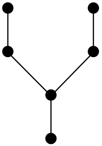
Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 25 de septiembre de 2024

Ejes de Contenidos

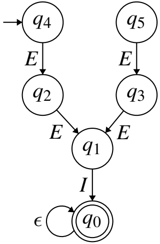
1. Estructuras Ordenadas



2. Lógica Proposicional

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi\wedge\psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi\wedge\psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi\wedge\varphi}\wedge I}{\varphi\wedge\psi\to\psi\wedge\varphi}\to I_1$$

3. Lenguajes y Autómatas



Parte 2: Lógica Proposicional

Tres componentes de la lógica

Sintaxis

Qué objetos usamos: **proposiciones**, cómo se escriben.

Semántica

Cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**.

Cálculo

Cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**

Estudiaremos especialmente la interrelación entre los dos últimos conceptos.

Sintaxis: El lenguaje

Los símbolos que usaremos:

$$\Sigma := \{\,), (, \wedge, \vee, \to, \perp, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \}.$$

Con Σ^* denotamos el conjunto de todas las cadenas de símbolos en Σ.

Ejemplo

$\boxed{p_{18}((((\vee}$, $\boxed{p_7 p_0 p_0 \to}$ y $\boxed{\wedge\wedge)\perp}$ pertenecen a Σ^*.

Llamaremos **variables proposicionales** a los elementos del conjunto

$$\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \} \subseteq \Sigma$$

y llamaremos **átomos** a los elementos del conjunto

$$At := \{\perp\} \cup \mathcal{V} = \{\perp, p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots \} \subseteq \Sigma$$

Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Sintaxis: El lenguaje

Nos interesan algunas cadenas en Σ^*, que llamaremos proposiciones

Ejemplo

$\boxed{(p_1 \wedge p_2)}$, $\boxed{(p_0 \vee (p_7 \to p_3))}$ y $\boxed{(\bot \to \bot)}$ son proposiciones.

Nos interesa definir un subconjunto de Σ^* que

(*) contenga a todas las variables proposicionales, a $\bot$, y que cada vez que dos palabras α y β estén en ese conjunto, las palabras $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$ y $(\alpha \to \beta)$ también estén en ese conjunto. Nos gustaría que además no tuviera

otras cosas, que sólo tuviera palabras construídas de esta forma.
En algún sentido buscamos "el menor" conjunto que satisfaga (*). ¿Qué significa el menor conjunto que satisface algo entre una familia de conjuntos?

Inducción en $PROP$

Lema

La familia de conjuntos que satisfacen (*) es no vacía y cerrada por intersecciones arbitrarias.

Definición

$PROP$ es **el menor** subconjunto de Σ^* (según $\subseteq$) que cumple con:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in PROP$.

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \to \psi)$ está en $PROP$.

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \vee \psi)$ está en $PROP$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Para todas φ, ψ en $PROP$, $(\varphi \wedge \psi)$ está en $PROP$.

Teorema (inducción en subfórmulas)

Sea A un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:

Si φ es atómica, $A(\varphi)$ vale. $\}$ *Caso Base*

Si $\underbrace{A(\varphi) \text{ y } A(\psi)}_{\text{HI}}$ *entonces $A((\varphi \to \psi))$, $A((\varphi \vee \psi))$ y $A((\varphi \wedge \psi))$*

Demostración.

Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$. Quiero ver que $X = PROP$. $X \subseteq PROP$ por definición.

Y además $PROP \subseteq X$ por minimalidad.

Inducción en $PROP$: ¿Para qué la usamos?

Definición

Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una **serie de formación** (sdf) de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, φ_i es:

- atómica, o bien
- igual a $(\varphi_j \to \varphi_k)$, $(\varphi_j \vee \varphi_k)$ o $(\varphi_j \wedge \varphi_k)$ con $j, k < i$.

Teorema

Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ "φ" es una sdf de φ (tenemos $n = 1$, $\varphi_1 := \varphi$).

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ Por HI, φ y ψ tienen sdf $\varphi_1, \ldots, \varphi_n (= \varphi)$ y $\psi_1, \ldots, \psi_m (= \psi)$. Luego $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, (\varphi \odot \psi)$ es sdf de $(\varphi \odot \psi)$.

