

Modeling Curved Folding with Freeform Deformations

Michael Rabinovich, Tim Hoffmann, Olga Sorkine-Hornung

2019年7月

要点

- ・ DOGネットを使って可展面のモデリングとそのアニメーション
- ・ 位置制約のみを用いて、山谷割り当てを自動的に見つける



図1：展開図への本手法の適用例。位置制約のみを用いて、複雑なパターンを同時に曲げながら、折り線に沿って有効な山谷割り当てを自動的に見つけます。

Abstract

インタラクティブデザインと、可展面の形状探索のためのフレームワークを提示します。主な貢献は、個々の可展面の折り目を個別にバイナリ特性評価することであり、折り目を同時に折りたたみ、平面シートを滑らかに曲げるアルゴリズムを伴います。二面角と山谷の割り当てを補完します。

1 Introduction

滑らかな曲げ変形は微分幾何学で研究され[do Carmo 1976]、計算折り紙の分野では、直線の折りたたみが調査される[Demaine and O'Rourke 2007]。湾曲した折りたたみ（曲線折り）面[Huffman 1976]（図1）は、2つの組み合わせと考えられる。曲線に沿って非伸縮なシートを折るには、折り目周りで全体的に曲げる必要がある。この幾何学的な形状は、建築家、芸術家、工業デザイナーの注目を集めている[Buri et al. 2011; Demaine et al. 2011c; Gramazio and Kohler 2014; Pottman et al. 2015; Tachi 2011, 2013]。

曲線折り面の設計は手作業で時間がかかり、通常経験則に基づく試行錯誤のアプローチで行う[Demaine et al. 2011a, c]。曲線折りの既知の論理は、古典的な折り紙と異なり、複数の折り目を同時に折り曲げる必要があること[Kilian et al. 2017]である。設計者は、ボールバーニッシャーやCNCプロッタを使用して事前に紙に折り目をつけてから形状を生成します。これが、形状探索には時間がかかる理由です。

本手法は、 C^2 可展面である離散直交測地ネット(DOG)に基づいている[Rabinovich et al. 2018a, b]。DOGは各頂点周りのすべての角度が等しい規則的な四辺形メッシュです。DOGは変形において制限を受けず[Alessio 2012; Chapelle and Bathe 1998; Grinspun et al. 2003]、またメッシュやルーリングの初期設定に制限されません[Kilian et al. 2008; Solomon et al.

2012; Stein et al. 2018; Tang et al. 2016] (図2 参照)。そして、表面の変形中に再メッシュを必要としません[Kilian et al. 2017; Naran et al. 2013; Schreck et al. 2017]。そのため、DOGは曲線折りのモデリングに非常に適しています。

実際には、測地線境界の制約を維持しながらDOGセットを変形しても、すべての折り目に沿って折りたたまれることはありません(図3 参照)。困難な点は、すべての曲線を同時に折りたたむ必要があることです。我々の目的は、この問題に対処することです。

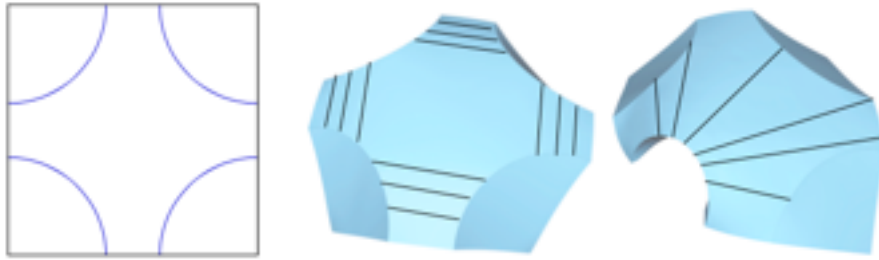


図2：同じ展開図(左)を2つの異なる面に折り曲げて(中央と右)、ルーリングを入れます。ルーリングは大幅に変化するので、ルーリングを初期設定するメソッドは、これらの面をモデル化するには再メッシュ化する必要があります。DOGは不変式(直交測地線)によってパラメータ化され、メッシュ内の可展なルーリングをエンコードせず、それゆえ再メッシュも不要です。

1.1 Contributions

- 離散可展面の表面間の折り目の離散バイナリ特性を示す。
- 山谷割り当てが不要で、DOGを変形しながら折り曲げを強制できる最適化アルゴリズムを考案する。
- 折り目に沿って二面角と山谷割り当てを制御するオプションの目的関数を導出する。

可展面モデルの基礎としてDOGを使用するが、これは、ルーリングベースの可展面の他の離散モデル上[Kilian et al. 2008; Liu et al. 2006; Tang et al. 2016]、または離散シェルシミュレーションに基づくモデル[Burgoon et al. 2006; Grinspun et al. 2003]に適用できます。

2 Related Work

2.1 Modeling developable surfaces

滑らかな面は、平面に対して局所的に等尺であるか、ガウス曲率がゼロの場合、可展面と呼ばれます。数学的には理解されているが[Carmo 1976; Pottmann and Wallner 2001; Spivak 1999]、可展面の設計は困難であると証明されており、活発な研究分野です。要点は、面を展開可能に保ちながら、変形をキャプチャできるセットの、このモデルを見つけることです。変形は、内因性だけでなく、外因性でもあります。後者は、展開可能な状態を維持しながら面を引き伸ばし、減衰した可展面のサイズと形状が不明なジオメトリ探索タスクにしようされる[Liu et al. 2016; Rabinovich et al. 2018b; Tang et al. 2016]。離散モデルが滑らかな変形の全体を表現で

きないことは、「ロック(locking)」と呼ばれる[Chapelle and Bathe 1998; Solomon et al. 2012]ことが多く、離散可展面のモデルの悩みの種です。ルーリングベースのモデル[Kilian et al. 2008; Riu et al. 2006, Solomon et al.2012; Stain et al. 2018; Tang et al. 2016]は外因性変形の部分的なセットに限定されますが、等尺性ベースの手法[Burgoon et al. 2006; Frohlich and Botsch 2011; Goldenthal et al. 2007; Grinspun et al. 2003]の設計によって固有の変形をモデル化せず、様々な曲げ変形をロックする傾向がある[Alessio 2012; Chapelle and bathe 1998]。また、動的再メッシュと組み合わせなければならないことが多い[Kilian et al. 2017; Narain et al. 2013, 2012; Schrenk et al. 2015]。

我々の作業は、可展面を離散直交測地ネット(DOG)としてモデリングすることに基づき[Rabinovich et al. 2018a]、これは外因性および内因性の変形ロックを回避するためのモデルです。さらに、DOGの形状空間の探索に[Rabinovich et al. 2018b]を用いるが、そのラプラシアンフローベースの変形を、SQP(sequence quadratic programming)ベースのアルゴリズムに置き換えます(詳細はセクション6で)。

上記に加え、展開可能な形状を目的の形状に合わせることに[Pottmann and Walner 1999; Stein et al. 2018; Tang et al. 2016]や境界曲線のセット[Bo et al. 2019; Frey 2002, 2004; Rose et al. 2007]で、可展面の設計を行うことに焦点を当てた多数の作品に触れるべきです。フリーフォームの展開可能な変形をモデル化するのではなく、これらの作品は、入力にスパースが含まれる場合に、その品質向上に対処するものです。

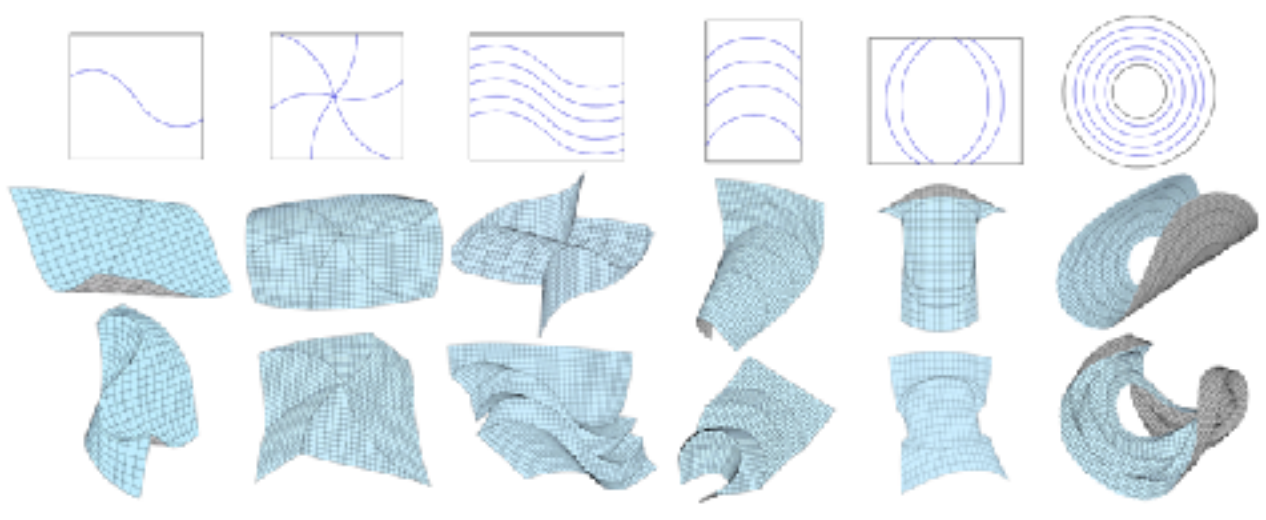


図3：(上)：入力。今回の手法を使ったもの(下)と使っていないもの(中央)。今回の手法のアルゴリズムは、すべての折り目の点を同時に折り曲げますが、バイアスを追加することにより、すでに折り曲げられた点を変更しません。これらの例では、山谷割り当ては自動で決定されます。これらの変形の目的関数は、メッシュの頂点または曲線を拘束するフローに基づいており、[Rabinovich et al. 2018b]と同じ位置制約を用いています。

