Análisis Matemático II - Lic. en Computación

Capítulo 1: Integrales

- En AMI se introdujo el concepto de derivada de una función.

Dada f se define la función f' como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Algunas de las propiedades de la derivada son:

1) Si $f(x) = c$ (constante) $\Rightarrow$ $f'(x) = 0$.

   Por otra parte, si f es derivable en $I = (a,b)$ y $f'(x) = 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f(x) = c$.

2) $(af)'(x) = a f'(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

3) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

4) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

5) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (Regla de la cadena)

- Ahora nos interesa estudiar el concepto "inverso" a la derivación, esto es:

$$\boxed{\text{Dada una función } f \text{, encontrar } F \text{ tal que } F'(x) = f(x)}$$

- Sabemos dada F encontrar F' (derivación).
- Problema a resolver, dada $f = F'$ encontrar F (integración).

Definición: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que $F: I \to \mathbb{R}$ es una antiderivada o primitiva de f en I si

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Observación: las primitivas NO son únicas. Por ejemplo, si $f(x) = x$ entonces $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ y $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 3$ son primitivas de f ya que $F_1'(x) = x = f(x)$ y $F_2'(x) = x = f(x)$.

El siguiente teorema nos dice que las primitivas de una función f difieren en una constante.

Teorema: Si F es una primitiva de f en I, entonces toda primitiva de f en I es de la forma $F(x) + c$ para alguna cte. $c \in \mathbb{R}$.

Dem: Sea G una primitiva de f en I, o sea $G'(x) = f(x) \ \forall x \in I$.
Queremos ver que $G(x) = F(x) + c$.
Sea $H(x) = G(x) - F(x)$. Utilizando las propiedades de la derivación se cumple que para todo $x \in I$

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Por lo tanto $H(x) = c \ \forall x \in I$, o sea $G(x) = F(x) + c \ \forall x \in I$ ∎

Definición: Dado $I \subset \mathbb{R}$ y $f: I \to \mathbb{R}$, se llama integral indefinida de f al conjunto de todas las primitivas de f y se denota

$$\int f(x)\, dx .$$

Observaciones:

1) El símbolo $\int$ se llama integral y dx se llama diferencial (de x). Además, denotamos por diferencial de una función F a $d(F(x)) = F'(x)\, dx$.

2) En la definición de integral indef. podríamos usar otra letra. Por ejemplo, $\int f(y)\, dy$, $\int f(t)\, dt$, etc.

Ejemplos

- $\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + c$, con $c \in \mathbb{R}$ ya que $(\operatorname{sen}(x) + c)' = \cos(x)$.

- $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$, con $c \in \mathbb{R}$ ya que $\left(\frac{x^2}{2} + c\right)' = 2\frac{x}{2} = x$.

En general, si $n \in \mathbb{R}$ y $n \neq -1$ tenemos que $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$, con lo cual

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \text{ con } c \in \mathbb{R}.$$

- $\int tx\, dx = t\frac{x^2}{2} + c$, pero $\int tx\, dt = x\frac{t^2}{2} + c$

El diferencial nos indica cuál es la variable de integración.

Algunas propiedades de la integral indefinida

1) $\int 0 \, dx = c$

2) $\int a . f(x) \, dx = a . \int f(x) \, dx, \ \forall a \in \mathbb{R}$

3) $\int (f \pm g)(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$

Ejemplo

$$\int (e^x + 4x^2 + 3) \, dx = \int e^x \, dx + 4 \int x^2 \, dx + \int 3 \, dx = e^x + \frac{4}{3} x^3 + 3x + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

El siguiente teorema es el "equivalente" a la propiedad (5) de derivación.

Teorema (Método de Sustitución). Sean $f : (d, e) \to \mathbb{R}$ y $g : (a, b) \to (d, e)$ derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d, e), $H(x) = (F \circ g)(x)$ es primitiva de $h(x) = f(g(x)) . g'(x)$ en (a, b). O sea,

$$\int f(g(x)) . g'(x) \, dx = F(g(x)) + c, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x \in (a, b).$$

Dem: Basta verificar que $H'(x) = h(x) \ \forall x \in (a, b)$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$H'(x) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{definición}}}{=} F(g(x))' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Regla de} \\ \text{la cadena}}}{=} F'(g(x)) . g'(x) \underset{\substack{\downarrow \\ F \text{ es primitiva} \\ \text{de } f}}{=} f(g(x)) . g'(x) = h(x) \quad \forall x \in (a, b) \ \blacksquare$$

Observación: el teorema anterior nos provee un método para calcular primitivas para funciones de la forma $f(g(x)) \cdot g'(x)$. En efecto, hagamos la siguiente sustitución: $u = g(x)$ y $du = d(g(x)) = g'(x)\,dx$.

Luego,
$$\int \underbrace{f(g(x))}_{u} \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du \underset{\substack{\downarrow \\ F \text{ primitiva} \\ \text{de } f}}{=} F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Ejemplos

- $\int \operatorname{sen}(x^2)\,2x\,dx$. Sea $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Entonces
$$\int \operatorname{sen}(x^2)\,2x\,dx = \int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + C = -\cos(x^2) + C.$$

- $$\int e^{3x}\,dx \underset{\substack{u=3x \\ du = 3dx}}{=} \int e^{u}\,\frac{1}{3}\,du = \frac{1}{3}\int e^{u}\,du = \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

El siguiente teorema es el "equivalente" a la propiedad (4) de derivación.

Teorema (Método de integración por partes). Si f' y g' son continuas, entonces
$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \qquad (\star)$$

Dem: Por la regla de derivación del producto de funciones (Prop 4) tenemos que $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$, o equivalentemente
$$f(x) \cdot g'(x) = (f \cdot g)'(x) - f'(x)\,g(x).$$
Integrando a ambos lados obtenemos
$$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = \int (f \cdot g)'(x)\,dx - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx \overset{\substack{\text{pues } f \cdot g \text{ es primitiva de } (f \cdot g)' \\ \uparrow}}{=} f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Observación: la ecuación (✯) se llama fórmula de integración por partes. Resulta más fácil recordarla utilizando la siguiente notación.

Si $\quad u = f(x) \quad$ y $\quad v = g(x)$

entonces $\quad du = f'(x)\,dx \quad$ y $\quad dv = g'(x)\,dx$,

luego (✯) se reescribe como $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Ejemplos

- $\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^{x}\,dx}_{dv}$. Si $\begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{x}dx \end{array}$, entonces $\begin{array}{l} du = 1.dx \\ v = e^{x} \end{array}$, con lo cual

$$\int x e^{x}\,dx = x e^{x} - \int e^{x}\,1.\,dx = x e^{x} - e^{x} + C$$

- $\int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{\operatorname{sen}(x)\,dx}_{dv} = x.(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C.$

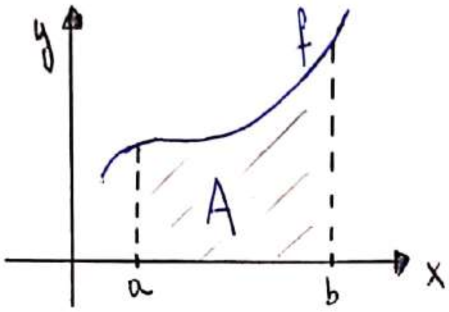
$du = dx \quad v = -\cos(x)$

- $\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{\ln(x)}_{u}.\underbrace{1\,dx}_{dv} = \ln(x).x - \int x.\frac{1}{x}\,dx = \ln(x).x - \int 1dx = x\ln(x) - x + C.$

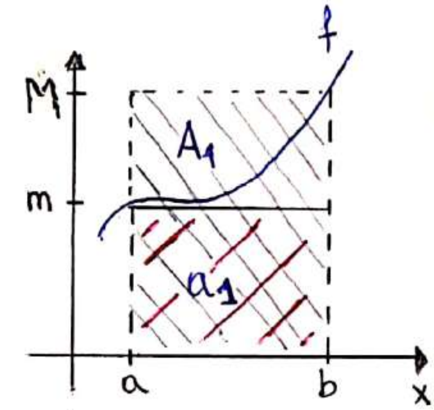
$du = \frac{1}{x}dx \quad v = x$

Integral definida

Área bajo una curva: sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función cont. y tq $f(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$
¿Cuál es el valor del área A comprendida entre la curva $y=f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$?



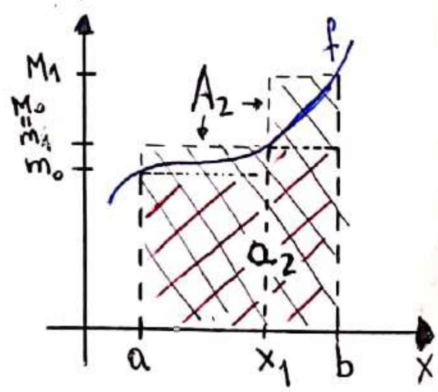
- 1ra Aproximación. Sean m = mínimo de f en $[a,b]$
M = máximo de f en $[a,b]$



Entonces

$$a_1 = m\cdot(b-a) \leq A \leq M\cdot(b-a) = A_1$$

- 2da Aproximación. Particionamos el intervalo $[a,b]$ como
$$[a,b] = [a,x_1]\cup[x_1,b] = [x_0,x_1]\cup[x_1,x_2].$$



Si m_k = mín. de f en $[x_k,x_{k+1}]$
M_k = máx de f en $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,1$.

Entonces

$$a_1 \leq a_2 = m_0(x_1-x_0)+m_1(x_2-x_1) \leq A \leq M_0(x_1-x_0)+M_1(x_2-x_1) = A_2 \leq A_1$$

- De manera gral., tomamos $a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ una partición de $[a,b]$.

Si denotamos $\Delta_k = x_{k+1}-x_k$ y Δ al mayor de todos los Δ_k
m_k = mín. de f en $[x_k,x_{k+1}]$, $k=0,\dots,n-1$
M_k = máx de f en $[x_k,x_{k+1}]$

entonces es claro que

$$\text{suma inferior} \longleftarrow \sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta_k \leq A \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta_k \longrightarrow \text{suma superior}$$

Definición: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y tq $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, se define el área encerrada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ por

$$A = \lim_{\Delta \to 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k \right).$$

Llamaremos a este **número** integral definida de f en $[a,b]$ y lo denotaremos por $\int_a^b f(x)\,dx$.

Observaciones

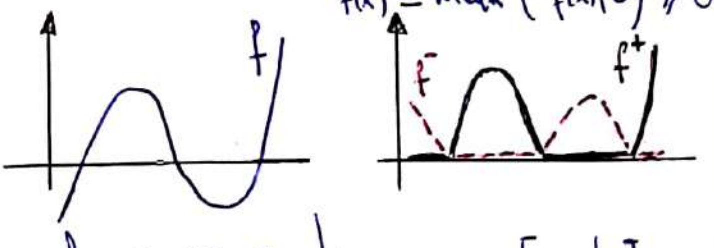
1) Se puede probar que tomar el límite de las sumas superiores coincide con tomar el límite de las sumas inferiores, i.e.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta_k \right).$$

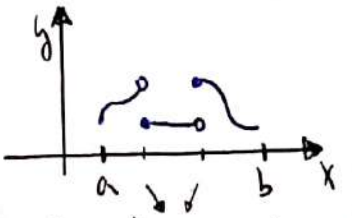
2) Para el caso $a = b$, se define $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Además de la definición se puede probar que $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

3) La integral definida se puede extender a funciones que tomen valores positivos y negativos, escribiendo $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ con $f^+(x) \doteq \text{máx}(f(x), 0) \geq 0$, $f^-(x) \doteq \text{máx}(-f(x), 0) \geq 0$

y haciendo $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx$



4) También se puede extender la definición a funciones continuas en $[a,b]$ salvo un número finito de ptos. y siempre que f esté acotada en $[a,b]$.



f discontinua en estos ptos.

Algunas propiedades de la integral definida

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas y continuas, salvo a lo sumo un número finito de ptos. Las siguientes son válidas:

1) Si $f \geq 0$ en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2) $\int_a^b c\, f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

3) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

4) Si $d \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$

5) Si $f \leq g$ en $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Relación entre integral definida e integral indefinida / primitiva.

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cont. y $F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces,

(i) F es derivable y $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$. O sea, F es primitiva de f.

(ii) Si G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \doteq G(x)\Big|_a^b$

(la parte (ii) se conoce como Regla de Barrow)

Dem:

(i) (Sólo la idea) Queremos ver que $F'(x) = f(x)$.

Sean $h>0$ y $m_h = \min f$ en $[x, x+h]$ $\quad \therefore \; m_h \leq f(x) \leq M_h \;\; \forall x [x, x+h]$

$M_h = \max f$ en $[x, x+h]$

Tenemos que

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt = \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt .$$

Entonces $m_h \cdot h \leq F(x+h) - F(x) \leq M_h \cdot h$, o equiv. $m_h \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M_h$.

Luego, como f es cont. $m_h \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$ y $M_h \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$ $\therefore f(x) \leq F'(x) \leq f(x)$.

(ii) Por la parte (i) sabemos que F es primitiva de f. Luego, si G es otra primitiva de f $\exists\, C \in \mathbb{R}$ tq $G(x) = F(x) + C$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces tenemos que

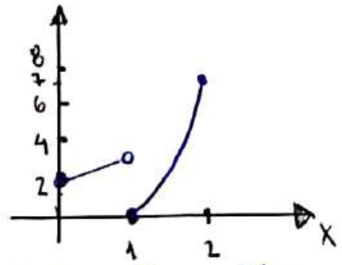
$$G(b) - G(a) = (F(b)+C) - (F(a)+C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = \int_a^b f(t)\,dt .$$

Observación: Si f es acotada y con un número finito de discontinuidades en $[a,b]$, también podemos aplicar (ii) del Teorema en cada subintervalo donde f es continua gracias al siguiente teorema.

Teorema: Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, con f continua y g tq $g(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ salvo un $c \in [a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx .$$

Ejemplo: Apliquemos la Regla de Barrow a $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$



$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x+2)\,dx + \int_1^2 (x^3-1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^4}{4} - x\right)\Big|_1^2 = \frac{5}{2} - 0 + 2 + \frac{3}{4} = \frac{21}{4}.$$

Teorema (Mét. de Sust.): Sean $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ y $g : [a,b] \to [c,d]$ tq f y g' son continuas en sus respectivos dominios. Entonces, si $u = g(x)$ vale que

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

En particular, si F es primitiva de f tenemos que $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$.

Ejemplo: Calcular $\int_0^2 2x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$.

Sea $u = x^2$, entonces $du = 2x\,dx$, $u(0) = 0^2 = 0$ y $u(2) = 2^2 = 4$. Luego,

$$\int_0^2 2x \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int_0^4 \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u)\Big|_0^4 = -\cos(4) + \cos(0).$$

Teorema (Int. por Partes). Sean f y g derivables en (a,b) y tq f' y g' tienen a lo sumo un número finito de dis cont. en $[a,b]$ y son acotadas. Entonces

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u}\,\underbrace{g'(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)}_{v}\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{g(x)}_{v}\,\underbrace{f'(x)\,dx}_{du}$$

Ejemplo: $$\int_1^e \ln(x)\,dx = \int_1^e \ln(x)\,1\,dx = \ln(x) \cdot x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx = e - 0 - x\Big|_1^e$$

$$= e - (e-1) = 1.$$

Área entre gráficos de funciones

- Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es no negativa, acotada y con un nro. finito de discontinuidades, hemos definido el área A entre el gráfico de f, el eje x y la rectas vert. $x=a$ y $x=b$ como

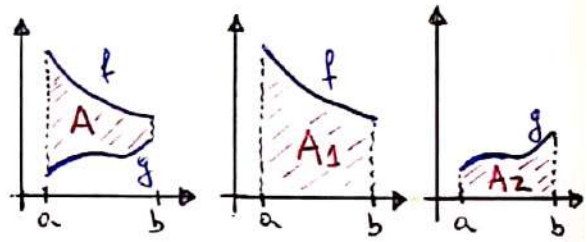
$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

- Si $f(x)\geq g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$ es razonable definir el área entre los gráficos de f y g, (y las rectas $x=a$ y $x=b$) como

$$A=\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx \quad ,\text{ ya que } f(x)-g(x)\geq 0 \ \ \forall x\in[a,b].$$

Además por las propiedades de int. definida

$$A=\int_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)\,dx=A_1-A_2$$



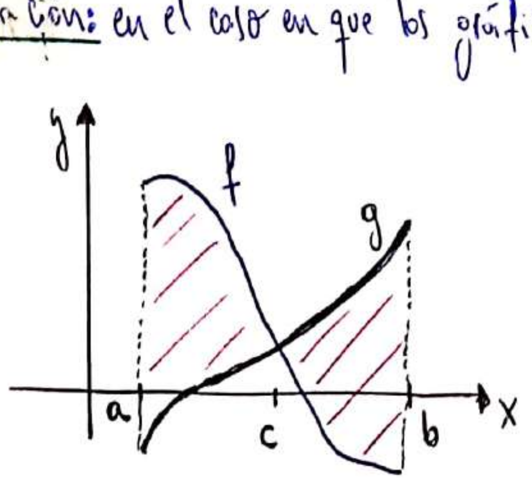
De manera general:

<u>Teorema:</u> Sea f y g funciones acotadas, con un nro. finito de discont. y tales que $f(x)\geq g(x)$ $\forall x\in[a,b]$. Entonces, el área entre los gráficos de f y g y las rectas $x=a$ y $x=b$ es

$$A=\int_a^b \underbrace{\big(f(x)-g(x)\big)}_{\geq 0}\,dx$$

Notar que $f(x)\geq g(x)$ nos dice que $f(x)-g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$.

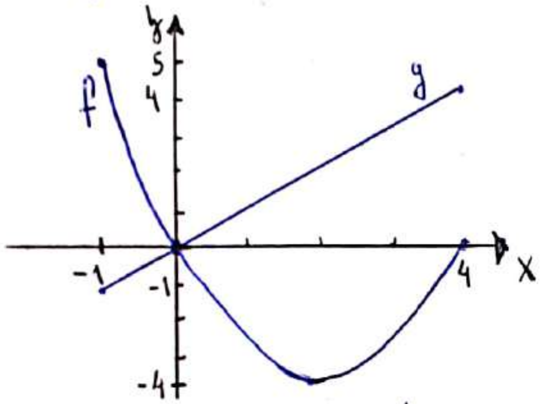
<u>Observación:</u> en el caso en que los gráficos se crucen, calculamos el área por partes.



$$A=\int_a^c\big(f(x)-g(x)\big)dx+\int_c^b\big(g(x)-f(x)\big)\,dx$$

Ejemplo: Calcular el área entre los gráficos de $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = x$ en el intervalo $[-1, 4]$.

Primero grafiquemos f y g en $[-1, 4]$.

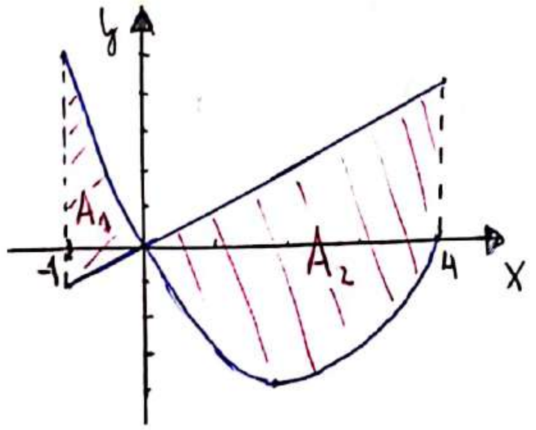


Tenemos que $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [-1, 0]$ y que $g(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0, 4]$. Entonces debemos calcular el área A por partes.

$$A = \int_{-1}^{0} \left((x^2 - 4x) - x \right) dx + \int_{0}^{4} \left(x - (x^2 - 4x) \right) dx \qquad \left(A = A_1 + A_2 \right)$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^2 - 5x)\, dx + \int_{0}^{4} (5x - x^2)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^{0} + \left(5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{0}^{4}$$

$$= -\left(\frac{-1}{3} - \frac{5}{2} \right) + \left(40 - \frac{64}{3} \right) =$$



Integración de funciones racionales usando fracciones simples.