Recursión en $PROP$

Teorema (definición por recursión en subfórmulas)

Sea A un conjunto y supongamos dadas funciones
$H_{At} : At \to A$ y $H_\odot : A^2 \to A$ para cada $\odot$.
Entonces hay exactamente una función $F : PROP \to A$ tal que

$$\begin{cases} F(\varphi) & = & H_{At}(\varphi) \quad \textit{para } \varphi \textit{ en } At \\ F((\varphi \odot \psi)) & = & H_\odot\big(F(\varphi), F(\psi)\big) \end{cases}$$

Recursión

Otras versiones equivalentes útiles $\longrightarrow$ *Pizarrón*

Universidad Nacional de Córdoba UNC 1613 - 2013 400 AÑOS

Recursión en $PROP$: Ejemplo

Definición

El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ $gr(p_n) := n;\ gr(\bot) := -1.$

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ $gr((\varphi \odot \psi)) := \max\{gr(\varphi), gr(\psi)\}.$

$$
\begin{aligned}
gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) &= \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} && \text{caso “}\odot\text{”}\\
&= \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{caso “}At\text{”}\\
&= \max\big\{\max\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{caso “}\odot\text{”}\\
&= \max\big\{\max\{0, 3\}, 2\big\} && \text{caso “}At\text{”}\\
&= \max\{3, 2\} && \text{def de } \max\\
&= 3 && \text{def de } \max
\end{aligned}
$$

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 27 de septiembre de 2024

Contenidos estimados para hoy

Repaso

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: qué objetos usamos: proposiciones (= "fórmulas proposicionales", "fórmulas"), cómo se escriben.
  - **Símbolos/variables proposicionales**: $\mathcal{V} := \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$
  - **Conectivos**: $\bot, \wedge, \vee, \rightarrow$.
  - $At := \{\bot\} \cup \mathcal{V}$; $\Sigma := At \cup \{\,),(,\wedge,\vee,\rightarrow\}$; $\boxed{PROP \subseteq \Sigma^*}$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones: **valor de verdad**. Ahora
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**.

Asignaciones y valuaciones/semánticas

Nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos.

Definición

Una **asignación** es una función $f : \{p_0, p_1, \dots\} \to \{0, 1\}$.

Definición

Una **valuación** es una función $[\![\cdot]\!] : PROP \to \{0, 1\}$ que satisface:

1. $[\![\bot]\!] = 0$.
2. $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!] = \text{mín}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
3. $[\![(\varphi \vee \psi)]\!] = \text{máx}\{[\![\varphi]\!], [\![\psi]\!]\}$.
4. $[\![(\varphi \to \psi)]\!] = 0$ si y sólo si $[\![\varphi]\!] = 1$ y $[\![\psi]\!] = 0$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Definimos la valuación $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ $[\![p_n]\!]_f := f(p_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$ y $[\![\bot]\!]_f := 0$. H_{At}

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$. $H_\wedge$

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$ $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario. $H_\to$

$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$ $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f := \text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$. $H_\vee$

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Demostración.

Por el *Teorema de definición por recursión en subfórmulas*, **existe** una función $[\![\cdot]\!]_f$ que satisce las condiciones anteriores **y es única**.
Sólo queda ver que $[\![\cdot]\!]_f$ es efectivamente una valuación y que restringida a $\mathcal{V}$ coincide con f.
Pero ambas cosas son inmediatas de la definición de $[\![\cdot]\!]_f$.

Extensión de asignaciones

Teorema (de Extensión)

Para toda asignación f, existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{V}$.

Corolario

$[\![p]\!] = [\![p]\!]'$ *para toda* $p \in \mathcal{V} \implies [\![\varphi]\!] = [\![\varphi]\!]'$ *para toda* $\varphi \in PROP$.

Demostración.

Por la unicidad en el Teorema de Extensión: ambas valuaciones son extensiones de la misma asignación $[\![\cdot]\!] \upharpoonright \mathcal{V} = [\![\cdot]\!]' \upharpoonright \mathcal{V}$.

Conectivos nuevos

Introducimos nueva notación.

Abreviaturas

- $(\neg\varphi)$ denotará $(\varphi \to \bot)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ denotará $((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$.