2.2 Curved folding

曲線折り彫刻は、バウハウス美術学校の1920年のジョセフアルバースの作品[Adler 2004]に遡り、1970年代のDavid HuffmanとRon Reschの調査を続ける、ほぼ100年前の美しい芸術作品です[Huffman 1976; Resch 1974]。これらは可展面の数理と密接に関係しているものの、そのほとんどが紙を用いた物理実験によって推進されています[Demaine et al. 2011c]。滑らかな可

展面[do Carmo 1976]、または直線折り紙[Demaine and O'Rourke 2007]とは対照的に、曲線折りの数学は手動のクラフトより遅れており、単一の曲線折り[Demaine et al. 2011c; Duncan and Duncan 1982; Fuchs and Tabachnikov 2007]の局所的な振る舞いを問題としています。ハフマンタワーのような顕著な折り目パターン[Demaine et al. 2011a; Wertheim 2004]はまだ理解されておらず[Demaine et al. 2018]、複数の湾曲した折り目の折りたたみと曲げに関する既知の数学は、特定の折りたたみ動作と相まって、固定されたルーリングによって導かれる特定の場合に限られます[Demaine et al. 2015, 2018; Mundilova 2019]。どの折り目パターンを折り畳むことができるかの本質は、まだ理解されていません。直線折りとは異なり、二面角を変化させることで、曲線折りパターンを曲げる方法は無限にあります。

Kilianと同僚[2008]の研究により、幾何学の分野に曲線折りが導入されました。彼らは、ルーリング方向を推定することで、パッチの分解と山谷割り当てを紙にスキャンし、折り曲げ面を再構築するアルゴリズムを考案しました。我々の作業は、平坦の状態から始まる折り曲げの難しさを直接扱い（図3）、[Kilian et al. 2008]のモデルに適用され、ロック問題（図2）を対処するための再メッシュと組み合わせられます。

曲線折り表面のモデリングに関するいくつかの作業は、反射によって生成される平面の折り目など、折りたたみ変形の特定のサブセットに焦点を当てています[Mitani 2012; Mitani and Igarashi 2011]、回転スイープによって生成されたサーフェス[Mitani 2009]または固定されたルーリングパターンで折りたたまれたサーフェス[Tang et al. 2016]。[Kilian et al. 2017]で、著者は、ひものネットワークを使用して、さまざまな湾曲した折りたたみモデルの製造プロセスを簡略化し、折りたたみ動作を作動させるためにどのサーフェスポイントを引くかという問題を解決しました。折りたたみ変形をモデル化するために、[Kilian et al. 2017]の著者は、[Narain et al. 2012]の再メッシュアルゴリズムを使用して[Botsch et al. 2006]のモデルを採用しています。それらの変形は、入力で与えられるすべての折り目の山/谷の割り当て、および折りたたみ角度に対する所定のソフト制約、ならびに曲げの目的関数によってガイドされます。複数の折り目の折りたたみ角度を指定するとシステムが過剰決定されるのに対し、単一の曲線で二面角を指定するとシステムが不確定になることに注意してください。同じ規定の折り曲げ角度でサーフェスを折り曲げる方法は無限にあります[Duncan and Duncan 1982; Fuchs and Tabachnikov 1999]。ただし、複数の折り目にわたる二面角は互いに互換性を持つ必要があります[Demaine et al. 2018]。

我々の知る限り、曲線折りの変形用のフリーフォームハンドルベースのシステムは、Rabinovich et al. [2018b]によって初めて導入されました。彼らは、曲線折りの面の変形をモデル化するために、スティッチング（3Dモデルなどでは、2つのモデルをつなげること）と平坦化の制約のセットによってバインドされた複数のDOGを採用しました。[Rabinovich et al. 2018b]は、折り目に沿った個別の特性を導出することにより、作業を構築および拡張し、ポイントハンドルベースの編集システムを考案して、滑らかに無視するのではなく、特定のパターンの折り目の折りたたみを保証します。すべて、ユーザーに折り角度または山/谷の割り当てを指定する必要はありません（図3を参照）。さらに明示的な制御が必要な場合は、単純な2次制約を導出して、折り目に沿った折り角度と山/谷の割り当てを制御します。これは、1つの曲線の折り目でのみ利用できる自由度です（図13と図14を参照）。

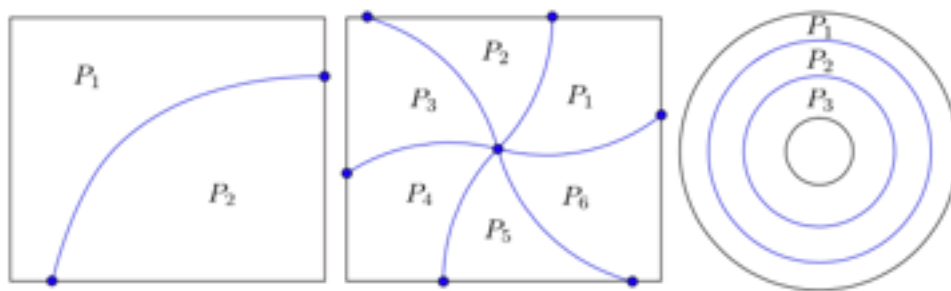


図4：曲線折りのパターン。パターンを複数のコンポーネント P_i に分解し、折り目の交差点を頂点とする。黒は境界線、青は曲線の折り線。

3 Setup

3.1 Definitions

論文全体を通して、曲線折りの面に対して次の定義をしようする。

定義3.1

表面 S は、平面に対して局所的に等尺であり、有限結合 $S = \cup S_i$ として記述できる場合、曲線折り表面と呼ばれます。ここで各 S_i はパッチと呼ばれる C^2 可展面であり、異なるパッチの交点 $S_i \cap S_j$ は空であるか、 C^2 曲線です。

この定義より、滑らかな可展面は、単一のパッチを持つ曲線折り表面です。この定義は、円柱などのさまざまなトポロジに適していますが、本稿では、 \mathbb{R}^2 のサブセットに対して等尺なサーフェスを使用しています。[Demaine et al. 2011b; Demaine and O'Rourke 2007]では、表面の折り目パターンを、 S に等尺な平面領域 P と呼び、パッチ P_i （平坦化された S_i ）に細分割します。その交差曲線は平坦化された折り目です（図4を参照）。曲率がゼロでない平坦化された折り目は湾曲しているといい、消失する曲率を持つ折り目は直線です。折り目は、部分的に湾曲していて部分的に直線であるか、曲率が消失する変曲点でほぼすべての場所で湾曲している場合があります（図3の左から1番目と3番目のモデルを参照）。平坦化された領域境界と平坦化された折り目曲線は、平面配置[Grünbaum1972]を形成し、 P を平面 P_i に分解する平面グラフを生成します。このグラフの頂点は、曲線の相互の交点または境界曲線であり、折り目頂点と呼ばれます。このグラフの辺は、様々なパッチのペアワイズ交差点であり、これらの曲線を構成する点を折り目点、つまり折り目頂点ではないこれらの曲線上の点と呼びます。共有パッチ S_i, S_j に接線の不連続がある場合、 S が折り目点 p で折られているという。（図3を参照）

我々は、曲面を維持する曲線折り表面の変形に興味があります。各パッチ P_i で個別に表示すると、これらの変形は C^2 ですが、隣接パッチの接平面の不連続として、折り目に沿って折りが生じることがよくあります。特に、連続的な変形、つまり変形フロー[Rabinovich et al. 2018b]に関心があります。これは、曲線折りフローと呼ばれます。これらのフローを連続マップ $S(t)$ 、 $0 \leq t \leq 1$ で示します。各 $S(t)$ は曲線折り面であり、フローは各パッチに制限されている場合は C^2 です。開始点 $S(0)$ が平面である場合をよく見ます。ツールを適用して、等尺性曲線折りフローを

