

Tasa de datos máxima de un canal

$$\text{Tasa de datos máxima} = 2H \log_2 V \text{ bps}$$

Debido al ruido térmico hay un V máximo que permite enviar señales.

No puedo hacer el V tan grande como quiera y por lo tanto la tasa de datos máxima está acotada por el V máximo.

La fórmula anterior no dice cómo obtener el V máximo.

- **Problema:** ¿Cómo calcular la tasa de datos máxima de un canal teniendo en cuenta el ruido térmico y cómo calcular el V máximo permitido?
- **Solución:** usar el **método de Shannon**.
 - Antes de presentarlo vamos a introducir algunos conceptos

Ruido térmico medido por relación potencia de señal y potencia del ruido: S/N

Este valor puede ser muy grande y por lo tanto se introduce una escala logarítmica.

$$10 \log_{10} S/N.$$

Los resultados de esta fórmula son expresados en decibeles.

Para 10 dB cual es la relación S/N ? 10

Para 30 dB cual es la relación S/N ? 1000

- **Resultado de Shannon** (1948): la tasa de datos máxima de un canal ruidoso cuyo ancho de banda es H Hz y cuya relación señal a ruido es S/N , está dada por:
$$N^\circ \text{ máximo de bps} = H \log_2 (1+S/N)$$
- La fórmula solo da un límite superior y los sistemas reales rara vez lo alcanzan.

Ejercicio: ¿cuál es la tasa de datos máxima de un canal de ancho de banda de 3000 Hz y con una relación señal a ruido de 30 dB?

$$H = 3000 \text{ Hz}$$

$$30 \text{ dB} = 10 \log S/N$$

¿Cuánto es S/N ? poner en el chat.

$$3 = \log S/N$$

$$S/N = 1000$$

$$\text{Tasa de datos máxima} = H \log_2 (1 + S/N) = 3000 \log_2 (1001) = 3000 * 9,9 \text{ aprox} = 29700 \text{ aprox.}$$

¿Cómo calcular los niveles de voltaje que valen la pena dada la relación de señal a ruido?

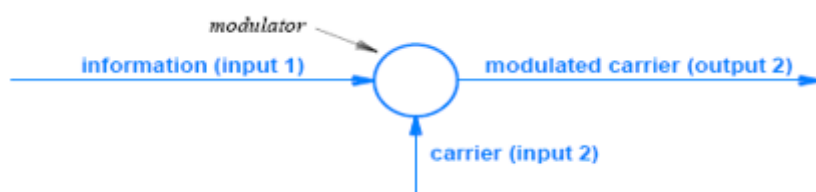
- Igualando Nyquist y Shannon:
 - $H \log_2 (1+S/N) = 2H \log_2 V \implies$
 - $\log_2 (1+S/N) = 2 \log_2 V \implies$
 - $\log_2 (1+S/N) = \log_2 (V*V) \implies$
 - $(1+S/N) = V * V \implies$
 - $V = (1+S/N)^{1/2}$
 - **Ejemplo:** línea telefónica: $V = (1+1001)^{1/2} \cong 31$

Modulación

- **Situación:** las computadoras trabajan con señales digitales y la red telefónica usa comunicación analógica.
- **Problema:** ¿Cómo hacer para mandar mensajes de una computadora por la red telefónica?

Solución: Usar módems

- Permiten convertir una señal digital en analógica y recíprocamente.
- Para convertir una señal digital en una analógica usamos lo que se llama modulación.



Un modulador es un dispositivo que recibe una señal digital y una onda portadora (onda sinusoidal de alrededor de 2000 Hz por ejemplo) y modifica esa onda portadora produciendo una señal analógica de salida (output 2).

Se hace esto cambiando una de las características de la onda de input (input 2): amplitud, frecuencia, desplazamiento de fase. Esto para producir la señal analógica asociada a la señal digital.

Un modem tiene que tener un modulador.

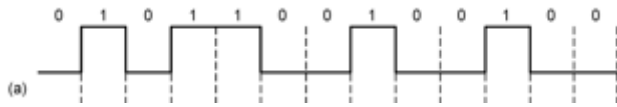
Esto nos hace pensar en 3 tipos de modulación:

- De amplitud: se usan dos niveles de amplitud para reflejar 0 y 1.
- De frecuencia: se usan dos frecuencias diferentes para reflejar 0 y 1, por ejemplo la frecuencia de 1 es mayor que la de 0.
- De fase: usamos distintos desplazamientos de fase para reflejar 0 y 1.
 - Por ejemplo: 0 grados para 0 y 180 grados para 1.

