{span}\{f_x, f_y\}$ と同等です。直感的に、このようなパラメーター化では、パラメーター領域内の非常に小さな正方形が、2次までの表面上の平面四角形にマッピングされます。したがって、平面クワッドメッシュは共役ネットの離散化と見なされます（Bobenko and Suris 2008）。曲率線ネットは共役ネットの特殊なケースであることに注意してください。可展面の場合、法線 $n$ はルーリングに沿って一定です。したがって、ルーリングを通じてパラメーター化された展開可能なネットは、実際には共役ネットです。共役展開可能ネット用に確立された離散モデルは、平面クワッドストリップです（Liu et al. 2006; Pottmann and Wallner 2001; Sauer 1970）。

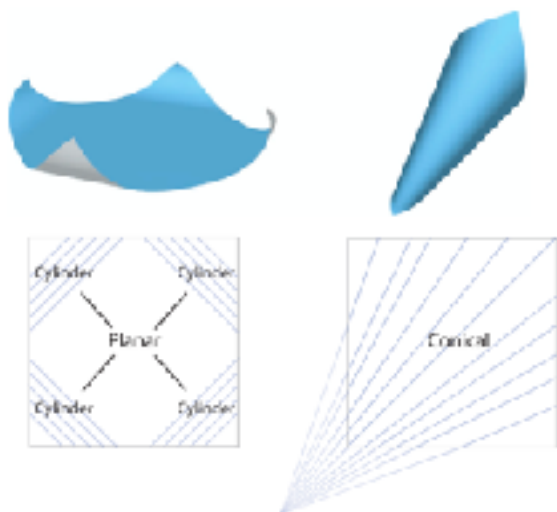


図5：下の行に示されているように、異なる形状の背側表面で構成される2つの等尺形状（上の行）。私たちの方法は、可展面のこの組み合わせ構造の明示的なエンコーディングに依存せず、ユーザーからの追加の入力なしで形状間の遷移をシームレスにモデリングできます。

## 2.3 The Combinatorics of a Developable Surface

展開可能なサーフェスに平面パーツが存在する可能性があるため、それらの表現がさらに複雑になります。一般的な展開可能な表面は、（場合によっては無限の）背骨と平面パッチの構成です。Liuら(2006)とKilianら(2008)の作品は、離散共役ネット、つまり、横方向の四角形のエッジによってルーリングが明示的に与えられている平面四角形のストリップによって、胴体表面をモデル化します。したがって、Kilianら(2008)、Liuら(2006)、Tangら(2016)の離散表現は、互いに接続されて離散可展面を形成する複数の離散的な背側パッチから構成されます。それらのパッチ間の接続性は、分解コンビナトリクスと呼ばれる組み合わせ構造によって表されます（Tangら2016）。Tangら(2016)で述べたように、この固定された組み合わせ構造は、ユーザーがモデル化された可展面の前記組み合わせ構造を手動で指定する必要があり、異なる組み合わせ分解間のスムーズな遷移をモデル化することはできません。この問題を組み合わせ問題と呼びます（図5を参照）。

## 2.4 Developable Surface Isometry

可展面編集システムの一般的なタスクは、等尺性のモデリングです。これは、サーフェス上の距離を維持する非ストレッチ変形です。展開可能な表面の形状空間内にとどまりながら形状をモデリングおよび編集することに関心があるため、共役または曲率線による表面表現は、次に説明するように、等高線の下で不変ではないため、このアプリケーションには適していません。

可展面を等尺性を維持して平面に展開すると、そのカーブの本来の形状が明らかになります（図6を参照）。以下では、平坦化された等尺平面バージョンの隣に可展面を表示し、それによって平坦化されたカーブのジオメトリをカーブの固有ジオメトリと呼ぶことがよくあります。たとえば、可展面の測地線は、本質的に直線の曲線です。曲線の固有の形状は、測地線の曲率 $\kappa_g$ によって決定されます。等曲率では変化しません。例として、円柱のすべての曲率線は本質的に直線であり、円錐の場合、それらは同心円のファミリーであり、単一の点から発せられる放射状の直線です（図6を参照）。ルーリングとその共役方向は等尺投影によって変更されますが、等尺図では常に測地線を測地線に、固有円を同じ測地線の曲率の円にマッピングします。したがって、2つの可展面上の共役曲線間のマッピングに基づいて、離散アイソメトリを妥当に定義することはできません。

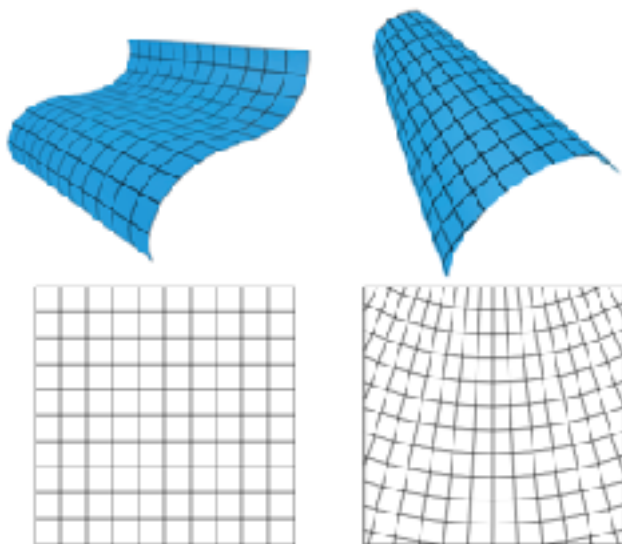


図6：曲率線のパラメーター化における2つの等尺性の可展面（円柱面と円錐面）、および曲率線の固有のジオメトリを明らかにする、等尺性を維持して平坦化されたもの（下の行）。これらの線のファミリーは本質的に異なり、1つのファミリーから他のファミリーへのアイソメトリックマッピングはありません。

## 2.5 Developable Surface through Orthogonal Geodesic Nets

対話的な編集目標により適しており、離散アイソメトリを定義するためのより自然な出発点である、可展面の異なるタイプのパラメーター化を検討することを提案します。正方形のグリッドテクスチャの平らな紙を取り、紙を湾曲させて回転させながら正方形の頂点を観察することを想像してみてください。平面として始まった正方形は変形しますが、紙を引き裂いたり伸ばしたりしない限り、すべての点間の固有の距離は同じままです。これは私たちのモデルに似ています。固有エンティティを介して可展面の離散モデルを提案します。測地線は、アイソメトリの下で不変です。座標曲線が表面上の測地線をトレースする場合、ネットfは測地線ネットです。可展面では、測地線は平面に展開すると直線になります。固有線の方法を自由に選択できるため、長方形のグリッドのように、それらを最も単純な形式（直交）に設定します（図7を参照）。ルーリングや共役方向ではなく測地線を使用することで、前述の組み合わせの問題を克服し、そのような表面の離散等尺性の概念を定義できます。

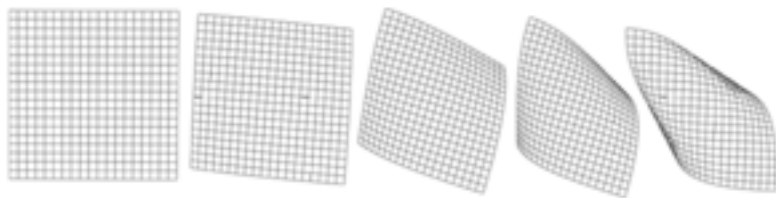


図7：平面をローリングして円形コーンになる過程の直交測地線

## 3 Related Work

### 3.1 Developable Surfaces

平面の局所的 $C^2$ アイソメトリーによって形成される表面の理論は、微分幾何学の文献 (do Carmo 1976; Spivak 1999) でカバーされており、18世紀のオイラーとモンジュの作品 (Lawrence 2011) までさかのぼります。ガウスの定理Egregiumとミンディグの定理を組み合わせると、 $C^2$ 可展面はガウス曲率がゼロのサーフェスであることがわかります。これは、直感的に、ガウスマップの画像が曲線または点であることを意味します。もう1つの視点は、可展面を特殊なルールドサーフェス、つまり、ルーリングに沿って一定の接線を持つサーフェスとして特徴付けることです (Pottmann and Wallner 2001)。したがって、可展面は、局所的には平面または背側の表面です。捻転面は単一の曲線で作成できます。たとえば、曲率線カーブとその平行ビショップフレーム (Bishop 1975) または測地線とそのフレネットフレーム (Graustein 1917) を介して捻転面を通過させることができます。

$C^1$ と $C^0$ の可展開面の研究は、ハフマン (1976) とワートハイム (2004) の美しいモデルと研究に触発され、さらに最近では計算折り紙 (Demaine and O'Rourke 2007) の分野に触発された、はるかに新しい領域です。直線および曲線の折り目によって作成された形状を調べます。まっすぐな折り目は、紙の線を通る $C^0$ 折り目です。これらの折り目を繰り返し適用することで作成される形状は、区分的に平面です (Demaine et al. 2011)。湾曲した折り目は、紙の任意の曲線を通る $C^0$ 折り目です。カーブによってサーフェスを2つの部分に分割し、カーブの片側でサーフェスを折りたたむと、他の部分の形状が局所的に決まるため、これらはまっすぐな折りたたみよりも堅固です (Kilian et al. 2008)。

滑らかな可展面の研究は本質的に分析的ですが、折り紙の折り目の研究は本質的に組み合わせです。前述のように、私たちの仕事は滑らかな変形のモデリングに焦点を当てています。

### 3.2 Modeling with Developable Surfaces

可展面の変形に関する作業は、大きく幾何学と物理学に基づいて分類できます。

幾何学的なアプローチは、紙や金属板などの物理的な表現とは関係ありません。彼らは主に滑らかな展開可能な表面の形状を考慮し、離散化します。これらの作品の基礎は、離散展開可能表面モデル、つまり、離散展開可能表面のセットの正確な定義です。定義は、滑らかな表面の重要な特性をキャプチャしながら、ユーザーが幅広い形状を探索できるように十分に柔軟でなければなりません。Liuら (2006) とKilianら (2008) の作品は、展開可能な共役ネットの離散化である平面のクワッドストリップとして背側表面をモデル化