モデル化します。これは、折りたたみとも呼ばれます。このような流れは、物理的な紙や板金の折りたたみをモデル化するために使用できますが、観察とツールのほとんどは、展開可能な面を伸ばしながら伸張可能な曲線折りフローをモデル化するためにも使用できます。非等尺性の展開可能な変形は、先天的に平坦化された形状が不明な設計タスクに役立ちます[Rabinovich et al. 2018a、b; Tang et al. 2016]。

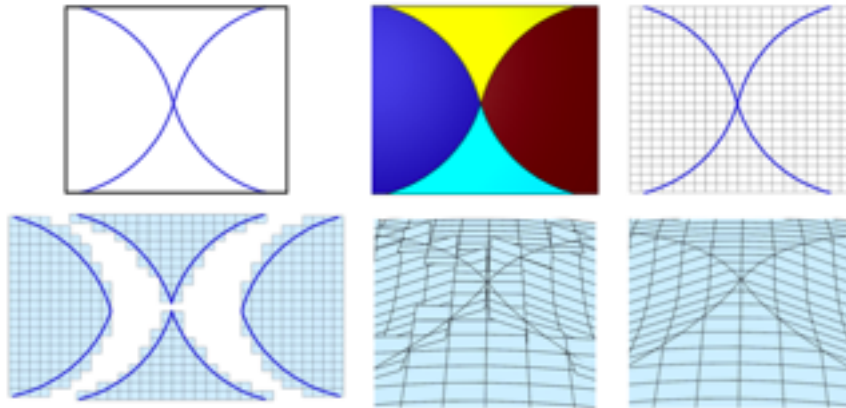


図5：[Rabinovich et al. 2018a]で行われた、離散曲面の表現。

左上：境界を介して領域を表す特定の曲線配置（黒）、および領域の中央の変曲点で交差する2つの曲線（青）。上中央：曲線は領域を4つのパッチにセグメント化し、各パッチは折り目曲線のセグメントに沿って他の2つのパッチと交差します。右上：折り目パターンの上に直交グリッドを配置します。左下：パッチごとに個別のDOGでサーフェスをモデリングします。折り目曲線と交差する面は、異なるパッチで複製されます。交差するDOGパッチの各ペアは、[Rabinovich et al. 2018a]で指定された連続性の制約を満たします。下中央：平面モデルの変形のクローズアップ。右下：複製された面の無関係な部分をカリング。

3.2 Model

[Rabinovich et al. 2018b]の作業に従って、各パッチ S_i を、離散境界の測地ネットとして、共有境界の線形制約とともにモデル化します。入力は、曲線折りを含む展開図です。この展開図上に、展開図内の折り線のすべての頂点がグリッドライン上に乗るように、直交グリッドを配置します。次に、グリッドを重なり合うパッチに分割し、曲線が通過する面を共有します。最後に、曲線とグリッドの辺の交差を計算し、結果の曲線折りの点を、その点を共有するパッチごとに1つずつ線形結合で表します。図は図5を参照してください。[Rabinovich et al. 2018a]に従って、複製された四角形全体の辺長の偏差にペナルティを課しながら、辺に沿った曲線折り点の連続性を維持します。

3.3 Desiderata (切実な要求 (複数形らしい))

我々の目標は、変形によって区分的なDOGの上にある曲線折り形状を探索するためのツールを開発することです。我々の選択は、DOGを変形するための次の2つの原則に基づきます。(1) ホモトピーベースの最適化を実行し、(2) DOGの制約を最小限にする。

ホモトピーベースの最適化は、理論的および経験的に動機付けられています。DOGのモデリングには、高度に制約された非線形の最適化問題を解く必要がありますが、DOGの理論により、実

行可能な点から開始した場合、近く of 解の存在が保証されます。実際、一般的にDOGの形状空間は滑らかな多様体です[Rabinovich et al. 2018b]。この観察は実際に役立ちます。DOGの探索は、ハンドルベースの変形タスクだけでなく、曲線制約フローなどのより複雑な変形の両方で、スムーズフローまたはホモトピーベースの最適化方法を使用してうまく機能することが実証されています[Rabinovich et al. 2018b]（図6を参照）。

DOG制約の最小化。DOGsはかなり制約付されたオブジェクトなので、ハードの制約によって修正する数量と、ソフトの制約で最適化する数量を慎重に選択する必要があります。これは、制約勾配が線形に独立している場合にロックまたは不適切な問題を回避するために不可欠です[Rabinovich et al. 2018b]。特に、[Rabinovich et al. 2018a]の剛性分析は、すべてのエッジ長を修正できないこと、または同様にDOGがチェビシェフネットであることも要求することを示しています。ただし、滑らかな直交測地線ネットはチェビシェフであり、正確な等尺性の豊富なセットを許可するため、これはほぼ許容範囲内で実行できることに注意してください。セクション4の折りたたみ制約は、正確に満たされるように選択されています。それらは湾曲した折り曲げ面の重要な特性を捉えています。折り曲げられた折り目は、小さな変形の下でも折り曲げられたままです。

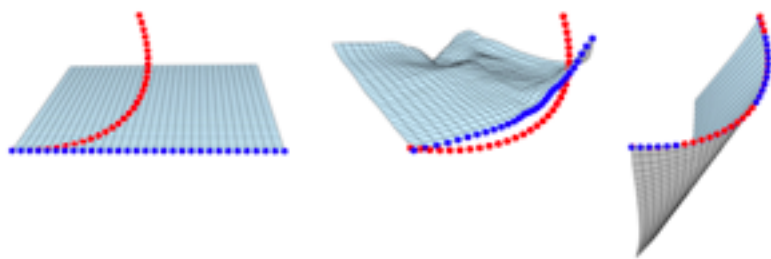


図6：曲線のソフトな位置制約の設定（左）。すべての制約を一度に設定すると、同じ最適化アルゴリズムが完全に失敗し、非線形DOG制約（中央）を満たさないメッシュが返されます。対照的に、曲線を制約する流れ[Rabinovich et al. 2018b]を使用すると、スムーズなDOGが返されます（右）。後者のアプローチは、位置制約を補間するホモトピーベースの方法です。

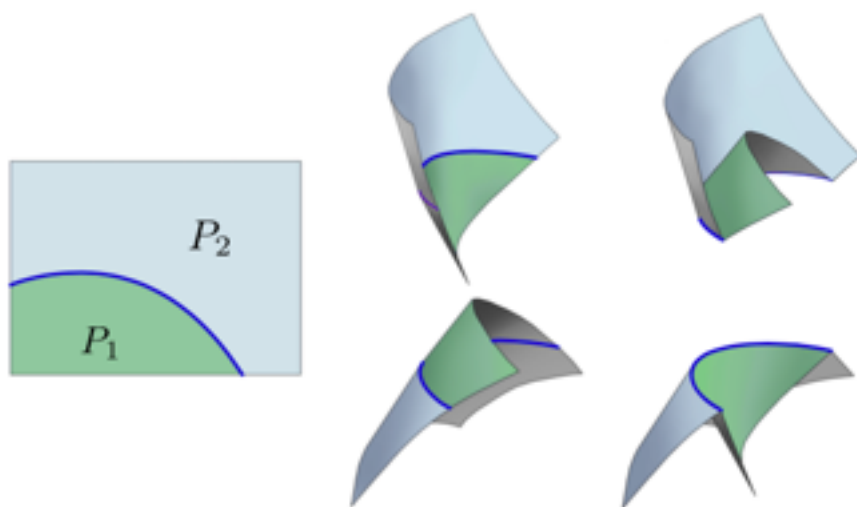


図7：曲線折り表面の組み合わせの自由度の図。曲線折り表面（左）の展開図が等尺に折り曲げられ、 \mathbb{R}^3 の特定の構成にある曲線が存在する場合、折り目パターン（中央）に等尺的に平坦化さ

れる滑らかなサーフェスは2つだけです。パッチP1、P2ごとに異なるサーフェスを選択して、他の2つの湾曲した折り曲げサーフェスを作成することもできます（右）。

4 Folding Crease Patterns

このセクションでは、特定の折り目パターンを折る様々な方法を説明します。我々の結果は、区分的なDOGにおける局所的な折り目の存在の離散的な組み合わせ特性です。

4.1 The smooth and combinatorial degrees of freedom around a single curved crease

数学的には、直線折りは退屈です。直線は、2つの入射面が一致するように最初に折り目を180度に折り畳まない限り、古典的な折り紙のように（つまり直線を維持することによって）折りたたむことができます [Demaine et al. 2015]。それゆえ単一の直線折りは、一定の入射面間の二面角を表す単一の実数で表すことができます。曲線折りには、無限の方法や自由度があります。Sが曲線折りを含む表面ならば、またPがその平坦化された等尺の参照である場合、折り線の曲率の絶対値がPの平坦化された曲率よりも大きい限り、曲線折りを自由に変形することで曲面Sを局所的に変形することができる [Fuchs and Tabachnikov 1999]。剛体運動も、曲線はその曲率とねじれ関数によって定義されます。