• Queremos integrar funciones que son cocientes de polinomios (func. racionales), o sea $\int \frac{P(x)}{q(x)}\,dx$.

Hay algunas que ya sabemos integrar, por ejemplo

$$\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln(|x-2|) + C \quad , \quad \int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx = \frac{(x+3)^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2(x+3)^2} + C \, ,$$

pero otras más complicadas no sabemos, por ejemplo $\int \frac{x^2+3x}{x^3-1}\,dx$.

• De ahora en más vamos a suponer que la func. racional $\frac{P(x)}{q(x)}$ satisface:

① $gr(p) < gr(q)$

Ya que si no fuera cierto hacemos la división de $P(x)$ por $q(x)$ y por lo tanto

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \underbrace{Q(x)}_{\text{polinomio fácil de integrar ✓}} + \frac{r(x)}{q(x)} \, ,$$ donde $r(x)$ es el resto que satisface $gr(r) < gr(q)$

$\Rightarrow$ saber integrar $\frac{P(x)}{q(x)}$ se traduce en saber integrar $\frac{r(x)}{q(x)}$ con $gr(r) < gr(q)$.

② El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de q es 1.

Ya que si no fuera cierto hacemos

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{P(x)}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{P(x)}{a_n \underbrace{\left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}\right)}_{\tilde{q}(x)}} = \frac{P(x)/a_n}{\tilde{q}(x)} = \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{q}(x)}$$

con $\tilde{q}$ tq $\tilde{a}_n = 1$ (es decir es mónico).

Utilizaremos el siguiente teorema para factorizar al polinomio $q(x)$.

<u>Teorema:</u> Todo polinomio mónico se puede escribir como producto de pol. de grado 1 y/o pol. de grado 2 <u>sin</u> raíces reales.

O sea, si $q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, ent. $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_k)(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_\ell x+\beta_\ell)$

sin raíces reales

<u>Ejemplos:</u> $x^3+2x^2-3x = x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x-3)$;

$x^2-2x-1 = (x-1)^2$; $\qquad 3x^3+6x = 3x(x^2+1)$

- Para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, suponemos $gr(p) < gr(q)$ y q mónico (sino hacemos lo que dijimos antes). Vamos a separar en casos según cómo se factoriza q.

Caso 1: q es producto de polinomios de grado 1 y todos distintos. O sea,

$$q(x) = (x - r_1)\dots(x - r_k) \text{, con } r_j \neq r_i \text{ si } j \neq i.$$

En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (una cte. por cada pol. de gr=1) tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \dots + \frac{A_k}{x-r_k}$$

, luego cada término $\frac{A_i}{(x-r_i)}$ es muy fácil de integrar

Ejemplo: calcular $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\,dx$

Tenemos que $q(x) = x^2-x-6 = (x-3)\cdot(x+2)$. Entonces debemos hallar A_1 y A_2 tq

$$\frac{7x-1}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+2} = \frac{A_1(x+2) + A_2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A_1+A_2)\cdot x + (2A_1-3A_2)}{(x-3)(x+2)}$$

Igualando los coeficientes de los numeradores tenemos que

$$7 = A_1 + A_2 \longrightarrow A_1 = 7 - A_2$$

$$-1 = 2A_1 - 3A_2 \longrightarrow -1 = 14 - 2A_2 - 3A_2 \rightarrow -15 = -5A_2 \Rightarrow A_2 = 3 \text{ y } A_1 = 4$$

Luego $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{4}{x-3}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx = 4\ln(|x-3|) + 3\ln(|x+2|) + C$.

Caso 2: q es producto de pol. de grado 1 todos iguales. O sea $q(x) = (x-r)^k$

En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (tantos como grado de q) tales que

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$$

, luego cada término $\frac{A_i}{(x-r)^i}$ es fácil de integrar

Ejemplo: Calcular $\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx$.

Escribimos que $q(x) = (x+2)^3$, entonces buscamos $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{1-2x}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x+2)^2 + A_2(x+2) + A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x^2+4x+4) + A_2(x+2) + A_3}{(x+2)^3}$$

Luego, igualando los coeficientes de los numeradores tenemos que

$$0 = A_1 \quad ✓$$
$$-2 = 4A_1 + A_2 \longrightarrow A_2 = -2 \quad ✓$$
$$1 = 4A_1 + 2A_2 + A_3 \longrightarrow A_3 = 5 \quad ✓$$

Entonces,

$$\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{-2}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{5}{(x+2)^3}\,dx = -2\,\frac{(x+2)^{-2+1}}{(-2+1)} + 5\,\frac{(x+2)^{-3+1}}{(-3+1)} + C = \frac{2}{x+2} - \frac{5}{2(x+2)^2} + C.$$

Caso 3: q es producto de pols. de grado 1 algunos de los cuales se repiten, o sea

$$q(x) = (x-r_1)\cdots(x-r_{i-1})(x-r_i)^{k_i}\cdots(x-r_n)^{k_n}.$$

En este caso aplicamos los procedimientos de los casos 1 y 2.

Ejemplo: Si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3}$, entonces buscamos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x-1)^2} + \frac{A_5}{(x-1)^3}.$$

Caso 4: q es producto de factores $(x-r_i)^{k_i}$ y/o de polinomios de grado 2 sin raíces reales y no se repiten. O sea,

$$q(x) = (x-r_1)^{k_1} \dots (x-r_n)^{k_n} \cdot (x^2+\alpha_1 x+\beta_1) \dots (x^2+\alpha_m x+\beta_m)$$

En este caso $\frac{p}{q}$ se escribe como una suma donde por cada "factor lineal" aparecen tantos términos como indican los casos 1 y 2, y para cada "factor cuadrático" aparecen términos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, con B y C constantes a encontrar.

Ejemplo: Si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)}$, entonces debemos hallar constantes A_1, A_2, A_3, B y C tq

$$\frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x^2} + \underbrace{\frac{Bx+C}{x^2+4}}_{\text{Integral ¿?}}$$

Fácil de integrar ✓

Observación: para integrar términos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, debemos hallar constantes K_1 y K_2 tq

$$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = K_1 \underbrace{\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}}_{\substack{\text{Fácil de integrar usando} \\ \text{la sust. } u = x^2+\alpha x+\beta}} + K_2 \underbrace{\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}}_{(\star)}.$$

Igualando los coef. de los numeradores se obtiene $K_1 = B/2$
$K_2 = C - K_1\alpha$

$(\star)$ Se debe completar cuadrado y se usa sustitución para llegar a algo de la forma

$\frac{1}{y^2+a^2}$ y luego usar que $\int \frac{1}{y^2+a^2}\,dy = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(y/a) + c$

Ejemplo: Calcular $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$ (estamos suponiendo $B=1$ y $C=-1$)

Debemos hallar K_1 y K_2 tq

$$\frac{x-1}{x^2-4x+5} = \frac{K_1(2x-4)}{x^2-4x+5} + \frac{K_2}{x^2-4x+5} \Rightarrow$$

Igualando los coeficientes de los numeradores

- $1 = 2K_1 \longrightarrow K_1 = \frac{1}{2}$
- $-1 = -4K_1 + K_2 \longrightarrow K_2 = 1$

Luego, debemos resolver

- $\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(|u|)+C = \frac{1}{2}\ln(|x^2-4x+5|)+C$

Sust. $u = x^2-4x+5$
$du = (2x-4)dx$

- $1\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx = \int \frac{1}{y^2+1}dy = \operatorname{arctg}(y)+C = \operatorname{arctg}(x-2)+C$

Sustitución
$y = x-2$
$dy = dx$

Finalmente, $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}dx = \frac{1}{2}\ln(|x^2-4x+5|) + \operatorname{arctg}(x-2) + C$.

Caso 5: q es producto de terminos lineales y cuadráticos algunos de los cuales (incluyendo los cuadráticos) se repiten.

Este caso no lo veremos.

Integrales Impropias

Hemos definido $\int_a^b f(x)\,dx$ para el caso en que $\underline{a, b \in \mathbb{R}}$ y f es $\underline{\text{acotada}}$ y continua salvo a lo sumo en un nro. finito de ptos. Ahora extenderemos la definición para el caso en que a o $b \notin \mathbb{R}$ o en que f no sea acotada en $[a,b]$.

Integrales Impropias de tipo I: funciones continuas y al menos uno de los límites de integración no es finito.

Definición: Sea $a \in \mathbb{R}$.

- Si f es continua en $[a,\infty)$, definimos $\int_a^\infty f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$, si este límite existe y es finito. En tal caso decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge; si no decimos que $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.
- Si f es continua en $(-\infty, a]$, definimos $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$; y decimos que converge o diverge según corresponda.
- Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \doteq \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$, siempre que estas últimas $\underline{\text{dos}}$ integrales converjan. y en tal caso decimos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge. Si alguna no converge, decimos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Observación: se puede ver que la definición de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ no depende del valor de a.

Ejemplos:

- $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} (-e^{-t} + e^{0}) = 1 < \infty$, por lo tanto la integral impropia converge.

② $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to -\infty} \int_{t}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \ln(|x|)\Big]_t^{-1} = \lim_{t\to-\infty} \left(\ln(1) - \ln(|t|)\right) = -\infty$,

por lo tanto la integral impropia diverge (el límite no es un nro. finito).

③ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$. Elegimos $a = 0$ (por comodidad ya que la función es par)

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(0)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_t^0 = \lim_{t\to-\infty} \left(\operatorname{arctg}(0) - \operatorname{arctg}(t)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ (es convergente).

Ejercicio: ver que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$, converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Integrales Impropias de tipo II: límites de integración finitos ($a, b \in \mathbb{R}$) pero funciones que tienen una asíntota vertical en un punto $c \in [a,b]$.

Definición:

- Sea f continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Definimos $\int_a^b f(x)\, dx \doteq \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$ si este límite existe y es finito.
- Sea f continua en $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$. Definimos $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$ si el límite existe y es finito.
- Sea $c \in (a,b)$. Si f es continua en $[a,c) \cup (c,b]$ y las integrales $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ existen y son finitas definimos $\int_a^b f(x)\, dx \doteq \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$.
- Cuando las integrales que hemos definido existe y son $< \infty$, decimos que convergen, si no decimos que divergen

Ejemplos: decidir si las siguientes integrales impropias son convergentes o diver.

① $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$. Tenemos que $f(x)=\frac{1}{x}$ es cont. en $(0,1]$ y $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$. Aplicando la definición tenemos que

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \ln(|x|)\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(\ln(1)-\ln(t)\right)=\infty ,$$ y

por lo tanto la integral diverge.

② $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, con $0<p<1$ (por ejemplo si $p=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$) (Recien vimos que para $p=1$ diverge)

Aplicamos la definición

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_t^1 = \frac{1}{1-p}\lim_{t\to 0^+} x^{\overbrace{1-p}^{>0}}\Big|_t^1 = \frac{1}{1-p}\lim_{t\to 0^+}\left(1-t^{1-p}\right)$$
$$= \frac{1}{1-p} < \infty$$

Por lo tanto la integral impropia converge

Ejercicio: ver que $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, es divergente para $p>1$.

Criterio de Comparación para integrales impropias.

En algunos casos encontrar la primitiva de una función puede ser muy difícil y por lo tanto se complica decidir si una integral impropia converge o diverge utilizando directamente la definición. A continuación veremos un criterio que nos servirá para determinar si una integral impropia es convergente o divergente (sin hacer el cálculo directo, sino que lo haremos con una función más fácil de integrar).

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo I). Sea f y g funct. continuas y $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,\infty)$. Entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converg. $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ converg.

  o equivalentemente si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

De manera análoga

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in (-\infty, a]$. Entonces $\int_{-\infty}^a g(x)\,dx$ conv. $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ conv.

  o equiv. si $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_{-\infty}^a g(x)\,dx$ div.

Teorema (Crit. Comp. para Int. Imp. Tipo II)

Sean f, g func. cont en $[a,b)$ y tq $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

Entonces, si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge, o equiv $\int_a^b f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge

- Vale un resultado análogo para $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Observación: en todos los casos si $f(x) \geq 0$, la hipótesis se reduce a $f(x) \leq g(x)$.

Ejemplo: Decidir si la integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge o diverge.

Notemos que no podemos calcular directamente la integral ya que la primitiva de e^{-x^2} NO es una función elemental. Utilicemos el teorema anterior.

Primero notemos que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx}_{I_2}$$

- Tenemos que I_1 converge ya que $f(x) = e^{-x^2}$ es cont. en $[0,1]$ (Notar que es una integral definida ✓)

- Para ver que I_2 converge utilicemos el teorema anterior

Como nos interesa $1 \leq x \Rightarrow x \leq x^2$ $\quad e^{-x^2} \leq e^{-x}$ para $x \in [1,\infty)$

Sean $f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = e^{-x}$, tenemos que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [1,\infty)$.

Además $\displaystyle\int_1^{\infty} g(x)\, dx = \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} e^{-x} dx = \lim_{t\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1} < \infty$

es decir, la integral $\int_1^{\infty} g(x)\, dx$ es convergente. **Entonces** por el teorema **anterior** I_2 **es** convergente.

Luego, como I_1 e I_2 son convergentes, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ es convergente.

Sucesiones

Definición: una sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio son los naturales $\mathbb{N}$ y cuya imagen está incluida en $\mathbb{R}$. O sea $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tq $1 \mapsto a(1) \doteq a_1$, $2 \mapsto a(2) \doteq a_2$, y en general $n \mapsto a(n) \doteq a_n$.

Notación: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$

Ejemplos

① $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = n$

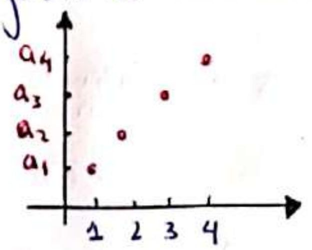
② $\{-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots\}$, $\{(-1)^n\}$, $a_n = (-1)^n$

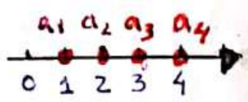
③ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, $\{\frac{1}{n}\}$, $a_n = \frac{1}{n}$

④ Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la restricción de f a $\mathbb{N}$ define una sucesión.

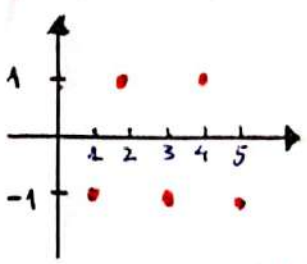
Observación: una sucesión $\{a_n\}$ se puede representar como el gráfico de una función o como un conjunto de números reales.

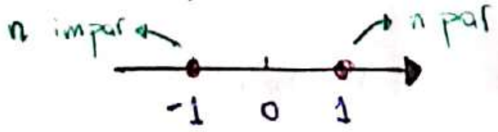
① $a_n = n$



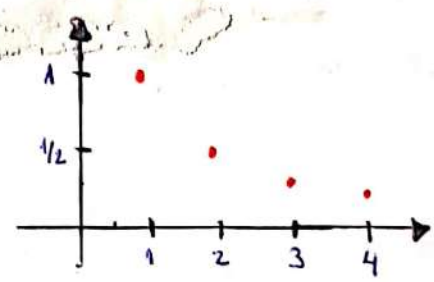


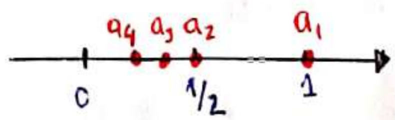
② $a_n = (-1)^n$





③ $a_n = \frac{1}{n}$





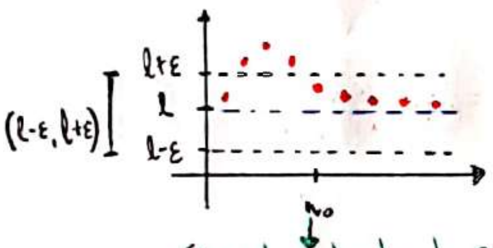
<u>Definición</u>: una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $l \in \mathbb{R}$ y se escribe

$\lim_{n\to\infty} a_n = l$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ si los términos a_n se acercan a l tanto como queramos al hacer n suficientemente grande. Esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

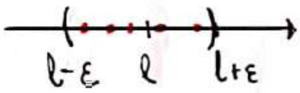
• Recordemos que $|a_n - l| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \iff l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon$.

<u>Gráficamente</u> $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$



(depende del valor de ε)

$a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \ \forall n \geq n_o$

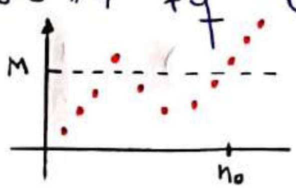


<u>Ejemplo</u>: Probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Luego, como $\frac{1}{n} < \varepsilon$ si y sólo si $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Entonces, basta tomar $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

<u>Definición</u>: dada una sucesión $\{a_n\}$, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ si los términos se hacen arbitrariamente grande al hacer n grande. Esto es, $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $a_n > M \ \forall n \geq n_0$.



Análogamente, decimos que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ si

$$\forall K < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } a_n < K \quad \forall n \geq n_0.$$

Definición: si existe $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ y $\ell \in \mathbb{R}$ (o sea $\ell \neq \pm\infty$) decimos que $\{a_n\}$ converge a ℓ. En los demás casos decimos que diverge.

Ejemplo: Decida si la sucesión dada converge o diverge.

① $a_n = \frac{1}{n}$. Recién vimos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ converge a 0.

② $a_n = n$. Como $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ $\left(\begin{array}{c}\text{Probarlo usando}\\ \text{la definición}\end{array}\right) \Rightarrow \{n\}$ diverge.

③ $a_n = (-1)^n$. Como $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe $\left(\begin{array}{c}\text{alterna entre}\\ 1 \text{ y } -1\end{array}\right) \Rightarrow \{(-1)^n\}$ diverge.

Observación: Se puede demostrar que si el límite existe, entonces es único.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n \mp b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \mp \lim_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (c a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

(iv) Si $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Ejemplos:

① $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$

② $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \underset{(iv)}{\overset{\text{no puedo usar}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n(1+1/n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+1/n} = \frac{2}{1} = 2.$

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3(1+7/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(1+7/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(1+7/n^3)} = 0 \cdot 1 = 0.$

Teorema (Relación entre límite de funciones y sucesiones).

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ y $a_n = f(n)$ $\forall n \geqslant n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell .$$

Ejemplo: calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, con $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$

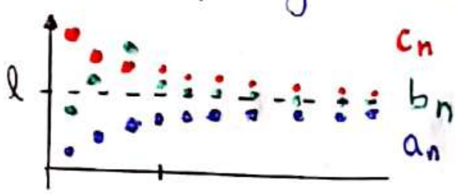
Sea $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, para $x>0$. Tenemos que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$

y como $f(n) = a_n$ $\forall n \geqslant 1 = n_0$ $\Rightarrow$ por Teorema $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$.

Observación: NO es cierto que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$, entonces cualquier función f tal que $f(n) = a_n$ cumple $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ (este límite puede NO existir).

Por ejemplo, si $a_n = \operatorname{sen}(\pi n)$ $(=0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ pero $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(\pi x)$ no existe

Teorema (del "sandwich" para sucesiones). Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ $\forall n \geqslant n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.



Ejemplos:

① Encontrar $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2(n)}{n}$. Tenemos que $0 \leqslant \cos^2(n) \leqslant 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $0 \leqslant \dfrac{\cos^2(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Sean $a_n = 0$ y $c_n = \dfrac{1}{n}$, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{\cos^2(n)}{n} = 0$.

② Hallar $\ell = \lim \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n^3}$. Tenemos que $\dfrac{-1}{n^3} \leqslant \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n^3} \leqslant \dfrac{1}{n^3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego, como $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$, por T. Sandwich $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n)}{n^3} = 0$.

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Ejemplos

1. Probar que la sucesión $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ converge a 0.

Tenemos que $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ y con lo cual $|a_n| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{|-1|^n}{n} = \frac{1}{n}$.

Luego como $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, por el Teorema anterior $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

2. ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

- Analicemos primero el caso $r > 0$.