しています。Tangら（2016）では、著者らは滑らかな背側表面を展開可能なスプラインとしてモデル化しています。これらは、ルーリングに沿った一定の法線を保証する二次方程式のセットを満たす2つのベジェ曲線を接続するルールドサーフェスとして表されます。BoとWang（2007）の仕事は、単一の測地線とそこから発するルーリング、つまり曲線の修正可能な展開曲線によって、胴体表面をモデル化しています。Hwang and Yoon（2015）の仕事は、円錐と円柱への連続的なマッピングによって開発可能物を構築します。上記のすべての作業は、一般的な展開可能な表面を複数のねじれ面の構成としてモデル化し、明示的に罫線をエンコードし、セクション2.3で説明した組み合わせ問題を共有します。さらに、図6で説明されているように、これらのアプローチでは、構造上、円柱と円錐などの異なるねじれ形状間のアイソメトリをモデル化できません。これらの欠点の詳細については、読者にTangら（2016）のセクション7の「制限」および「今後の作業」の段落を参照してもらいます。

Solomonら（2012）の作品は、ユーザーがシートの許容可能な折り目の非常に非線形な空間をナビゲートできるようにする、可展面の折り紙ベースの編集システムを示しています。平均曲率曲げエネルギーを使用することにより、ユーザーはさらに折り目を緩めるように要求でき、より滑らかに見えるが、常に区分的に平坦な表面になります（Demaineら2011）。グローバルフォールドに依存しているため、このメソッドは、前述の作品と同様の決定に対する依存関係を共有します。これもユーザーインターフェイスを複雑にします。私たちの提案は、これらのすべての作業のフォローアップと見なすことができ、判決への依存を取り除き、広範囲の形状間をスムーズに補間できる離散等尺性の概念を追加します。

幾何学モデルとは対照的に、物理学ベースのモデルは固定された参照面と結合されます。エネルギーの最小化を通じて材料の動作をモデル化し、力を加えたときに物理的形状のアイソメトリをシミュレートします。異性体は、サーフェスを展開可能に維持する一連の変形のごく一部にすぎません。これにより、展開可能なサーフェスを設計するときにユーザーが制限されます。これは、目的の平坦化された形状の形状が必ずしも事前にわかっている必要がないためです。物理学ベースの方法は、離散的な展開可能な表面の正確な概念を定義しておらず、制約を逸脱することなく、展開可能な表面の形状空間全体を探索することも目指していません。これらの作品の焦点は、弾性シミュレーション（Burgoonら2006）や紙のしわや破れ（Narainら2013; Schreckら2015、2017）などのオブジェクトの物理学です。フラットシートから開始して弾性エネルギーのストレッチ成分に非常に高いペナルティを設定すると、展開可能なサーフェスの異性体は、離散シェルモデル（Fröhlich and Botsch 2011; Grinspunら2003）によって間接的に概算できます。English and Bridson（2008）の研究では、「ゴースト」適合メッシュと組み合わせた非収束要素を使用して、展開可能な表面の近似等角図をアニメーション化しています。私たちは、物理学ベースのアプローチを幾何学モデルの接線と見なし、それらはまた、新しい離散表面モデルから利益を得る可能性もあります。

### 3.3 Developable Surfaces in Discrete Differential Geometry

セクション2で述べたように、Liuら（2006）の作業では、共役四角形ネットを介して展開可能な表面を平面四角形ストリップとして離散化します。対照的に、提案された離散化は直交測地線を介して行われます。これは、展開可能な表面の変形や等角投影をモデル化するとき特に便利です。私たちの離散化は、離散測量サーフェスでもあるWunderlich（1951）の作業に触発されました。これは、測地線でもある共役線を通じてパラメータ化されたサーフェスです。Vossサーフェスには、必ずしも展開可能ではないサーフェスが含まれます。このようなネットは実際には円筒形であるため、共役直交測地線を使用したモデリングは非常に制限されます。したがって、モデルのベースとして、Wunderlichによって設定された測地線ネットの同じ概念を使用しますが、共役要件を削除します。これは、モデルで非平面の四角形を使用できることを意味します。この概念は、多面体表面の測地線を離散化するPolthier and Schmies（2006）の作業と同様に、測地線をできるだけ直線の曲線として強調します。Hoffmannら（2017）の作業は、単純な制約によって結合された点と法線を含むエッジ制約ネットを導入することにより、さまざまな離散表面パラメータ化を統合します。これにより、オフセットサーフェスに基づくガウス曲率の離散定義を含む、R3の新しい離散パラメータ化表面理論が得られます。ガウス曲率が消失しているエッジ制約ネットは、離散展開可能サーフェスと見なされます。著者は、その作品に示されているそのような開発可能なネットの唯一の例は、単一のシュヴァルツランタン以外に、支配に基づいていることに注意しています。DDGのいくつかの作品は、共役測地線が保存されているVossサーフェス（Schiefら2008）のような特定のクラスのサーフェスの離散等角投影をカバーしています。展開可能な表面アイソメトリの全範囲をカバーする方法については知りません。前述のように、開発可能なVossサーフェスは、開発可能なサーフェスの限られたサブセットのみを形成し、アイソメトリ定義はこのサブセットを包含し、直交測地線パラメータ化における一般的な開発可能なサーフェスをカバーします。



図8：四辺形のシフト表記（左）とスター（真ん中）、エッジ方向とスターアングル（右）。

## 4 Notations and Setup

セクション2で軽く触れたように、連続マップを小文字、離散マップを大文字で示します。表記 $f(x, y) : U \rightarrow \mathbb{R}^3, U \subseteq \mathbb{R}^2$ は滑らかな面の(局所的な)規則パラメータ化を意味し、 $n(x, y) : U \rightarrow S^2$ はその法線マップです。座標 $x$ および $y$ に関する導関数は、下付き文字で示されます。たとえば、接線ベクトル $f_x, f_y$ および法線 $n_x, n_y$ の導関数です。座標線の単位接線を $t_1 = f_x / \|f_x\|, t_2 = f_y / \|f_y\|$ で表します。これらは $f$ が没入であるため、線形独立です。

局所的パラメータ化 $f$ の自然な離散アナロジーは、マップ $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ で、 $V \subseteq \mathbb{Z}^2$ です。 $F$ を離散ネットと呼び、同様に $N : V \rightarrow S^2$ は離散ガウスマップを示します。離散単位の接線は $T_1, T_2$ で表されます。これらの量は、特定の設定、つまり離散測地網に対して以下で定義します。

離散微分幾何学で慣例であるように、ネーミングを少し乱用し、シフト表記を使用してネット上の頂点位置を参照し、

$$F = F(j, k), F_1 = F(j+1, k), F_2 = F(j, k+1),$$

$$F_{12} = F(j+1, k+1), F_{\bar{1}} = F(j-1, k), F_{\bar{2}} = F(j, k-1),$$

を示します。ここで、 $j, k \in \mathbb{Z}$  ( $\mathbb{Z}$ で整数だよ)、つまり、低いインデックスはシフトする座標番号を示します。そしてその上のバーは負のシフトを示します(図8を参照)。点 $F$ から発生するエッジの単位長方向は、 $\delta_1 F, \delta_2 F, \delta_{\bar{1}} F, \delta_{\bar{2}} F$ 、つまり

$$\delta_1 F = (F_1 - F) / \|F_1 - F\|, \delta_{\bar{1}} = (F_{\bar{1}} - F) / \|F_{\bar{1}} - F\|$$

$$\delta_2 F = (F_2 - F) / \|F_2 - F\|, \delta_{\bar{2}} = (F_{\bar{2}} - F) / \|F_{\bar{2}} - F\|$$

として表されます。 $F$ でのスターの周りの内角を $\alpha_i$ として表し、連続的に並べます(図8を参照)。私たちのネットは**離散埋め込みであると想定しています。これは、エッジ方向 $\delta_i F, \delta_{\bar{i}} F$ が異なることを意味します。**実際には、離散ネットを純粋なクアッドグリッドメッシュとして表し、すべての内部頂点の価数は4です。内側の頂点、その4つの隣接点、およびその4つの放射するエッジをスターと呼びます。私たちの離散ネットは、メッシュ上のグローバルな方向を必要とせず、想定もしていません。シフト表記は、四角またはスターごとにローカルの任意の方向のみを必要とし、便宜上使用されます。

## 5 Discrete Orthogonal Geodesic Nets

$F$ に条件を定義することに関心があります。つまり、直交する測地線によってパラメータ化された離散可展面を表すように、メッシュの頂点の位置に条件を定義します。以下では、次の条件に到達するために必要な定義とそのプロパティを開発します。

定義1：

離散ネットFは、すべてのスターについて、連続するエッジ間のすべての角度が等しい場合、すなわち、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$ である場合、**離散直交測地線ネット**と呼ばれます。

表記については、図8を参照してください。上記の条件の理論的根拠を開発するために、最初に滑らかに展開可能な測地線ネットを調べます。

## 5.1 Smooth Developable Geodesic Nets

測地ネットはどのような状況で展開可能なのでしょうか？ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を測地ネット、

$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 \leq x \leq x_1, y_0 \leq y \leq y_1\}$ を軸合わせ長方形とする。長方形はfによって

「カーブドレクタングル」f(P)にマップされる。 $\theta_j, j = 1, \dots, 4$ をf(P)の頂点における内部角度とし、それぞれのタンジェント方向の間の角度として測定される。つまり、 $\theta_1 = \angle(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ である。

### 補題5.1

測地線ネットfは、全ての軸合わせ長方形 $P \subset \mathbb{R}^2$ について、マッピングされた曲線長方形（カーブドレクタングル）f(P)の角度が次の条件を満たす場合にのみ展開可能です  
 $\sum_{j=1}^4 \theta_j = 2\pi$  (1)。