この視点を反転させると：平面領域P、領域上の曲線 $\gamma(t)$ 、 $\gamma(t)$ の絶対曲率よりも大きい絶対曲率を持つ変形した等尺の空間曲線 $\Gamma(t)$ が与えられると、平面への展開が $\Gamma(t)$ から $\gamma(t)$ にマッピングされるように、P(t)を通過するPに等尺な2つの滑らかな面のみが存在する [Fuchs and Tabachnikov 2007]（図7左と中央を参照）。

表面Sが $\Gamma(t)$ に沿って折れるが、その周りは滑らかなままである場合、表面には4つの状態があります。そのうち2つは滑らかで、他の2つは曲線に沿って折り曲げられています（図7参照）。表面 $S = S_1 \cup S_2$ が曲線 $\Gamma(t) = S_1 \cap S_2$ に沿って折りたたまれている場合、曲線に沿った S_1 と S_2 の接平面間の角度は折りたたみ角度と呼ばれ、 $\theta(t) > 0$ で表されます。直線の折り目の場合とは異なり、 $\theta(t)$ は曲線に沿って変化することがよくあります。 $\Gamma(t)$ の曲率が大きいほど、折りたたみ角度が大きくなります。 $\kappa(t)$ が空間曲線 $\Gamma(t)$ の曲率である場合、 $\kappa_g(t)$ はその測地線曲率です。こ

れはまた $\gamma(t)$ の曲率でもあり、この時 $\kappa_g(t) = \kappa(t) \cos \frac{\theta(t)}{2}$ で、折り目 $\Gamma(t)$ の接触平面が $\Gamma(t)$ で交差

する滑らかなパッチの接平面を二等分することを意味します [Duncan and Duncan 1982; Kilian et al. 2008]。 $\Gamma(t)$ のねじれを変化させることで、同じ $\theta(t)$ で異なる表面が生成可能なため、折り角度は表面の形状を決定しません。それゆえ、各可展面パッチのルーリングパターンを変更します。 $\theta(t)$ 、 $\Gamma(t)$ の曲率やねじれ、 $\gamma(t)$ の曲率や各入射パッチのルーリングの関係は [Demaine et al. 2018] で詳しく説明されています。

要約すると、単一の曲線折り $\Gamma(t)$ を持つ曲線折り表面Sの形状は、4つの可能な表面を区別する追加の組み合わせパラメータ（そのうち2つは折り曲げ）だけでなく、十分な絶対曲率の条件下での $\Gamma(t)$ の曲率とねじれの2つの実関数で示される。

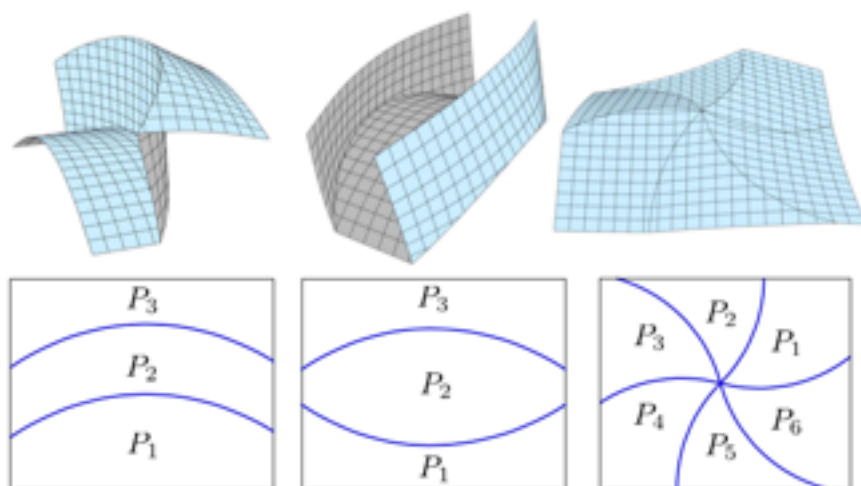


図8：展開図の制約の伝播。下段：展開図。上段：展開図の曲線折り。左と中央の列：パッチP1の変形は、パッチP2の形状の大部分を決定し、それはパッチP3の形状のほとんどを決定する。変形の伝播は、一般的には全体的で、ルーリング方向に依存します。これらの場合、1つの折り目の山谷割り当てを選択でき、それは次の折り目の山谷割り当てを決定します（左：谷山、中央：谷谷）。右の列：より複雑な展開図では、例えば頂点がある展開図では、パッチが満たすべき互換性条件があるためプロセスは複雑になります。

4.2 The combinatorial parameters of multiple creases

前回の分析は、単一の曲線周りの局所的な挙動を説明しています。全体的な曲線折りの挙動を理解することが、まだ残っています。本質的に、1つのパッチを変形すると、パッチの全体的な変形が折り目の反対側に伝播します。このプロセスは、折り目の位置と、展開可能な表面に沿って変化する可能性のあるルーリングに依存します。複数の折り目がある場合、伝播により他のパッチの形状が決まります。一部の折り目が交差すると、互換性の制約により、プロセスはさらに複雑になります（図8を参照）。

一般的に言って、1つの折り目で4つの異なる表面構成を選択できる場合がありますが、この選択により、近くの折り目のパッチ形状がすでに修正されています。残る組み合わせの自由度は、各折り目が折り曲げられているかどうかです（図3を参照）。次の定理で説明するように、平面の折り曲げをモデル化することの難しさは、折り曲げ方向の選択をプロセスの最初に行う必要があることに起因します。

定理4.1

$S(t)$ を曲線折りフロー、 $p(t_k)$ を、フローのあるタイムステップ $t = t_k$ の時の2つのパッチ $S_1(t), S_2(t)$ に横たわる $S(t)$ の折り線上の点とする。 $p(t_k)$ が $S_1(t_k)$ 上の平面の点でない場合（または $S_2(t_k)$ と同等）、以下のうちのひとつを持つ $\varepsilon > 0$ が存在する：

- (1) $S(t)$ はすべての $t \in (t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon)$ の点 $p(t)$ で折られる；
- (2) $S(t)$ はすべての $t \in (t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon)$ の点 $p(t)$ で折られない。

証明： $\kappa(p(t))$ を点 $p(t)$ における折り線の曲率、 $\kappa_g(p(t)) = \kappa(p(t)) \cos \frac{\theta(p(t))}{2}$ を折り線の平坦化された（測地線）曲率とする。 $\theta(p(t)) \neq 0$ の場合、この主張は、点 $p(t)$ での2つの接平面の不連続性から生じる：折りは接平面の異なる選択に対応し、互いに角度 $\theta(p(t))$ を形成します。そして小さな連続した変形は、折った状態から折られてない状態に、またはその逆に移動することはできません。最後に、 $p(t_k)$ の非平面性は、 $\theta(p(t_k)) \neq 0$ を意味する。なぜなら $\theta(p(t_k)) = 0$ は、曲線の折り線の主法線曲率が0であることを意味し、それゆえ曲線の折り線の接線はルーリング方向に並行です。しかし、補題12と [Demaine et al. 2015] の結果16より、これは曲線が点 $p(t_k)$ でよじれ（kink）を持つことを意味し、パッチ $S_1(t), S_2(t)$ に制限されている場合に $S(t)$ が C^2 であるという事実と矛盾します。

したがって、非平面である折り目を折り曲げることは不可能です。折られていない非平面の点では、小さな変形があればそれが維持されます。折りは、点を平坦化した後のみ発生します。そして表面がすでに折られている場合、小さな変形があれば折られたままになります。したがって、折るかどうかの決定は、折り目の点が平面である場合にのみ行え、折り目がすでに折られている場合は、注意する必要がありません。これを念頭に置いて、次の観察に注意してください。

定理4.2

曲線折り表面 S 上の非平面曲線折り点 p は、曲線の点 p の接平面が、局所的に、 p で交差するパッチ S_1, S_2 のサポート平面である場合に限り、折られます。



これは、表面が滑らかである場合、折り目曲線の両側の接平面が一致するという事実から直接なりませんが、折り目が付けられた折り目に沿って、折り目曲線の接触平面による互いの反射です。曲線の折り目に沿った平面折り目ポイントは、折りたたまれていなくても、この制約を満たします。これらのポイントの周囲では、接平面は曲線の接触平面とまったく同じであるためです。