Recordemos que $r^x = e^{\ln(r^x)} = e^{x\ln(r)}$ y además $\ln(r) \begin{cases} >0 & \text{si } 1<r \\ <0 & \text{si } 0<r<1 \end{cases}$

Luego, sea $f(x) = r^x$. Tenemos que $r^n = f(n)$ y como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } 1<r \\ 0 & \text{si } 0<r<1 \end{cases}$

entonces por teorema $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } 1<r & \text{I} \\ 0 & \text{si } 0<r<1. & \text{II} \end{cases}$

Por otra parte,

- si $r = 1$, $r^n = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y con lo cual $\lim_{n\to\infty} r^n = 1$. III
- si $r = 0$, $r^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y con lo cual $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ IV

- Ahora consideramos el caso $r < 0$
  - Si $r \in (-1,0) \Rightarrow 0 < |r| < 1$ y por II $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$ $\therefore$ por Teo. anterior $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$
  - Si $r = -1$, $r^n = (-1)^n$ que ya sabemos que no tiene límite para $n\to\infty$.
  - Si $r < -1$, r^n no tiene límite cuando $n\to\infty$

Conclusión

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } r \in (-1,1) \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \text{diverge en los otros casos.} \end{cases}$$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ tq $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y f una función continua en $x=a$.

Entonces, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \quad \left(= f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\right)$.

Ejemplos

① Calcule el límite de la sucesión $\{e^{1/n}\}$.

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ y $f(x) = e^x$ es continua en $x=0$, entonces por teorema

$$\lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^0 = 1.$$

② Calcule el límite de la sucesión $\{n \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\}$.

Primero notemos que $n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}$.

Tomamos $a_n = \frac{1}{n}$; sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (o sea $a=0$ en el teorema).

Elegimos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$. Tenemos que f es cont. en $x=0$ ya que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 = f(0).$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Aplico el} \\ \text{teorema}}}{=} f(a) = f(0) = 1.$

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

- creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$;
- estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$;
- decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$;
- estrictamente decreciente si $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$.

Si $\{a_n\}$ es creciente o decreciente, decimos que es <u>monótona</u>.

Ejemplos:

① $\{n\}$. Como $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$ $\forall n$, $\{n\}$ es estrictamente creciente.

② $\{\ln(n)\}$. Sabemos que $f(x) = \ln(x)$ es estrictamente creciente, por lo tanto $n < n+1 \Rightarrow a_n = \ln(n) < \ln(n+1) = a_{n+1}$. Luego $\{\ln(n)\}$ es estric. crec.

③ $\{1,1,2,2,3,3,\dots\}$. Como $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \Rightarrow \{a_n\}$ es creciente.

④ $\{\frac{1}{n}\}$. Tenemos que $n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. O sea, $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$ y entonces $\{\frac{1}{n}\}$ es estrictamente decreciente.

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es

(i) acotada inferiormente, si $\exists M_i \in \mathbb{R}$ tq $M_i \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) acotada superiormente, si $\exists M_s \in \mathbb{R}$ tq $a_n \leq M_s$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tq $|a_n| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

① $\{\frac{1}{n}\}$. Como $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ es acotada (puedo tomar $M = 1$).

② $\{-n\}$. Como $-n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{-n\}$ es acotada sup. pero <u>no</u> inf.

③ $\{n+3\}$. Como $4 \leq n+3$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{n+3\}$ es acotada inf. pero <u>no</u> sup.

Observación: en la definición anterior decimos que M_i es una cota inferior de $\{a_n\}$ y M_s es una cota superior de $\{a_n\}$.

- Análogamente se puede definir cota superior e inferior de cualquier subconjunto de números reales.
- Notar que las cotas sup. e inf. NO son únicas.
  Por ejemplo si $a_n = (-1)^n \Rightarrow M_s = 10$, $M_s = 2$, $M_s = 1$ son todas cotas superiores.

Axioma de completitud de los números reales.

Todo conjunto no vacío de números reales que es acotado sup. tiene una menor cota sup. en $\mathbb{R}$ y todo conjunto no vacío de número reales que es acotado inf. tiene una mayor cota inf. en $\mathbb{R}$.

Definición: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- Si A es acotado sup., la menor cota superior se llama supremo de A y la denotamos $\sup(A)$.
- Si A es acot. inf, la mayor cota inferior se llama ínfimo de A y la denotamos $\inf(A)$.

Además, si $\sup(A) \in A$, decimos que es el máximo de A y
si $\inf(A) \in A$, decimos que es el mínimo de A.

Ejemplo: Pensemos a las siguientes sucesiones como conjuntos de números reales, entonces

① $\{\frac{1}{n}\} = A$. $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = 0$ y A no tiene máximo ni mínimo.

② $\{-n\} = B$. $\sup(B) = -1$, y -1 es el máximo. B no tiene ínfimo y $\therefore$ No tiene mínimo.

③ $\{(-1)^n\} = C$. $\sup(C) = 1$, $\inf(C) = -1$. Además 1 es el max. de C y -1 el mínimo de C.

④ $\{n+3\} = D$. $\inf(D) = 4$, y 4 es el mínimo de D. Además D no tiene supremo y por lo tanto no tiene máximo.

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ es acotada.

Observación: La recíproca es falsa, o sea, $\{a_n\}$ acotada $\not\Rightarrow$ convergente.

Por ejemplo, $a_n = (-1)^n$.

Sin embargo, sí es cierto si la sucesión es creciente o decreciente.

Teorema:

(i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotado superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 = \sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = l_2 = \inf(\{a_n\})$

Observación: se puede demostrar que si $\{a_n\}$ es creciente entonces converge o $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Análogamente, si $\{a_n\}$ es decreciente, entonces converge o $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Subsucesiones

- Dada una sucesión $\{a_n\}$ podemos extraer de ésta otras sucesiones descartando algunos término (quizás una cantidad infinita). Cada una de estas nuevas sucesiones se llama subsucesión de $\{a_n\}$.

Ejemplo: Consideremos la sucesión $\{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{5}, -1, \dots\}$. Podemos extraer las siguientes subsucesiones

- $\{-1, -1, -1, \dots\}$ (términos impares)
- $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ (términos pares)
- $\{-1, -1, -1, \frac{1}{4}, -1, -1, -1, \frac{1}{7}, \dots\}$

Definición: una subsucesión de una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de la forma $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} = \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ donde los $n_j \in \mathbb{N}$ y cumplen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Por ejemplo, $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\}$.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_3 & a_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_{n_1} & a_{n_2} & a_{n_3} \\ n_1 = 1 & n_2 = 3 & n_3 = 5 \end{array}$$

O sea $n_j = 2j - 1$, $j \in \mathbb{N}$.

- Notar que $\{a_{n_j}\}$ es una sucesión, o sea podemos escribir $\{a_{n_j}\} = \{b_j\}$.

Teorema: toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y además los límite son iguales.

Ejemplo: Dada $\{\frac{1}{n}\}$, tenemos que $\{\frac{1}{2j-1}\}$ es una subsucesión. (Otra forma de escribirlo $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n_j} = \frac{1}{2j-1}$). Como $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{j\to\infty} a_{n_j} = 0$.

Observación: el teorema anterior es muy útil para demostrar que una sucesión No tiene límite: basta encotrar dos subsucesiones distintas que converjan a a distintos límites.

Ejemplo: Sea $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$. Luego $a_{n_j} = (-1)^{2j}$ y $a_{n_K} = (-1)^{2K+1}$ son dos subsucesiones de $\{a_n\}$ que convergen a 1 y -1 respectivamente $\therefore \{a_n\}$ no tiene límite o sea diverge.

Teorema (Bolzano - Weierstrass). Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

Observación: puede haber más de una subsucesión convergente

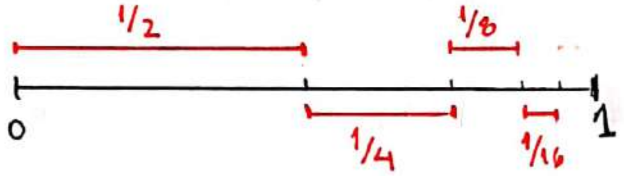
Si $\{a_n\} = \{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, \dots\} \Rightarrow$ $b_j = a_{2j} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$, $c_K = a_{2K+1} = \{-1, -1, -1, \dots\}$ Son ambas sucesiones convergentes.

Series

Dada una sucesión $\{a_n\}$ queremos sumar sus infinitos términos, esto es $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$; lo cual escribiremos como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Por ejemplo si $a_n = \frac{1}{2^n}$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

Podemos pensar a_n como longitudes y entonces sumar un término se puede interpretar como agregar la mitad de lo que falta para llegar a 1.



Graficamente, es claro que la suma se aproxima a 1 tanto como se quiera.

Pero, ¿cómo sumar una cantidad infinita de números?

Como sabemos suma una cantidad finita de números, podemos definir $S_1 \doteq a_1$, $S_2 \doteq a_1 + a_2$, ..., $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ y después hacer $\lim_{k\to\infty} S_k$.

Definición: dada $\{a_n\}$ sucesión de números reales, llamaremos serie de términos a_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la k-ésima suma parcial S_k de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como $S_k \doteq a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Luego, $\{S_k\}$ es una sucesión de números reales.

Si el límite de la suc. $\{S_k\}$ existe y es finito, i.e. $\lim_{k\to\infty} S_k \doteq S \in \mathbb{R}$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y definimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \doteq S$.

Si $\lim_{k\to\infty} S_k$ no existe o es $\pm\infty$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplos: Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes.

① $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Tenemos que $a_n = n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto

$s_1 = 1$; $s_2 = 1+2 = 3$; $s_3 = 1+2+3 = 6, \dots, s_k = 1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$.

Luego, como $\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)}{2} = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n$ es divergente

② $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Observemos que esta serie comienza desde $n=0$. Entonces

$s_0 = 1$; $s_1 = 1+(-1) = 0$; $s_2 = 1+(-1)+1 = 1$; y en general $s_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$

Luego, NO existe $\lim_{k\to\infty} s_k$ pues $\{s_k\}$ admite dos subsucesiones con límites distintos : $\{s_{2j}\}$ tiene límite 1 y $\{s_{2j+1}\}$ tiene límite 0.

Al no existir $\lim_{k\to\infty} s_k$, tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es divergente.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots$ parece convergente. Veremos que efectivamente, es convergente.

Definición: dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \dots$ se llama serie geométrica

Teorema:

(i) Si $|r| < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente y además $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

(ii) Si $|r| \geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

Demostración: Fijamos $r \in \mathbb{R}$. Luego tenemos que

$$\left.\begin{aligned} s_k &= 1 + r + r^2 + \dots + r^k \\ r s_k &= r + r^2 + r^3 + \dots + r^{k+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow s_k - r s_k = 1 - r^{k+1}.$$ O sea, $(1-r) s_k = 1 - r^{k+1}$

(i) Supongamos $|r|<1$.

Por un lado, como $r \neq 1$, tenemos que $S_k = \dfrac{1-r^{k+1}}{1-r}$.

Por otra parte, como $|r|<1$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = r \lim_{k\to\infty} r^k = 0$ (recordar cuando analizamos la sucesión $\{r^n\}$)

Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \dfrac{1-r^{k+1}}{1-r} = \dfrac{1}{1-r}$ y listo!.

(ii) Supongamos $|r|\geq 1$.

- Si $r=-1$, ya vimos en el ejemplo ② que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es divergente.
- Si $r=1$, entonces $S_k = \underbrace{1+1+\dots+1}_{k\text{-veces}} = k$. Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$ y con lo cual $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ es divergente.
- Si $|r|>1$.
  Por un lado tenemos que $S_k = \dfrac{1-r^{k+1}}{1-r}$.
  Por otra parte, ya sabemos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = \begin{cases} \infty & \text{si } r>1 \\ \nexists & \text{si } r<-1 \end{cases}$ $\therefore$ en ambos casos no es finito

Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \left(\dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r^{k+1}}{1-r}\right)$ es divergente y con lo cual $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente.

Observación: Si $|r|<1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \dfrac{1}{1-r} - 1 = \dfrac{r}{1-r}$.

Ejemplos:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-1/2} = 1$ (la serie que vimos antes!)
- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \dfrac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \dfrac{1}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3}{5}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ es divergente pues $r=\frac{4}{3}>1$.

Propiedades de series convergentes.

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ son series convergentes y además

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Demostración (Idea): estas propiedades se desprenden de la def. de serie convergente y de las propiedades de los límites. Ejemplo: veamos que $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

- Sean $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ y $t_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$. Por hipótesis $\lim_{k\to\infty} s_k \doteq s < \infty$ y $\lim_{k\to\infty} t_k \doteq t < \infty$
- Sea $u_k = \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n)$ → k-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.
- Veamos que $\{u_k\}$ converge.

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (a_n + b_n) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=1}^{k} b_n \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} b_n$$

$$= \lim_{k\to\infty} s_k + \lim_{k\to\infty} t_k = s + t$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ es convergente y además $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Ejercicio: probar que $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

En general, es difícil determinar la suma exacta de una serie ya que es difícil deducir una fórmula para S_K. Sin embargo, hay varios criterios que permiten establecer si una serie converge o diverge sin tener que hallar una fórmula explícita para S_K.

Teorema (Criterio de la divergencia). Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Equivalentemente, si $\lim a_n \neq 0$ o $\lim a_n \nexists$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostración: tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} S_K = a_1 + \dots + a_{K-1} + a_K \\ S_{K-1} = a_1 + \dots + a_{K-1} \end{array}\right\} \Rightarrow S_K - S_{K-1} = a_K.$$

Ahora, como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces por definición existe $\lim_{K\to\infty} S_K \doteq S$.

Pero entonces también vale que $\lim_{K\to\infty} S_{K-1} = S$ (pues $K\to\infty \Leftrightarrow K-1\to\infty$)

Luego, $\lim_{K\to\infty} a_K = \lim_{K\to\infty}(S_K - S_{K-1}) = \lim_{K\to\infty} S_K - \lim_{K\to\infty} S_{K-1} = S - S = 0$ ✓.

Ejemplo: Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$ es divergente.

Tenemos que $a_n = \frac{n^2}{5n^2+4}$. Luego, como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5+4/n^2} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ por el Crit. de la div. la serie es divergente.

Observación: no vale el recíproco del teorema. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica)

Vale que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pero veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Vamos a probar que una subsucesión de la sucesión de sumas parciales $\{S_k\}$ es divergente (y por lo tanto, por teo. visto anteriormente, la sucesion $\{S_k\}$ también diverge, o sea que la serie diverge).

Consideramos la subsucesión $\{S_{2^j}\}$. Tenemos que si

$j=1 \to S_{2^1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$j=2 \to S_{2^2} = S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) > S_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$

$j=3 \to S_{2^3} = S_8 = S_4 + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) > S_4 + 4 \cdot \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$

$j=4 \to S_{2^4} = S_{16} = S_8 + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{16}\right) > S_8 + 8 \cdot \frac{1}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4 \frac{1}{2}$

$\vdots$

De manera general $S_{2^j} > 1 + j\frac{1}{2}$.

Luego, $\lim_{j\to\infty} S_{2^j} \geq \lim_{j\to\infty} \left(1 + j\frac{1}{2}\right) = \infty$. O sea, $\{S_{2^j}\}$ es una subsucesión de sumas parciales que diverge. Luego $\{S_n\}$ diverge y por def. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Observación: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge, pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{n_0-1}}_{\substack{\text{cantidad finita de sumandos} \\ < \infty}} + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

Teorema (Criterio de comparación para series)

Si $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge.

Equivalentemente, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge.

Demostración:

Para cada $K \in \mathbb{N}$ con $K \geq n_0$ definimos $s_K \doteq a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_K$ y $t_K \doteq b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_K$

Como $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge, entonces existe $\lim_{K\to\infty} t_K \doteq t$. Queremos ver que existe $\lim_{K\to\infty} s_K$.

Por un lado, como $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$, las sucesiones $\{s_K\}$ y $\{t_K\}$ son crecientes.

Además, $a_n \leq b_n$ implica que $s_K \leq t_K \underset{\{t_K\} \text{ creciente}}{\leq} \lim_{K\to\infty} t_K = t < \infty$, con t que no depende de K. O sea que la suc. $\{s_K\}$ está acotada (superiormente) y además es creciente, por lo tanto existe su límite. Entonces, por definición $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplos: Analice la convergencia de las siguientes series.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)^2}{2^n + n}$. Tenemos que $0 \leq \frac{\operatorname{sen}(n)^2}{2^n+n} \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente (por ser serie geom. con $|r|<1$) por el teorema anterior podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n+n}$ converge.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$. Tenemos que $0 \leq \frac{n}{n^2+n^2} \leq \frac{n}{n^2+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, como $\frac{n}{n^2+n^2} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverge (por ser serie armónica), entonces por el teorema concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ diverge.

Teorema (Criterio de comparación en el límite)

Sean $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ series de términos positivos. Entonces

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge

(ii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, ent. $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ conv. (o equiv. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ div. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge)

(iii) Si $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, ent. $\sum b_n$ div. $\Rightarrow \sum a_n$ div. (o equiv. $\sum a_n$ conv. $\Rightarrow \sum b_n$ conv.)

Demostración:

(i) Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tq $c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon$ $\forall n \geq n_1$.

Tomemos $\varepsilon = \frac{c}{2}$, entonces $\exists\, n_1$ tq $\frac{c}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}c$ $\forall n \geq n_1$. Ahora, como $b_n > 0$

tenemos que $\frac{c}{2} b_n \underset{(\blacktriangle)}{\leq} a_n \underset{(*)}{\leq} \frac{3}{2} c\, b_n$ $\forall n \geq n_1$.

Luego, si $\sum_{n=n_0} a_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_1} a_n$ conv. y como además se cumple $(\blacktriangle)$ por el Teo. de Comparación de Series tenemos que $\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{c}{2} b_n$ conv. y $\therefore \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ es convergente.

De la misma forma pero usando $(*)$ podemos ver que $\sum b_n$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

con lo cual vimos (i).

(ii) Dado $\varepsilon = 1$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tq $-1 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq 1$ $\forall n \geq n_1$. Más aún, como a_n y b_n son positivos tenemos que $0 < \frac{a_n}{b_n} < 1$ $\forall n \geq n_1$, o sea $0 \leq a_n \underset{(\bullet)}{\leq} b_n$ $\forall n \geq n_1$.

Ahora, si $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n$ conv. y como además se cumple $(\bullet)$ por el Teo. de Compar. de series tenemos que $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ conv $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ conv. O sea, vale (ii).

iii) Dado $M > 0$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\frac{a_n}{b_n} > M \;\forall n \geq n_1$.

O sea, $a_n > M b_n \;\forall n \geq n_1$ $(\square)$

Luego, si $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ conv y como vale $(\square)$, por el Teo. Comp. tenemos que $\sum_{n=n_1}^{\infty} M b_n$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge.

<u>Ejemplo:</u> determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge o diverge.

Notemos que para n muy grande $\frac{1}{2^n-1}$ se comporta como $\frac{1}{2^n}$. Entonces, sean $a_n = \frac{1}{2^n-1}$ y $b_n = \frac{1}{2^n}$.

Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/2^n-1}{1/2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{2^n-1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1$ y

como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge (serie geométrica $r = \frac{1}{2} < 1$) $\Rightarrow$ por Teo. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge.

<u>Teorema (Criterio de la integral para series)</u>

Sea f una función continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$, entonces

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}}_{C_1} \iff \underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge}}_{C_2}.$$

<u>Observaciones:</u>

1. No es cierto en general que $C_1 = C_2$.
2. No es necesario iniciar la serie o la integral en $n = 1$. Por ejemplo para la serie $\sum_{n=5} \frac{1}{(n-4)^2}$ consideramos la integral $\int_5^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$.

Ejemplo: Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, para $0 < p < \infty$. (Serie p)

Sea $f(x) = x^{-p}$. Tenemos que f es cont., posit. y decreciente en $[1, \infty)$.
Además $f(n) = \frac{1}{n^p}$.
Es fácil ver que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $\Leftrightarrow$ $p > 1$. (Ejercicio). Luego, por el teo. del Crit. Int. para series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leq 1$.