証明：（省略）

### 帰結5.2

直交測地線ネットf、つまり $\angle(t_1, t_2) = \frac{\pi}{2}$ である測地線ネットは展開可能ネットです。

平面領域 $U \subseteq \mathbb{R}^2$ のアイソメトリfは、平面の規則的なグリッドを直交測地線にマッピングするので、直交測地線です。したがって、反対も成り立ちます：すべての展開可能なネットは、直交測地線ネットによってパラメータ化できます。これは以下の結果によって要約されます：

### 結果5.3

滑らかな表面は、それが直交測地線によって局所的にパラメータ化できる場合にのみ展開可能です。

これで、離散測地ネットとそれらの直交性の同等条件の導出について説明する準備ができました。

## 5.2 Discrete Geodesic Nets

我々のモデルの基本として、以下の定義を用います：

### 定義 2

離散ネットFは、ネット内のスターの辺によって作られる各2つの対角が等しい場合に離散測地線ネットである。（図9を参照）

これは、Wunderlich（1951）がVossサーフェスを離散化する作業で設定した定義の修正です。これは、共役測地線を通じてパラメータ化されたサーフェスです。

Wunderlich（1951）によると、離散ネットFは、定義2の角度条件を満たす平面クワッドネットであれば、離散Vossサーフェスです。必ずしも共役ではない測地線を離散化することに関心があるため、平面性の制限を削除します。

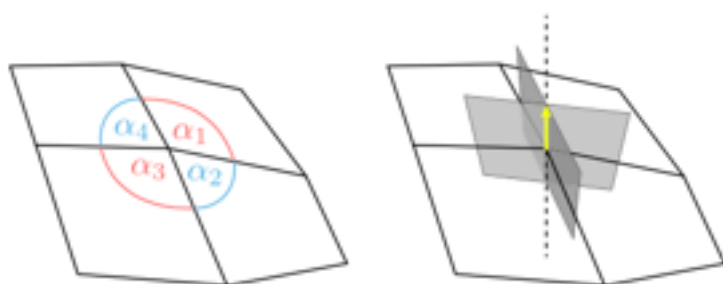


図9：左：個別の測地線ネットのスターは、等しい対角を持っています。右：測地線スターでは、離散座標曲線の接触平面の交点が表面法線です。

直感を得るには、ポリライン  $(F_1^-, F, F_1)$  と  $(F_2^-, F, F_2)$  を、点Fを通る2つの離散座標曲線と見なします。測地線は「可能な限り直線」であり、両側の  $\pi$  からの角度偏差を均等に分割します。つまり、最初の曲線では  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$  で、2番目の曲線では  $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_1$  です。ここで、 $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  はFのスターの周りの角度です（図9を参照）。定義2の場合と同様に、これら2つの条件は、 $\alpha_1 = \alpha_3$  および  $\alpha_2 = \alpha_4$  と同等です。

離散測地線ネットの接線と法線を、それらの（離散）座標線を介して定義し、連続する対応物の特性を模倣します。滑らかな測地線ネット  $f$  上で、 $p = f(x_0, y_0)$  をある点とし、 $r_1(t) = f(x_0 + t, y_0)$ 、 $r_2(t) = f(x_0, y_0 + t)$  を  $p$  を通る座標線とする。曲線  $r_1$  と  $r_2$  は、線形独立の2つの方向  $r_1'(0) = f_x$ 、 $r_2'(0) = f_y$  で  $p$  から発生する測地線です。 $r_1(t)$  が規則的でかつ0で非縮退の場合、つまり  $r_1'(0), r_2'(0) \neq 0$  である場合、明確に定義されたフレネ フレーム  $\{t_1, n_1, b_1\}$  と、 $t_1, n_1$  がまたがる接触面  $\Pi_1$  があります。 $r_1(t)$  の測地線曲率はゼロであるため、その曲率は表面の法線曲率に等しく、これは曲線の法線が実際に  $p$  での表面法線に平行であることを意味します： $n_1 \parallel n$  ( $n = t_1 \times t_2 / \|t_1 \times t_2\|$ )。  $r_2$  にも一次および二次導関数がある場合、表面法線  $n$  は2つの接触平面  $\Pi_1, \Pi_2$  間の交線に平行です。離散測地線ネットFのこれらの量の自然離散モデ



ルを見つけることができます。Fを離散測地線ネット上の頂点とし、 $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$ をそれぞれ  $F\bar{1}$ 、F、 $F1$ および $F\bar{2}$ 、F、 $F2$ を通る離散測地線とする。3つの点 $F\bar{j}$ 、F、 $Fj$ が同一線上にない場合、曲線 $\Gamma_j$ は非縮退であると言います。その場合、接触面とフレネットフレームを定義できます。

### 定義3

頂点 $Fj$ を通る非退化離散曲線 $\Gamma_j$ の接触平面 $\Pi_j$ 、 $j = 1, 2$ は、これらの3つの点を通る平面です。Fにおける $\Gamma_j$ のフレネットフレームは、 $\{T_j, N_j, B_j\}$ で表されます。ここで、 $T_j = \text{XXX}$ 、 $N_j = \text{XXXX}$ 、 $B_j = T_j \times N_j$ です。

図10を参照してください。  $T_j$ は、 $F\bar{j}$ 、F、 $Fj$ が同一直線上にある場合にも明確に定義されることに注意してください。

### 定義4

測地線ネットFの離散ガウスマップは $N = T1 \times T2 / ||T1 \times T2||$ であり、 $T1$ 、 $T2$ は上記のように定義されます。

次の補題に示すように、連続的な場合と同様に、離散測地線の主法線と表面法線は一致します。

### 補題5.4

$\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$ を離散測地線ネットFの頂点の周りの2つの非縮退離散曲線、 $\{T1, N1, B1\}$ 、 $\{T2, N2, B2\}$ をそれらの離散フレネットフレームとします。次に、 $N1$ 、 $N2$ および離散表面法線N（定義4を参照）はすべて平行であり、接触平面 $\Pi_1$ と $\Pi_2$ の交点にあります。

証明：（省略）

Nは、Fで出会う両方の離散曲線の角度二等分線であることに注意してください（図9を参照）。

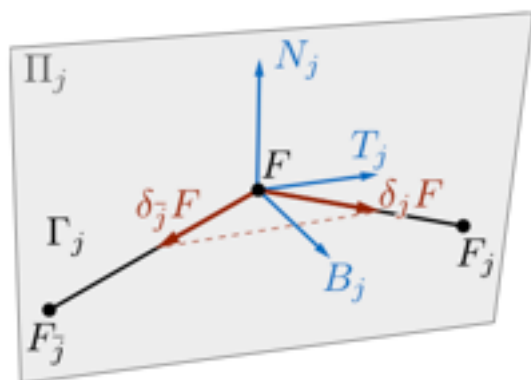


図10：F（黒）での離散座標曲線 $\Gamma_j$ 、その接触面 $\Pi_j$ は $\Gamma_j$ のエッジがスパンし、フレネットフレーム（青）：接線 $T_j$ 、法線 $N_j$ 、従法線 $B_j$ 。赤い破線のベクトルは $\delta_j F - \delta_{\bar{j}} F$ です。

### 5.3 Discrete Developable Geodesic Net

上記で定義した接線を使用して、直交測地線のネットを介して離散展開可能サーフェスを定義する準備ができました。

#### 定義5.5

離散直交測地線ネットは、すべてのスターで2つの離散座標曲線の離散接線が直交する離散測地線です： $T1 \perp T2$ 。このようなネットは、直交測地線パラメーター化における離散離散可展面です。

この定義は明らかに、表面上の直交測地線ネットの存在が展開可能性と同等であるスムーズなケースを反映しています（Corollary 5.3）。次の定理は、ネットの有用な解釈を提供し、この定義が定義1と同等である理由を確認するのに役立ちます（図11も参照）。

#### 定理5.5。

スターの対角が等しいと仮定します。つまり、スターは離散測地ネットの角度条件を満たす（定義2）。

次に、以下の条件は同等です。

- (1) 座標曲線の離散接線は直交します： $T1 \perp T2$ 。
- (2) スターのエッジは、離散接線平面（離散法線 $N$ に直交する平面）に投影されると、直角の十字を形成します。
- (3) スターの連続するエッジ間の角度はすべて等しい。

証明：（省略）

3番目の条件（スターのすべての角度が等しい）は、離散測地ネット（定義2）の条件を包含し、定義1で表現したように、離散直交測地ネットをカプセル化することに注意してください。

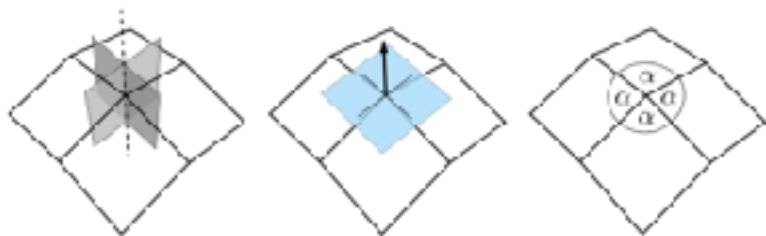


図11：測地線スターに関するこれらの3つの条件は同等です。2つの接触面は互いに垂直（左）であり、接線平面へのスターのエッジの投影は直交十字（中央）を形成し、

スターの周りのすべての角度は等しい（右）。

## 6 Modeling Deformations Of Discrete Developable Surfaces

離散可展面の定義（定義1）はシンプルかつ局所的であるため、アプリケーションで簡単に使用できます。これは、個別の可展面のインタラクティブな編集システム上で示されます。与えられた離散的な直交測地ネット $F_0$ 、例えば、直交平面グリッドまたは円柱から始めて、ユーザーは頂点を固定して移動したり、頂点同士を接着したり切断したりできます。後者は、操作がメッシュを（必ずしも方向付けられていない）多様体を維持する場合にのみ許可されます。ユーザーが操作する頂点のセット（ハンドル）を $H$ で表します。ユーザーがハンドルの頂点を移動するたびに、システムは、指定されたハンドルの位置に可能な限り近い、離散直交測地ネットの空間から結果を計算します。セクション8でこの形状空間を分析します。優れた、または直感的なソリューションを選択するために、私たちの最適化には、等尺性と滑らかさの正規化機能、および境界頂点の制約が含まれます。