4.3 Discretization

折り目の周りの表面の両側が折り目曲線の接触平面の同じ半空間にあるときに、折りたたみが正確に発生することがわかりました。この条件を離散化するには、2つのDOGパッチの離散パラメトリック（グリッド）ラインの接線を、折り目曲線の離散接触面の同じ側に配置します。表記については、図9を参照してください。折り目と交差するDOGエッジは、折り目の点で発生する個別の表面接線と見なすことができます。図9の表記では、2つのパッチのそれぞれに、折り目曲線と交差するエッジ（ e_1 または e_2 ）の独自の複製があります。最初は、フラットな構成で2つのエッジが一致していますが、折りたたみ動作により、エッジ間に不連続性が生じます。折り目曲線の両側の離散表面接線を $t_1 = e_1 / \|e_1\|$ 、 $t_2 = e_2 / \|e_2\|$ と表します。折り目曲線の従法線、

つまりその接触平面の法線は、 $B = e_f \times e_b$ です。これは、両方のパッチで e_f 、 e_b が常に一致することを示しています。

サポート平面の制約は、以下のように記述できます。

$$\text{sgn}(\langle t_1, B \rangle) + \text{sgn}(\langle t_2, B \rangle) = 0 \quad (1)$$

$$\text{sgn}(x) = \{-1 : \text{if } x < 0, 0 : \text{if } x = 0, 1 : \text{if } x > 0\} \quad (2)$$

制約 (1) は、 B を外積 $e_f \times e_b$ に置き換えることで簡略化できます。

さらに、等尺性変形を仮定する場合、 t_1 、 t_2 を次のように到達する非正規化エッジ e_1 、 e_2 で置き換えることができます：

$$\text{sgn}(\langle e_1, e_f \times e_b \rangle) + \text{sgn}(\langle e_2, e_f \times e_b \rangle) = 0 \quad (3)$$

セクション6では、この制約を最適化フレームワークに組み込んで、湾曲した折りたたみDOGの折りたたみと曲げをモデル化する方法を示します（図3を参照）。

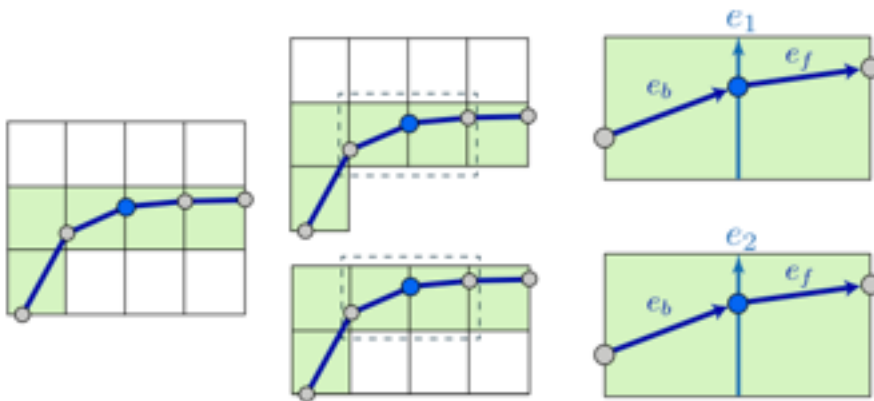


図9：個別の折り目パターンのエッジの表記。

左：個別の折り目曲線を持つフラットなDOG。中央：[Rabinovich et al. 2018b]に従って、折り目曲線を含む四辺形を複製して折り目を表現します。その結果、異なる接続コンポーネントまたはパッチが作成されます。曲線上の頂点の位置、つまり、グリッドエッジとの交点は、両方のパッチで一致するように制約されます。右：青い点で折り目曲線と交差する複製されたグリッドエッジ (e_1 、 e_2)、および2つの折り目エッジ e_f 、 e_b の表記。

4.4 Discussion

曲線折り表面上の折り目には、複数の同等の特性があります。ここで、選択した離散化 (1) のいくつかの主要なプロパティを指摘し、これらのプロパティが他の可能な制約の選択によってどのように満たされないかを簡単に説明します。

ホモトピーに基づく最適化手法に適しています。

フラットメッシュで制約が満たされています。

この意味で、通常の曲率がゼロの曲線に沿った点を、折られたものと折られていないものの両方と見なします。

最小限で、通常は邪魔にならない。

区分的なDOGの湾曲した折り目を折りたたむと、折りたたまれたままにするために特別な注意を払う必要がなくなります。既に折りたたまれたサーフェスに対する式 (3) の影響はありません。折りによって生じる接線の不連続性は、折り曲げられた折り目が局所的な変形の下で折られたま

までであることを意味します。折られた折り目を展開するには、区分的に滑らかな曲線折り表面の場合と同様に、最初に折りたたむ必要があります。また、逆をキャプチャします。離散的な曲線の折り目は、平面点から開始する場合にのみ折りたたむことができます（定理4.1）。

折りの代替の制約は、例えば、接線 t_1 、 t_2 に沿って不連続性を適用しますが、これによりフラットモデルの実現可能性が失われます。さらに、離散的なケースでは、折りなくても、つまり式（1）が満たされていない場合でも、マイナーな不連続性が依然として発生する可能性があります。したがって、視覚的に折りが無い場合に、折りの印象を数値で与えます。別のオプションは、折りたたみ構成を、類似しているがより単純な滑らかな制約を満たすものとして定義することです： $\langle t_1, B \rangle + \langle t_2, B \rangle = 0$ （4）。この条件は、折り曲げられた折り目付き曲線に沿った接平面が、折り目曲線の接触平面を基準にした相互の反射であるため、フラットモデルおよびすべての区分的に滑らかな曲線折り表面で正確に満たされます。ただし、この条件は、折られたすべての区分的DOGで正確に満たされるわけではありません（このホワイトペーパーのすべてのモデルから明らかです）。これに対する例外は、ねじれがゼロの湾曲した折り目のクラスです。その場合、折り目は単にグローバルな平面反射として形成されます[Mitani and Igarashi 2011]。したがって、ハード制約として制約（4）を適用すると、実際には制限が厳しすぎる一方で、ソフト制約を適用すると、滑らかな場合とは異なり、折り目が折りたたまれると消失しないため、私たちの意味では最小ではない条件が作成されます。

5 Folding Angles And Mountain-Valley Assignment

このセクションでは、設計者に表現力と直感的な追加の制御を提供するために、変形中に折り曲げ角度とその方向（山または谷）を制約するツールを提案します。最初に、折りたたみ角度、つまり折り目の周りの接平面間の角度を拘束する方法を示します。これは、DOG接線角度を制約することで実装され、単純な2次制約になります。次に、山折りと谷折りを区別するツールを考案します。私たちの派生物は、湾曲した折り目と直線の折り目の折り目の両方に機能します。

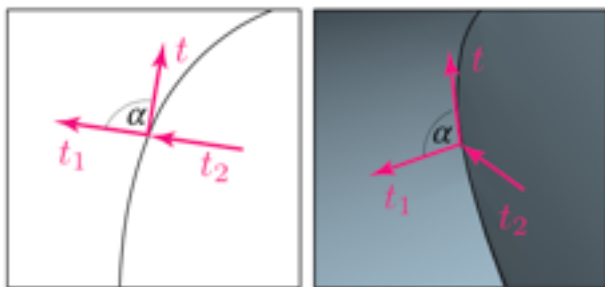


図10：左：折り目曲線とその接線 t の平坦化された構成。この平坦な状態（ $t_1 = t_2$ ）で等しい表面接線 t_1 、 t_2 と角度 α を形成します。右：接線の不連続性 $t_1 \neq t_2$ を持つ、折りたたまれたアイソメトリック構成。補題5.1は、滑らかな場合の角度 α と折りたたみ角度 θ の関係を示し、 $\langle t_1, t_2 \rangle = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \theta$ であることを示しています。

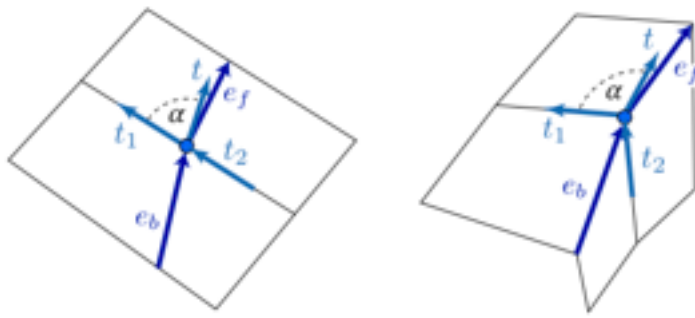


図11：折り目から発せられる正規化されたDOGエッジを表面接線として使用して、折り目で補題5.1（図10を参照）を離散化します。

5.1 Folding angle

折りたたみ変形は、折り目曲線の接線にヒンジ接続されたサーフェスパッチの接平面の回転として見ることができます。まっすぐな折り目の接線は一定で、折りたたみ角度も一定ですが、曲線の折り目では接線が変化し、折り目に沿って折りたたみ角度が変わることがよくあります。どちらの場合も、特定の点での折りたたみ角度が θ の場合、折り目の接線に直交する折り目の両側の表面接線ベクトルは角度 θ を形成し、折り目に平行な表面接線ベクトルは互いに平行を保ちます。次の補題は、平坦な構成で等しい表面接線ベクトルによって形成される角度と折りたたみ角度の関係を示しています（図10を参照）。