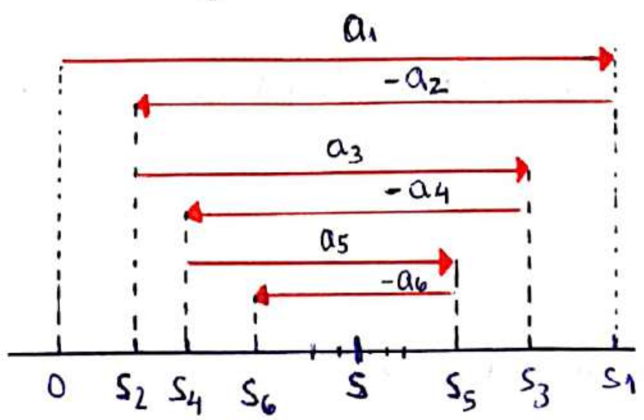
Definición: decimos que una serie es alternante si sus términos son positivos y negativos alternadamente.

Ejemplos

① $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

② $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$

Teorema (Criterio para series alternantes). Si $a_n \geq a_{n+1} > 0 \ \forall n$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge (y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ también converge)



Ejemplo: Determine si las siguientes series convergen o divergen.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Tenemos que $a_n = \frac{1}{n}$.

Sabemos que $0 < n < n+1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ o equiv. $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ \forall n$. O sea,

$0 < a_{n+1} < a_n \ \forall n$. Además $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Entonces, por el

Crit. para ser. alt. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ converge.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n-1}$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \frac{3}{4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n}{4n-1}$ NO existe!

y entonces la serie diverge por el crit. de la divergencia.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\ln(n)}{n}$. Tenemos que $a_n = \frac{\ln(n)}{n} \ \forall n > 1$. (1)

Además, como $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0 \Rightarrow$ por Teo de Suc. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. (2)

Por último, como $\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{1/x \cdot x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1-\ln(x)) < 0 \quad \forall x > e$

tenemos que $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \geq 3$ (3)

Luego, de (1), (2) y (3) y por el crit. de Ser. alt. $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge y con lo

cual $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge.

Definición: decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge y converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge absolutamente ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por ser serie p con $p=2>1$.

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Demostración:

Tenemos que $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$, luego $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Como por hipótesis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces por el Teo. de Comparación de series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ es convergente. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente ∎

Ejemplo: Decida si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge o diverge.

Tenemos que $0 \leq \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Además $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie $p=2>1$)

Luego, por Teo. Comp. $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$ converge y con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge.

Observación: NO vale la recíproca, o sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv. $\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ conv.

Por ejemplo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (por crit. series alternantes) pero $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (serie armón.)

- En este caso decimos que la serie converge condicionalmente.

Teorema (Criterio del cociente). Sean $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y $r \doteq \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

(i) Si $r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto es convergente).

(ii) Si $r > 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente (puede ser $r = \infty$).

(iii) Si $r = 1$, entonces no se puede asegurar nada.

Demostración

(i) Sup. $r < 1$. Elegimos s tq $r < s < 1$ y sea $\varepsilon \doteq s - r > 0$. Ahora, como $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - r \right| < \varepsilon = s - r$ $\forall n \geq n_1$. En particular, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < s$ $\forall n \geq n_1$.

Luego, $|a_{n_1+1}| < s|a_{n_1}|$,

$|a_{n_1+2}| < s|a_{n_1+1}| < s^2 |a_{n_1}|$ y en general $0 < |a_{n_1+k}| < s^k |a_{n_1}|$ $\forall k \geq 1$.

Como $\sum_{k=1}^{\infty} s^k |a_{n_1}| = |a_{n_1}| \sum_{k=1}^{\infty} s^k$ es convergente pues $s < 1$ (serie geom.), por el Crit. de Compar. la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_1+k}| = \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |a_n|$ y también $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, o sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es abs. conv.

(ii) Sup. $r > 1$ y sea s tq $1 < s < r$ y $\varepsilon \doteq r - s > 0$. Por hipótesis existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - r \right| < r - s$ $\forall n \geq n_1$. En particular, $-(r-s) < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r$ $\forall n \geq n_1$, o sea, $s < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ $\forall n \geq n_1$ (notar que esto también vale si $r = \infty$, ver def. de límite).

Luego, $|a_{n_1+1}| > s|a_{n_1}|$, $|a_{n_1+2}| > s|a_{n_1+1}| > s^2|a_{n_1}|$ y en gral. $|a_{n_1+k}| > s^k |a_{n_1}|$ $\forall k \geq 1$.

Ahora como $s > 1$, $\lim_{k\to\infty} |a_{n_1+k}| \geq \lim_{k\to\infty} s^k |a_{n_1}| = \infty$. Entonces, por el Criterio de la divergencia $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_1+k} = \sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n$ no converge y $\therefore$ tampoco converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(iii) • Si $a_n = \frac{1}{n}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

• Si $a_n = \frac{1}{n^2}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Por lo tanto si $r = 1$ NO podemos asegurar nada.

Ejemplo: analice si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$, con $c \neq 0$, converge o diverge.

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|c|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|c|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|^{n+1}\, n!}{|c|^n\,(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{n+1} = 0$.

Luego, por el crit. del cociente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ conv. absolutamente (y $\therefore$ converge)

Observación: notar que del ejemplo anterior podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$ $\forall c \in \mathbb{R}$ (sale usando el criterio de la divergencia).

Ejemplo: analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n c^n$, para $c \neq 0$.

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|c|^{n+1}}{n\,|c|^n} = \lim_{n\to\infty} |c| \frac{(n+1)}{n} = |c|$. Por lo tanto,

- Si $|c| < 1$, la serie converge absolutamente.
- Si $|c| > 1$, la serie diverge.
- Si $c = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge por crit. divergencia
- Si $c = -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ diverge por crit. de divergencia.

Teorema (Criterio de la raíz). Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $r \doteq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(i) Si $r<1$, entonces la serie es absolutamente conv. (y por tanto es converg.)

(ii) Si $r>1$, entonces la serie diverge.

(iii) Si $r=1$, no se puede asegurar nada.

Demostración:

(i) Sup. $r<1$. Elegimos s tq $r<s<1$ y sea $\varepsilon \doteq s-r>0$. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $|\sqrt[n]{|a_n|}-r|<\varepsilon = s-r$ $\forall n \geq n_0$. En particular, $\sqrt[n]{|a_n|}<s$ $\forall n \geq n_0$ y por tanto $0<|a_n|<s^n$ $\forall n \geq n_0$. Luego, como $s<1$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} s^n$ conv. (serie geom.) y entonces por el crit. comparación también converge $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Luego, vale (i).

(ii) Sup. $r>1$. Elegimos s tq $r>s>1$ y sea $\varepsilon \doteq r-s>0$. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $|\sqrt[n]{|a_n|}-r|<\varepsilon = r-s$ $\forall n \geq n_0$. En particular $-(r-s)<\sqrt[n]{|a_n|}-r$ $\forall n \geq n_0$ o equiv. $s<\sqrt[n]{|a_n|}$ $\forall n \geq n_0$ (notar que esto vale si $r=\infty$, ver def. de límite).

Luego, $|a_n|>s^n$ $\forall n \geq n_0$ y con lo cual $\lim_{n\to\infty} |a_n| \geq \lim_{n\to\infty} s^n = \infty$. Entonces, por el criterio de la divergencia la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii)

- Si $a_n = \frac{1}{n}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot \ln\left(\frac{1}{n}\right)}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln(1)-\ln(n))} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln(n)}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

- Si $a_n = \frac{1}{n^2}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-2\ln(n)}{n}} = e^0 = 1$

y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Por lo tanto si $r=1$, no podemos asegurar nada.

Series de Potencias

Vamos a estudiar series en las cuales los términos dependen de una variable

o sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, con $a \in \mathbb{R}$ fijo y $x \in \mathbb{R}$.

Estas series son una generalización de los polinomios y tienen muchas aplicaciones. Por ejemplo, se las utiliza para aproximar funciones como $\operatorname{sen}(x)$, e^x, $\sqrt{x}$ y también para aproximar integrales como $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, ya que tienen propiedades que las convierten en fáciles de manipular.

Definición: sean $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales y $a \in \mathbb{R}$. Llamamos serie de potencias centrada en a, a la serie

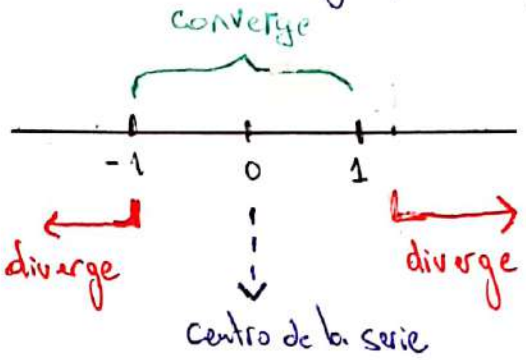
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

(notar que adoptamos la convención $(x-a)^0 = 1$, aún cuando $x=a$).

- En el caso particular de $a=0$, la serie de pot. es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
- Observemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es una serie de términos constantes, o sea una serie numérica. A continuación vamos a estudiar criterios para decidir para cuales $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.
- Notar que si $x=a$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 < \infty$, o sea, toda serie de potencias centrada en a converge en $x=a$.
- Hay series de potencias que sólo convergen en $x=a$, otras que convergen para "algunos" $x \in \mathbb{R}$ y otras que convergen en todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty}$ y $a=0$, entonces la serie de potencias centrada en 0 tiene la forma $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (★) ⟶ serie geométrica

Ya sabemos que la serie (★) converge y vale $\frac{1}{1-x} \iff |x|<1$



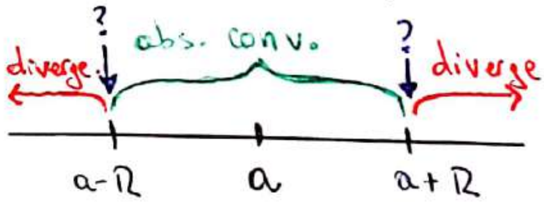
Teorema: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de pot. Entonces, se cumple exactamente una de las siguientes:

(i) La serie converge sólo cuando $x=a$.

(ii) La serie es absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\exists R>0$ tq la serie conv. absolutamente $\forall x$ tq $|x-a|<R$ y es divergente $\forall x$ tq $|x-a|>R$.

(más adelante veremos una manera de calcular R)



Definición: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de potencias.

(A) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=0$ si sólo converge en $x=a$.

(B) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=\infty$ si converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

(C) Si ocurre (iii) en el teorema anterior decimos que R es su radio de convergencia

Definición: Llamamos intervalo de convergencia al conjunto

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ converge} \right\}$$

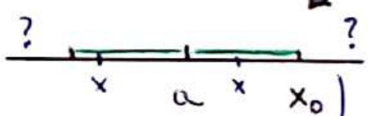
Observación:

- Si $R = 0$, entonces $I = \{a\}$.
- Si $R = \infty$, entonces $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.
- Si $0 < R < \infty$, entonces I puede ser

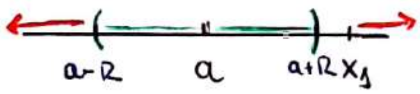
$(a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$ o $[a-R, a+R]$

Observación: notar que si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge en algún $x_0 \neq a$, entonces por (iii) del teorema anterior $R \geq |x_0 - a|$ y además la serie converge $\forall x$ tq $|x-a| < |x_0-a|$

Por otro lado, si la serie diverge en x_1, entonces $R \leq |x_1 - a|$ y además la serie diverge $\forall x$ tq $|x-a| > |x_1 - a|$



(podría ser $a+R > |x_0-a|$)



(podría ser $R=|x_1-a|$)

Ejemplo: determine el radio de convergencia R y el intervalo de convergencia I de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

- Si $x = 1$, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente (serie armónica). Luego, $R \leq 1$. ①
- Si $x = -1$, tenemos $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ convergente (crit. ser. alternantes). Luego, $R \geq 1$ ②

De ① y ② concluimos que $R = 1$ y que $I = [-1, 1)$.

A continuación veremos un criterio que nos permite calcular el radio de convergencia

Teorema (Crit. del cociente para series de potencias): Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, con $c_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$ y R su radio de convergencia. Escribimos

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.$$

(i) Si $0 < L < \infty$, entonces $R = \frac{1}{L}$

(ii) Si $L = 0$, entonces $R = \infty$

(iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$.

Demostración: Para cada $x \neq a$, podemos aplicar el criterio del cociente para series numéricas a la serie $I \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n (x-a)^n}_{a_n}$.

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|c_n (x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |x-a| = L|x-a|$.

(i) Supongamos $0 < L < \infty$.

Luego, por el Crit. Cociente para series numéricas si $\begin{cases} L|x-a| < 1 \Rightarrow I \text{ conv. abs.} \\ L|x-a| > 1 \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases}$. O sea

si $\begin{cases} |x-a| < \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ conv. abs} \\ |x-a| > \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases}$ $\therefore R = \frac{1}{L}$.

(ii) Si $L=0$, entonces $L|x-a| < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $\therefore R = \infty$.

(iii) Si $L=\infty$, entonces $L|x-a| = \infty \ \forall x \neq a$ y $\therefore R = 0$.

Ejemplo: Calcule el radio R e intervalo de convergencia I de las siguientes series de pot.

① $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$.

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$. Luego, $R=0$ e $I=\{0\}$

(o sea, la serie diverge $\forall\, x \neq 0$).

② $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$. Luego $R=1$.

Además, en $x=-1$ y en $x=1$ la serie diverge (por el criterio de la divergencia).

Entonces $I = (-1, 1)$.

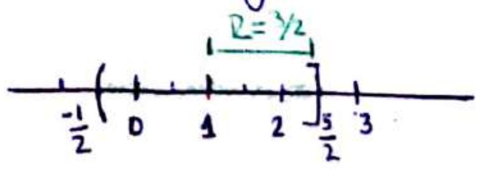
③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n\,3^n} (x-1)^n$ (notar que $a=1$)

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{2^n}{n\,3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}$. Luego, $R = \frac{3}{2}$.

Veamos qué pasa en $x = a - R = 1 - \frac{3}{2}$ y en $x = a + R = 1 + \frac{3}{2}$

- Si $x = 1 - \frac{3}{2}$, obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n\,3^n}\left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} \frac{1}{n} \to$ diverge (por ser serie armónica)
- Si $x = 1 + \frac{3}{2}$, obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n\,3^n}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \to$ converge (por criterio para series alternantes)

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $I = \left(1-\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{2}\right] = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$



Representación de funciones como series de potencias.

Para cada x tq la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge, la serie define una función $f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia.

Ejemplos

① $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si $|x|<1$

② $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, la igualdad $(*)$ vale si $|-x^2|<1$

o sea, si $|x|<1$. Luego, $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, si $|x|<1$ ($\Leftrightarrow x \in (-1,1)$).

③ $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2\left(1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right)} \overset{(\blacktriangle)}{=} \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$, la igualdad $(\blacktriangle)$ vale

si $\left|-\frac{x}{2}\right|<1$, o sea $|x|<2$. Luego, $\dfrac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$ si $x \in (-2,2)$.

Teorema (Derivación e integración de una serie de potencias).

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tiene radio de convergencia $R>0$, entonces la función $f(x) \doteq c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es derivable (y por tanto continua) en el intervalo $(a-R, a+R)$. Además

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1 \dfrac{(x-a)^2}{2} + c_2 \dfrac{(x-a)^3}{3} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$.

Los radios de convergencia de las serie de potencias de (i) y (ii) son R.

Observación: puede suceder que los intervalos de convergencias de (i) y (ii) NO sean igual al de la serie original.

Observación: otra forma de escribir las ecuaciones (i) y (ii) es

(I) $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n (x-a)^n\right]$ ("se deriva término a término")

(II) $\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n \, dx$ ("se integra término a término")

Ejemplo: expresar la función $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ como una serie de potencias.

Notemos que $g(x) \overset{(\bullet)}{=} f'(x)$ con $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Además sabemos que $f(x) \overset{(\bullet\bullet)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $|x|<1$, o sea su radio de conv. es 1.

Luego, $\frac{1}{(1-x)^2} = g(x) \overset{(\bullet)}{=} f'(x) \overset{(\bullet\bullet)}{=} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]' \overset{(I)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0} (n+1) x^n$ y

el radio de convergencia es $R=1$

Ejemplo: expresar la función $\ln(1-x)$ como una serie de potencias.

Observemos que $-\ln(1-x) \overset{(\Delta)}{=} \int f(x)\,dx$, con $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Además, $f(x) \overset{(\Delta\Delta)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si $|x|<1$.

Luego $-\ln(1-x) \overset{(\Delta)}{=} \int f(x)\,dx \overset{(\Delta\Delta)}{=} \int \sum_{n=0}^{\infty} x^n\,dx \overset{(II)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n\,dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, si $|x|<1$.

Para determinar C, evaluamos en $x=0$ obteniendo

$$-\ln(1) = C \Rightarrow C = 0.$$

Por lo tanto $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, si $|x|<1$ (o sea $R=1$).

Escaneado con CamScanner

Serie de Taylor y Polinomio de Taylor.

Queremos estudiar: ¿qué funciones se pueden representar como series de potencias?

¿Cómo es posible hallar esa representación?

- Sea f una función que se puede representar como serie de potencias, es decir

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \forall x \in (a-R, a+R).$$

- Si evaluamos f en $x=a$, obtenemos $\boxed{f(a) = c_0}$

- Por el teorema anterior, podemos derivar f y obtenemos

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$

- Si evaluamos f' en $x=a$, obtenemos $\boxed{f'(a) = c_1}$

- Aplicando nuevamente el teorema a f' nos queda

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3\,c_3(x-a) + 3.4\,c_4(x-a)^2 + \dots$$

- Si evaluamos f'' en $x=a$, obtenemos $\boxed{f''(a) = 2c_2}$

- Aplicando el teorema a f'' nos queda

$$f'''(x) = 2.3\,c_3 + 2.3.4\,c_4(x-a) + \dots$$

- Si evaluamos f''' en $x=a$, obtenemos $\boxed{f'''(a) = 2.3\,c_3}$

De manera general, obtenemos $\boxed{f^{(n)}(a) = n!\,c_n}$, donde $f^{(n)}$ es la derivada n-ésima de f y $n! = 1.2.3\dots n$ (con la convención $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$)

Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema: Si f se puede representar como una serie de potencias centrada en a, es decir, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \forall x$ tq $|x-a| < R$. Entonces

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Definición: dada una función f que tiene derivadas de todos los órdenes en a, se llama serie de Taylor de f centrada en a a la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Observaciones

① Para el caso especial $a=0$ la serie queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ y se suele llamar S. de Maclaurin.

② El teorema anterior nos dice que si f se puede representar como una serie de potencias centrada en a, entonces esa serie es la serie de Taylor de f centrada en a (y por tanto f es igual a su serie de Taylor).

Ejemplo: calcule la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ centrada en $a=0$ (Maclaurin) y determine su radio de convergencia.

- Para calcular la S. de Taylor de f en 0 debemos hallar $f^{(n)}(0) \quad \forall n \geq 0$.

Como en este caso $f^{(n)}(x) = e^x \quad \forall n \geq 0$, tenemos que $f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n \geq 0$.

Luego, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

- Para averiguar su radio de convergencia utilizamos el criterio del cociente.

Como $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \implies R = \infty$.

Conclusión: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ (esto nos dice que $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$)

• Nos preguntamos ahora: ¿es cierto que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$?

O de manera más general: ¿cuándo una función f es igual a su serie de Taylor?
es decir, ¿cuándo es cierto que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$?

Definición: Sea f tq existen $f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a)$. Para $n \geq 0$, definimos el polinomio de Taylor de f de orden n centrado en a como

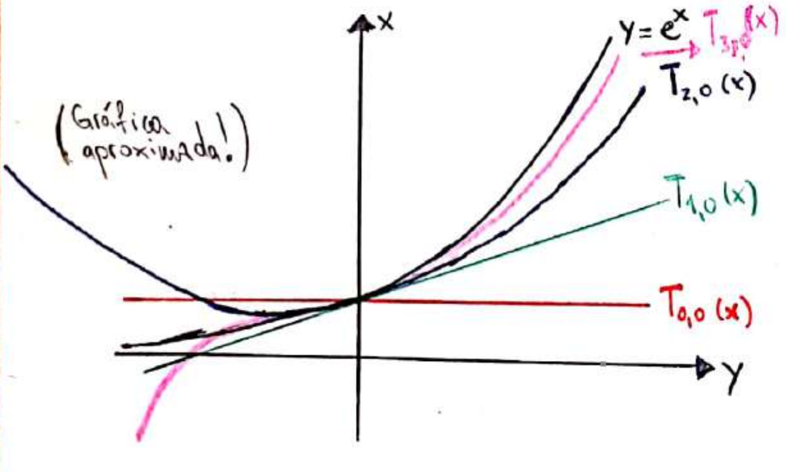
$$T_{n,a}(x) \doteq \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observaciones

① Notar que la n-ésima suma parcial de la serie de Taylor es justamente el polinomio de Taylor de orden n.