Ejercicio

Para toda valuación $[\![\cdot]\!]$:

1. $[\![(\neg\varphi)]\!] = 1 - [\![\varphi]\!]$.
2. $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!] = 1 \iff [\![\varphi]\!] = [\![\psi]\!]$.

La relación de consecuencia y tautologías

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y f una asignación.

Definición

- f **valida** Γ sii para toda $\psi \in \Gamma$, $[\![\psi]\!]_f = 1$.
- φ es **consecuencia lógica** de Γ sii para toda asignación f que valida Γ, $[\![\varphi]\!]_f = 1$ (**notación**: $\Gamma \models \varphi$)
- φ es una **tautología** $\iff$ $[\![\varphi]\!]_f = 1$ para toda asignación f. (**notación**: $\models \varphi$)

Ejercicio

$\models \varphi \iff \emptyset \models \varphi$.

Ejemplos

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.
   Tenemos que ver que para toda asignación f, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f = 1$.
   Equivalentemente, $[\![(\varphi \to \varphi)]\!]_f \neq 0$.
2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (Ejercicio).
3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$.
   Debemos ver que si f valida $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\}$, entonces $[\![\psi]\!]_f = 1$:
   $$[\![\varphi]\!]_f = [\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = 1 \implies [\![\psi]\!]_f = 1.$$
4. $\not\models p_1$
   Sale negando la definición:
   p_1 no es una tautología $\iff$ existe alguna f tal que $[\![p_1]\!]_f = 0$.

Lema de Coincidencia

La verdad de una proposición se determina localmente.

Lema (de Coincidencia)

Si $f(p_i) = f'(p_i)$ *para todos los* p_i *que ocurran en* φ*, entonces* $[\![\varphi]\!]_f = [\![\varphi]\!]_{f'}$.

Demostración.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, sólo ocurre p_n en φ. Luego $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi) = f'(\varphi) = [\![\varphi]\!]_{f'}$.
Además, $[\![\bot]\!]_f = [\![\bot]\!]_{f'} = 0$ siempre.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$ Supongamos que f y f' coinciden en las variables de $(\varphi \wedge \psi)$
Probamos que $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f = [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_{f'}$.

$\boxed{(\varphi \odot \psi)}$ El resto de los casos queda como ejercicio.

Tablas de verdad

Recordemos que una asignación es una función de $\mathcal{V} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}, \ldots\}$ en $\{0, 1\}$.

Pregunta

¿Cuántas asignaciones posibles hay?

Demasiadas.
¿Hay que chequear todas para saber si $\models ((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$?
Por el Lema de Coincidencia, no.

Tablas de verdad

	p_0	p_1	p_2	p_3	$\dots$	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$
f_1	1	0	1	1	$\dots$	1	1
f_2	1	1	0	1	$\dots$	0	1
f_3	1	0	1	0	$\dots$	1	1
f_4	0	0	1	1	$\dots$	0	1
f_5	0	1	0	0	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$		$\ddots$		

Tablas de verdad

	p_0	p_2	$(p_0 \wedge p_2)$	$((p_0 \wedge p_2) \rightarrow p_2)$
f_1	1	1	1	1
f_2	1	0	0	1
f_4	0	1	0	1
f_5	0	0	0	1

Sustitución

Definición

$\varphi[\psi/p]$:= **sustitución** del símbolo proposicional p **por** la proposición ψ **en** φ:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] := \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] := \varphi$.

$\boxed{(\varphi \odot \chi)}$ $(\varphi \odot \chi)[\psi/p] := (\varphi[\psi/p] \odot \chi[\psi/p])$.

Ejemplo

- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_3] = p_1$.
- $p_1[(p_1 \wedge p_2)/p_1] = (p_1 \wedge p_2)$.
- $(p_1 \wedge p_2)[(p_3 \wedge p_4)/p_1] = ((p_3 \wedge p_4) \wedge p_2)$.

Ejercicio

1. $(\neg\varphi)[\psi/p] = (\neg\varphi[\psi/p])$
2. $(\varphi \leftrightarrow \chi)[\psi/p] = (\varphi[\psi/p] \leftrightarrow \chi[\psi/p])$.