### 6.1 Orthogonal Geodesic Constraints

定義1は、 $F$ の各内部頂点に対する一連の制約と境界頂点の一般化により、実現可能な形状空間を提供します。すべての頂点がすべてのコーナー角度が等しくなるように制約します。連続するエッジがクワッドを共有するように順序付けられた、頂点 $v$ で始まるエッジのセットを $e_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ とします。すると、条件XXXは $XXX = 0$ と同等になります。

(3)

2つの入射エッジ $e_1$ および $e_2$ と1つの角度のみを持つコーナー境界頂点の場合、角度を参照形状のように制限します：(4)、ここで、 $F^0$ 内で $\alpha = \angle(e_1, e_2)$ です。制約(3)と(4)を $c_i(F) = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ で表し、ここで、 $i$ はすべての内部頂点と境界頂点、およびそれらの関連する入射エッジを列挙します。

### 6.2 Smoothness and Isometry Regularizers

上記の制約は滑らかさやアイソメトリをエンコードしないため、特定の初期推定値を実行可能な空間に単純に投影すると、直感的でない結果になる可能性があります。滑らかで審美的に楽しい変形を生成するために、変形エネルギー $E(F)$ を最小化する実行可能なソリューションを求めます。単純な滑らかさの項、つまり、形状の現在の状態、または現在の「フレーム」 $F_k$

(5)

に応じた変位のラプラシアンエネルギーを使用します。ここでは単純で均一なラプラシアン $L$ を使用します。2番目のエネルギー項は、境界のアイソメトリの維持を促進し、直感的に変形のスケールを制御するのに役立ちます。

(6)

ここで、 $\partial F$ は $F$ の境界エッジのセットであり、 $l_j$ は $F_0$ のエッジ長です。最後に、ハンドルの頂点の位置をソフト制約として追加します。これは、ユーザーが開発可能性の制約と矛

盾する方法でハンドルを操作する可能性が高いためです。したがって、全体の変形エネルギーは

(7)

です。vcはユーザーが指定したハンドル位置で、wisoはwposがスカラーの重みです。

### 6.3 Optimization

各フレームで、次の最適化問題を解決します：

(8)。

2次ペナルティ法 (Nocedal and Wright 2006) を使用します。これは、上記の制約付き最小化を次の形式の一連の制約なし問題に変換します。

(9)。

上記は、制約が数値的に満たされるまで、つまり、 $\|c_i(F)\| < \epsilon$  になるまで、 $w = w_0$  で始まり、後続の各反復で重み $w$ を半分にして反復されます。最小化 (9) は、L-BFGS

(Nocedal 1980) を使用して解決されます。ここで、与えられた位置制約でARAP (SorkineおよびAlexa 2007) を使用して、初期推定を取得します。この記事の図と付随するビデオは、パラメーター $w_0 = 1$ 、 $w_{iso} = 1$ 、 $w_{pos} = 0.1$ 、 $\epsilon = 1e-12$ で生成され、入力メッシュは最初に平均エッジ長が1になるようにスケーリングされました。

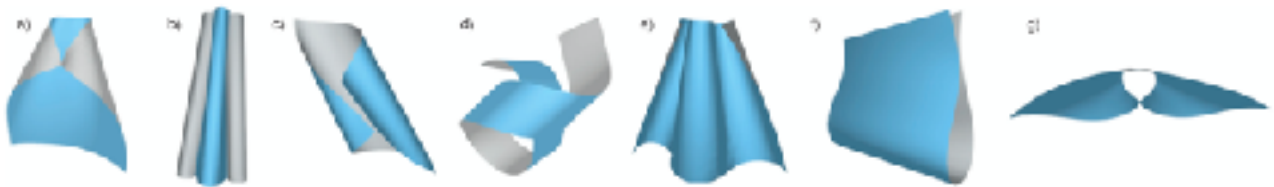


図1 2：頂点ハンドルベースの編集システムを使用して作成された開発可能なサーフェス。これらの例は、平らなシートを変形することによって設計されました。

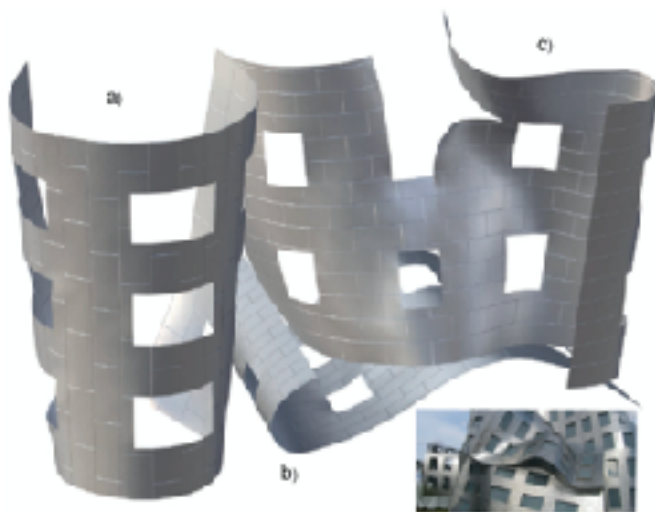


図1 3：インタラクティブな編集システムで作成された、重要なトポロジーを持つ展開可能な形状の例（レンダリングはオフラインで行われます）。フランクゲーリーの脳のためのルールーヴォセンター（右下）のデザインに触発されました。モデルのテクスチャ座標は、同じ境界エッジ長を持つ平面長方形グリッドの頂点座標から単純に取得されます。

## 6.4 Results

編集システムを3.4GHz Intel Core i7マシンに実装しました。シングルスレッドの実装では、約1,000個の頂点をインタラクティブに処理できます。図12の結果は、ソロモンら（2012）の結果と同様に、ロール状の紙のようなさまざまな形状を示していますが、より直感的な頂点ハンドルベースの編集システムで作成されています（添付のビデオも参照）。私たちのシステムは、図1、2、および13に示すように、非自明なトポロジーのあるサーフェスと方向付けできないサーフェスをシームレスに処理できます。

DDGの他のネット、たとえば離散K面と同様に、ネットの幾何学的情報は頂点の位置のみです。エッジはサーフェスの一部として表示されるべきではなく、モデル内の四角形の非平面性は、サーフェスを任意に三角形化することによってのみ、サーフェスをレンダリングおよび設計できることを意味します。セクション8.1で後述するように、これは、モデルに近似する一般的な滑らかな直交測地網の高密度サンプリングの場合にも当てはまります。それにもかかわらず、図14では、離散モデルを製造目的で使えることを示しています。この主張を裏付ける測定値を表1に示します。Rusinkiewicz（2004）の有限差分ベースの方法を使用して、このセクションで提示されるモデルの近似ガウス曲率を計算します。

Table 1. Approximated Gaussian Curvature

Model	Mean approx. $ K $	Max approx. $ K $
Figure 12(a)	$1.967 \times 10^{-4}$	0.0059
Figure 12(b)	$5.922 \times 10^{-4}$	0.0169
Figure 12(c)	$4.016 \times 10^{-4}$	0.0087
Figure 12(d)	$2.041 \times 10^{-4}$	0.0026
Figure 12(e)	$9.257 \times 10^{-4}$	0.0208
Figure 12(f)	$2.648 \times 10^{-5}$	0.000043
Figure 12(g)	$5.202 \times 10^{-4}$	0.0151
Figure 13(a)	$3.659 \times 10^{-4}$	0.0067
Figure 13(b)	$2.542 \times 10^{-4}$	0.0051
Figure 13(c)	$2.543 \times 10^{-4}$	0.0051
Figure 14	$1.716 \times 10^{-4}$	0.0072

Gaussian curvature approximation using the finite difference-based method of Rusinkiewicz (2004) on our coarse models, with an average of fewer than 1,000 vertices.



## 7 Normals and Rulings

ガウスマップとルーリングの単純で局所的な定義を調べることで、離散可展面モデルの調査を続けます。私たちのモデルはこれらの2つのオブジェクトのプロパティを明示的に強制していませんが、それらの動作が可展面の期待されるプロパティによく対応していることが経験的にわかります。

### 7.1 One-Dimensional Gauss Map

連続的なケースでは、滑らかな展開可能な表面 $f$ はガウス曲率が消失します。これはガウスマップの領域に対応しているため、 $f$ の法線マップ $n$ は1次元であることを意味します（Carmo 1976を実行）。定義4は、離散測地線ネット $F$ 上の頂点ごとの離散法線を提供し、 $F$ の接続性を持つすべての頂点法線のコレクションを離散ネット $N$ として表示できます。図15と補足ビデオに示すように、システムで編集すると、ほぼ1次元の離散ガウスマップが生成されます。

### 7.2 Vertex Based Rulings

直感的には、ルーリングは、非常に近い接平面の交差によって生成されるサーフェス上の線分です。上述のように、滑らかな展開可能なネット $f$ のガウスマップ $n$ は、1次元の画像、または同等に、並列部分微分 $n_x/n_y$ を持っています。表面のすべての非平面点から、 $n$ に直交する方向 $r$ に固有のルーリングが出ています。

ルーリングは曲率線であるため、他の主方向 $n_x/n_y$ にも直交します（Carmo 1976を実行）。したがって、一般性を失うことなく $\langle n_x, n_y \rangle \geq 0$ の場合、 $r/n_x (n_x + n_y)$ になります。これは、 $n_x, n_y$ のいずれかの項が消えても成立します。これは容易に離散化できます。