補題5.1

t_1 、 t_2 を、可展面の等尺に平坦化された状態で互いに等しい、所定のポイント p における折り目曲線の2つの側の表面接線ベクトルとします。 t を p での折り目曲線の接線とします。表面が湾曲した折り等尺変形を通過し、折り目ポイント p での折りたたみ角度が θ であると仮定すると、表面接線ベクトルは次の条件を満たす。

$$\langle t_1, t_2 \rangle = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \theta \quad (5)$$

ここで、 α は t と t_1 の間の角度である。この角度はアイソメ図で保持されることに注意してください。

証明：（省略）

折り目から発生するDOGのエッジ間の角度を調べることで、補題5.1を離散化します（図11を参照）。図11の表記を使用して、入射エッジベクトル e_f 、 e_b を見ることにより、特定のポイントでの折り目曲線の接線を離散化します。

$$t = \frac{||e_b||e_f + ||e_f||e_b}{||e_b||e_f + ||e_f||e_b||} \quad (6)$$

2つのエッジベクトル e_b 、 e_f が同一線上にない場合、上記の t は、ポイントとその2つの隣接点を通過する一意の円に対するポイントの接線です。

等尺変形では、 t_1 、 t_2 は頂点位置で線形であり、 α は一定で、(5)は二次式です。

5.2 Mountain/valley assignment

セクション4.1で述べたように、折りのタイプ、つまり曲線の各サイドの表面の選択にはいくつかの組み合わせの自由度があります(図7)。[Demaine et al 2015]に従って、一方を山折、もう一方を谷折りとよび、図7の2種類の折り構成を区別します。直線状の折りの場合、この自由度は常に存在しますが、曲線折りでは多くの場合存在しないことを強調しておきます。実際、多くの展開図では、山/谷(M/V)割り当てを1つしか選択できないことが多く、残りの割り当てはルーリングの伝播によって決定され、折り目があるかどうかの組み合わせの自由度のみが残ります。折りたたまれているかどうかは、式(1)で具体化されます。一貫性のある方向の選択のために、1つのサーフェスパッチの接線が2番目のサーフェスパッチの接線平面の折り目点より上か下かでM/V折り目を区別します。これは、次の制約によって実現できます。

(7)、

ここで、 t は方向付けられた曲線の折り目の接線で、 $t \times t_2$ は2番目のサーフェスパッチ(接線ベクトルとして t_2 を持つパッチ)の接平面の法線です。 t の向きによって、山折りと谷折りのどちらを選択するかが決まります。三重積の循環特性により、式(7)の左辺も $\langle t_2, t_1 \times t \rangle$ に等しくなります。(7)の左側の符号のみに関心があるので、 t をより単純な $t^* = \parallel eb \parallel ef + \parallel ef \parallel eb$ で置き換えることができます。

セクション6の表記を簡略化するために、Heavisideステップ関数を使用して、山/谷の制約を等式で再公式化します：

$$H(x) = \{0 : \text{if } x \leq 0, 1 : \text{if } x > 0\} \quad (8) \quad ,$$

山/谷の状態を次のように記述します：

$$H(\langle t_1, t^* \times t_2 \rangle) = 0 \quad (9) \quad .$$

6 Optimization

セクション4とセクション5で開発されたツールを使用して、区分的DOGを変形するための簡単な折りたたみおよび曲げアルゴリズムを考案します。このアルゴリズムは、DOG制約を維持しながら目的関数を最小化し、すべての折り目曲線に沿った折り目の形成と、そのような割り当てが入力として与えられた場合の折り目の特定のM/V割り当てを確実にすることを目的としています。

6.1 Problem setup

曲線折り表面を四角メッシュとしてモデル化し、パッチごとに個別の接続コンポーネントを使用します。 \mathbb{R}^3 の n 個のメッシュ頂点のセットを V 、頂点の位置(変数)を $x \in \mathbb{R}^{3n}$ 、四角形メッシュの面を F で表します。各接続コンポーネントはDOGです。つまり、 Z^2 のサブセットの接続性を持ち、DOG角度制約[Rabinovich et al. 2018a]を満たします。これを $\phi_{di}(x) = 0$ 、 $1 \leq i \leq m$ と表記します。

定理4.2を使用して式 (3) を実行し、オプションで山/谷の割り当て式 (9) を適用して、特定の折り目パターンのすべての折り目曲線に沿ってサーフェスを折りたたむ変形に関心があります。これらの制約は、すべての折り目ポイントに適用されます。これは、折り目頂点ではない折り目曲線上のポイントですが、平坦化されたメッシュに次の縮退がある折り目ポイントは例外です（図12を参照）。

- (1) 接触面の縮退：閾値 $\kappa \varepsilon$ よりも小さい曲率の折り目ポイント。
- (2) 縮退エッジ：エッジの折り目を付けて、一方を他方の $\varepsilon r\%$ よりも短い2つの部分に分割します。
- (3) 交差するDOG接線を持つ縮退角度：接線方向 t_1 、 t_2 がエッジ ef 、 eb のいずれかと角度 $\varepsilon \alpha$ より小さい折り目ポイント。

定数 $\kappa \varepsilon = 1e-5$ 、 $\varepsilon r = 5$ 、 $\varepsilon \alpha = 3$ を使用します。すべての折りたたみ制約と山/谷制約（式 (9) ）のセットを $\phi_{f_j}(x) = 0$ 、 $1 \leq f_j \leq n_f$ で表します。

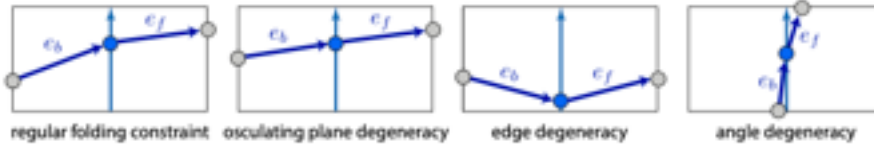


図12：青いエッジを分割する青い折り目ポイントで定義された折りたたみエッジの制約と、制約を強制しない場合の縮退。左から右へ：規則的な折りたたみエッジ制約、接触面の法線の不安定性 ($eb \times ef / ||eb \times ef||$) eb 、 ef がほぼ同一直線上にあるため、青い折り目ポイントで分割されたエッジの一部が比較的非常に短く、最後に青いポイントと交差する e DOGエッジ間の角度が非常に小さいため、エッジは縮退しています。角度縮退は、エッジ縮退の前または後に発生することがよくあります。

DOG角度の制約と折りたたみおよび山/谷の制約のみをハード制約として適用します。 $f(x)$ で表す目的関数は、曲げ目的、ソフト位置制約、ソフト二面体制約、およびソフトパッチ連続性制約の重み付き合計で構成されます。

[Rabinovich et al. 2018a, b]の自由度分析で推奨されているように、アイソメトリーはソフト制約として適用されますが、すべての結果の平均相対エッジストレッチは0.003未満、最大ストレッチは0.004未満であることを強調します、ここで、サーフェスは平均エッジ長が1になるように正規化されています。[Rabinovich et al. 2018b]とは対照的に、パッチ間の線形連続性制約をソフト制約としてエンコードします。これは、これらが大きなペナルティとしてソフトペナルティとして適用されると、折り目パターンの品質と滑らかさが大幅に改善されているためです。重量、そして我々の結果は0.0002の平均導通偏差と0.0035の最大値を持っています。[Rabinovich et al 2018b]の制約付き形状空間解析はDOG角度制約にのみ関係し、複雑な折り目パターンは追加の線形制約の大きなセットを生じさせることに注意してください。

このペーパーで解決する問題は、

$$\arg_x \min f(x)$$

Subject to

$$\phi_{d_i}(x) = 0, i = 1, \dots, m, \quad (10)$$

$$\phi_{f_i} = 0, j = 1, \dots, n_f,$$

の形式で記述できます。ここで、fはセクション6.2で指定されています。ペナルティベースの方法（セクション6.3）を使用して組み合わせ制約 ϕ_{f_j} を処理し、ライン検索（セクション6.4）を使用した逐次逐次二次計画（SQP）ソルバーで問題を解決します。線探索戦略により、DOG角度制約 ϕ_{d_i} が数値的に満たされ、組み合わせ制約 ϕ_{f_j} が正確に満たされることが保証されます。

