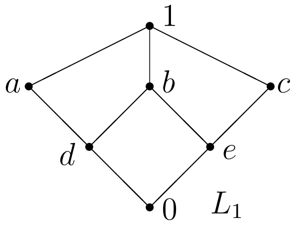
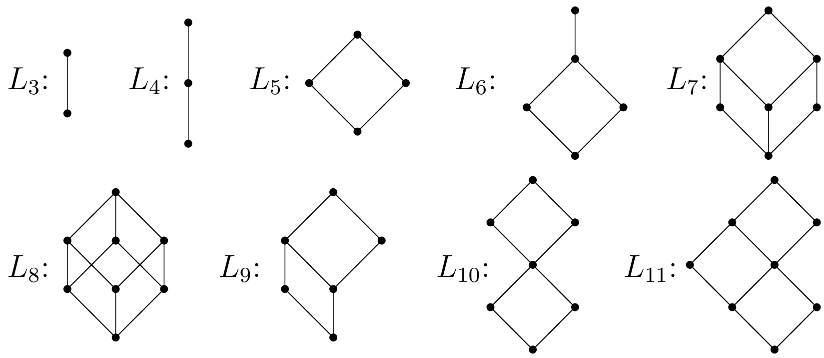
Introducción a la Lógica y la Computación — Estructuras de orden
Práctico 4: Complementos, distributividad, álgebras de Boole, átomos e irreducibles.

1. Considere el reticulado L_1.



   a) Dé todos los complementos, si es que hay, de los siguientes elementos: a, b, d, 0.
   b) ¿Es L_1 un reticulado complementado?
   c) ¿Es L_1 un reticulado distributivo?

2. Considere los siguientes diagramas.



   a) Decidir si L_9 ó L_{10} se incrustan en L_{11}.
   b) ¿De cuántas maneras distintas puede incrustarse L_5 en L_{10}?
   c) ¿Se incrusta N_5 en L_8? ¿Se incrusta M_3 en L_{10}?
   d) Determine cuáles son isomorfos a algún D_n.
   e) Determine cuáles se incrustan en $\mathcal{P}(X)$ para algún conjunto X.
   f) Determine cuáles son reticulados distributivos.
   g) Determine cuáles admiten estructura de álgebra de Boole.
3. Sea S un reticulado.
   a) Demuestre que si $x \leq y$, entonces para todo z en S, $x \vee (z \wedge y) \leq (x \vee z) \wedge y$.
   b) Compruebe que si S es distributivo vale la igualdad.
4. Demostrar que M_3 y N_5 no satisfacen la propiedad cancelativa.
5. Demostrar que si un reticulado satisface la propiedad cancelativa, entonces es distributivo. (Ayuda: usar el Teorema M_3-N_5).
6. Determine los átomos y los irreducibles de los posets L_3, L_4, L_6, L_8 y L_{11}.
7. Demuestre las siguientes propiedades de las álgebras de Boole.
   a) $\neg(\neg x) = x$;
   b) $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$.
8. Sea B un álgebra de Boole y $\leq$ el orden asociado a B. Demuestre los siguientes.
   a) $x \leq y$ si y sólo si $\neg y \leq \neg x$;
   b) $y \leq z$ si y sólo si $y \wedge \neg z = 0$;
   c) si $x \leq y$ e $y \wedge z = 0$ entonces $z \leq \neg x$ (vea lo que hizo antes).