定義6。

離散測地線展開可能ネットの点 $F$ から発せられる離散ルーリングの方向は、 $R = N_x (N_x + N_u)$ です。ここで、 $N_x = N_1 - N_1$ および $N_y = N_2 - N_2$   $N_y \geq 0$ 。

定義6は完全にローカルです。ただし、実際には、個別の裁定は表面全体にフィットする傾向があります。図17を参照してください。上記の定義は、 $N_x, N_y$ が定義されるように、すべての近傍が内部頂点でもある内部頂点でのみ有効であることに注意してください。連続的な場合とは異なり、 $N_x$ と $N_y$ は必ずしも平行ではありません。



図1 4：製造による検証。

ARAP（左の列）と離散可展面の編集システム（右の列）を使用して、平らな正方形を変形した結果である「サンドイッチ」（上の行）を3Dプリントしました。どちらも同じ(ソフト)位置制約を使っています。変形前の初期モデルの寸法の薄い銅シートから2つの正方形を切り取り、これらの正方形を製造された部分（2行目）で挟みました。当然ARAPの結果は展開不可能なので、シートはしわや座屈(下左)を持ちます。一方で、我々の結果は純粋に曲がります(右下)。私たちの結果は、境界を除いてどこでも滑らかであることに注意してください。ここでは、二重に湾曲したARAP

サーフェスを修正するために、デジタルモデルに円錐状のねじれが作成されています。

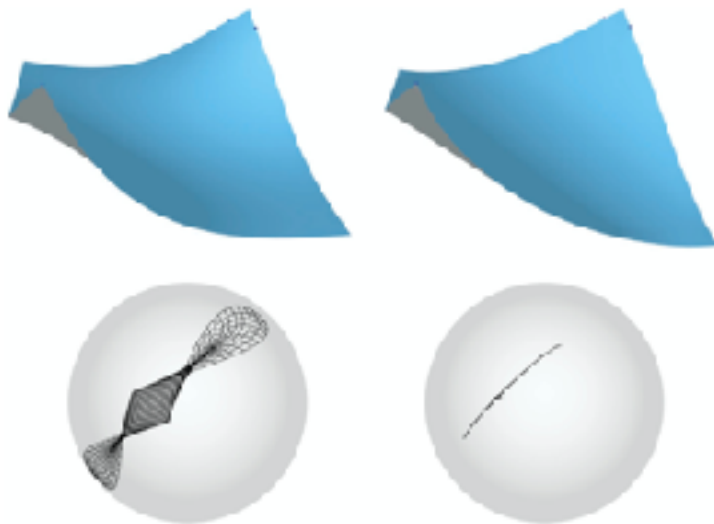


図1 5：左：平面メッシュの左下隅をARAP変形を使用して右上隅に向かって移動した結果（Sorkine and Alexa 2007）。右：左側のARAPの結果を初期推定値として使用して、同じ位置拘束が可展面変形システム（セクション6）で使用されています。この場合、ソフトな位置拘束は高精度で満たされます。各ネットの下に、そのガウスマップNの画像を表示します（この場合、これは、クワッドネットを三角形分割することによって得られる三角形メッシュの標準

の頂点ベースの法線と実質的に区別できません）。ガウスマップは1次元になる傾向があることに注意してください。

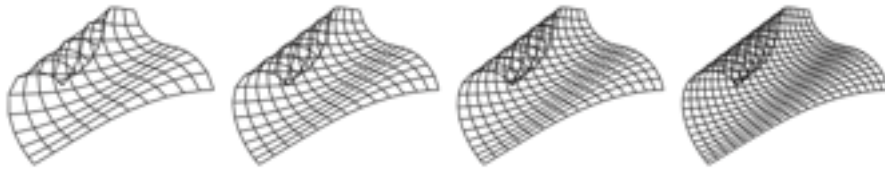


図16：サンプリング密度の増加に伴う滑らかな直交測地線ネットfの一連のサンプリング。定理8.1により、これらの離散ネットの星は2次までの角度が等しいため、離散直交測地ネットFは滑らかな直交測地ネットfの近似サンプリングと見なすこともできます。

## 8 Analysis And Parallels With The Smooth Model

ここでは、離散測地線ネットをさらに調査し、離散と連続のケース間の類似点を描きます。定義1で与えられた離散的な直交測地ネットによってモデル化できるさまざまな形状を分析します。大まかに言えば、優れた離散展開可能モデルは、セクション8.1のテイラー展開分析で示されるすべての滑らかな可展面を近似するのに十分な柔軟性を持つ必要があります。また、モデルは、不当な形状を避けるために、十分に制限的または厳密でなければなりません。そのために、セクション8.2で、離散直交測地ネットが滑らかな可展面と同様の剛体動作を共有することを示します。セクション8.3では、曲率線ネット、測地線ネット、および直交測地線ネットを接続する単純な定理の離散類似体を証明します。

### 8.1 Approximation of an Analytical, Smooth Orthogonal Geodesic Net

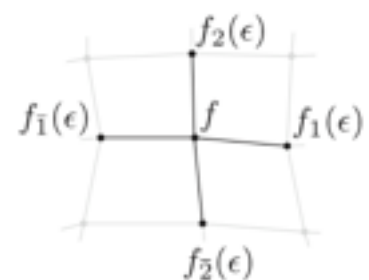
$f$ を任意の解析的な滑らかなネットとし、 $p = f(x, y)$ を表面上の点とします。離散スターを生成するために $p$ の周りのサンプリングポイントを想像してください。 $f$ が直交測地網である場合に限り、このスターは定義1のように2次までの離散直交測地スターであることを示します（図16）。

Let  $\epsilon > 0$  and let  $f = f(x, y)$ ,  $f_1(\epsilon) = f(x + \epsilon, y)$ ,  $f_{\bar{1}}(\epsilon) = f(x - \epsilon, y)$ ,  $f_2(\epsilon) = f(x, y + \epsilon)$ ,  $f_{\bar{2}}(\epsilon) = f(x, y - \epsilon)$ 。

これ以降、この点のセットを点 $p$ の周りのネット $f$ の $\epsilon$ スターと呼びます（挿入図を参照）。スターエッジの単位長さ方向は、 $\delta f_1(\epsilon)$ 、 $\delta f_{\bar{1}}(\epsilon)$ 、 $\delta f_2(\epsilon)$ 、 $\delta f_{\bar{2}}(\epsilon)$ として表されます。

定義1により、すべての角度が等しい（つまり  
(10)

ここで、 $\delta^3 f(\epsilon) = \delta^{\bar{1}} f(\epsilon)$  および  $\delta^4 f(\epsilon) = \delta^{\bar{2}} f(\epsilon)$  という表記を使用して、すべての入射エッジを列挙します。)  $\epsilon$ スターは離散直交測地スターです。次の定理で、私たちの離散化がスムーズなケースに確かに忠実であることを示します。



定理8.1。  $\varepsilon$  スターの等角度

(1) 分析ネット  $f$  は直交ネットであり、そのすべての  $\varepsilon$  スターが1次までの離散直交測地スター、つまり  $\langle \delta j f(\varepsilon), \delta j+1 f(\varepsilon) \rangle - \langle \delta j+1 f(\varepsilon), \delta j+2 f(\varepsilon) \rangle = o(\varepsilon)$

(2) 解析ネット  $f$  は、そのすべての  $\varepsilon$  スターが2次までの離散直交測地スター、つまり  $\langle \delta j f(\varepsilon), \delta j+1 f(\varepsilon) \rangle - \langle \delta j f(\varepsilon), \delta j+2 f(\varepsilon) \rangle = o(\varepsilon^2)$  である場合に限り、直交測地ネットです。

証明については、付録Aで詳しく説明しています。

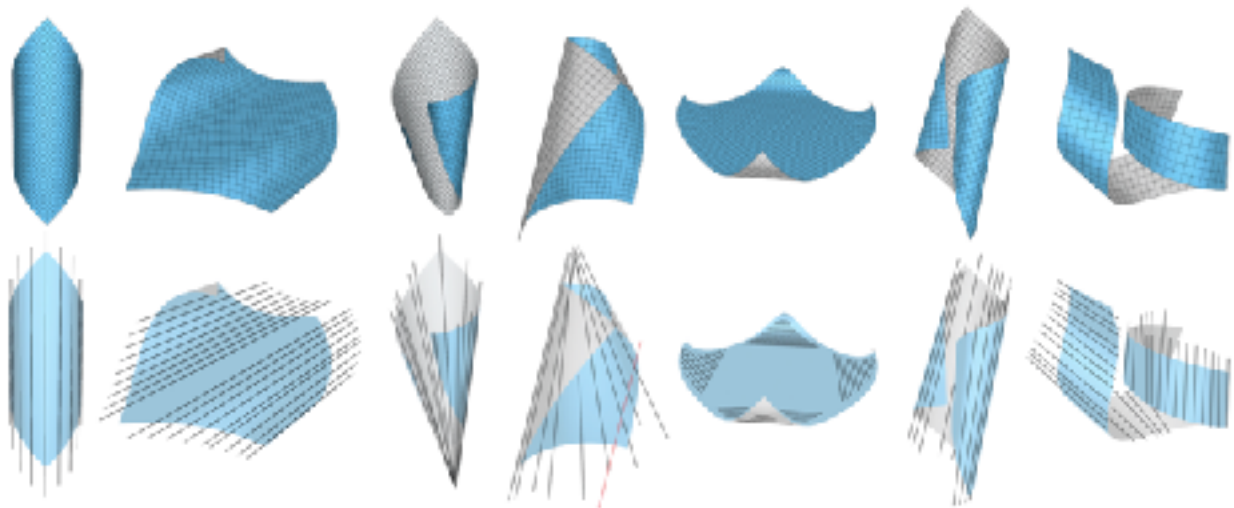


図17：離散可展な測地線ネットとその頂点ベースのルーリング。左から右へ：2つの円柱、2つの円錐、4つの円柱に接続された平面領域、および2つの接線可展面。驚くべきことに、ルーリングは完全にローカルな定義であるにもかかわらず、全体的に形に適合する傾向があります（定義6）。ただし、 $N_x$ 、 $N_y$ の計算のため、平面領域の周囲の安定性は低くなります（中央の赤い線を参照）。わかりやすくするために、ルーリングをまばらに視覚化しています。3Dビューについては、付属のビデオを参照してください。

