Análisis Numérico I / Análisis Numérico
Práctico N°3 - 2025

Temas: Error numérico. Sistemas de representación de números: punto fijo y punto flotante.
Aclaración: Durante esta materia consideraremos el sistema de punto flotante con un cero en la parte entera, y el primer número de la parte decimal distinto de cero. La *cantidad de decimales* se refiere a la cantidad de dígitos después del separador decimal. Es decir, un número en punto flotante en base 10 con k dígitos decimales se escribe:

$$0.d_1 d_2 \cdots d_k \cdot 10^{\beta} \quad \text{con } d_1 \neq 0,\ d_i \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ y } \beta \in \mathbb{Z}.$$

1. La función $f(x) = \frac{1}{x^2} - 5$, que tiene como raíces a $\frac{1}{\sqrt{5}}$ y $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Se desea estimar el valor de $\frac{1}{\sqrt{5}}$ aplicando el método de Newton a $f(x)$, comenzando con $x_0 = 0.996$.

   a) Mostrar que la fórmula de iteración está dada por: $x_{n+1} = 1.5 \cdot x_n - 2.5 \cdot x_n^3$.

   b) Realizar 5 iteraciones utilizando el sistema de punto fijo con dos decimales.

   c) Realizar 5 iteraciones utilizando el sistema de punto fijo con cuatro decimales.

   d) Sabiendo que el valor real de $\frac{1}{\sqrt{5}}$ es aproximadamente 0.4472135955, determinar si en los incisos *b*) y *c*) el algoritmo converge o no a una raíz de $f(x)$.

2. Considerar los siguientes números reales: $u = 3.721478693$ y $v = 3.720230572$. La resta $u - v$ es igual a 0.001248121. Si los cálculos se efectúan en un sistema de punto flotante en base 10 y con 5 dígitos decimales, verificar que el error relativo de la resta es del 4 % aproximadamente.

3. En un sistema de punto flotante en base 10 y con 5 dígitos decimales, ¿qué números reales x cumplen $fl(1.0 + x) = 1.0$?

4. Dar una forma alternativa para realizar las siguientes operaciones evitando la pérdida de dígitos significativos, para x próximo a 0:

   a) $(\alpha + x)^n - \alpha^n$, para $\alpha > 0$, $x > 0$

   b) $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - x}$

   c) $\ln(\alpha + x) - \ln(\alpha)$, para $\alpha > 0$

   d) $\operatorname{sen}(\alpha + x) - \operatorname{sen}(\alpha - x)$

5. Considerar los siguientes números: $x_1 = 1.234 \times 10^1, x_2 = 3.453 \times 10^0, x_3 = 3.441 \times 10^{-2}, x_4 = 4.667 \times 10^{-3}, x_5 = 9.876 \times 10^{-4}$. Realizar la suma $x_1 + \ldots + x_5$ en el sistema de punto flotante con base 10 y 4 dígitos decimales en orden creciente y decreciente. ¿Cuál será más conveniente? (El resultado correcto es 15.8330646).

6. Hallar la raíz menor (en módulo) de la ecuación $x^2 - 40x + 0.25 = 0$, utilizando aritmética de punto flotante en base 10 y con 4 dígitos decimales y comparar con el resultado obtenido utilizando aritmética exacta. Calcular el error relativo. ¿A qué se debe la pérdida de dígitos significativos? Proponer otro método alternativo para calcular esa raíz con mayor precisión. ¿Cuál es el error relativo con el nuevo método?

7. En cierta ciudad europea, el gobierno ha acordado pagarle a la empresa de ómnibus urbano una comisión del 9.3 % por cada boleto vendido. Para sus finanzas el gobierno usa un software configurado con aritmética de punto fijo con dos decimales. Sabiendo que el boleto cuesta €2.25:

   a) ¿Cuánto dinero debería ganar la empresa por cada boleto vendido? Si la cuenta que hace el gobierno en su software es 2.25×9.3 y luego divide por 100, ¿cuánto dinero va a darle el gobierno a la empresa por cada boleto vendido?

b) Ya que se estima en 14 millones el número de personas que viajan mensualmente en ómnibus, ¿cuánto dinero paga el gobierno y cuánto debería ganar la empresa mensualmente?

c) Sugerir al gobierno cómo puede hacer la cuenta en esa aritmética evitando el error de redondeo.

8. Mostrar en los siguientes cálculos que, trabajando con punto flotante con una precisión de 4 dígitos decimales, no valen las leyes asociativa y distributiva.

   a) $0.98765 + 0.012424 - 0.0065432$

   b) $(4.2832 - 4.2821) \times 5.7632$

9. Evaluar el polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149$ en $x = 4.71$ utilizando aritmética de punto flotante de 3 dígitos decimales. Evaluarlo luego usando la expresión alternativa $P(x) = ((x - 6)x + 3)x - 0.149$ (denominada Esquema de Horner). Comparar con el resultado exacto y sacar conclusiones.