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 2 de octubre de 2024

Universidad Nacional de Córdoba

Contenidos estimados para hoy

1. Repaso
2. Deducción natural
   - Reglas de inferencia
   - Cancelación de hipótesis: introducción de $\to$
   - Ejemplos con cancelación
   - Reducción al absurdo y de eliminación de $\vee$
   - Ejemplos con RAA y $\vee E$

Tres componentes de la lógica

- Sintaxis: descripción simbólica de los objetos que estudiamos: **proposiciones** (= “fórmulas proposicionales”, “fórmulas”).
  - Conjunto inductivo $PROP$: **inducción** y **recursión**.
  - **Abreviaturas** $(\neg\varphi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
  - Operaciones simbólicas: **sustitución** $\varphi[\psi/p]$.
- Semántica: cómo asignamos *significado* a las proposiciones.
  - *Modelos* para dar sentido: **asignaciones** $v : \mathcal{V} \to \{0,1\}$.
  - Se extienden a **valuaciones**: $[\![\cdot]\!]_f : PROP \to \{0,1\}$.
  - La verdad de una proposición se determina localmente: Lema de **Coincidencia** y **tablas de verdad**.
- Cálculo: cómo se **deducen** proposiciones a partir de otras y se obtienen **teoremas**. Ahora

El cálculo en primer año

Este cáculo involucra ciertos axiomas

$$p \vee q \equiv q \vee p,$$
$$p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$$
$$\vdots$$

y ciertas reglas

Regla de Leibniz
Transitividad de la equivalencia

Una demostración de *Introducción a los Algoritmos*.

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{p \Rightarrow q \vee p} \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \ \} \\
 & p \vee \underline{q \vee p} \equiv q \vee p \\
\equiv & \{ \text{ Conmutativa } \vee \ \} \\
 & p \vee p \vee q \equiv q \vee p
\end{array}
$$

Deducción natural

Deducción natural: un cálculo más parecido a los razonamientos “intuitivos”. Sólo involucra reglas.

Notación. Usaremos precedencia para eliminar paréntesis:

$$\neg\varphi \wedge (\psi \vee \varphi) \to \chi := \big(((\neg\varphi) \wedge (\psi \vee \varphi)) \to \chi\big).$$

Algunas reglas de inferencia

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee I \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee I$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \to E$$

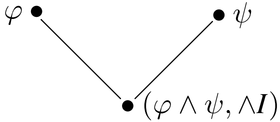
Ejemplo

De $\{\varphi, \varphi \vee \psi \to \chi\}$ se deduce χ.

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{(\varphi \wedge \psi)}\ \wedge I$$

Derivaciones: árboles punteados decorados

- Las hojas son las **hipótesis**. Las relevantes son las hipótesis no canceladas (Hip): $\{\varphi, \psi\}$.
- Nodo (raíz) distinguido conclusión ($Concl$): $(\varphi \wedge \psi)$



"De $\{\varphi, \psi\}$ **deduce** $(\varphi \wedge \psi)$"

$\{\varphi, \psi\} \vdash (\varphi \wedge \psi)$.

Cancelación de hipótesis

Pensemos en una demostración matemática simple.

Prueba de "(n es múltiplo de 4) implica (n es par)"

- **Supongamos** que n es múltiplo de 4.
- Luego, $n = 4 \cdot k$ para algún k.
- Luego, $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$.
- Luego, $n = 2 \cdot k'$ para cierto k'.
- Luego, n es par.

Luego, (n es múltiplo de 4) implica (n es par).

Cancelación de hipótesis

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1 \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: φ.

Cancelación de hipótesis

$$D \quad := \quad \cfrac{\cfrac{[\psi \wedge \chi]_1}{\psi} \wedge E}{\psi \wedge \chi \to \psi} \to I_1$$

Introducción de la implicación

- Hipótesis cancelada: $\psi \wedge \chi$.
  Hipótesis no canceladas $Hip(D) = \emptyset$.
- Conclusión $Concl(D) = \psi \wedge \chi \to \psi$.

"$\psi \wedge \chi \to \psi$ es un **teorema** ". $\vdash \psi \wedge \chi \to \psi$.