② Notar que $T_{1,a}$ es la recta tangente al gráfico de f en el pto. $(a, f(a))$.

③ Notar que f y su polinomio de Taylor de orden n $T_{n,a}$ satisfacen $f^{(j)}(a) = T^{(j)}(a)$ $\forall\, 0 \leq j \leq n$.



$T_{0,0}(x) = f(0) = e^0 = 1$

$T_{1,0}(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$

$T_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$T_{3,0}(x) = f(0) + \dots + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

$\vdots$

Definición: se define el resto de Taylor de orden n centrado en a como

$$R_{n,a}(x) \doteq f(x) - T_{n,a}(x).$$

(Por lo tanto, $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$).

Teorema: Sea f una función tq existe $f^{(n)}(a)$ $\forall n \geq 0$. Se cumple

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \; \forall x \in (a-c, a+c) \iff \lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0 \; \forall x \in (a-c, a+c).$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Entonces por definición de serie tenemos que

$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x)$ (límite de sumas parciales).

Luego, $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - T_{n,a}(x)\right) = f(x) - \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x) = f(x) - f(x) = 0$.

$\Leftarrow$) Si $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$ $\forall x \in (a-c, a+c)$, entonces

$\lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - R_{n,a}(x)\right) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = f$, $\forall x \in (a-c, a+c)$.

Luego, por definición $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ $\forall x \in (a-c, a+c)$.

- Para usar el teorema anterior necesitamos tener alguna expresión para $R_{n,a}$.

Teorema (Fórmula de Lagrange para el resto). Sea f una función tq existen $f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ en un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Entonces, para cada $x \in I$ existe t entre x y a ($t \in (x,a)$ si $x<a$ y $t \in (a,x)$ si $x>a$) tq

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Definición: llamamos fórmula de Taylor a $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

con t entre a y x.

$$= T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

Ejemplos y Aplicaciones

Ejemplo: Probar que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- Ya vimos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es la serie de Taylor de f ($\to f(x) = e^x$) centrada en $a=0$ y su radio es $R=\infty$.

- Para probar que vale la igualdad, por el teorema anterior basta ver que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$

Por la Fórmula de Lagrange $R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!}$, para algún t entre 0 y x.

Luego, para $t \in (-x, x)$ tenemos

$$0 \leq |R_{n,0}(x)| = \frac{e^t |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \left(\begin{array}{l} \text{Ya vimos que } \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \text{para cualquier } x \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

- Entonces, $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto vale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Dar la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ alrededor de $a=0$ (Maclaurin) y probar que coincide con $\operatorname{sen}(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

- Para hallar la serie de Taylor debemos calcular $f^{(n)}(0) \ \forall n \geq 0$. Tenemos que

$$f(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen}(x) \longrightarrow f''(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos(x) \longrightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1$$
$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow f^{IV}(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$$

y luego se va repitiendo lo anterior. En general, tenemos que

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad \forall n \geq 0.$$

- Luego, la serie de Taylor de sen(x) centrada en $a=0$ queda

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

- Veamos ahora que la serie coincide con la función $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como $f^{(n+1)}(t) = \pm \operatorname{sen}(t)$ ó $\pm \cos(t)$, en cualquier caso vale $|f^{(n+1)}(t)| \leq 1$.

Luego,

$$0 \leq |R_{n,0}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(t)|\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- O sea, $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

<u>Ejemplo:</u> Estimar el error que se comete si se aproxima sen(0.2) por el valor en $x=0.2$ de su polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$, ó sea $T_{7,0}(0.2)$.

- Queremos estimar el valor de $|\operatorname{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)|$.

Sabemos que $\operatorname{sen}(x) = T_{7,0}(x) + R_{7,0}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (Fórmula de Taylor)

Por lo tanto $|\operatorname{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)| = |R_{7,0}(0.2)|$.

Ahora, $R_{7,0}(0.2) = \frac{\operatorname{sen}^{(8)}(t)}{8!}(0.2)^8$, para algún $t \in (0, 0.2)$. Como $|\operatorname{sen}^{(8)}(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, entonces

$$|R_{7,0}(0.2)| = \frac{|\operatorname{sen}^{(8)}(t)|}{8!}(0.2)^8 \leq \frac{1}{8!}\left(\frac{2}{10}\right)^8 = \frac{1}{8!\,5^8}.$$

- Conclusión: el error que se comete al aproximar sen(0.2) por $T_{7,0}(0.2)$ es menor que $\frac{1}{8!\,5^8} \approx 6.3 \times 10^{-11}$.

Ejemplo: Estimar el error que se comete si se aproxima $sen(x)$ por $T_{7,0}(x)$ para cualquier $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- Queremos estimar $|sen(x) - T_{7,0}(x)| = |R_{7,0}(x)|$ para $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Como $|R_{7,0}(x)| = \frac{|sen^{(8)}(t)|\,|x|^8}{8!} \leq \frac{|x|^8}{8!} \leq \frac{1}{8!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{8!\,2^8}$, entonces

el error será menor que $\frac{1}{8!\,2^8}$ para cualquier $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Ejemplo: Encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tq el polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$ de $f(x) = sen(x)$ aproxima a $sen(x)$ con un error menor que 10^{-5}.

- Buscamos hallar los $x \in \mathbb{R}$ tq $|sen(x) - T_{7,0}(x)| < 10^{-5}$.

Como $|sen(x) - T_{7,0}(x)| = |R_{7,0}(x)|$ basta hallar los $x \in \mathbb{R}$ tq $|R_{7,0}(x)| < 10^{-5}$.

Ahora, $|R_{7,0}(x)| = \frac{|sen^{(8)}(t)|\,|x|^8}{8!} \leq \frac{1}{8!}|x|^8 < 10^{-5}$

$t \in (0,x)$ ó $t \in (x,0)$

?

Luego, basta tomar $x \in \mathbb{R}$ tq $|x|^8 < \frac{8!}{10^5}$. O sea, todos los $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < \left(\frac{8!}{10^5}\right)^{1/8}$ cumplen lo requerido.

Ejemplo: Usando un polinomio de Taylor adecuado, hallar un valor aprox. de $\sqrt{e}$ con un error menor a 10^{-2}.

- Notemos que $\sqrt{e} = e^{1/2}$. Luego, elegimos $f(x) = e^x$ y $a = 0$ (ya que es fácil de calcular $f^{(n)}(0)$ $\forall n$)

Sabemos que $f(x) = T_{n,0}(x) + R_{n,0}(x)$.

- Lo que se nos pide es hallar n tal que

$$\left| f\left(\tfrac{1}{2}\right) - T_{n,0}\left(\tfrac{1}{2}\right) \right| = \left| R_{n,0}\left(\tfrac{1}{2}\right) \right| < 10^{-2}.$$

Ahora, como $R_{n,0}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^t}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, para algún $t \in (0, 1/2)$ y $f(x) = e^x$ satisface que $e^t < e^{1/2}$ # Insert text here para $t \in (0, 1/2)$, tenemos

$$\left| R_{n,0}\left(\tfrac{1}{2}\right) \right| < \frac{e^{1/2}}{(n+1)!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-2} \quad \text{ó equivalentemente} \quad e^{1/2} \cdot 10^2 < 2^{n+1}(n+1)! \quad (\star)$$

?

Probamos cuál n satisface $(\star)$ $\quad (e^{1/2} \cdot 10^2 \simeq 165)$

$n = 0 \rightsquigarrow 2 \cdot 1! = 2$ No ✗

$n = 1 \rightsquigarrow 4 \cdot 2! = 8$ No ✗

$n = 2 \rightsquigarrow 8 \cdot 3! = 48$ No ✗

$n = 3 \rightsquigarrow 16 \cdot 4! = 384$ Si ✓

O sea, $T_{3,0}\left(\frac{1}{2}\right)$ aproxima a $\sqrt{e}$ con un error menor a 10^{-2}.

Como $T_{3,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, el valor aproximado que obtuvimos es

$$T_{3,0}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} \approx 1.6458 \qquad (\sqrt{e} \approx 1.6487)$$

Como justamente suponemos que no sabemos calcular e^{1/2}, sería mejor acotar e^t de la siguiente manera:

e^t < e^{1/2} < e^1 = 2.7183... < 3,

Luego, usando la acotación e^t < 3, la desigualdad (*) se convierte en: 3*10^2 < 2^{n+1} * (n+1)!

El primer natural que satisface la ecuación anterior es también n=3.

Cálculo Vectorial

- A continuación vamos a introducir la noción de vector en el plano ($n=2$) y en el espacio ($n=3$).

<u>Definición:</u> $\mathbb{R}^n = \{ A \doteq (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R} \ \forall i \}$. En $\mathbb{R}^n$ se definen dos operaciones:

- suma: $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \doteq (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$

- multiplicación por escalares: para $r \in \mathbb{R}$, $r \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (ra_1, ra_2, \dots, ra_n)$

Con estas op., $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sus elementos se llaman vectores. (o puntos)

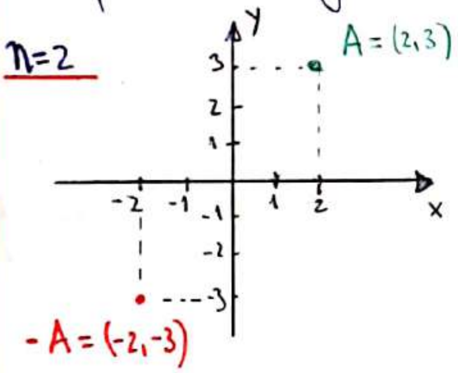
<u>Observación</u>: ① denotamos por $-A = (-1) \cdot A$ y definimos la resta

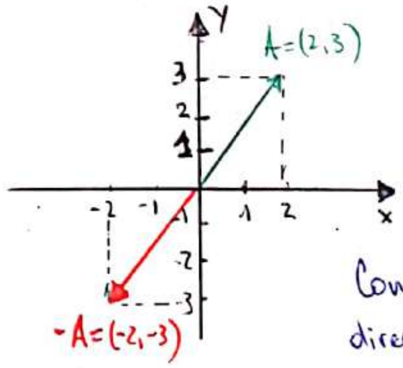
$$B - A = B + (-A)$$

② A veces denotamos al vector nulo simplemente $0 = (0, 0, \dots, 0)$.

- Representación gráfica o geométrica de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

<u>$n=2$</u>





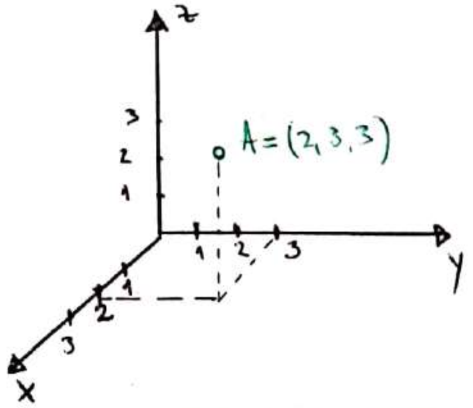
Como una flecha <u>desde el origen</u> hasta el pto. correspondiente.

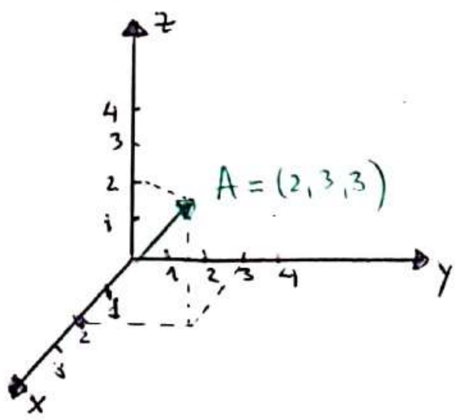
Como vector, A tiene dirección, sentido y longitud

↓

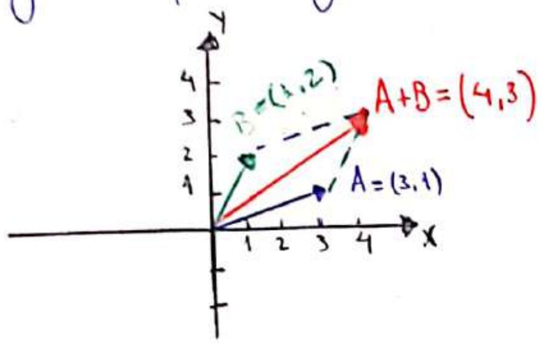
tiene igual dirección y longitud que A pero sentido opuesto.

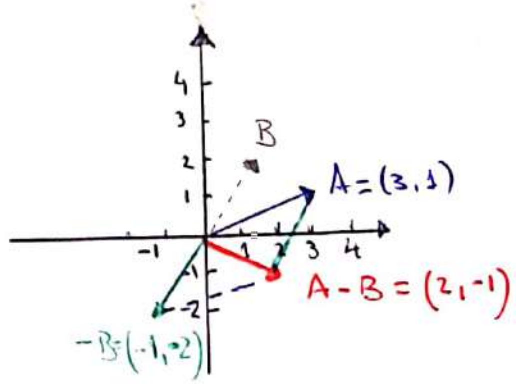
<u>$n=3$</u>



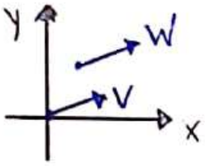


Regla del paralelogramo.

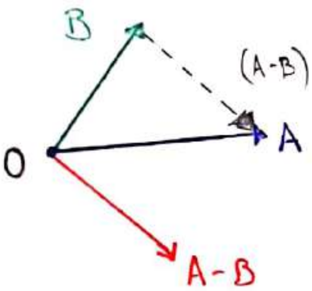


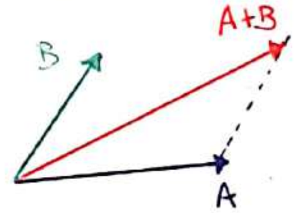


Observación:



W no representa un punto del plano pero V sí. Sin embargo, como vectores V y W coinciden.





Definición (producto escalar o producto interno en $\mathbb{R}^n$): dados $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $A = (a_1, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, \ldots, b_n)$ el producto escalar entre A y B es el número

$$\langle A, B \rangle \doteq a_1 . b_1 + a_2 . b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j .$$

Ejemplo: Calcular el producto escalar entre $A = (1, -2, 3)$ y $B = (5, \frac{1}{2}, 0)$.

Por definición, $\langle A, B \rangle = 1.5 + (-2). \frac{1}{2} + 3.0 = 5 - 1 + 0 = 4$.

Observación: a veces el producto escalar (interno) entre A y B se denota por

$A \cdot B$

Teorema (Propiedades del producto interno). Dados $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, las siguientes son válidas:

(1) $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$

(2) $\langle A+B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$ y $\langle A, B+C \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$

(3) $r\langle A, B \rangle = \langle rA, B \rangle = \langle A, rB \rangle$

(4) $\langle A, A \rangle \geq 0$

(5) $\langle A, A \rangle = 0 \iff A = (0, \dots, 0)$.

Demostración: (Ejercicio!) Usar la def. de prod. escalar y las prop. de los nros. reales.

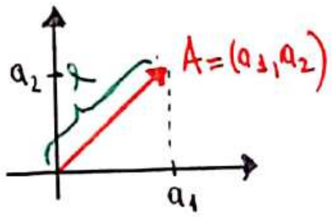
Definición: definimos la <u>norma</u> de un vector $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$\|A\| \doteq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\langle A, A \rangle}.$$

Observación: notar que si $n = 1$, o sea en $\mathbb{R}$, $\|A\| = |A|$.

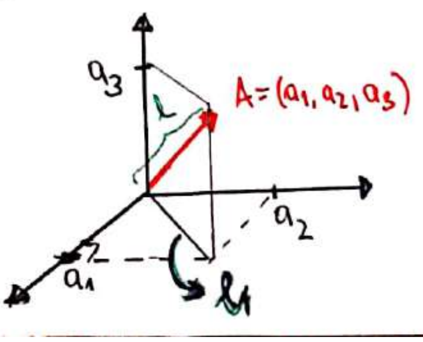
- Geométricamente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, $\|A\|$ es la longitud del vector que representa a A.

<u>En $\mathbb{R}^2$</u>



Por el Teo. de Pitágoras tenemos que
$\ell = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \|A\|$.

<u>En $\mathbb{R}^3$</u>



Usamos Pitágoras 2 veces:

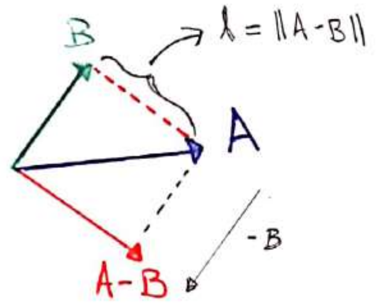
- $\ell_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- $\ell = \sqrt{\ell_1^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \|A\|$.

- Notar también que $\|A\|$ es la distancia del punto A al origen, o sea $\text{dist}(A,0) = d(A,0) = \|A\|$.

Definición: definimos la distancia entre dos vectores A y B en $\mathbb{R}^n$ como

$$d(A,B) = \|A-B\| \qquad (\text{notar que } d(A,0) = \|A\|)$$

- Geométricamente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, $\|A-B\|$ = longitud del vector $A-B$
(= distancia entre el pto. A y el pto. B)



Ejemplo: la distancia entre $A=(1,0,2)$ y $B=(1,3,-1)$ es

$$d(A,B) = \|A-B\| = \|(1,0,2)-(1,3,-1)\| = \|(0,-3,3)\| = \sqrt{0^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{18}.$$

Teorema (propiedades de la norma de un vector). Sean $A,B\in\mathbb{R}^n$ y $r\in\mathbb{R}$. Entonces,

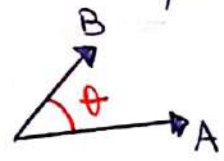
(1) $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \iff A = (0,0,\dots,0)$

(2) $\|rA\| = |r|\,\|A\|$

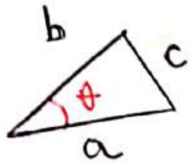
(3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (desigualdad triangular)

(4) $\langle A,B\rangle = \|A\|\,\|B\|\cos\theta$, donde $0\leq\theta\leq\pi$ es el ángulo (radianes) entre A y B

(5) $|\langle A,B\rangle| \leq \|A\|\,\|B\|$, (desigualdad de Cauchy-Schwarz)



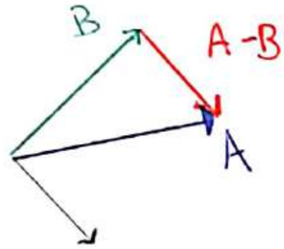
Observación: notemos que (4) es una consecuencia del Teo. del coseno



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

(notar que si $\theta = \frac{\pi}{2}$ obtenemos Pitágoras)

Veamos como obtenemos (4).



- Si aplicamos el Teo. de coseno al triángulo formado por los vectores A, B y A-B obtenemos

$$\|A-B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\,\|A\|\,\|B\|\cos\theta \quad ①$$

- Por otra parte usando la definición de norma tenemos

$$\begin{aligned}\|A-B\|^2 &= \langle A-B, A-B\rangle \\ &= \langle A,A\rangle + \langle A,-B\rangle + \langle -B,A\rangle + \langle -B,-B\rangle \\ &= \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\langle A,B\rangle \quad ②\end{aligned}$$

Igualando ① y ② obtenemos

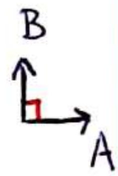
$$\langle A, B\rangle = \|A\|\,\|B\|\cos\theta \,. \checkmark$$

Definición: dados $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $A \neq 0$ y $B \neq 0$ decimos que A y B

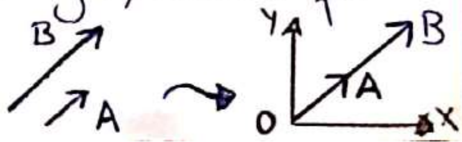
(i) Son ortogonales (o perpendiculares) si $\langle A,B\rangle = 0$

(ii) Son paralelos si $A = rB$ para algún $r \in \mathbb{R}$.