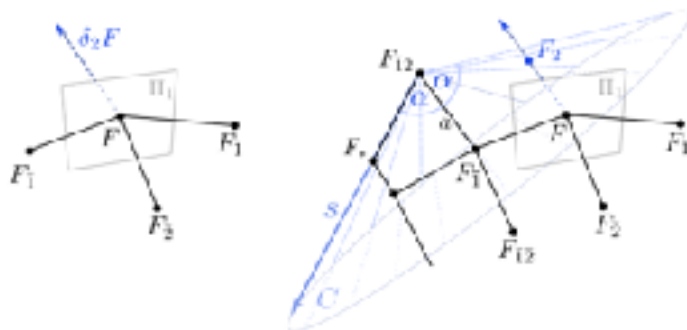


図18

左：補題8.2より、方向  $\delta_2 F$  は平面  $\Pi_1$  を基準とした  $\delta_2 F$  の反射です。右：補題8.3により、同じ方向  $\delta_2 F$  が円錐  $C$  と  $F_{12}$  の頂点で交差し、点  $F_2$  の位置を決定します

## 8.2 Rigidity through Developable Surface Extension

滑らかな可展面に局所的に変形を適用すると、一般にその形状が全体的に決まります。これを確認する1つの方法は、ルーリングを見ることです。滑らかな可展面では、ルーリングは無限に広がるか、エンドポイントが表面の境界にぶつかる必要があるという意味でグローバルです (Spivak 1999)。この視点を逆にすると、境界で可展面を拡張する方法を尋ねることができます。ルーリングに沿った点は一意に決定されるため、可能性は一般に非常に制限されます (図17を参照)。ルーリングを恣意的に延長すると、しばしば特異点が生じることに注意してください。次の図に示すように、離散モデルは同様の固定構造を共有しています。

### 8.2.1 Extension of a Discrete Orthogonal Geodesic Net

離散ネットに頂点 $F$ があり、その左（または右）と下に隣接するいくつかの頂点があるとします (図18、右)。次に、次の2つの補題に示すように、上隣の $F_2$ の位置が一般に一意に決定されます。したがって、図19に示すように、特定の離散直交ネットは、一般に、少数のパラメーターを設定するだけでその境界で拡張できます。このプロセスは、上で説明したスムーズなケースに似ていますが、裁定に基づいていません。

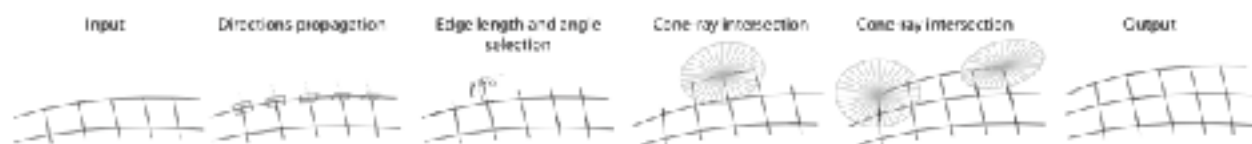


図19：離散直交ネットの拡張。エッジの長さ $l$ と1つの角度 $\alpha$ の2つのパラメーターの選択が与えられた場合、行は補題8.2および8.3によって伝播します。

#### 補題8.2 (方向伝播)

$F$ を、3つの近傍 $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_{\bar{1}}$ のみを持つ直交測地線ネットの頂点とし、離散曲線 $\Gamma_1$ から $F$ 、 $F_1$ 、 $F_{\bar{1}}$ が非縮退で、 $F$ の周りの2つの角度が等しいようにします。次に、 $F_2$ 、 $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_{\bar{1}}$ 、 $F_2$ が直交測地線スターになるような固有の方向 $\delta F$ があります ( $F_2$ は $\delta F$ を通る光線上にあります。図18を参照)。

証明。定理5.5により、ベクトル $\delta F$ は、 $F_2$ 、 $F_1$ 、 $F_{\bar{1}}$ が張る平面 $\Pi_1$ を基準にして、 $\delta F$ の反射の方向でなければなりません。

$\Gamma_1$ が直線の場合、 $\Gamma_1$ に直交するすべてのベクトルで構成される解のファミリーがあります。

#### 補題8.3 (コーンレイ交差)

図18 (右側) に示すように、少なくともすべての隣接する頂点を持つ直交測地網の頂点 $F$ が与えられたとします。 $C$ を、軸 $a = F_{\bar{1}} - F_{\bar{1}2}$ を中心に $F_{\bar{1}2}$ から $F_*$ を発する光線を回転さ



せることによって生成される円錐または平面とします（図18を参照）。次に、頂点 $F_2$ は、 $C$ と $F$ から出ている線の交点上になければなりません（図18）。

証明。定義1により、正味エッジ $a = F_1 - F_1^2$ と $F_2 - F_1^2$ の間の角度 $\alpha$ は、 $a$ と $F^* - F_1^2$ の間の角度に等しくなければならず、また、 $\text{so} F_2 \text{ must lie on } C$ でなければなりません。

上記の $F_2$ の構成を考えると、非公式に言えば、境界の1つの頂点で離散直交測地ネットを拡張することは、下または左または右に隣接するものがすでにある場合、決定されたプロセスであることがわかります。グリッドに新しい行を追加し始めると、唯一の自由度が利用可能になります。ただし、左または右に隣接しているが、その下にはありません。図19を参照してください。一般的な位置を想定して、最初に補題8.2を使用して、上向き of 新しいネットエッジの方向を計算します。次に、最初の新しいエッジの長さ $l$ を選択して、新しい行の頂点を効果的に設定し、新しい行の最初のコーン $C$ のコーン半角 $\alpha$ を選択できます。次に、図18と図19に示すように、行の残りの頂点が補題8.3を使用して決定されます。

### 8.3 Relation to Curvature Line Nets

ここでは、次の単純な定理の離散バージョンを証明し、離散測地ネット、円錐ネット、および離散直交測地ネットを接続します。

#### 定理8.4

曲率線ネットでもある滑らかな測地ネット $f$ は、直交測地ネットであり、したがって展開可能な表面のパラメーター化です。

#### 証明

$f$ が曲率線ネットの場合、 $f_x$ と $f_y$ は直交します。したがって、Corollary 5.2では、 $f$ は展開可能です。

円錐メッシュ（Liuら2006）は、曲率線ネットの離散類似物であることが知られています。

内側の頂点 $v$ は、 $v$ で出会う4つの向きのあるすべての面が共通の向きの回転円錐に正接している場合は円錐形であり、その四角形が平面であり、そのすべての内側の頂点が円錐形の場合はメッシュが円錐形です。

#### 定理8.5

円錐ネットでもある離散測地ネット $F$ は、離散直交測地ネットです。

#### 証明

図9の表記を使用すると、四角形が平面であり、すべての内側の頂点が角度バランス  $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$  (Wangら2007) を満たす場合にのみ、ネットは円錐形になります。ネットも個別の測地線ネットであるため、定義1と同様に、 $\alpha_1 = \alpha_3$  および  $\alpha_2 = \alpha_4$ 、したがって  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$  です。

離散ケースとスムーズケースの両方で、(離散) 共役ネットでもある (離散) 直交測地線ネットには平面座標曲線があることに注意してください。

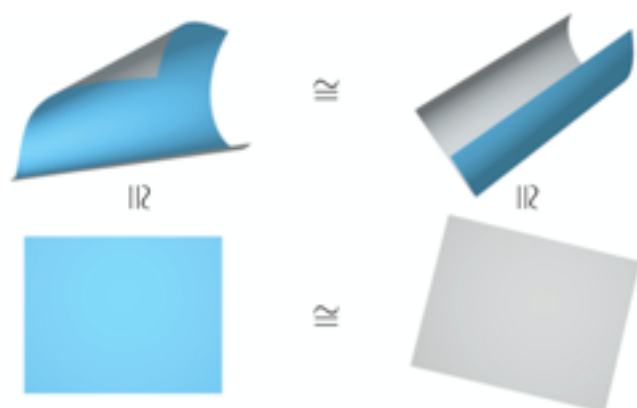
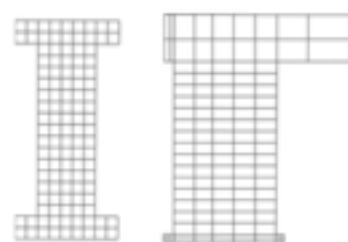


図20：補題9.1のアプリケーション：

ディスクトポロジと  $\pi/2$  コーナーの区分的測地線境界を持つ可展面は、平面上の平らな長方形の形状に対して等尺です。境界ピースの長さが等しい2つのこのようなサーフェスは、平坦化された形状がアイソメトリックであるため、アイソメトリックです。

## 9 Discrete Isometry

これまで、離散展開可能表面のモデルを定義しましたが、それらの離散等尺性の主題には触れていません。私たちのネットは、縮尺、形状、長さが異なるさまざまな表面を表すことができます (同じ接続性を持つ2つの直交する測地線の挿入図を参照)。我々の編集システムは、(通常、変形の大きなストレッチを防止する) 滑らかさとアイソメトリ正規化を使います。このセクションでは、2つのネットが正確に「同じ」



である場合を指定する離散アイソメトリの定義を探しています。2つの滑らかなサーフェス  $S_1$ 、 $S_2$  は、アイソメトリックマップ  $\phi: S_1 \rightarrow S_2$ 、つまりサーフェス上の距離、またはすべての測地線の長さを保持する全単射マップが存在する場合、 $S_1 \equiv S_2$  で示されるアイソメトリックであるといいます。