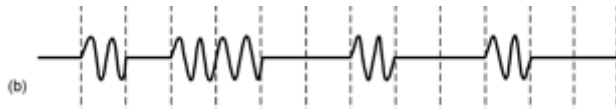
En realidad se pueden usar N valores diferentes (para amplitud o para fase o para frecuencias)

Otro ejemplo, es usar desplazamiento de 45, 135, 225, o 315 grados para transmitir 2b de información por intervalo.

Ejercicio: representar modulación de amplitud, frecuencia y fase para el mensaje: 0101100100100. Asumir dos niveles de voltaje para la señal digital.

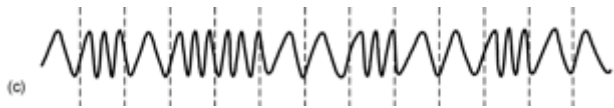


Si usamos modulación de amplitud.

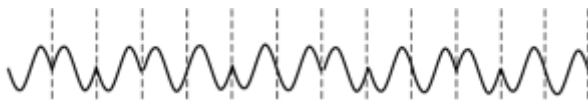


Esto se podría haber hecho con dos amplitudes diferentes de cero.

Si usamos modulación de frecuencia:



Si usamos modulación de fase 180 para 0 y 0 grados para 1:



En la práctica se usa modulación de fase y de amplitud. Los módems usan una combinación de amplitudes y fases para representar las señales analógicas.

¿Cómo representar las combinaciones de modulación usadas por un modem?

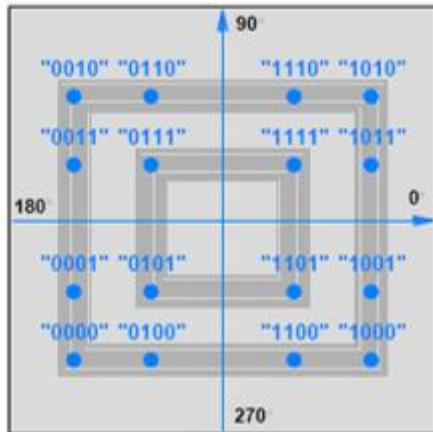
- Se van a representar por medio de puntos en un diagrama cartesiano
- La amplitud va a ser reflejada por la distancia al origen del punto.
- El desplazamiento de fase va a ser el ángulo de la recta que va del origen al punto y el eje cartesiano x.

A estos diagramas se les llama diagramas de constelación.

Por ejemplo, un modem que solo tiene desplazamientos de fase de 180 y 0 grados y la amplitud es fija, se lo representa con:



Un ejemplo más complicado es QAM 16: donde tengo 16 desplazamientos de fase y 4 amplitudes:



Como son 16 puntos, con cada punto se puede representar un número de 4 bits.

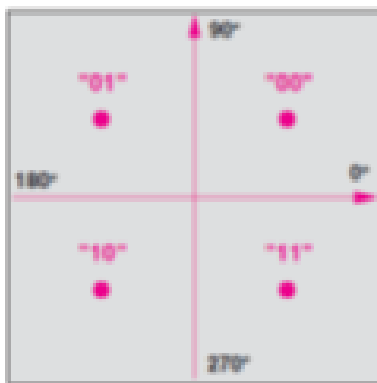
Ejercicio: Si en un diagrama de constelación todos los puntos están en un círculo centrado en el origen. ¿Qué tipo de modulación está siendo usada?

Todos tienen la misma amplitud. ¿Entonces qué es lo que varía?

Cambia el desplazamiento de fase y se usa entonces modulación de fase.

Ejercicio: El diagrama de constelación de un modem tiene puntos de datos en las siguientes coordenadas: (1,1), (1, -1), (-1, 1) y (-1, -1). ¿Cuántos bps un modem con esos parámetros alcanzar a 1200 símbolos por segundo?

Primero hay que hacer el diagrama de constelación del modem.



Con 4 puntos podemos reflejar números de 2 bits por símbolo.

¿Cuál es entonces la respuesta al ejercicio?

1200 simbolos por segundo = $1200 * 2 = 2400$ bps.

