# Práctico 0: Repaso de Cálculo Proposicional

Algoritmos y Estructuras de Datos I
$2^{\text{do}}$ cuatrimestre 2022

Este práctico busca repasar la manera en que probamos teoremas del cálculo proposicional. No te asustes por el largo, hay relativamente pocos ejercicios y mucho para pensar. Un plazo realista para completar este práctico es una semana. Es importante que vos puedas darte cuenta cuánto necesitás de el y qué partes podes saltearte. Lo más importante es verificar que:

1. Sabés cómo decidir si podés aplicar un teorema/axioma en un paso.
2. Sabés que si una fórmula $P$ no es válida, entonces hay un contra-ejemplo para esa fórmula (es decir, hay un modelo para $\neg P$).
3. Tenés cierta práctica para manipular fórmulas proposicionales y (des)igualdades aritméticas.
4. Tenés cierta práctica para probar teoremas.

## Ejercicios

**1.** En el margen mostramos una demostración para la asociatividad de la discrepancia. ¿Podrías explicar (escribilo) brevemente por qué la prueba es correcta?

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{(p \not\equiv (q \not\equiv r))} \\
\equiv & \{ \text{ Def. de } \not\equiv \ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{(q \not\equiv r)}) \\
\equiv & \{ \text{ Def. de } \not\equiv \ \} \\
 & \neg(p \equiv \underline{\neg(q \equiv r)}) \\
\equiv & \{ \text{ Def. de } \neg \ \} \\
 & \underline{\neg(p \equiv \neg q \equiv r)} \\
\equiv & \{ \text{ Def. de } \not\equiv \ \} \\
 & \underline{(p \equiv \neg q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Def. de } \neg \ \} \\
 & \underline{\neg(p \equiv q)} \not\equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Def. de } \not\equiv \ \} \\
 & (p \not\equiv q) \not\equiv r
\end{array}
$$

**2.** Considerá la siguiente fórmula: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Indicá cuáles de las siguientes fórmulas son sub-fórmulas.

**a.** $(q \wedge r)$ **b.** $(q \wedge r) \equiv (p \vee q)$ **c.** $p \equiv (p \vee q)$ **d.** $p \vee r$
**e.** $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

**Reflexión:** Este ejercicio busca evidenciar que no cualquier "pedazo" (sub-cadena) de la fórmula es una sub-fórmula. Es importante porque sólo podemos aplicar pasos (ya sean de equivalencia, igualdad, implicación o desigualdad) en sub-fórmulas. De hecho, hay mucho más en este ejercicio: muestra que las fórmulas no son "cadenas de símbolos" que podemos partir donde se nos antoje ("pedazos") sino que tienen una estructura y por eso hablamos de sub-fórmulas.

**3.** Indicá cuáles de los siguientes pasos lógicos son correctos para algún axioma/teorema. Si son correctos indicá el axioma/teorema que aplicaste. ¿Qué significa *aplicar* un axioma/teorema?

**a.**
$$
\begin{array}{ll}
 & (p \vee q) \wedge (q \vee p) \\
\equiv & \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\
 & p \vee q
\end{array}
$$

**b.**
$$
\begin{array}{ll}
 & (p \vee q) \wedge (p \vee q) \\
\equiv & \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\
 & p \vee q
\end{array}
$$

**c.**
$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow q \\
\equiv & \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\
 & \neg q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)
\end{array}
$$

**d.**
$$
\begin{array}{ll}
 & \neg(p \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg q \\
\equiv & \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\
 & q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)
\end{array}
$$

**e.**
$$
\begin{array}{ll}
 & \neg((x > 0) \equiv (x > 0)) \\
\equiv & \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\
 & False
\end{array}
$$

**f.**
$$
\begin{array}{ll}
 & \neg p \\
\equiv & \{ \qquad\qquad\qquad\qquad \} \\
 & False
\end{array}
$$

**Reflexión:** Ahora nos interesa entender qué significa "aplicar" un paso; es decir, una vez que identificamos la sub-fórmula tenemos que encontrar una correspondencia entre el axioma/teorema y la sub-fórmula donde lo aplicamos. El proceso que aplicamos para decidir si un paso es aplicable o no, y cuál es el resultado en caso que se pueda, es el mismo que usamos para pattern-matching.