### 9.1 Global Isometry for Disc Topology Nets

ディスクトポロジを持つ2つの展開可能なサーフェスの特別なケースでは、次の補題で正当化されるように、境界を確認することで、それらが等角であるかどうかをテストできます。

### 補題9.1

$S1$ と $S2$ を、ディスクポロジと長さの等しい境界を持つ2つの滑らかな展開可能なサーフェスとします。 $r1(s)$ 、 $r2(s)$ を弧長パラメータ化における閉じた境界曲線、 $\kappa g1(s)$ 、 $\kappa g2(s)$ をそれぞれ $S1$ と $S2$ 上のこれらの曲線の測地線曲率とします。次に、 $S1 \equiv S2 \Leftrightarrow \kappa g1(s) = \kappa g2(s)$ です。

証明。付録Bを参照してください。

この補題は、区分的な測地線境界の場合に拡張できます。この場合、2つのサーフェスで一致する境界片の長さが等しく、ターン（または「コーナー」）の角度も一致します。図20を参照してください。これは簡単に離散化できます。ディスクポロジと区分的な測地線の境界を持つ2つの個別の展開可能なネット $F1$ と $F2$ は、境界ピースの一致する各ペアの長さが等しく、一致するコーナーの角度が一致する場合、等尺性と見なされます。

このようなアイソメトリのグローバルな定義は、非ディスクポロジに簡単に一般化することはできず、離散的な場合のアイソメトリマップを提供しません。同じ接続性を持つ2つの離散ネット $F1$ 、 $F2$ が上記のグローバル定義によって等尺性で見なされる状況を簡単に見つけることができますが、頂点から頂点へのマップ $\Phi: F1 \rightarrow F2$ が存在せず、等尺性と合理的に呼ぶことができます。たとえば、挿入図は、2つの異なる等方性長方形が2つの異なる離散直交測地網によって表される場合を示しています。対応する頂点と一致する離散マッピング $\Phi$ は、エッジの長さを保持していません。その結果、第1面のより小さいピース $F1' \subset F1$ は、第2面の対応するピース $\Phi(F1') \subset F2$ に対して等尺ではありません。

実際的には、これは、グローバル基準が等尺性形状モデリングの目的に対して制限されすぎていることを意味します。2つの離散ネット間のマッピングが等尺性である場合、それを示す等尺性のローカル定義が必要です。

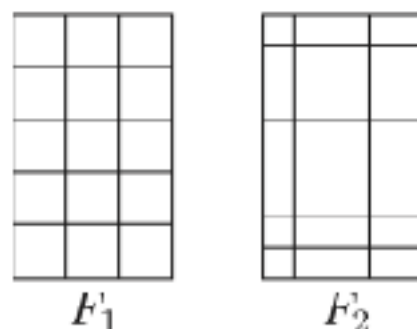


図21：ローカルアイソメトリモデルを使用すると、アイソメトリの正確な離散的な概念を維持しながら、表面を変形、接着、および切断できます。この図では、長いストリップを2回ねじって接着し、2つの水平セクションに沿ってカットして、3つの交互に配置されたノットサーフェスを作成します。

## 9.2 A Local Model for Isometry: Discrete Orthogonal 4Q Geodesic Nets

ローカルアイソメトリを定義する自然な試みは、サーフェス上の各ローカル近傍に対して上記のグローバル定義を採用することです。私たちの離散ネットの場合、最初のアイデアは、各単一クワッドのレベルを見て、長さの制約を課すことです。残念ながら、セクション8.2の分析は、これほど多くの制約をネットに追加できないことを示唆しています。図19は、セクション8.2で説明した円錐と光線の交差が伝播し、クワッド全体を決定する方法を示していますストリップ、自由度としてストリップごとに1つのエッジ長と1つの角度のみを残します。したがって、個別のネットでローカル近傍の概念を拡張し、開発可能なネットの定義を多少緩める必要があります。次のように定義された4Q直交パッチで構成される、4Q直交測地ネットと呼ばれる新しいクラスのネットを定義します。

### 定義7

直交4Qパッチは、次のような4つの四角形の構成です（図22を参照）。

- (1) 奇数の頂点には離散的な直交測地星があります（定義1）。
- (2) 頂点にも個別の測地線星があります（定義2）。
- (3) 4Qパッチの対向する辺（それぞれ2つのエッジの合計）の長さが等しい。

条件（1）と（2）は、直交4Qパッチが離散的に展開可能であると見なすことができることを意味します。これは、その境界が直交する4つの測地線のセットとして解釈され、パッチの内部でガウス曲率が消失するためです。条件（3）は、4Qパッチが、上で説明した補題9.1の拡張という意味で、長方形に対して等角であると見なすことができることを意味します。同じ趣旨で、辺の長さを保存することを要求することで、4Qパッチの（グローバル）アイソメトリをモデル化できます。

直交4Q測地ネットFは、直交4Qパッチで構成される離散ネットです。2つの直交する4Q測地網は、それらの4Qパッチ間に1対1の対応が存在し、一致するパッチの各ペアについて、対応する辺の長さが等しい場合、等尺性です。直交する4Qネットでの等尺性変形のモデリングは、これらの長さを固定したままにすることを意味し、トポロジーに制約されない広範囲の表面の等角投影をモデル化できるようにします。

付録Cでは、セクション8.2の直交測地ネットの分析と同様に、単一のストリップからの4Qネットの構成を調べることで、直交4Qネットの剛性を分析します。

直交4Qネットは同様のリジッド構造を持っていることがわかります。つまり、これらのネットはローカル長さの制約を組み込むための追加の自由度を提供しますが、許容度が高すぎず、依然として展開可能なサーフェスのスペースを合理的に表します。

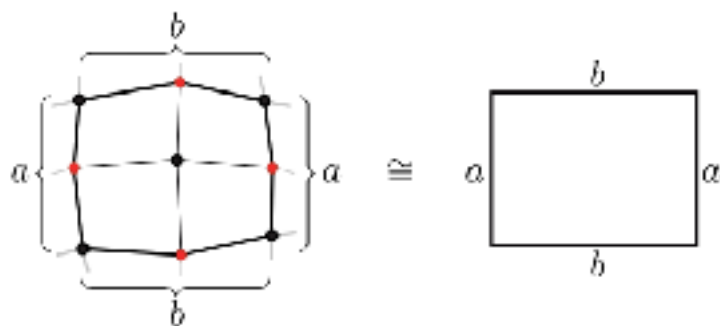


図22：直交4Qパッチ。  
奇数（黒）の頂点は離散的な直交測地頂点であり、偶数（赤）の頂点は離散的な測地頂点です。4Qパッチの反対側の長さは同じです。直交する4Qパッチは、同じ辺の長さを持つ平面内の長方形に対して等角と見なされます。

### 9.3 Optimization

直交4Qネットでは等尺面変形を実行するために、私たちの最適化はセクション6.3とほとんど同じですが、いくつかの小さな違いがあります。セクション6.1（式（3））と同様に、直交測地線の頂点を制約します。定義7の条件（2）、つまり、偶数の頂点の周りの対向する角度の同等性は、

XXXXX (1 1)

と書くことができます。ここで、 $e_j$ は頂点から発するエッジベクトルです。定義7の長さ制約（3）をアイソメトリ要件と組み合わせ、各4Qパッチの各辺の長さ（つまり、2つのそれぞれのエッジ長の合計）を制約して、入力直交4Qネットと同じ値を保持します。したがって、制約はすでに座標曲線の長さを正確に維持しているため、セクション6.3のようにアイソメトリ正規化子を含める必要はありません。

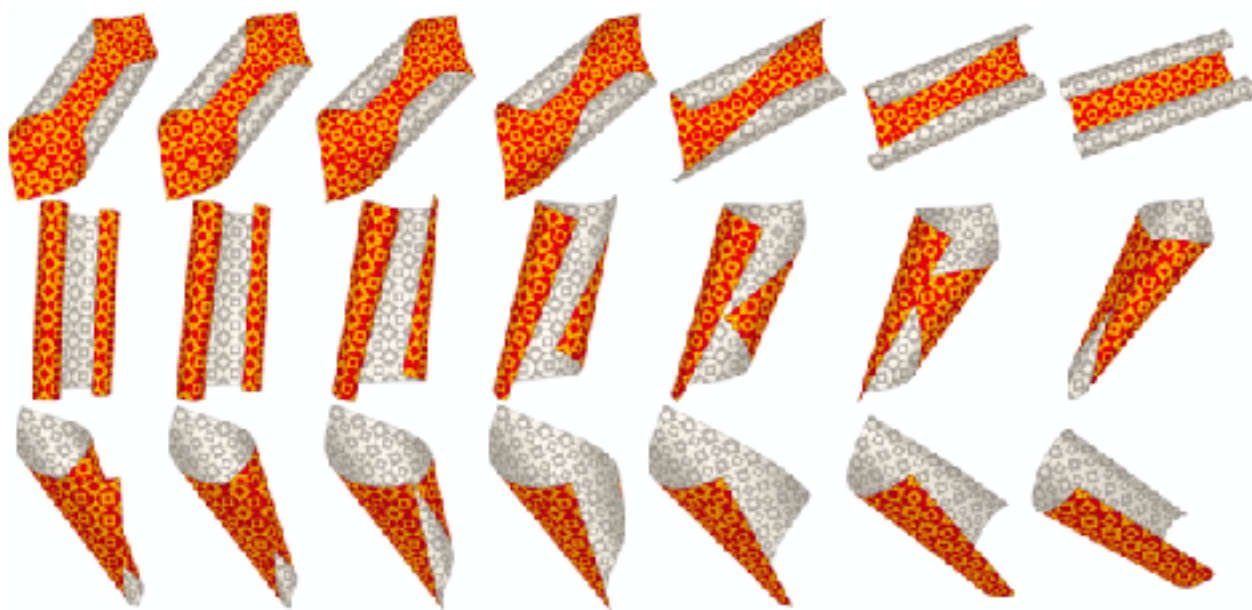


図23：等尺性直交4Qネットの補間シーケンス。すべての場合において、変形は判決の方向とそれらの組み合わせ構造を変更することに注意してください。シーケンス全体については、付属のビデオを参照してください。