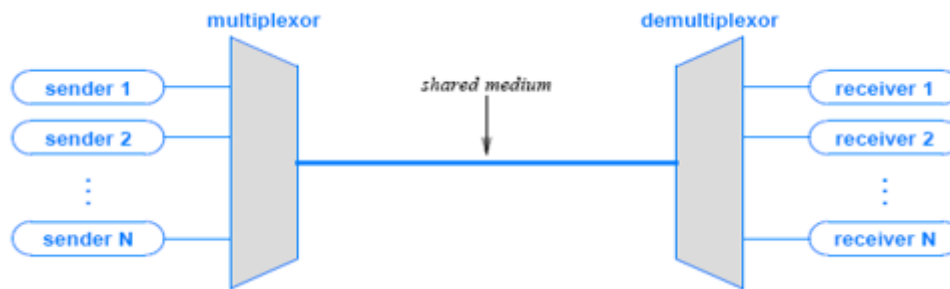
Multiplexado

Si tenemos varias señales que tienen que recorrer una distancia larga por el mismo tramo, entonces conviene ponerlas en el mismo cable. Originalmente las señales pueden estar en cables diferentes que recorren una distancia chica.

Por ejemplo, 1000 casas en un vecindario mandan señales separadas por un cable a una oficina central. En esa oficina las señales de esas 1000 casas se ponen en el mismo cable, para recorrer una distancia grande. Esto representa un gran ahorro de dinero.

Problema: ¿cómo hacer para juntar varias señales en un mismo canal?

Solución: para eso se usa lo que se conoce como multiplexado que junta varias señales independientes que vienen por canales independientes en un mismo canal.

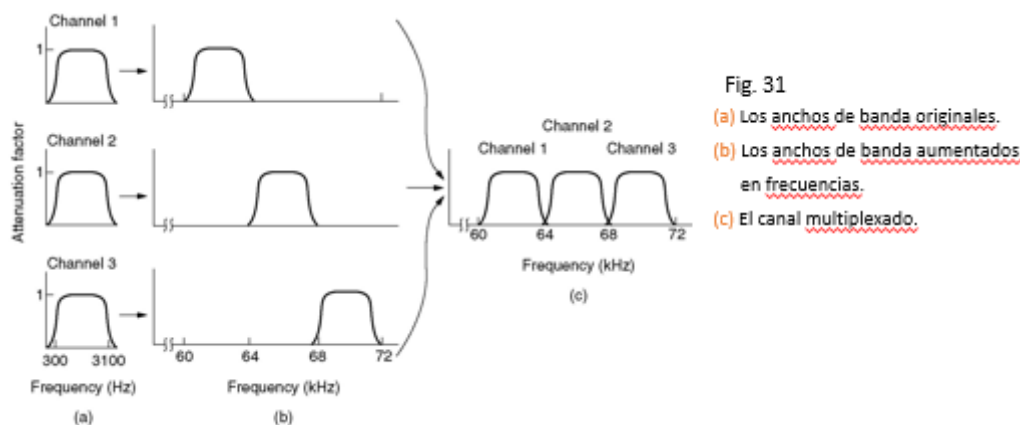


Un multiplexor combina las señales de input en un mismo canal y un demultiplexor separa las señales del canal en las componentes iniciales.

Problema: ¿Para multiplexar varias señales analógicas como hacemos?

Solución: Multiplexado por división de frecuencia.

Por ejemplo, multiplexado de canales telefónicos.



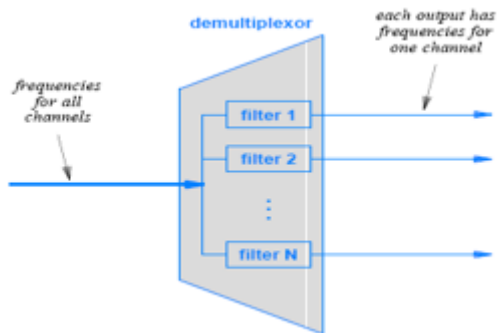
Inicialmente tenemos varios canales con aproximadamente el mismo espectro.

Al multiplexar elevamos la frecuencia de las señales y las ponemos en un mismo canal.

El resultado va a ser un canal con un ancho de banda mayor con todas las señales.

En esto consiste el multiplexado.

Para demultiplexar se usan filtros.



Ejercicio: Diez señales, cada una requiere 4000 Hz, son multiplexadas en un canal único usando FDM. ¿Cuál es el mínimo ancho de banda requerido para el canal multiplexado? Asumir que las bandas de guarda son de 400 Hz de ancho.

10 señales de 4000 Hz = 40000 Hz es lo que necesitamos.

9 guardas de 400 Hz = 3600 Hz.

Esto quiere decir que necesitamos $40000 + 3600 = 43600$ Hz de ancho de banda para poder multiplexar las señales.

Problema: Queremos mandar varias señales digitales por el mismo canal. ¿cómo hacemos?

Solución: multiplexado por división de tiempo.



Tenemos N máquinas que envían señales digitales. A cada máquina se le asigna una ranura de tiempo para que transmita. Esto se hace usando Round Robin por ejemplo. Cada máquina debe esperar su turno para transmitir.