6.2 Objectives and convex Hessian approximations

私たちの目的関数fは、曲げ、ストレッチ、位置の制約、および二面角を測定するさまざまな関数の重み付き合計で構成されています。[Rabinovich et al. 2018b]から取得した積分二乗平均曲率曲げ目的関数を使用し、等尺変形下では二次で凸であるという事実を利用します[Bergou et al 2006]：

$$f_H(x) = 0.5x^t(L^t M^{-t} L)x \quad (11) \text{ ,}$$

ここで、LはDOGラプラシアン、MはDOG頂点領域によって定義される対角質量行列です[Rabinovich et al. 2018b]。

補題5.1を使用して、制約

$$\phi_{d_{c^i}}(x) := \langle t_1^i, t_2^i \rangle - \cos^2(\alpha^i) - \sin^2(\alpha^i)\cos(\theta^i) = 0 \quad (12)$$

を使用して、所定の折り目で折り角度を制約します。ここで c^i は、辺に沿った折り目点のインデックスです。ここで、 c^i は2つの頂点の線形結合として定義されたエッジに沿った折り目点のインデックスであり、 t_1^i 、 t_2^i 、 α^i はセクション5.1および図11で定義されたとおりであり、 θ^i は折り目ポイント c^i での望ましい二面角です。等尺投影では、 t_1^i 、 t_2^i は正味の頂点位置で線形であり、 α^i は固定され、制約は2次式です。

e をネットメッシュのエッジとし、 l_e をその長さ、 l_e^0 を参照ネットメッシュの長さとし、次の2次アイソメトリ制約を定義します。

$$\phi_{iso}(x)_e := l_e^2 - l_e^{0^2} = 0 \quad (13) \text{ .}$$

重複した折り目ポイントで一連の線形等式制約を使用してパッチに沿って連続性を維持します[Rabinovich et al. 2018b]。これは、 $\phi_{cont}(x) = 0$ で表されます。最後に、図15のリングと図1の環の作成で使用されるように、2つの点と同じ座標を持つ必要がある制約を含む、頂点または折り目エッジポイントの位置制約をユーザーが指定できるようにします（付属のビデオも参照）。このユーザー定義の制約のセットを $\phi_{pos}(x) = 0$ で表します。 $f_D(x)$ 、 $f_{pos}(x)$ 、 $f_{iso}(x)$ 、 $f_{cont}(x)$ で示される二乗偏差にペナルティを使用することにより、二面角、位置、アイソメトリ、パッチの連続性制約をソフトな方法で適用します。これらの二乗された目的の合計は凸ではなく、最適化のヘッシアンをガウス-ニュートンのヘッセ近似で置き換えます。

$\sum ||\phi_{f_i}^*(x)||_2^2$ についても同様です。

最適化の目的関数は次のとおりです。

$$f(x) = w_H f_H + w_{pos} f_{pos} + w_D f_D + w_{iso} f_{iso} + w_{cont} f_{cont} \quad (14) \text{ .}$$

本書では、特に明記しない限り、 $w_H = 1$ 、 $w_{pos} = 5$ 、 $w_D = 100$ 、 $w_{iso} = 20000 / |E|$ 、 $w_{cont} = 1e4$ とします。ここで $|E|$ は、ネットメッシュ内のエッジの数です（つまり、1000エッジのメッシュ $w_{iso} = 20$ のメッシュの場合）。私たちのメッシュは常に1の平均エッジ長を持

つようにスケーリングされます。したがって、同じジオメトリに異なる解像度を使用すると、曲げ目的関数は同じままですが、エッジの数によってアイソメトリック目的関数がスケーリングされます。

6.3 Folding constraints

滑らかなケースでは、非平面点の周りで折られた構成から折られていない構成に移動できないという事実に動機付けられて、常に $\phi_{f_j}(x) = 0$ を正確に満たすよう努めています。平面の一般的な開始点は、定理4.2を満たす面と満たさない面との間の分岐点であるため、興味深いケースです。これは、離散化方程式 (1) にも当てはまります。そのために、ラインサーチを備えた反復逐次2次計画法 (SQP) ソルバーで問題を解決し、制約 $\phi_{f_j}(x)$ を処理する2つの簡単な戦略を補足します。

(1) 制約からの逸脱を罰するペナルティ用語[Nocedal and Wright 2006]。

(2) 結果のメッシュが $\phi_{f_j}(x) = 0, i = 1, \dots, n_f$ を正確に満たさない場合にバックトラックするライン検索方法。

制約 $\phi_{f_j}(x)$ に含まれる関数 $\text{sgn}(x)$ 、 $H(x)$ は C^1 ではないため、これらを近似で置き換えます。

$$\text{sgn}(x) \approx \tanh(hx)$$

$$H(x) \approx \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x^2 + \delta} & \text{if } x > 0, \delta > 0 \end{cases} \quad (15)$$

固定パラメーター $h = 1000$ 、 $\delta = 1e-5$ を使用。 $H(x)$ の近似値は、[Li et al. 2012; Poranne et al. 2017]から得た。ホモトピーベースの最適化での使用は、フラットメッシュで消失する H

(x)の近似を必要とするため、Heavyside関数 $H(x)$ は $\hat{H}(0) = \frac{1}{2}$ なので、 $\approx \hat{H}(x) = \frac{1 + \tanh(hx)}{2}$

です。

近似制約を $\phi_{f_j}^*(x)$ と呼び、最適化問題 (10) を次の問題に置き換えます。

$$\arg_x \min f(x) + \omega \sum ||\phi_{f_j}^*(x)||^2, \text{ subject to } \phi_{d_i}(x) = 0, i = 1, \dots, m \quad (16)。$$

ここで、 $\omega > 0$ は $\omega_0 = 1$ として初期化されたメタパラメーターであり、ラインサーチがサポート平面条件を満たす点を正確に見つけられない場合、その値は2倍になります。実際には、ペナルティ項は、平面に非常に近いポイントにのみ影響し、すでに折りたたまれたポイントの周囲では非常に速くゼロに近づきます。

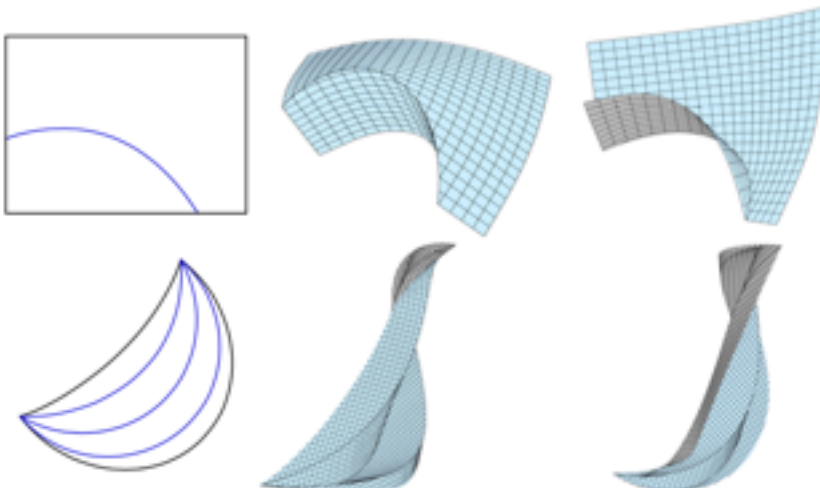


図13：単一の曲線折りでオプションの山/谷割り当て入力（セクション5.2）を使用する。各折り目パターンは、曲線の制約された流れによって引き起こされる同じ位置制約で変形されますが、式（9）によって適用される1つの折り目に沿って異なる山/谷の割り当てがあります。バナナ型のモデル（一番下の行）では、残りの山/谷の割り当てが一意に決定されます。

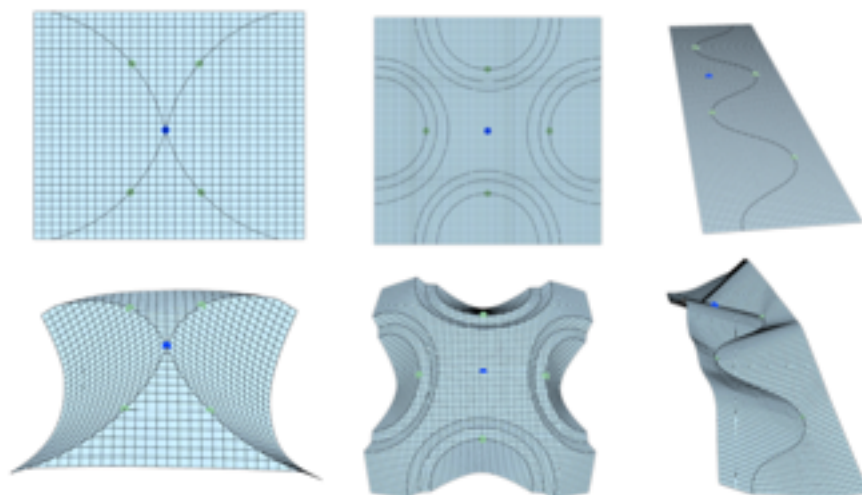


図14：折り目ポイントのまばらなセットにオプションの折りたたみ角度制約（セクション5.1）を使用する。これらの例は、折りたたみの方向を指定せずに、ポイントのセット（緑色）の折りたたみ角度を制約し、単一の位置制約（青色）を設定することによって変形されます。