Observación: en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ la definición anterior coincide con la usual:

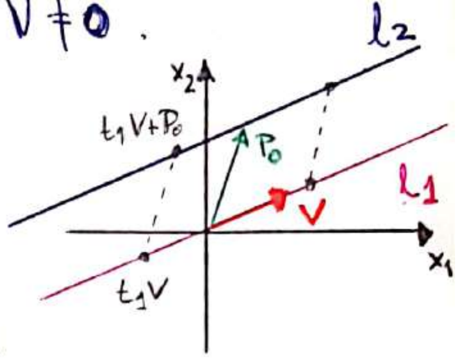


- si A y B son perpendiculares, entonces el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Luego, como $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ por (4) del teorema anterior tenemos que $\langle A,B\rangle = 0$.
- si son paralelos, trasladándolos para que comiencen en el origen, tenemos que están en una misma recta, o sea uno es múltiplo del otro.



Rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

- Supongamos $n = 2$ ó 3. Sean $P_0 \in \mathbb{R}^n$ y $V \in \mathbb{R}^n$ con $V \neq 0$.



- Los puntos tV, con $t \in \mathbb{R}$, describen la recta l_1 que tienen dirección V y pasa por el origen.
- Los puntos $P_0 + tV$, con $t \in \mathbb{R}$, describen la recta l_2 que tiene dirección V y que pasa por P_0.

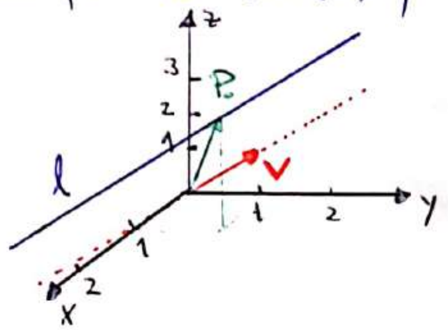
(en $\mathbb{R}^3$ el gráfico es similar)

Definición: dados $P_0 \in \mathbb{R}^n$ y $V \in \mathbb{R}^n$ con $V \neq 0$, la recta l que pasa por el punto P_0 y tiene dirección V es el conjunto de todos los puntos $X = (x,y)$ (ó $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$) tales que $X = P_0 + tV$, con $t \in \mathbb{R}$ → Ecuación vectorial de la recta

Ó sea, $l = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = P_0 + tV,\ \text{con } t \in \mathbb{R}\}$ (si $n=2$, $X = (x,y)$)

$l = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = P_0 + tV,\ \text{con } t \in \mathbb{R}\}$ (si $n=3$ $X = (x,y,z)$)

Ejemplo: Dar la ecuación vectorial de la recta l que pasa por $P_0 = (1,1,3)$ y tiene dirección $V = (0,1,1)$.



- La ecuación vectorial es
$$X = (1,1,3) + t\,(0,1,1),\ \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

- ¿Pertenecen los puntos $P_1 = (0,0,2)$ y $P_2 = (1,-1,1)$ a la recta l?

- Sabemos que $P = (x_0, y_0, z_0) \in l$ si existe t tq $P = P_0 + tV$, es decir si existe $t \in \mathbb{R}$ tq
$$(x_0, y_0, z_0) = (1,1,3) + t\,(0,1,1)$$
$$= (1\ ,\ 1+t\ ,\ 3+t)$$

Por lo tanto, $P_1=(0,0,2) \in l_1$ si existe $t \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{aligned} 0 &= 1 \\ 0 &= 1+t \\ 2 &= t+3 \end{aligned}$$

→ esta ecuación es una contradicción y por lo tanto $P_1=(0,0,2)$ no pertenece a la recta l.

• Para ver si $P_2=(1,-1,1) \in l$ debemos ver si existe $t \in \mathbb{R}$ tq

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ -1 &= 1+t \rightarrow t=-2 \\ 1 &= 3+t \rightarrow t=-2 \end{aligned}$$

✓ . Luego, $P_2 \in l$.

Definición: decimos que dos rectas son paralelas si sus vectores dirección son paralelos y decimos que son ortogonales (o perpendiculares) si sus vectores dirección son ortogonales.

Ejemplos:

1) • Las rectas $X=(0,1,3)+t(1,-3,0)$, con $t \in \mathbb{R}$

y $\quad X=t(-2,6,0)$, con $t \in \mathbb{R}$

son pararelas ya que $V_1=(1,-3,0)$ y $V_2=(-2,6,0)$ son paralelos.

2) • Las rectas $X=(2,\pi,0)+t(1,0,0)$, con $t \in \mathbb{R}$

y $\quad X=(3,\pi,0)+t(0,2,100)$, con $t \in \mathbb{R}$

son perpendiculares ya que sus vectores dirección son ortogonales.

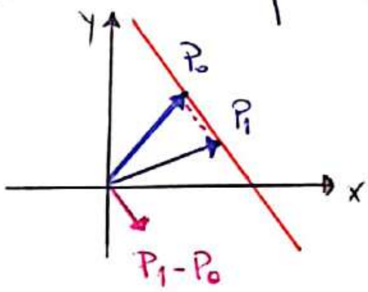
En efecto, $\langle(1,0,0),(0,2,100)\rangle = 1.0+0.2+0.100$
$= 0+0+0 = 0$ ✓

Ejercicio: ver que las rectas se cortan en el punto $(3,\pi,0)$.

- Sabemos por los axiomas de la geometría euclideana que dados dos puntos P_0 y P_1 en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$), existe una única recta que pasa por ellos. Para dar la ecuación de esta recta, necesitamos un vector paralelo a ella. Este vector puede ser $P_1 - P_0$ (o $P_0 - P_1$).

<u>Definición</u>: dados $P_0, P_1 \in \mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) la ecuación vectorial de la recta que pasa por P_0 y P_1 es

$$X = P_0 + t(P_1 - P_0), \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$



<u>Observación</u>: definiciones equivalentes son

$$X = P_1 + t(P_1 - P_0) \quad \text{o} \quad X = P_0 + t(P_0 - P_1) \quad \text{o} \quad X = P_1 + t(P_0 - P_1)$$

<u>Ejemplo</u>: dar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $(1,2,3)$ y $(3,2,1)$.

La ecuación es $X = (1,2,3) + t(2,0,-2)$.

<u>Otras formas de dar la ecuación de una recta.</u>

- Supongamos $n=2$. Sea $P_0 = (x_0, y_0)$ y $V = (v_1, v_2) \neq (0,0)$.

La ec. vect. de la recta que pasa por P_0 y tiene dirección V es

$$X = P_0 + tV \quad \text{o equivalentemente}$$

$$(x,y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2).$$

Igualando coordenada a coordenada tenemos

$$\text{(EP)} \begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases} \rightarrow \text{Ecuación paramétrica}$$

- Supongamos que $v_1 \neq 0$. Despejando t en la primera ecuación de (EP) y reemplazando en la segunda obtenemos

$$t = \frac{x - x_0}{v_1}, \text{ y luego } y = y_0 + \frac{(x - x_0)}{v_1} v_2 = \underbrace{\frac{v_2}{v_1}}_{a} x + \underbrace{\left(y_0 - \frac{v_2}{v_1} x_0\right)}_{b}$$

Luego, $y = ax + b$ → ec. ó forma explícita de la recta.

$y - ax + b = 0$ → ec. ó forma implícita de la recta.

Ejemplo: Dar la forma explícita de la recta que pasa por $P_0 = (1,2)$ y $P_1 = (3,1)$.

- Sabemos que la Ec. Vect. de la recta que pasa por P_0 y P_1 es $X = P_0 + t(P_1 - P_0)$.

Luego, $X = (1,2) + t(2,-1)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Entonces tenemos que la recta pasa por $P_0 = (1,2)$ y tiene dirección $V = (2,-1)$.

Por lo tanto, tenemos que $a = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-1}{2}$

$$b = 2 - \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{5}{2}$$

Finalmente, la ecuación explícita de la recta es $y = \frac{-1}{2} x + 5$.

Ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$: Dados $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $V = (v_1, v_2, v_3)$ tenemos que

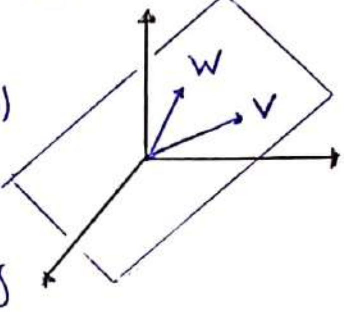
- $X = P_0 + tV$, con $t \in \mathbb{R}$ → ecuación vectorial

- $\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \\ z = z_0 + t v_3 \end{cases}$, con $t \in \mathbb{R}$ → ecuación paramétrica

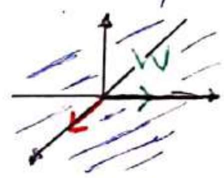
- No hay ecuación explícita e implícita.

Planos en $\mathbb{R}^3$

- Sean V y W dos vectores no nulos y no paralelos en $\mathbb{R}^3$.



- Si consideramos todos los múltiplos de V (tV con $t \in \mathbb{R}$) obtenemos la recta l_1 que tiene dirección V y pasa por el origen
- Si consideramos todos los múltiplos de W (tW con $t \in \mathbb{R}$) obtenemos la recta l_2 que tiene dirección W y pasa por el origen
- Si sumamos cada punto de l_1 con un punto de l_2 vamos a obtener un plano que está generado por V y W y pasa por el origen [Por ejemplo, $\mathbb{R}^2 = \{ t\,\overset{V}{(1,0,0)} + r\,\overset{W}{(0,1,0)} : t, r \in \mathbb{R} \}$

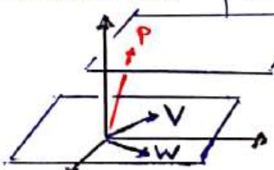


]

- Si a este plano le sumamos un punto fijo P, obtenemos un plano paralelo y que pasa por P.

Definición: Dados $V, W \in \mathbb{R}^3$ con $V \neq 0 \neq W$ y $V \neq sW\ \forall s \in \mathbb{R}$ y dado $P \in \mathbb{R}^3$, decimos que $X = P + tV + rW$, con $t, r \in \mathbb{R}$ → ec. vectorial del plano

es la ecuación ecuación vectorial del plano generado por V y W que pasa por el punto P.



Ejemplo: Dar la ec. vectorial del plano que pasa por $(1,2,4)$ y está generado por $(1,2,2)$ y $(2,5,0)$.

- La ecuación del plano es: $X = (1,2,4) + t(1,2,2) + r(2,5,0)$, con $t, r \in \mathbb{R}$.
- ¿El punto $P_0 = (0,1,0)$ pertenece al plano?

P_0 está en el plano si existen t y r en $\mathbb{R}$ tq $(0,1,0) = (1+t+2r,\ 2+2t+5r,\ 4+2t)$

Es decir,
$$\begin{aligned} 1+t+2r &= 0 \quad \longrightarrow 1-2+\tfrac{6}{5} = 0 \quad \text{absurdo!} \\ 2+2t+5r &= 1 \quad \longrightarrow 2-4+5r = 1 \ \therefore\ r = \tfrac{3}{5} \\ 4+2t &= 0 \ \rightarrow\ t = -2 \end{aligned}$$

Conclusión: P_0 **no** pertenece al plano ya que no existen t y r en $\mathbb{R}$ tq $P_0 = (1+t+2r,\ 2+2t+5r,\ 4+2t$

- Por geometría euclideana sabemos que un plano queda determinado por alguna de las siguientes posibilidades:

① tres puntos no colineales

② una recta y un punto fuera de ella

③ dos rectas paralelas (distintas)

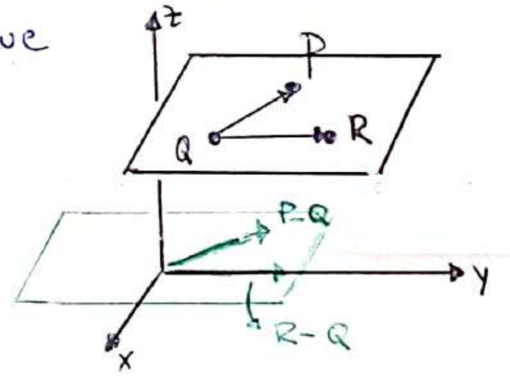
- ¿Cómo determinar la ecuación del plano en los casos ①, ② y ③?

① Sean P, Q y R tres ptos. no colineales (No son paralelos).

Luego, $P-Q$ y $R-Q$ son dos vectores no nulos y no paralelos que generan el plano.

Entonces, el plano que contiene a P, Q y R es el plano que pasa por P y está generado por $P-Q$ y $R-Q$, o sea

$$X = P + t(P-Q) + r(R-Q), \text{ con } t, r \in \mathbb{R}$$



Ejemplo: dar la ec. vectorial del plano que pasa por los puntos $\underbrace{(0,1,0)}_{P}$, $\underbrace{(1,2,1)}_{Q}$ y $\underbrace{(-1,2,3)}_{R}$.

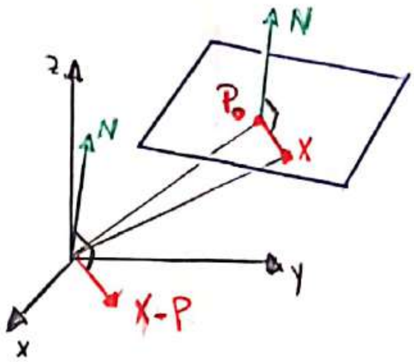
- Tenemos que $P-Q = (-1,-1,-1)$ y $R-Q = (-2,0,2)$

por lo tanto la ecuación es $X = (0,1,0) + t(-1,-1,-1) + r(-2,0,2)$, con $t, r \in \mathbb{R}$.

② Si tenemos una recta l y un punto P fuera de ella, entonces eligiendo dos puntos Q y R en la recta tenemos tres puntos no colineales y aplicamos ①.

③ Si tenemos dos rectas paralelas nos basta elegir dos punto P y Q sobre una de las rectas y un punto Q sobre la otra y luego procedemos como el caso ① para encontrar la ecuación determinado por las dos rectas.

- Notemos que un plano también queda determinado si damos un vector N perpendicular a dicho plano y un punto P_0 por el que pasa. Si la ec. del plano es $X = P_0 + tV + rW$, entonces $X - P_0$ es perpendicular a N ó sea, $\langle X - P_0, N \rangle = 0$



Definición: el plano normal a N y que pasa por P_0 es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{R}^3$ tq $X - P_0$ es perpendicular a N, es decir

$$\langle X - P_0, N \rangle = 0 \rightarrow \text{ecuación normal del plano.}$$

Observación: sean $X = (x,y,z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $N = (a,b,c)$, entonces la ec. normal del plano queda

$$\langle (x,y,z) - (x_0, y_0, z_0), (a,b,c) \rangle = 0 \iff \langle (x-x_0, y-y_0, z-z_0), (a,b,c) \rangle = 0$$

$$\iff (x-x_0)a + (y-y_0)b + (z-z_0)c = 0 \iff ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{\doteq d \text{ (dato)}}.$$

Es decir, $ax + by + cz = d$ → ecuación cartesiana del plano.

Ejemplo: dar la ecuación normal y cartesiana del plano normal a $N = (3,2,1)$ y q' pasa por $(2,-1,1)$

- La ecuación normal del plano es: $\langle (x,y,z) - (2,-1,1), (3,2,1) \rangle = 0$.

- La ecuación cartesiana del plano es: $3x + 2y + z = d$ para un "cierto" $d \in \mathbb{R}$

¿Cómo hallar d? → reemplazamos (x,y,z) por $(2,-1,1)$ ó sea

$d = 3.2 + 2.(-1) + 1 = 6 - 2 + 1 = 5$ (lo que hicimos fue calcular $ax_0 + by_0 + cz_0$)

La ecuación cartesiana es: $3x + 2y + z = 5$

• ¿Los puntos $(0,0,2)$ y $(0,0,5)$ pertenecen al plano?

Veamos si satisfacen la ec. cartesiana.

• $3.0 + 2.0 + 2 = 5$ ✗ absurdo! . Por lo tanto $(0,0,2)$ <u>no</u> está en el plano
• $3.0 + 2.0 + 5 = 5$ ✓ Por lo tanto $(0,0,5)$ <u>si</u> está en el plano.

<u>Definición:</u> dados dos vectores $V = (v_1, v_2, v_3)$ y $W = (w_1, w_2, w_3)$ definimos el producto vectorial $V \times W$ como

$$V \times W = (v_2 w_3 - w_2 v_3 \,,\, w_1 v_3 - v_1 w_3 \,,\, v_1 w_2 - w_1 v_2) \qquad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \;\; + \; - \; +$$

El vector $V \times W$ es perpendicular a V y W y por lo tanto al plano generado por V y W (siempre que V y W sean ambos no nulos y no paralelos. Si $V = 0$ ó $W = 0$ ó V y W paralelos, entonces $V \times W = (0,0,0)$ Ejercicio!)

• ¿Como pasar de la ec. vectorial del plano a la ec. normal del plano?

La ec. vect. del plano que pasa por P y está generado por V y W es

$$X = P + tW + rV \quad , \text{ con } t, r \in \mathbb{R}.$$

Como el vector $V \times W$ es ortogonal a V y W ($\therefore$ a su suma y cualquier comb. lineal) entonces

$\langle X - P \,,\, V \times W \rangle = 0$ es la ec. normal del plano.

<u>Ejemplo:</u> dar la ecuación normal y cartesiana del plano $X = (2,1,0) + t(1,1,2) + r(0,2,3)$ $t, r \in \mathbb{R}$

• Definimos $N = (1,1,2) \times (0,2,3) = (3-4, -3, 2) = (-1,-3,2)$

C.A.
$$\begin{matrix} (1,1,2) \\ (0,2,3) \end{matrix} \quad + \; - \; +$$

Luego, la ec. normal es $\langle (x,y,z) - (2,1,0) \,,\, (-1,-3,2) \rangle = 0$

- Para la cartesiana sabemos que es $-x-3y+2z=d$, donde d se obtiene al reemplazar $(x,y,z)=(2,1,0)$, es decir $\underbrace{-2-3.1+2.0}_{-5}=d$.

Luego, la ec. cartesiana es $-x-3y+2z=5$.

¿Cómo pasar de la ec. normal del plano a la ecuación vectorial?

- Basta encontrar tres puntos P, Q y R no colineales (y estamos en ① ver pág. 75)

Luego, definimos $V=P-Q$ y $W=R-Q$. Así la ec. vectorial queda $X = P + t\,(P-Q) + r\,(R-Q)$, con $t, r \in \mathbb{R}$.

Definición: decimos que α es el ángulo entre dos planos si α es el ángulo correspondiente a sus vectores normales (o perpendiculares).

Ejemplo: Obtener el coseno del ángulo entre los planos $x+y+z=0$ y $x+2y+3z=1$.