Usualmente las esperas de las máquinas son muy bajas y el canal donde se multiplexan las señales es mucho más rápido que los canales de las señales individuales.

TDM usado por redes de teléfonos y de celulares.

Ejercicio: Queremos poder multiplexar hasta 100 señales de 10 Mbps en un canal de 1 Gbps usando TDM. El *tiempo de guarda* debe ser $1/8$ del tiempo de ranura. En cada ranura una estación manda 32 b. ¿cuál es el tiempo de guarda? ¿cuál es el tiempo de ranura? ¿Cuánto tiempo debe esperar una estación hasta que le toca su turno de nuevo luego de mandar asumiendo que se usa un esquema Round Robin para transmitir y están mandando las 100 estaciones?

1000000000 b	-----	1000000 microseg
32 b	-----	0,032 microseg; este es el tiempo de ranura
$32/8 = 4$ b	-----	0,0004 microseg; este es el tiempo de guarda

La guarda + ranura = 36 tiempos de bits.

Una estación que transmitió tiene que esperar que las otras 99 transmitan.

O sea $99 * 36$ tiempos de b: 3564 tiempos de b.

1000000000 b	-----	1000000 microseg
3564 b	-----	3,564 microseg

Y esto toma 3,564 microsegundos. Este es el tiempo que debe esperar la estación hasta poder transmitir nuevamente. Como ven es muy poca la espera. Esto es porque el canal es muy rápido.

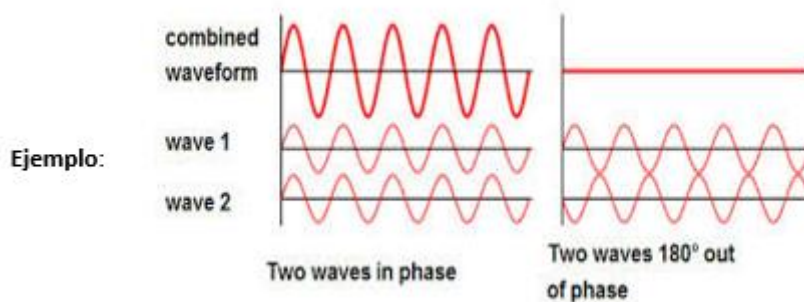
Problema: ¿Para multiplexar varias señales analógicas cómo hacemos?

Ya vimos que con multiplexado de división de frecuencia se podía. Pero hay otra manera.

Solución: Multiplexado por división de código. Varias señales pueden transmitir simultáneamente compartiendo la misma banda de frecuencias.

¿Cómo eso es posible?

Usamos principio de superposición de ondas.



Dos señales en fase se agregan para sumar sus amplitudes.

Dos señales fuera de fase se restan para dar una señal que es la diferencia de sus amplitudes.

Usando este principio podemos agregar varias señales simultáneas que usan el mismo ancho de banda linealmente. Esto da una señal nueva.

Para que esto tenga sentido, se debe poder extraer cualquiera de las señales originales de la señal agregada.

Cada máquina tiene asignada un número de M bits llamado **secuencia de chips**.

Ejemplo: la estación A tiene secuencia de chips 00011011. O sea, $M = 8$.

En lugar de usar dígitos binarios, vamos a usar lo que se llama notación bipolar.

Un 0 se representa con -1 y un 1 se representa con +1.

Ejemplo: para la estación A anterior tenemos (-1-1-1+1+1-1+1+1)

Para una estación transmitir en un tiempo de bit usamos las siguientes reglas:

- transmitir un 1 enviando su secuencia de chips en bipolar,
- transmitir un 0 enviando su negativo de su secuencia de chips
- puede quedarse en silencio y no transmitir nada.

Ejercicio: $m = 8$, estación A con secuencia de chips 00011011. ¿Qué envía para mandar un bit 1? ¿y para mandar un bit 0?

Solución:

- envía un bit 1 mediante el envío de $(-1 -1 -1 +1 +1 -1 +1 +1)$
- envía un bit 0 mediante el envío de $(+1 +1 +1 -1 -1 +1 -1 -1)$.

En la realidad tenemos varias estaciones mandando y todas mandan un bit al mismo tiempo.

