Introducción a la Lógica y la Computación — Lógica proposicional
Práctico 1: Sintaxis de la lógica proposicional

1. Para las siguientes cadenas determinar cuáles están en Σ^*, cuáles en $PROP$, y cuáles en ninguno de los dos.
   a) $p_0 \to p_1$.
   b) $((p \wedge p) \to p)$.
   c) $(\varphi \vee \psi)$.
   d) $(((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2)$.

2. Demuestre que toda $\varphi \in PROP$ tiene tantos "(" como ")". Además, vea que la cantidad de paréntesis ("abre" y "cierra", todos juntos) es igual a doble de la cantidad de conectivos distintos de $\perp$ que ocurren.

3. Defina recursivamente una función $ocur(k, \varphi)$, que devuelva la cantidad de ocurrencias de p_k que posee φ, para cada $\varphi \in PROP$. (Note que para cada k fijo se está definiendo una función de $PROP$ en los naturales).

4. Defina recursivamente la función "longitud" que devuelve la cantidad de símbolos de una proposición (incluyendo paréntesis).

5. Defina recursivamente una función $S : PROP \to \mathcal{P}(PROP)$ de tal manera que $S(\varphi)$ sea el conjunto de subfórmulas de φ. Por ejemplo,
$$S(\perp) = \{\perp\}, \qquad S((p_0 \wedge p_1)) = \{p_0, p_1, (p_0 \wedge p_1)\}.$$

6. Sea $G : PROP \times PROP \times \mathcal{V} \to PROP$ la función que para cada $\varphi \in PROP$, $\psi \in PROP$ y $p_i \in \mathcal{V}$ devuelve el resultado de sustituir en φ cada ocurrencia de la variable p_i por la proposición ψ. Denotamos $G(\varphi, \psi, p_i) \doteq \varphi[\psi/p_i]$.
   a) Determine $\varphi[((\neg p_7) \to p_3)/p_7]$ para
      1) $\varphi = ((p_1 \wedge p_7) \to (p_7 \to p_3))$
      2) $\varphi = ((p_3 \leftrightarrow p_7) \vee (p_2 \to (\neg(p_7))))$.
   b) (*) Defina recursivamente la función G.