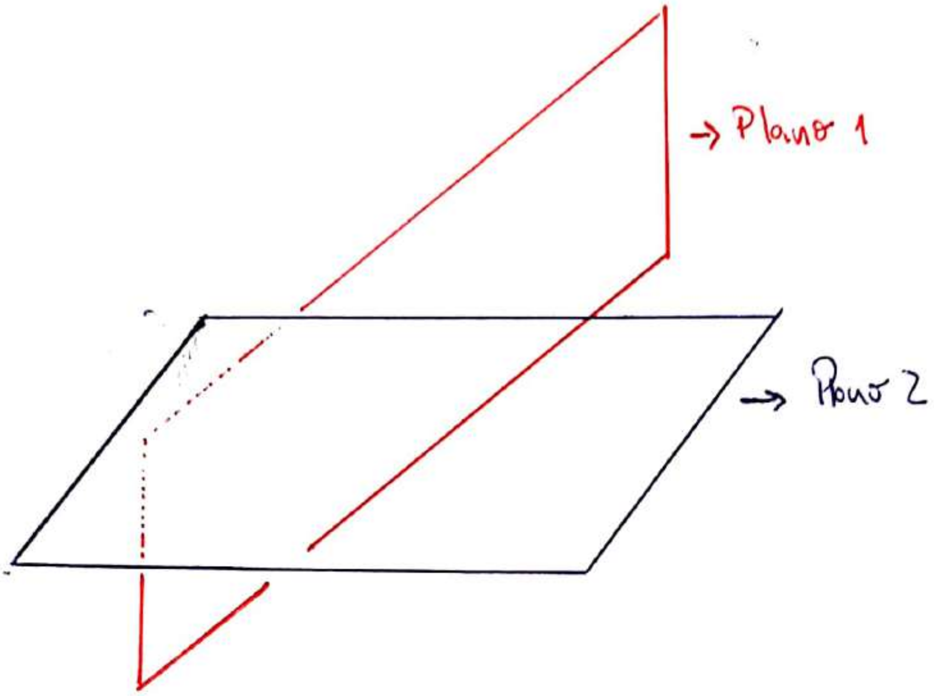
Tenemos que $N_1=(1,1,1)$ y $N_2=(1,2,3)$.

Luego, $\langle N_1, N_2\rangle = 1+2+3 = 6 = \|N_1\|\,\|N_2\|\,\underbrace{\cos(N_1,N_2)}_{\text{coseno del ángulo entre } N_1 \text{ y } N_2}$

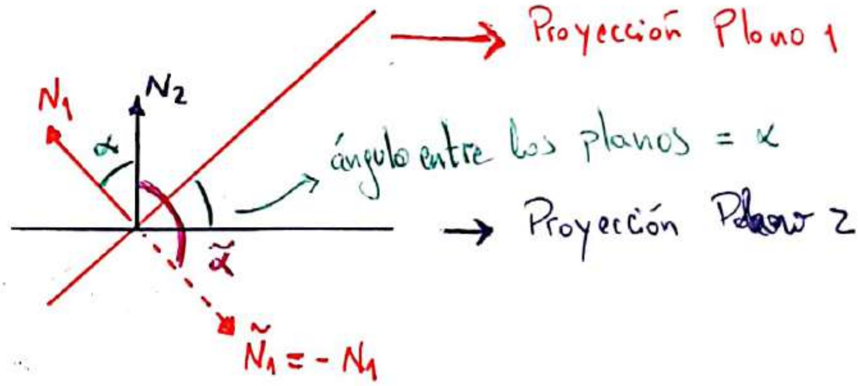
Como, $\|N_1\|=\sqrt{3}$ y $\|N_2\|=\sqrt{14}$, tenemos que

$$\cos(N_1,N_2)=\frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}}.$$

Vista en $\mathbb{R}^3$



Proyectado en $\mathbb{R}^2$



Notemos que según el sentido de N_1 y N_2 se obtendrá alguno de los 2 ángulos suplementarios α o $\tilde{\alpha}$ $(\pi = \alpha + \tilde{\alpha})$

- Por convención vamos a considerar el menor de estos y el cual satisface

$$\cos(\alpha) = \frac{|\langle N_1, N_2 \rangle|}{\|N_1\| \, \|N_2\|}$$

Al considerar $|\langle N_1, N_2 \rangle|$ no importa el sentido que elijamos para N_1 y N_2. Siempre vamos a estar considerando el ángulo entre 0 y $\pi/2$ (α en el dibujo)

- Recordar que $\cos(x) = -\cos(x+\pi)$, luego como $\tilde{\alpha} = \pi - \alpha = \pi + (-\alpha)$

$$\cos(\tilde{\alpha}) = \cos(\pi + (-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$$

Funciones vectoriales

Definición: dadas $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, llamamos función vectorial a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dado por $f(t) \doteq (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Los f_i se llaman funciones coordenadas de f.

El dominio de f es $Dom(f) \doteq \bigcap_{i=1}^{n} Dom(f_i)$

Ejemplos:

- Si $f(t) = (\underbrace{t+2}_{f_1(t)}, \underbrace{t^3}_{f_2(t)})$, entonces como $Dom(f_1) = \mathbb{R} = Dom(f_2)$ tenemos que $Dom(f) = \mathbb{R}$.

- Si $f(t) = (\sqrt{t}, \frac{1}{t}, sen(t))$. Tenemos que $Dom(f_1) = [0, \infty)$, $Dom(f_2) = \mathbb{R} - \{0\}$ y $Dom(f_3) = \mathbb{R}$

Luego $Dom(f) = (0, \infty)$.

Definición: Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, la imagen de f es el cjto de $\mathbb{R}^n$ definido por $Im(f) \doteq \{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \exists\ t \in Dom(f)$ con $f(t) = (y_1, \dots, y_n) \}$

- Cuando $n = 2$, decimos que la imagen de f es una curva en el plano.
- Cuando $n = 3$, decimos que la imagen de f es una curva en el espacio.

Ejemplos: De el dominio e imagen de las siguientes funciones vectoriales.

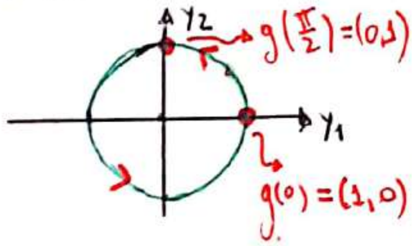
1. $f(t) = (t, 2-t, 3+2t)$.
   - Como $Dom(f_1) = Dom(f_2) = Dom(f_3) = \mathbb{R}$, entonces $Dom(f) = \mathbb{R}$.
   - $Im(f)$ es la recta en el espacio y es paralela al vector $(1, -1, 2)$ ya que

   $f(t) = (t, 2-t, 3+2t) = (0, 2, 3) + t(1, -1, 2)$

   $Im(f) = \{ (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : (y_1, y_2, y_3) = (0,2,3) + t(1,-1,2)$ con $t \in \mathbb{R} \}$.

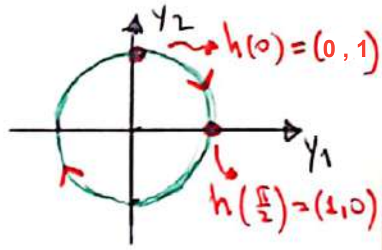
② $g(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Tenemos que $g_1(t) = \cos(t)$ y $g_2(t) = \operatorname{sen}(t)$.

- Como $\operatorname{Dom}(g_1) = \operatorname{Dom}(g_2) = \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{Dom}(g) = \mathbb{R}$.
- La imagen de g está contenida en el círculo de radio 1 y centro 0 pues $\cos(t)^2 + \operatorname{sen}(t)^2 = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. De hecho, la imagen es exactamente ese círculo. O sea, $\operatorname{Im}(f) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = 1\}$.



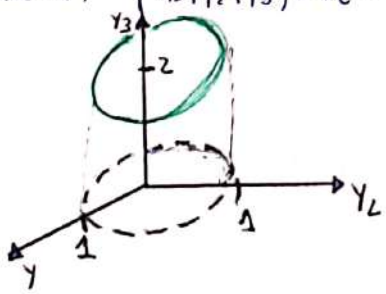
③ $h(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t))$

- $\operatorname{Dom}(h) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{Im}(h) = \operatorname{Im}(g)$ $\rightsquigarrow$ pero el círculo unidad se recorre en sentido contrario.



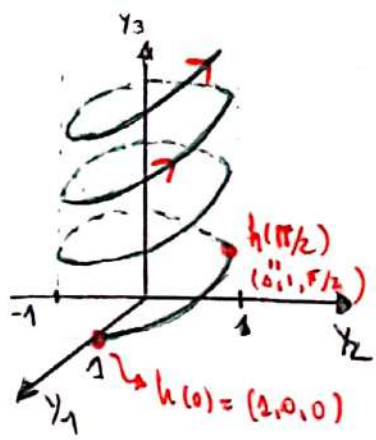
③ $r(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 2)$

- Como $\operatorname{Dom}(r_1) = \operatorname{Dom}(r_2) = \operatorname{Dom}(r_3) = \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{Dom}(r) = \mathbb{R}$.
- La imagen de r es el círculo de radio 1 y centro 0 en el plano (y_1, y_2) y con altura $y_3 = 2$. O sea $\operatorname{Im}(f) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 = 1 \wedge y_3 = 2\}$



④ $h(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$

- Como $\operatorname{Dom}(h_1) = \operatorname{Dom}(h_2) = \operatorname{Dom}(h_3)$, entonces $\operatorname{Dom}(h) = \mathbb{R}$.
- La imagen de h es una "hélice" en el espacio.
"Es una curva que se enrosca en el cilindro de radio 1"
$\operatorname{Im}(h) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : (y_1, y_2, y_3) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t) \text{ con } t \in \mathbb{R}\}$



Definición: dados $a \in \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial, definimos el límite de f cuando $t \to a$ como

$$\lim_{t \to a} f(t) \doteq \left(\lim_{t \to a} f_1(t), \ldots, \lim_{t \to a} f_n(t) \right),$$ siempre que los límites $\lim_{t \to a} f_i(t)$ exista $\underline{\forall\, i = 1, \ldots, n}$.

Si $a \in \mathrm{Dom}(f)$, decimos que f es continua en $t = a$ si $\lim_{t \to a} f(t) = f(a)$. O sea,

f es continua en $a \iff f_i$ es continua en a $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

Ejemplos

① Sea $f(t) = (3, \operatorname{sen}^2(t), 2t + 1)$.

Tenemos que $$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} (3, \operatorname{sen}^2(t), 2t+1) = \left(\lim_{t \to 0} 3, \lim_{t \to 0} \operatorname{sen}^2(t), \lim_{t \to 0} 2t+1 \right)$$
$$= (3, 0, 1) = f(0)$$

Luego, $\lim_{t \to 0} f(t) = f(0)$ $\therefore$ f es cont. en $t = 0$ (Ver que es cont. en $\mathbb{R}$)

② Sea $f(t) = \left(\frac{1}{t-1}, \sqrt{t} \right)$

- $\lim_{t \to 1} f(t) = \lim_{t \to 1} \left(\frac{1}{t-1}, \sqrt{t} \right)$ NO existe pues $\lim_{t \to 1} \frac{1}{t-1}$ no existe.

- f es continua en todo su dominio, es decir f es continua en $\{ t \in \mathbb{R} : t \geq 0 \wedge t \neq 1 \}$ (¿Por qué?)

Definición: Sea $f: Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ función vectorial y $a \in Dom(f)$, definimos la derivada de f en $t=a$ como

$$f'(a) \doteq \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ siempre que este límite exista.

Observación: notemos que entonces

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f_1(a+h),\dots,f_n(a+h)) - (f_1(a),\dots,f_n(a))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h}, \dots, \frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h}, \dots, \lim_{h\to 0} \frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} \right) = (f_1'(a),\dots,f_n'(a)).$$

Es decir, $f'(a) = (f_1'(a),\dots,f_n'(a))$ ("derivo coordenada a coordenada").

- Para las funciones vectoriales valen reglas de derivación similares a las de las derivadas de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Reglas de derivación: Sea f y g funciones vectoriales, φ función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $K \in \mathbb{R}$, entonces

(i) $(f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm g'(t)$

(ii) $(K f(t))' = K \cdot f'(t)$

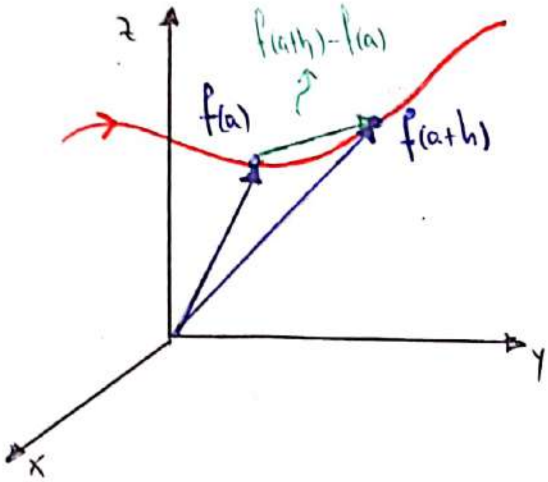
(iii) $(\varphi(t) \cdot f(t))' = \varphi'(t) f(t) + \varphi(t) f'(t)$

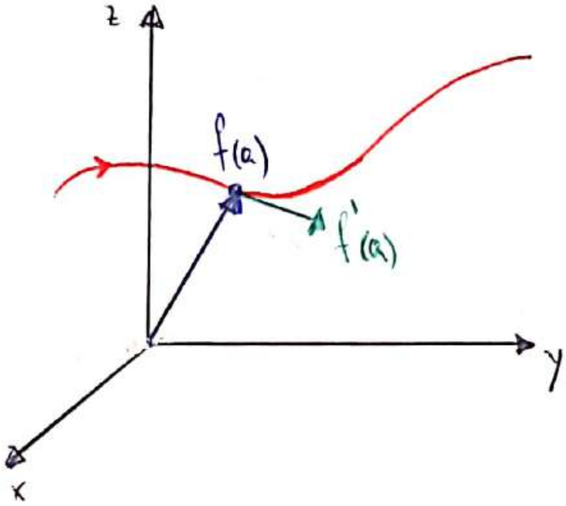
(iv) $\langle f(t), g(t)\rangle' = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$

(v) $f(\varphi(t))' = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

Interpretación geométrica de la derivada

$(h>0)$





- La imagen de f es una curva en el espacio.
  - $f(t)$ = posición en el tiempo t (o vector al punto $f(t)$)
  - $f(a+h) - f(a)$ = vector que va del pto. $f(a)$ al punto $f(a+h)$.
  - $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es un vector paralelo al anterior
  - Cuando h se aproxima a 0, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se aproxima a un vector tangente a la curva de f en $f(a)$.

<u>Observación:</u> usualmente decimos que $f(a)$ es el vector posición y que $f'(a)$ es el vector tangente a la curva en $f(a)$.

<u>Ejemplo:</u> Sea $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Dar el vector posición y vector tangente a la curva de f para $a = -\frac{\pi}{2}, 0$ y $\pi/4$.

- Para dar el vector tangente primero debemos hallar $f'(t)$.

En este caso, $f'(t) = (\cos'(t), \operatorname{sen}'(t)) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

- Si $a = -\pi/2$

  Vector posición: $f(-\frac{\pi}{2}) = (0, -1)$

  Vector tangente $f'(-\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$

- Si $a = 0$

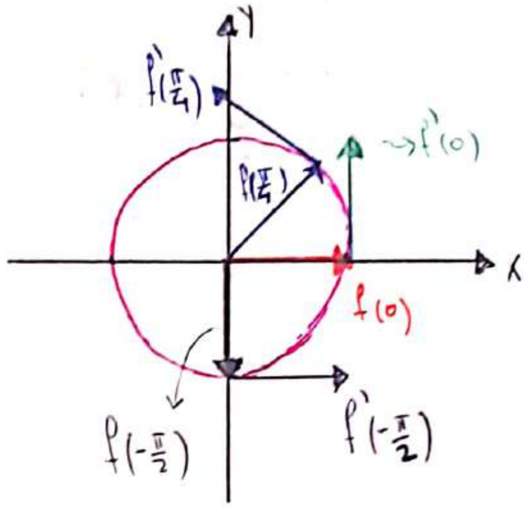
  Vector posición $f(0) = (1, 0)$

  Vector tangente $f'(0) = (0, 1)$

- Si $a = \pi/4$

  Vector posición $f(\pi/4) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

  Vector tangente $f'(\pi/4) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$



Funciones de varias variables

Dados dos conjuntos A y B, recordemos que una función $f: A \to B$ es una regla que a cada elemento de A le asigna exactamente un único elemento de B.

Definición: una función f de n variables es una regla que asigna a cada n-tupla $\bar{x} \doteq (x_1, \dots, x_n)$ un único número real $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$.

- el dominio de f es el subconjunto $\mathrm{Dom}(f)$ de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\mathrm{Dom}(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) \text{ está bien definida}\}$$

- el rango o imagen de f es el subconjunto $\mathrm{Im}(f)$ de $\mathbb{R}$ dado por

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f) \text{ con } y = f(\bar{x})\}$$

- el gráfico de f es el subconjunto $G(f)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$G(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Dom}(f) \text{ y } x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

$$= \{(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x} \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Notar que sólo podemos dibujar el gráfico de f cuando

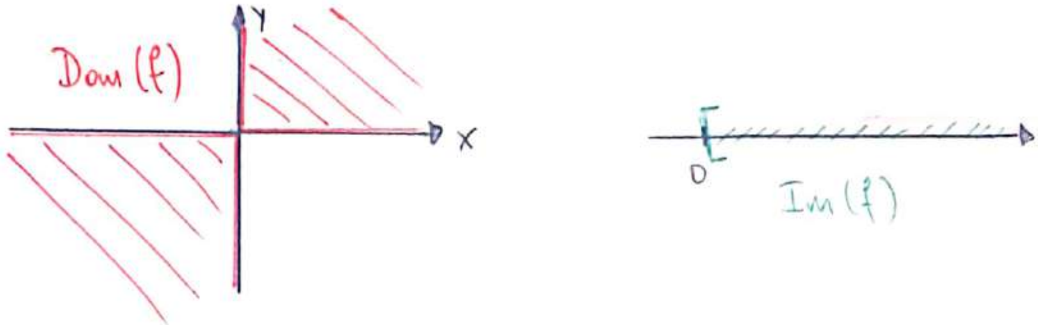
- $n = 1$ (en cuyo caso decimos que $G(f)$ es una curva en el plano)
- $n = 2$ (en cuyo caso decimos que $G(f)$ es una superficie en el espacio)

Observación: si $n=2$ escribiremos $f(x,y)$ en lugar de $f(x_1,x_2)$ y si $n=3$ escribiremos $f(x,y,z)$ en lugar de $f(x_1,x_2,x_3)$.

Ejemplos

① Sea $f(x,y) = \sqrt{xy}$ (función de $n=2$ variables)

- $\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y \leq 0\}$

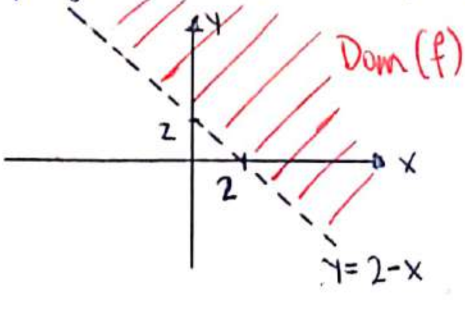


- $\mathrm{Im}(f) = [0,\infty)$. En efecto, si elegimos $y=1$ tenemos que $f(x,1) = \sqrt{x}$ y ya sabemos que $h(t) = \sqrt{t}$ es sobreyectiva de $[0,\infty) \to [0,\infty)$ $\therefore$ $f(x,1)$ también.

.Otra forma: dado $z \geq 0$ basta tomar $x = y = z$ y luego
$$f(x,y) = \sqrt{xy} = \sqrt{z \cdot z} = \sqrt{z^2} = z \quad \therefore z \in \mathrm{Im}(f)$$ ✓

② Sea $f(x,y) = \ln(x+y-2)$

- $\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y-2 > 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > 2-x\}$

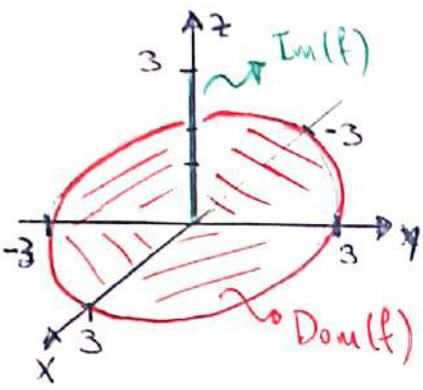


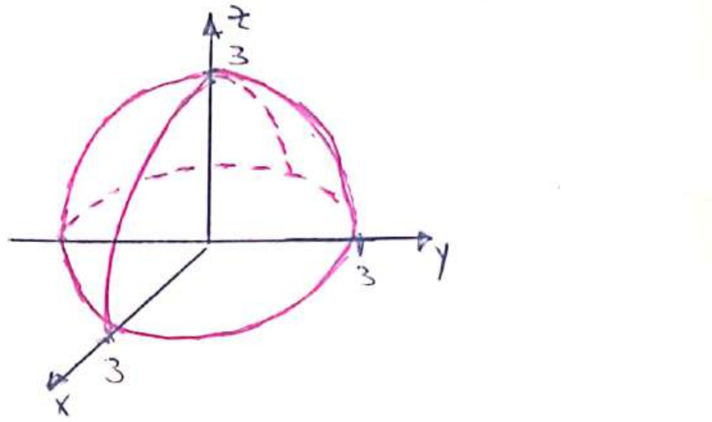
- $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$. En efecto, si elegimos $x=0$ tenemos que $f(0,y) = \ln(y-2)$ y ya sabemos que $h(t) = \ln(t-2)$ de $(2,\infty) \to (-\infty,\infty)$ es sobre.