A: 0 0 0 1 1 0 1 1	A: $(-1 -1 -1 +1 +1 -1 +1 +1)$
B: 0 0 1 0 1 1 1 0	B: $(-1 -1 +1 -1 +1 +1 +1 -1)$
C: 0 1 0 1 1 1 0 0	C: $(-1 +1 -1 +1 +1 +1 -1 -1)$
D: 0 1 0 0 0 1 0	D: $(-1 +1 -1 -1 -1 -1 +1 -1)$
(a)	(b)

Six examples:

-- 1 --	C	$S_1 = (-1 +1 -1 +1 +1 +1 -1 -1)$
- 1 1 --	B + C	$S_2 = (-2 0 0 0 +2 +2 0 -2)$
1 0 --	A + B	$S_3 = (0 0 -2 +2 0 -2 0 +2)$
1 0 1 --	A + B + C	$S_4 = (-1 +1 -3 +3 +1 -1 -1 +1)$
1 1 1 1	A + B + C + D	$S_5 = (-4 0 -2 0 +2 0 +2 -2)$
1 1 0 1	A + B + C + D	$S_6 = (-2 -2 0 -2 0 -2 +4 0)$
	(c)	

Cuando dos o mas estaciones transmiten de manera simultánea un bit, sus señales bipolares se agregan linealmente por principio de superposición de ondas.

Ejercicio: Suponer que A, B, y C están transmitiendo bits 0 usando un sistema CDMA con secuencias de chip de la figura de abajo. ¿Cuál es la secuencia de chips resultante?

$$\begin{aligned}
 A &= (-1 -1 -1 +1 +1 -1 +1 +1) \\
 B &= (-1 -1 +1 -1 +1 +1 +1 -1) \\
 C &= (-1 +1 -1 +1 +1 +1 -1 -1) \\
 D &= (-1 +1 -1 -1 -1 -1 +1 -1)
 \end{aligned}$$

Las estaciones mandan 0, o sea el negativo de sus secuencias de chips.

$(+1, +1, +1, -1, -1, +1, -1, -1)$

$(+1, +1, -1, +1, -1, -1, -1, +1)$

$(+1, -1, +1, -1, -1, -1, +1, +1)$

Lo que se manda es la suma de estas secuencias

$(+3, +1, +1, -1, -3, -1, -1, +1)$

Problema: ¿cómo recuperar señal agregada?.

Dos secuencias de chip S y T son ortogonales sii:

$$S \cdot T \equiv \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i T_i = 0$$

Requisito: Para que un receptor pueda recuperar la señal enviada por una estación todas las secuencias de chip deben ser ortogonales dos a dos.

Solución: Para **recuperar el flujo de bits** de una estación, el receptor.

Procedimiento usado:

- calcula el producto interno normalizado de la secuencia de chips recibida y la secuencia de chips de la estación cuyo flujo de bits se está tratando de recuperar.
- Si la secuencia de chips recibida es **S** y el receptor está tratando de escuchar una estación cuya secuencia de chips es **C**, simplemente calcula **S•C**.

Six examples:

-- 1 --	C	$S_1 = (-1 +1 -1 +1 +1 -1 -1)$
- 1 1 -	B + C	$S_2 = (-2 \ 0 \ 0 \ 0 +2 +2 \ 0 -2)$
1 0 --	A + B	$S_3 = (\ 0 \ 0 -2 +2 \ 0 -2 \ 0 +2)$
1 0 1 -	A + B + C	$S_4 = (-1 +1 -3 +3 +1 -1 -1 +1)$
1 1 1 1	A + B + C + D	$S_5 = (-4 \ 0 -2 \ 0 +2 \ 0 +2 -2)$
1 1 0 1	A + B + C + D	$S_6 = (-2 -2 \ 0 -2 \ 0 -2 +4 \ 0)$

(c)

Ejemplo: En la cuarta transmisión el receptor ve la suma S: **A + B + C**

El receptor quiere recuperar lo que manda la estación C.

Entonces se hace la cuenta:

$$(S \bullet C = (A + \bar{B} + C) \bullet C = A \bullet C + \bar{B} \bullet C + C \bullet C = 0 + 0 + 1 = 1$$

Multiplicar una secuencia de chips consigo misma me da 1, porque hago el producto interno normalizado. O sea, hago el producto interno y al resultado lo divido por el largo de la secuencia de chips que en este caso es 8.

Problema: ¿Si tengo N estaciones, como producir N secuencias de chips ortogonales 2 a 2?

Solución: Para producir un conjunto de secuencias de chip ortogonales se usan las matrices de Hadamard:

$$W_1 = (1)$$

Esto sirve para N = 1

W2

1	1
1	-1

Esto sirve para N = 2

$$W_{2n} = \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & \overline{W_n} \end{pmatrix}$$

Esto es para $N = 2n$

Fijarse que para calcular W_{2n} se usa W_n y su negación (o sea, negación de dígitos bipolares).

Modulación por división de código se usa para redes de celular y de cable.