**4.** Demostrá los siguientes teoremas utilizando los axiomas y teoremas del cálculo proposicional del digesto (y cualquier otro teorema que se te ocurra y demuestres, claro). Acá hay dos observaciones que descubrimos probando teoremas, quizás te resulten útiles. Sería buenísimo si vos podés escribir brevemente tus propias observaciones.

- Si hay que demostrar una equivalencia, puede ser mejor comenzar con el término más *complejo* e intentar llegar al termino más simple.
- La Regla Dorada es útil para obtener teoremas más cómodos sobre la conjunción (y la disyunción). Recomendamos evitarla tanto como sea posible.[1]

**a.** Idempotencia de la conjunción: $p \wedge p \equiv p$. **b.** Neutro de la conjunción: $p \wedge True \equiv p$.

**c.** Absorción de conjunción respecto a disyunción: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

**d.** Debilitamiento para $\wedge$: $p \wedge q \Rightarrow p$. **e.** Debilitamiento para $\vee$: $p \Rightarrow p \vee q$.

**f.** Relación entre $\Rightarrow$ y $\vee$: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. **g.** Contra-recíproca: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$.

**h.** De Morgan para $\wedge$: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ **i.** De Morgan para $\vee$: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

**j.** Distributividad de $\vee$ con $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

**k.** Distributividad de $\wedge$ con $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

**l.** Intercambio para $\Rightarrow$: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv p \wedge q \Rightarrow r$.

**m.** Implicación de la disyunción: $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$.

**n.** Distributividad de $\Rightarrow$ con respecto a $\wedge$: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$.

**Reflexión:** Es importante que podamos darle sentido a los títulos que tienen, algunos son fáciles de comprender si hacemos alguna analogía con la aritmética (por ejemplo, las distribuciones).

También podemos utilizar tablas de verdad o algún otro *modelo* para razonar sobre los teoremas; por ejemplo, las leyes de De Morgan pueden verse claramente si pensamos que $p$ y $q$ son sub-conjuntos de algún conjunto $U$ e interpretamos la conjunción como la intersección, la disyunción como unión y la negación como el complemento.

Recordemos que encontrar una interpretación donde la fórmula sea válida (decimos que la fórmula es satisfactible) no la convierte en un teorema:

1. En una tabla de verdad, qué es una interpretación de la fórmula?
2. ¿Qué es un teorema?
3. Las *oraciones (indicativas) en castellano* también son modelos: "Llueve y hace frío" es menos habitual que "Llueve"; es decir "Llueve" es más débil que "Llueve y hace frío".
4. Relacionando la interpretación de sub-conjuntos con debilitamiento: considerá que $U$ tiene 8 elementos y que $p$ y $q$ son sub-conjuntos de $U$: compará la cantidad de elementos (cardinalidad) de $p$ y de $q$ con las de $p \cap q$ y las de $p \cup q$.

Finalmente, podemos pensar los últimos tres teoremas (items l., m. y n.) como formas alternativas de probar uno de los lados: por ejemplo, probar $p \vee q \Rightarrow r$ es equivalente a probar $p \Rightarrow r$ y $q \Rightarrow r$; estas dos últimas pruebas son independientes entre sí.

**5.** Decidí si los siguientes son teoremas o no. Si son teoremas, construí una prueba; si no da un contra-ejemplo.

**a.** $x > 4 \Rightarrow x > 0$ **b.** $x > 0 \equiv x \geqslant 1$, si $x \in \mathbb{N}$ **c.** $4 < 2 \Rightarrow 8 = 9 + 1$

[1] William Blake ya lo sabía en 1808: (siguió la regla dorada//hasta convertirse en el tonto de oro)
He has observ'd the Golden Rule
Till he's become the Golden Fool.