Ejemplos de derivaciones

1. $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ es un teorema.

$$\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi}\to I_1$$

2. De $\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$ se deduce $\neg\varphi$.

$$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad \varphi \to \psi}{\psi}\to E \qquad \neg\psi}{\bot}\to E}{\neg\varphi}\to I_1$$

Más reglas con cancelación de hipótesis

Son las reglas de *reducción al absurdo* y de *eliminación de* $\vee$.

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\, RAA \qquad\qquad \dfrac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\varphi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}\, \vee E.$$

Ejemplo usando RAA

De $\{\varphi, \neg\psi \to \neg\varphi\}$ se deduce ψ.

$$
\dfrac{\dfrac{\varphi \qquad \dfrac{[\neg\psi]_1 \quad \neg\psi \to \neg\varphi}{\neg\varphi} \to E}{\bot} \to E}{\psi}\, RAA_1
$$

Ejemplo usando $\vee E$

Introducimos la última regla, con $\perp$ como protagonista:

$$\dfrac{\perp}{\varphi}\ \perp$$

Veamos ahora que de $\neg\varphi \vee \psi$ se deduce $\varphi \to \psi$.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \vee \psi \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad [\neg\varphi]_2}{\perp}\to E}{\psi}\perp \qquad [\psi]_2}{\psi}\vee E_2}{\varphi \to \psi}\to I_1$$

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 4 de octubre de 2024

Universidad Nacional de Córdoba
UNC
1613 - 2013 400 AÑOS

Contenidos estimados para hoy

1. Deducción natural
   - Definición inductiva de $\mathcal{D}$
   - Inducción y recursión en derivaciones
   - Relación de deducción y teoremas
2. Corrección y completitud de la lógica proposicional
   - Relación entre verdad y demostrabilidad
   - Teorema de corrección

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

Definimos el conjunto de las **derivaciones** de manera recursiva.

$\mathcal{D}$ es el menor conjunto de árboles decorados con proposiciones con pares (proposición, regla) y con una raíz distinguida que satisface que:

- Los árboles de un sólo nodo φ, con $\varphi \in PROP$, pertenecen a $\mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi' \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D := \dfrac{\begin{array}{cc} \vdots\, D_1 & \vdots\, D_2 \\ \varphi & \varphi' \end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I \in \mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D_1 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi} \wedge E \in \mathcal{D}$ y

$$D_2 := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi' \end{array}}{\varphi'} \wedge E \in \mathcal{D}.$$

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \psi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D' := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I \in \mathcal{D}$.

- Si $\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi \to \psi \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots\, D_1 \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \vdots\, D_2 \\ \varphi \to \psi \end{array}}{\psi} \to E$

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

$$D_1 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \varphi'}\,\vee I \in \mathcal{D} \text{ y } \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi'\end{array}}{\varphi \vee \varphi'}\,\vee I \in \mathcal{D}.$$

- Si $\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi \vee \psi\end{array} \in \mathcal{D}$, $\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \chi\end{array} \in \mathcal{D}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D_3\\ \chi\end{array} \in \mathcal{D}$ entonces

$$D_4 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi \vee \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \chi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D_3\\ \chi\end{array}}{\chi}\,\vee E \in \mathcal{D}$$

El conjunto $\mathcal{D}$ de las derivaciones

- Si $\begin{array}{c} \vdots D \\ \bot \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $D' := \dfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \bot \end{array}}{\varphi}\, RAA \in \mathcal{D}$.
- Si $\begin{array}{c} \vdots D \\ \bot \end{array} \in \mathcal{D}$ entonces $\dfrac{\begin{array}{c} \vdots D \\ \bot \end{array}}{\varphi}\, \bot \in \mathcal{D}$.

Recursión en derivaciones: Hip

Al igual que con $PROP$, se puede hacer inducción y recursión en $\mathcal{D}$.

Definimos recursivamente el conjunto de las **hipótesis no canceladas** $Hip(D)$ de una derivación D.

$\boxed{PROP}$ Si $\varphi \in PROP$, $Hip(\varphi) := \{\varphi\}$.