## 9.4 Results

セクション9.3の制約を組み込むことで、直交4Qネットを等角編集できます。角度と長さの制約を含むこの最適化は、実際にはセクション6.3の最適化よりも遅く、約600の頂点の粗いモデルをインタラクティブに編集できることが実験的にわかりました。図21は、ストリップの曲げ、接着、切断を含む編集操作を示しています。これらはすべて、基準状態に対して等角の直交4Qパッチを維持しながら行われます。

さらに、制約は、Fröhlich and Botsch (2011) やLipmanらのような形状補間アルゴリズムと組み合わせて使用できます。(2005)。図23では、一連の等尺性形状を計算し、ソース形状を(等尺性)ターゲットにモーフィングします。これにより、通常、ルーリングに沿って発生しない展開可能なサーフェスの等尺性曲げをシミュレートします。各補間フレームの初期推定は、最初にFröhlichおよびBotsch (2011) で計算され、続いて、セクション9.3で指定されているように、制約の最適化(つまり、射影)が行われます。

## 10 Limitations And Future Work

本稿は、直交測地線を通じて可展面の変形をモデル化するための離散理論の第一ステップです。そのため、この作業では、形状モデル、スムーズなケースへの接続、および既存のアプリケーションでのモデルの直接的な統合に焦点を当てています。以下に詳述するように、さまざまな実用的および理論的な問題は未解決のままであり、さらなる研究のみちがあります。

### ・ 離散的で展開可能な測地線ネットの変形アルゴリズム

編集システムは頂点が約1,000のcaを使ったネットの対話型編集しか処理できないため、最も注目すべき制限は速度です。この作業では、標準のL-BFGSアルゴリズムを使用しました。これを、より効率的な変形アルゴリズムを考案するための将来の作業として残します。さらに、さまざまな幾何学的フローを離散化することで形状空間のインタラクティブな探索を可能にすることは、たとえば、離散的な展開可能なネットによる任意の形状の近似を可能にするために役立つと考えています。

### ・ 境界条件

私たちの理論は主にネットの内部頂点に関係し、セクション6.1で導出された境界制約は、境界が区分的測地線、つまり直線の断片で構成されることを指定する内部頂点制約の一般化と見なすことができます。直角に会います。

現在、図1の文字Gの場合と同様にアルファテクスチャを使用してカリングを適用することにより、境界のギザギザの外観を回避できます。図24にさらに示します。可展面はかなり硬く、自由度はそれらを境界で拡張することは非常に制限されており、カリングアプローチは合理的な実用的なソリューションです。それにもかかわらず、

他の境界条件を導き出すことは興味深いことであり、粗いモデルを使用して、指定された測地線曲率で曲線境界をモデル化し、曲線境界を持つ形状をよりタイトなメッシュで表すことができます。

#### ・サブディビジョンとリファイン操作

モデルのジオメトリは頂点の位置のみで構成されており、四角形の面は一般に非平面です。現在、レンダリングと製造の目的で、四角形の面を任意に三角形分割しています。特に製造アプリケーションの場合、制約に準拠するモデルのリファイン操作、およびそのようなリファインの滑らかな展開可能な表面への収束に注目することは興味深いでしょう。

#### ・離散測地網

今後の作業として、非直交離散測地網のさらなる研究を残します。これらは、展開可能なサーフェスのモデリングや、より一般的な2重曲面の変形やアイソメトリのモデリングに役立ちます。特に、セクション5の導出の拡張を通じて、これらのネットに離散ガウス曲率を定義したいと思います。

#### ・滑らかでない折り目や折り目

私たちのモデルは、Esmoothなしで最適化する場合の非滑らかなネット（図25を参照）もサポートします。たとえば、非滑らかなシリンダーや、折り目がある他の多くの非滑らかな構成です。私たちの離散条件は、滑らかなものに類似している接線や法線などの離散的な量に触発されていますが、これらはそれ自体では滑らかさをエンコードしていません。これらのスムーズでない構成については、今後の検討としてさらに検討します。

#### ・等尺性

セクション9は氷山の一角にすぎないことは承知しています。アプリケーションの観点から、アイソメトリのモデリングは、物理的に可展面の曲げをシミュレートするために不可欠であり、実際のオブジェクトを構築または曲げる方法はまだ実験していません。また、2つのアイソメトリック形状間の最適な補間パスを選択するという主題も扱いませんでした。また、滑らかさを保証する補間アルゴリズムを考案していません。4Q測地網をよりよく理解するために、さらに多くの理論を探究する必要があると私たちは考えています。

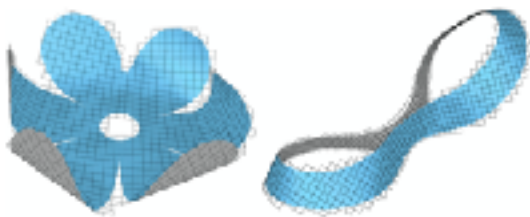


図24：花と曲線の境界を持つO字の展開可能なサーフェスの編集。このような境界は、直交測地網によって任意の精度まで概算できます。ただし、実際には、インタラクティブな編集を目的として、グリッド解像度はL-BFGS最適化によ

って制限されます。ギザギザの境界の外観を軽減するための現在の実用的なソリューションは、アルファテクスチャを使用して選別しています。将来的には、一般的な曲線境界条件の離散化と測地線曲率の処方について検討する予定です。

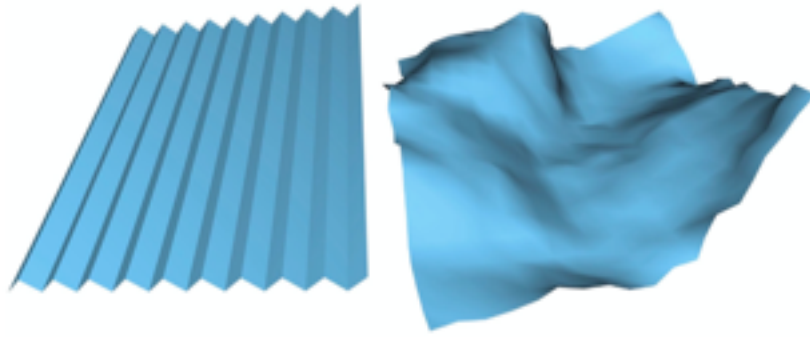


図25.滑らかでない離散直交測地網。左：滑らかでない円筒形。右：折り目が付いたサーフェス。Esmoothなしで最適化した後に作成されます。これらの構成については、今後の検討で検討する予定です。

## Appendixes

### A PROOF OF THEOREM 8.1

数式による証明がたくさん書かれています。論文.pdfの方をみようか。

### B PROOF OF LEMMA 9.1

### C 4Q NET EVOLUTION

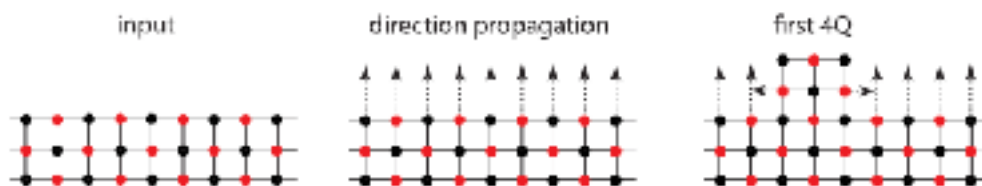


図26。 左：所定の4Qストリップ。 中心：方向伝搬により、3つの隣接点を持つ任意の頂点は、通常、一意の光線上の点によって測地線スターに完成できます。 右：最初の拡張4Qクワッドは、方向伝播によって決定される、その中央から発する水平光線が、ストリップから発する2つの隣接する垂直光線と交差するようにする必要があります。これにより、交点で有効な頂点を形成できます。

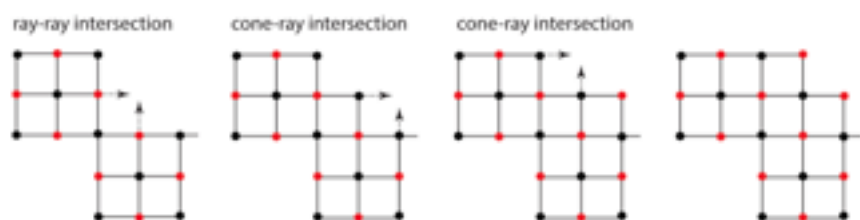


図27：光線と光線の交差と補題8.3の繰り返しの適用により、隣接する4Qクワッドの1つを除くすべての頂点の位置が決定されます。

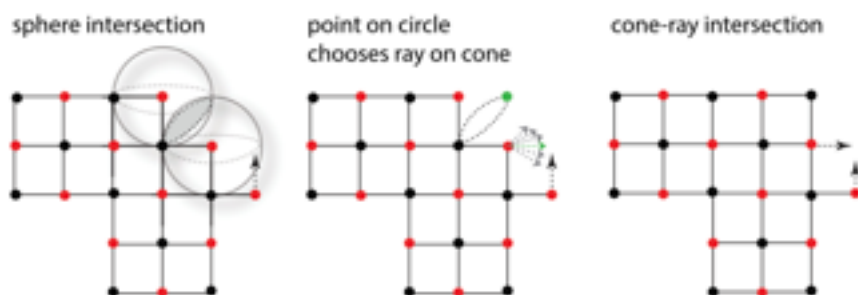


図28：左：右上隅の頂点は2つの球の交点にあります。中心：これらの球は一般に円で交差します。この円のすべての点は、方向伝播によって一意の光線を決定し、これらすべての方向が一緒になって円錐を形成します。右：この円錐は指定された垂直光線と交差し、右上隅の頂点は、円錐上の交差する光線の方を伝播する円上の点です。