6.4 Equality constrained SQP

表記を簡単にするために、式（16）の目的を参照するために以下を使用します。

$$f_{\omega}(x) = f(x) + \omega \sum ||\phi_f^*(x)||^2 \quad (17)。$$

直線探索[Nocedal and Wright 2006]でSQPを使用し、(16)を最小化する。与えられた反復 x^k での変数のセットとラグランジュ乗数 λ^k の現在の値が与えられると、直線探索等式制約付きSQPアルゴリズムは、式（16）のラインサーチの次の方向を反復的に見つけ、次の変数 x^{k+1} を次の形式のKKTシステムを解く：

$$K \begin{pmatrix} d^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = b,$$

$$K = \begin{pmatrix} \Delta_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k) & J^T \\ J(x^k) & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \nabla f_{\omega}(x^k) \\ -\phi_{d_i}(x^k) \end{pmatrix} \quad (18)$$

ここで、 $J(x)$ は式 (16) の等式制約のヤコビアン、 $\Delta_{xx}^2 L(x, \lambda) = H_{f_\omega}(x) + \sum \lambda_i^k \Delta_{xx}^2 \phi_{d_i}(x)$ は問題のラグランジュのヘッセ行列、 $H_{f_\omega}(x)$ は $f_\omega(x)$ のヘッセ行列です。

[Rabinovich et al. 2018b]に続いて、DOGの特異点を処理するために、最小限変更されたヤコビアン $J^*(x)$ を使用します。また、6.2節で詳しく説明するように、目的関数 $H_{f_\omega}(x)$ のヘッシアンを $H_{f_\omega}^*(x)$ で表す凸近似で置き換え、システム (18) を次のように置き換えます。

$$K \begin{pmatrix} d^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = b,$$

$$K = \begin{pmatrix} H_{f_\omega}^*(x^k) + \sum \lambda_i^k \Delta_{xx}^2 \phi_{d_i}(x^k) & J^{*T}(x^k) \\ J^*(x^k) & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} \nabla f_\omega(x^k) \\ -\phi_{d_i}(x^k) \end{pmatrix} \quad (19)。$$

[Rabinovich et al 2018b]では、ラグランジュのヘッシアンの代わりにラプラシアンを使用して同様のシステムを解くことにより、ラプラシアンメトリックフローを離散化していることに注意してください。ただし、特に大きなモデルでは、ラプラシアンをラグランジアンに置き換えてからヘッセ行列を凸にすると、パフォーマンスが大幅に向上することがわかりました。SQPアルゴリズムで一般的であるように、目的関数と制約の組み合わせとして定義されるライン検索をガイドするメリット関数を使用します。直線探索は、目的関数を削減し、DOG角度制約を数値的に実現可能に保つステップサイズを選択しますが、ポイントが制約 ϕ_{d_i} を正確に満たさない場合はバックトラッキングします。

これにより、[Rabinovich et al. 2018a, b]で使用されていたより遅いLBFGS制約の予測が不要になります。 L_2 メリット関数を使用します[Nocedal and Wright 2006]：

$$\psi(x; \mu) = f_\omega(x) + \mu \sum ||\phi_{d_i}(x)||_2 \quad (20)、$$

ここで、ラグランジュ乗数の絶対値[Nocedal and Wright 2006]を使用して各反復でパラメータ μ^k を更新します[Nocedal and Wright 2006]：

$$\mu^k = \max\{c_\mu \max\{|\lambda_i^k|\}, \mu_0\} \quad (21)、c_\mu = 1.1 \text{ および } \mu_0 = 0.05。$$

7 Results

上記の最適化 (式 (14) を参照) をインタラクティブなフリーフォーム編集システムで使用します。システムへの入力、平坦なドメイン境界と折れ線パターンの曲線であり、ポリラインで表されます。これらは、その中の滑らかな曲線をサンプリングすることにより、標準のベクトルグラフィックス形式から簡単に生成できます。私たちのシステムは、CGALの配置モデルを使用して入力曲線の配置を計算します[CGALプロジェクト2019; Wein et al. 2019; Zukerman et al. 2019]であり、Pardiso [De Coninck et al. 2016; Kourounis et al. 2018; Verbosio et al. 2017]。3.4 GHzでクロックされる16コアのRyzen Threadripper 1950Xで実験を行いました。図1、8、15、および図3の左から2番目と最後のモデルに見られるように、編集システムはポイントハンドルの位置制約の設定をサポートしています。私たちのアルゴリズムのストレステストを図15に示します。折り目パターンには、ポイントハンドルの位置拘束によってのみ駆動される、すべて自動的に曲げたり折ったりする20の異なる折り目が含まれています。また、曲線の制約された流れで曲率とねじれを指定することにより、折り目曲線を制約することもできます (図3および

13を参照)。また、折り目ポイントに沿った二面角のまばらなセットを指定します(図14を参照)。

図13は、山/谷の割り当てを入力として提供する唯一のケースです。一方、図14は、二面角を制約することによって設計されたモデルのみを表示しています。曲線に拘束された位置拘束と二面角が補間され、品質が向上します(図6を参照)。ハンドルベースの編集タスクでインタラクティブなフレームレートを維持するために、フレームごとに固定数のSQP反復を実行し、これを5に設定します。500、1000、2000、4000の頂点を持つモデルでは、これらの5つのSQP反復は平均39、19、9、4フレーム/秒以上で実行されます。したがって、私たちのシステムは、約2000の頂点を持つメッシュのリアルタイムの相互作用を処理できます。図1の2つの同心円の折り目は、約5500個の頂点を持つメッシュに由来します。それらは、ペナルティの重みを補間しながら、頂点の1つのペアの距離にペナルティを課すだけで設計され、最終的な形は約30秒で到達します。インタラクティブな編集例を含む詳細な結果については、補足ビデオを読者に紹介します。

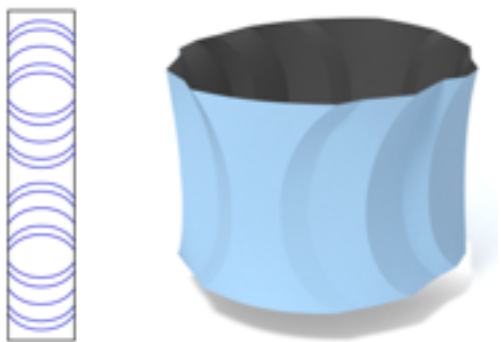


図15：曲線折りのリング。これは[Mitani 2019]の展開図で、20種類の折り目が含まれています。これは、折りたたみ角度や山谷割り当てを指定せずに、折りたたみ制約(セクション6)を適用することで変形した結果です。ループが形成されるように、展開図の両端の点に位置制約を与えると同時に、接続部分の曲げエネルギーを最小化することで、ループを滑らかにします。

8 Conclusions And Future Work

この論文は、曲線折りとそこから生成される面の(ロックのない)自由形状モデリングへの第一歩です。モデルをDOGに基づいて[Rabinovich et al. 2018a]、曲線折りの変形の完全なセットをキャプチャでき、セクション4の離散化とセクション6の折りたたみアルゴリズムを使用して、モデル全体を同時に変形するように誘導します。私たちの変形アルゴリズムは、位置拘束を使用するだけで複雑な折り目パターンの曲げと折りたたみをモデル化できるため、新たな曲線折り表面の探索に非常に適しています。セクション5では、二面角と山/谷の割り当てを制限するオプションの目的関数をさらに提供し、設計者の表現力をサポートします。

DOGのモデリングに関する他の作品と同様[2018a; 2018b]、アルゴリズムの最も明らかな制限は速度です。最適化フレームワークにより、最大2000の頂点をインタラクティブにモデル化で

きます。DOGグリッドでマルチグリッドソルバーを使用することにより、最適化のスケーリングを将来の作業に委ねます。さらに、設計された形状の対称性を強化するためのツールや目的関数が不足していることがわかりました。特に、湾曲した対称面の壁紙とテッセレーションの折りたたみに注目します [Demaine et al 2015; Mundilova 2019]。また、衝突、材料の厚さ、弾性などの物理的現実の制約も考慮に入れていないため、システムで作成されたモデルは必ずしも実現可能ではありません。モデルを物理的に正確な設計システムに組み込むことで、この制限を緩和できる可能性があります。最後に、特定の固定入力折り目パターンの変形をモデル化することに注意してください。折り紙モデリングツール [Tachi 2010] で行われているように、入力の折り目パターンを最適化および変更することで、曲線折り表面を発見および設計するための新しいエキサイティングな方法を提供できます。