Recursión en derivaciones: Hip

$\boxed{\wedge I}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots\, D & \vdots\, D' \\ \varphi & \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I\right) := Hip(D) \cup Hip(D').$$

$\boxed{\wedge E}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi}\wedge E\right) = Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D \\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi'}\wedge E\right) := Hip(D).$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{\to I}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I\right) := Hip(D) \setminus \{\varphi\}.$$

$\boxed{\to E}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}\to E\right) := Hip(D_1) \cup Hip(D_2)$$

$\boxed{\vee I}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\,\vee I\right) = Hip\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\,\vee I\right) := Hip(D).$$

$\boxed{\vee E}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{array}{ccc}\vdots\, D_1 & \vdots\, D_2 & \vdots\, D_3\\ \varphi \vee \psi & \chi & \chi\end{array}}{\chi}\,\vee E\right) :=$$

$$Hip(D_1) \cup \big(Hip(D_2) \setminus \{\varphi\}\big) \cup \big(Hip(D_3) \setminus \{\psi\}\big).$$

Recursión en derivaciones: *Hip*

$\boxed{RAA}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\,RAA\right) := Hip(D) \setminus \{\neg\varphi\}.$$

$\boxed{\bot}$

$$Hip\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\, D\\ \bot\end{matrix}}{\varphi}\,\bot\right) := Hip(D).$$

Relación de deducción y teoremas

Sea $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$.

Definición

- φ se **deduce** de Γ ($\Gamma \vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \varphi$.
- φ es un **teorema** ($\vdash \varphi$) si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Hip(D) = \emptyset$ y $Concl(D) = \varphi$.

Ejemplo

- *Tertium non datur* o tercero excluido: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$.
  - $\{\psi, \neg\varphi \to \neg\psi\} \vdash \varphi$ (en video de 2021).
- Principio de no contradicción: $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

La implicación $(\Rightarrow)$ es la **Completitud** y $(\Leftarrow)$ es la **Corrección**.

Teorema (Corrección)

Si $\Gamma \vdash \varphi$*, entonces* $\Gamma \models \varphi$*.*

Demostración.

Probamos por inducción en $D \in \mathcal{D}$:

“Para todo Γ tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma$, se da $\Gamma \models Concl(D)$”.

Prueba del teorema de corrección, caso base

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

¡Ojo! Estamos probando algo de la forma "$\forall\Gamma : \ldots$":
tanto la tesis como la HI tendrán esa forma.

$\boxed{\mathit{PROP}}$ $D = \varphi$. Sea $\Gamma \subseteq \mathit{PROP}$.

$$\mathit{Hip}(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \varphi \in \Gamma \implies \Gamma \models \varphi = \mathit{Concl}(D).$$

Prueba del teorema de corrección, caso $(\wedge I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\wedge I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi_2\end{array}$,

1. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_1) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1$, y
2. para todo Γ, $\mathit{Hip}(D_2) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_2$,

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}\left(\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D_1\\ \varphi_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\, D_2\\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\wedge I\right) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$.

Sea f una asignación que valide $\Gamma \implies [\![\varphi_1]\!]_f = 1$ y $[\![\varphi_2]\!]_f = 1$.
Luego $[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_f = \text{mín}\{[\![\varphi_1]\!]_f, [\![\varphi_2]\!]_f\} = 1$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Prueba del teorema de corrección, caso $(\to I)$

Para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \mathit{Concl}(D)$

$\boxed{\to I}$ Suponiendo HI para $\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots\, D \\ \psi\end{array}$,

- para todo Γ', $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma' \implies \Gamma' \models \psi$, y

probamos

- para todo Γ, $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \Gamma \models \varphi \to \psi$.

Supongamos $\mathit{Hip}(D) \setminus \{\varphi\} \subseteq \Gamma \implies \mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\} =: \Gamma'$.
Sea f una asignación que valide Γ. Casos en $[\![\varphi]\!]_f$:

1. $[\![\varphi]\!]_f = 1$ entonces f valida $\Gamma \cup \{\varphi\} \implies [\![\psi]\!]_f = 1$
$\implies [\![\varphi \to \psi]\!]_f = 1$.
2. $[\![\varphi]\!]_f = 0 \implies [\![\varphi \to \psi]\!]_f = 1$.

UNC Universidad Nacional de Córdoba 1613 - 2013 400 AÑOS

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano   Facundo Bustos
Mauricio Tellechea   Gonzalo Zigarán

FaMAF, 9 de octubre de 2024

UNC Universidad Nacional de Córdoba
1613 - 2013 400 AÑOS

Contenidos estimados para hoy

1. Completitud de la lógica proposicional
   - Relación entre verdad y demostrabilidad
2. Consistencia
   - No derivación
3. Conjuntos consistentes maximales
4. Teorema de Completitud

Relación entre verdad y demostrabilidad

¿Cómo se comparan las nociones semánticas con la de derivabilidad?

Semántica	**Cálculo**
Tautologías (valuar 1)	Teoremas (derivable)
$\models$	$\vdash$
Asignaciones (modelo)	Derivaciones (pruebas formales)

Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional

Para todos $\Gamma \subseteq PROP$ y $\varphi \in PROP$, se tiene

$$\Gamma \models \varphi \iff \Gamma \vdash \varphi$$

La clase pasada vimos la implicación $(\Leftarrow)$ **Corrección.**

Hoy vamos por la implicación $(\Rightarrow)$: **Completitud.**

(In)Consistencia

Definición

Dado un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ diremos que

$$\Gamma \text{ es } \textbf{inconsistente} \iff \Gamma \vdash \bot;$$

$$\Gamma \text{ es } \textbf{consistente} \iff \textbf{no} \text{ es inconsistente (o sea, } \Gamma \nvdash \bot).$$

Lema

1. $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es inconsistente.*
2. $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ *es inconsistente.*

Corrección y sus usos

Léxico: Dado un conjunto Γ, si f es una asignación que valida a Γ decimos que f es un *modelo* de Γ.

Lema (de No Derivación)

Si f es un modelo de Γ y $[\![\varphi]\!]_f = 0$, entonces $\Gamma \nvdash \varphi$.

Ejemplo $\{p_1 \vee p_4\} \nvdash p_1$.

Lema (Criterio de Consistencia)

Si Γ tiene un modelo, entonces Γ es consistente.

Ejemplo

1. $\{(\neg p_4 \vee p_0), p_4\}$ es consistente.
2. Dada f una asignación, $\mathrm{Th}(f) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_f = 1\}$ es consistente.

Conjuntos consistentes maximales

Definición

Γ es **consistente maximal** si es consistente y, para todo $\Delta \subseteq PROP$, si $\Gamma \subsetneq \Delta$ entonces Δ es inconsistente.

- Γ es **consistente maximal** si es maximal en el poset

$$(\text{Conjuntos consistentes}, \subseteq).$$

Lema

Para toda asignación f, $\mathrm{Th}(f) := \{\varphi \in PROP : [\![\varphi]\!]_f = 1\}$ es un conjunto consistente maximal.

Realización de conectivos

Lema (Consistentes maximales son cerrado por derivaciones)

Sea Γ *consistente maximal.*
$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$.

Lema (Consistentes maximales realizan conectivos)

Sea Γ *consistente maximal. Para todas* $\varphi, \psi \in PROP$,

1. $\neg\varphi \in \Gamma \iff [$*no* $\varphi \in \Gamma]$.
2. $(\varphi \to \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *implica* $\psi \in \Gamma]$.
3. $(\varphi \vee \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *o* $\psi \in \Gamma]$.
4. $(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma \iff [\varphi \in \Gamma$ *y* $\psi \in \Gamma]$.

Lema

Si Γ *es consistente maximal existe una asignación* f *tal que* $\Gamma = \mathrm{Th}(f)$.

Teorema

Si Γ es consistente existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Demostración.

- El conjunto de **todas** las proposiciones se puede enumerar: $PROP = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. (esquema de numeración "por pisos")
- Empezando con Γ, vamos agregándole proposiciones de a una cuidando que no se vuelva inconsistente. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$\Gamma_0 := \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ es consistente;} \\ \Gamma_n & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y definimos $\Gamma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_n$. Probamos que Γ^* es consistente maximal.

Corolario

Si Γ es consistente tiene un modelo.

Prueba de Completitud

Corolario

$\Gamma \models \bot$ *implica* $\Gamma \vdash \bot$.

Ejercicio: $\Gamma \models \varphi$ implica $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot$.

Prueba de Completitud

$$\begin{aligned} \Gamma \models \varphi &\implies \\ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \bot &\implies \\ \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot &\implies \\ \Gamma \vdash \varphi. \end{aligned}$$