.Otra forma: dado $z\in\mathbb{R}$ basta tomar $(x,y) = (0, e^z+2) \in \mathrm{Dom}(f)$ ya que $f(0,e^z+2) = \ln(e^z) = z$. ✓

③ Sea $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$ (notación usual $z = f(x,y)$)

- $\text{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9-x^2-y^2 \geq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3^2\}$ → Ec. circunf. centrado en $(0,0)$ y de radio 3





- $\text{Im}(f) = [0,3]$

En efecto, si $y=0$, $f(x,y) = \sqrt{9-x^2}$ sabemos que es sobre de $[-3,3] \to [0,3]$

Otra forma: dado $0 \leq z \leq 3$, basta tomar $(x,y) = ((9-z^2)^{1/2}, 0)$ ya que

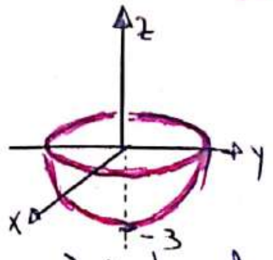
$$f((9-z^2)^{1/2}, 0) = \sqrt{9-(9-z^2)} = \sqrt{z^2} = z \checkmark$$

- $\text{Graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 3^2 \wedge z = \sqrt{9-x^2-y^2}\}$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 3^2 \wedge \underbrace{\underbrace{z^2+x^2+y^2 = 3^2}_{\text{Esfera de centro } (0,0,0) \text{ y radio } = 3} \wedge \underbrace{z \geq 0}_{z \text{ no negativo}}}_{\text{hemisferio superior (solo la "cáscara" → superficie)}}\}$$

④ Sea $f(x,y) = -\sqrt{9-x^2-y^2}$

- $\text{Dom}(f)$ = igual al anterior



- $\text{Im}(f) = [-3, 0]$
- $\text{Graf}(f)$ = hemisferio inferior (cáscara) de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 3.

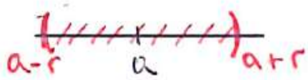
Límite y continuidad de funciones de varias variables

Definición: dado $r>0$ y $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$, llamamos bola (abierta) de centro $\bar{a}$ y radio r al conjunto $B(\bar{a},r) \doteq \{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{a}\|<r\}$.

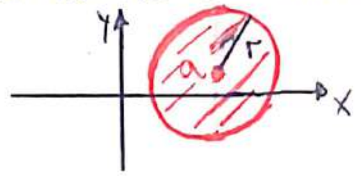
Observación: si escribimos $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$ y $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)$, entonces

$$B(\bar{a},r)=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2}<r\right\}=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : (x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2<r^2\right\}$$

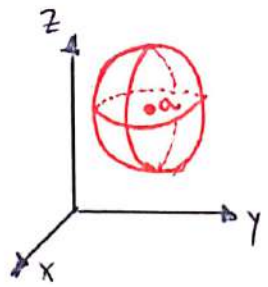
- Si $n=1$, $B(\bar{a},r)$ es un intervalo abierto centrado en $\bar{a}$ y de "radio" r



- Si $n=2$, $B(\bar{a},r)$ es un disco abierto con centro $\bar{a}$ y de radio r



- Si $n=3$, $B(\bar{a},r)$ es una bola centrada en $\bar{a}$ y de radio r (interior de la "cáscara")



Definición (Límite): Sea $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$ y $f:\mathrm{Dom}(f)\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida en un dominio $\mathrm{Dom}(f)$ que incluye ptos. arbitrariamente cercanos a $\bar{a}$. Decimos que

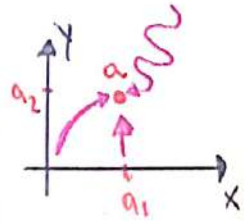
$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=L \quad \left(\text{o} \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1,\dots,x_n)=L\right)$$

si $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, \delta>0$ tq $\bar{x}\in\mathrm{Dom}(f)\cap B(\bar{a},\delta) \Rightarrow |f(\bar{x})-L|<\varepsilon$

(si $\bar{x}\in\mathrm{Dom}(f)$ queda $\|\bar{x}-\bar{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\bar{x})-L|<\varepsilon$)

Esto significa que si nos acercamos "por cualquier lado" al punto $\bar{a}$, f se acerca a L.

Observación: la definición establece que la distancia (en $\mathbb{R}$) entre $f(\bar{x})$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña haciendo que la distancia (en $\mathbb{R}^n$) entre $\bar{x}$ y $\bar{a}$ sea suficientemente pequeña. Sin embargo NO hay referencia a la dirección o modo de aproximación. Luego, si existe el límite entonces $f(x,y)$ tiene que aproximarse a L sin importar como $\bar{x}$ se aproxima a $\bar{a}$.



Por lo tanto, si encontramos dos maneras distintas de aproximarnos a $\bar{a}$ en las cuales la función $f(\bar{x})$ tiene diferentes límites, entonces esto nos dice que $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$ NO existe.

Ejemplos:

① Sea $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Demuestre que $\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} f(\bar{x})$ NO existe $\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\right)$

Tenemos que $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

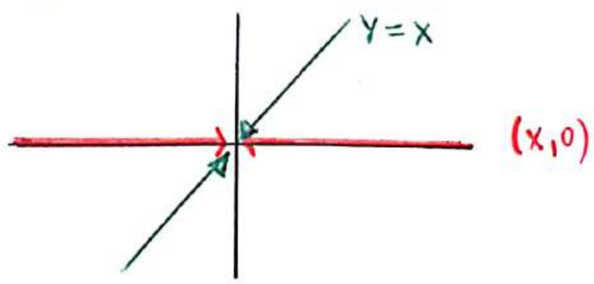
- Si nos acercamos al $(0,0)$ por puntos del eje x, o sea si $(x,y)=(x,0)\to(0,0)$

Como $f(x,0)=0$ tenemos que $\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$. ①

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por la recta $y=x$, o sea si $(x,y)=(x,x)\to(0,0)$

Como $f(x,x)=\dfrac{xx}{x^2+x^2}=\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$ tenemos que $\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{1}{2}$. ②

De ① y ② concluimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ NO existe.



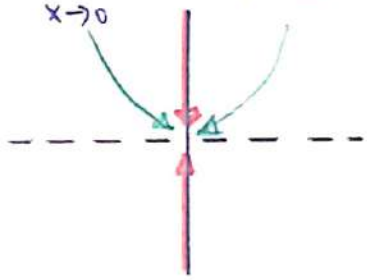
2) Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{y}$. Probar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ No existe.

Notar que $Dom(f)=\mathbb{R}^2-\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R}\}$ ("plano - eje X")

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por el eje y, o sea $(x,y)=(0,y)\to(0,0)$. Como $f(0,y)=\dfrac{0^2+y^2}{y}=y$, entonces $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=\lim\limits_{y\to 0} y=0$ (1)

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por la parábola $y=x^2$, o sea si $(x,y)=(x,x^2)\to(0,0)$.

Como $f(x,x^2)=\dfrac{x^2+x^4}{x^2}=1+x^2$, entonces $\lim\limits_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim\limits_{x\to 0} 1+x^2=1$ (2)



De (1) y (2) concluimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ No existe.

Ejercicio: usando la definición de límite demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

Definición (Continuidad): Sea $f: Dom(f)\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$. Decimos que f es continua en $\bar{a}$ si $\bar{a}\in Dom(f)$ y $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})=f(\bar{a})$.

- Decimos que f es continua si f es continua $\forall\,\bar{x}\in Dom(f)$.

Observación: valen propiedades similares a las de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. O sea, si f y g son continuas entonces también son continuas $f\pm g$, $f\cdot g$, etc.

Derivadas Parciales

Intro/Motivación: sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Si fijamos b, tenemos que $g(x) \doteq f(x,b)$ es una función de una sola variable (la x) y entonces tiene sentido considerar su derivada en $x=a$. Esto es

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \doteq \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \doteq f_x(a,b)}_{\text{Derivada parcial de } f \text{ con respecto a } x \text{ en el pto. } (a,b)}$$

- En general, para cualquier punto (x,y) definimos la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x,y) como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y) \doteq \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

- Notar que para calcular $f_x(x,y)$ dejamos la variable y fija (la pensamos como una constante) y derivamos respecto a la variable x. Por ejemplo, si $f(x,y)=x^2y+e^y+x$ entonces $f_x(x,y)=2xy+1$.

- De manera análoga podemos definir $f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, y más aún también podemos hacer lo mismo para funciones de n variables.

Definición: Sean $f:\mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ y sup. $B(\bar{a},r)\subset \mathrm{Dom}(f)$ para algún $r>0$. Definimos la derivada parcial de f respecto a x_j en el punto $\bar{a}$ como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_n) = f_{x_j}(a_1,\dots,a_n) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h}$$

siempre que este límite exista.

Observación:

- Si $n=2$ escribimos f_x y f_y en lugar de f_{x_1} y f_{x_2}
- Si $n=3$ escribimos f_x, f_y, f_z en lugar de $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}$.
- Si $n=1$ tenemos que $f_{x_1}(a)=f'(a)$ (la derivada usual).

Observación: para calcular la derivada parcial de f respecto a x_j, consideramos todas las variables x_k con $k \neq j$ como constante y derivamos con respecto a la variable x_j.

Ejemplo: Sea $f(x,y,z) = \dfrac{xz}{y+z}$. Entonces, las derivadas parciales de f son

$$f_x(x,y,z) = \frac{z}{y+z} \quad ; \quad f_y(x,y,z) = \frac{-xz}{(y+z)^2} \quad ; \quad f_z(x,y,z) = \frac{x(y+z) - xz \cdot 1}{(y+z)^2} = \frac{xy}{(y+z)^2}.$$

Observación: Sabemos que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en $a \Rightarrow f$ es continua en a. Sin embargo, si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n \geq 2$ lo anterior no es cierto. Es decir pueden existir todas la derivadas parciales de f en $\bar{a}$ pero f puede ser discontinua en $\bar{a}$

- Por ejemplo, sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

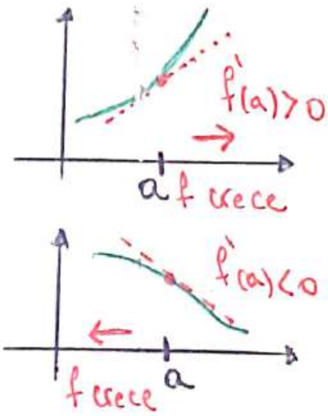
Tenemos que $f_x(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(h,0)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{h} = 0$.

De manera análoga se prueba que $f_y(0,0) = 0$. Sin embargo f NO puede ser continua en $(0,0)$ ya que ni siquiera existe $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ (ver pág. 89).

- Si pedimos continuidad de las derivadas parciales f_{x_j} en $\bar{a}$ entonces podemos garantizar continuidad de f en $\bar{a}$. Esto es:

Teorema: Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$ y $B(\bar{a}, r) \subset \text{Dom}(f)$, para algún $r > 0$. Si $f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}$ existen y son continuas para todo $\bar{x} \in B(\bar{a}, r) \Rightarrow f$ es continua para todo $\bar{x} \in B(\bar{a}, r)$. (En particular para $\bar{x} = \bar{a}$).

Interpretación geométrica de las derivadas parciales.



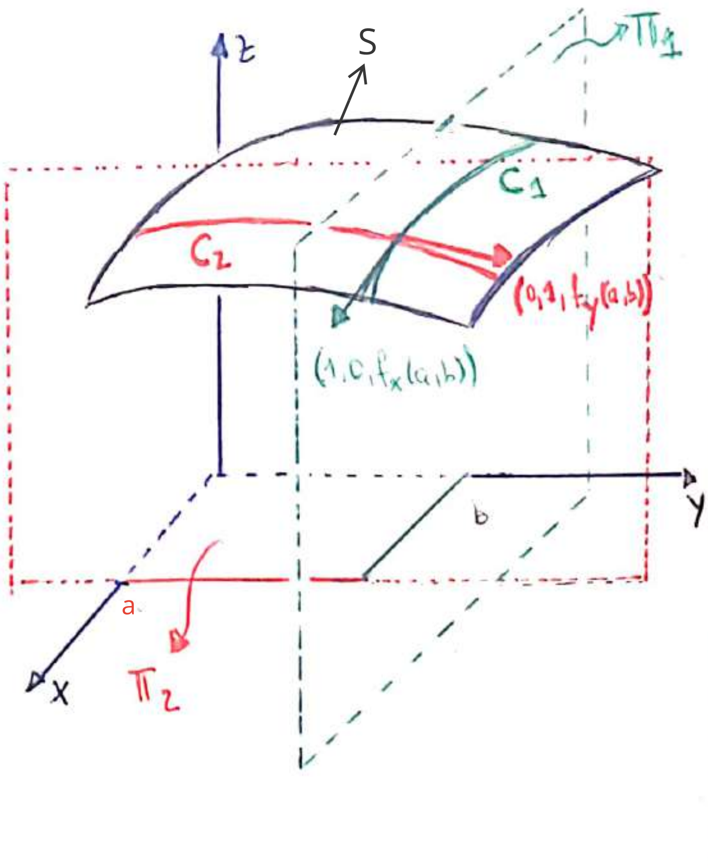
- Recordemos que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la derivada $f'(a)$ nos da información sobre la dirección de crecimiento de f en a. O sea si $f'(a) > 0$ la función crece yendo a la derecha y si $f'(a) < 0$ la función crece yendo a la izq (o decrece yendo a la derecha). Además cuando más positiva/negativa es $f'(a)$ más rápido crece/decrece f en a.

Para $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la derivada parcial $f_{x_j}(\bar{a})$ da la tasa de crecimiento de f en $\bar{a}$ cuando nos movemos dejando todas las coordenadas fijas salvo la j-ésima.

- Supongamos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea S el gráfico de f, es decir

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \wedge (x,y) \in Dom(f)\}$.

Sea Π_1 el plano $y = b$ y $C_1 = S \cap \Pi_1$. O sea C_1 es la imagen de la función vectorial $r_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ def. por $r_1(x) = (x, b, f(x,b))$.

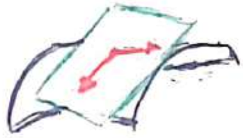


Sabemos que $r_1'(x)$ es un vector tangente a $r_1(x)$. Entonces $r'(a) = (1, 0, f_x(a,b))$ es tangente a la curva C_1 en el pto $(a, b, f(a,b))$.

Análogamente si Π_2 es el plano $x = a$ y $C_2 \doteq S \cap \Pi_2$, el vector $(0, 1, f_y(a,b))$ es tangente a C_2 en el pto $(a, b, f(a,b))$.

- Otra interpretación: $f_x(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_1.
$f_y(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_2.

Definición: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(a,b) \in Dom(f)$. El plano que pasa por $(a,b,f(a,b))$ y es generado por los vectores $(1,0,f_x(a,b))$ y $(0,1,f_y(a,b))$ se llama plano tangente al gráfico de f en el punto $(a,b,f(a,b))$.



Observación: la ecuación vectorial del plano tangente al gráfico de f en $(a,b,f(a,b))$ es

$$(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + t\,(1,0,f_x(a,b)) + r\,(0,1,f_y(a,b)) \quad , \text{ con } t,r \in \mathbb{R}.$$

- Sabemos que el vector $(1,0,f_x(a,b)) \times (0,1,f_y(a,b)) = (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1)$ es perpendicular al plano tangente. Luego, la ecuación normal del plano tangente es

$$\langle (x,y,z) - (a,b,f(a,b)) \, , \, (-f_x(a,b), -f_y(a,b), +1) \rangle = 0 .$$

O equivalentemente

$$z = (x-a)\, f_x(a,b) + (y-b)\, f_y(a,b) + f(a,b)$$

Ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(a,b,f(a,b))$.

Ejemplo: Obtener la ecuación del plano tangente al gráfico de $f(x,y) = sen\left(\frac{x}{y}\right)$ en el punto $(\pi, 4, sen(\frac{\pi}{4}))$ y además dar la ec. de la recta normal a dicho plano y que pasa por el mismo punto.

- Tenemos que:
  - $f(x,y) = sen\left(\frac{x}{y}\right) \rightsquigarrow f(\pi,4) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
  - $f_x(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \rightsquigarrow f_x(\pi,4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
  - $f_y(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{(-x)}{y^2} \rightsquigarrow f_y(\pi,4) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{-\pi}{16} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{32}$

Luego, la ecuación del plano tangente en el punto $(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2})$ es:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{8}(x-\pi) - \frac{\pi\sqrt{2}}{32}(y-4) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por otra parte, la recta que pasa por el punto $(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y es normal al plano anterior es:

$$(x,y,z) = \left(\pi, 4, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}\pi}{32}, 1\right)}_{\text{vector normal al plano}} \quad , \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Regla de la Cadena

- Para funciones de 1 variable sabemos que si $h: I_1 \subseteq \mathbb{R} \to I_2$ y $f: I_2 \subseteq \mathbb{R} \to I_3$ son funciones derivables en sus dominios, entonces la función $g(t) = f(h(t))$ es derivable y además $g'(t) = f'(h(t)) \cdot h'(t)$

$$t \mapsto h(t) \mapsto f(h(t))$$
$$\underset{I_1}{\mathbb{R}} \xrightarrow{h} \underset{I_2}{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \underset{I_3}{\mathbb{R}}$$

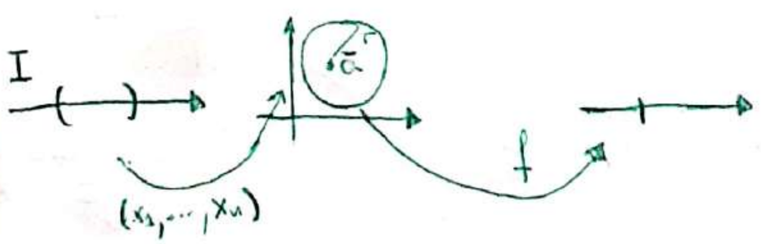
Teorema (Regla de la Cadena, Caso 1): Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ y tal que $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existen y son continuas en $B(\bar{a}, r)$ para algún $r > 0$.

Para $1 \leq i \leq n$ y un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, sean $x_i: I \to \mathbb{R}$ funciones derivables $\forall t \in I$ y tal que $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in B(\bar{a}, r)$ $\forall t \in I$. Entonces, la función

$g(t) \doteq f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ es derivable $\forall t \in I$ y además

$$\frac{dg}{dt} = g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_2'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_n'(t)$$

$$t \longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t)) \longmapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$
$$\mathbb{R} \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n)} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$



<u>Ejemplo:</u> Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, con $x(t) = \operatorname{sen}(t)$, $y(t) = e^t$. Hallar $\frac{df}{dt}$.

- Tenemos que: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$.

$$x'(t) = \cos(t) \quad ; \quad y'(t) = e^t .$$

Luego

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot y'(t)$$

$$= (2x(t) + y(t)) \cdot \cos(t) + (2y(t) + x(t))\, e^t$$

$$= (2\operatorname{sen}(t) + e^t)\cos(t) + (2e^t + \operatorname{sen}(t))\, e^t \quad (\blacktriangle)$$

<u>Observación</u>: notar que si escribimos $f(t) = x^2(t) + y^2(t) + x(t)y(t) = \operatorname{sen}^2(t) + e^{2t} + \operatorname{sen}(t)e^t$ entonces $\frac{df}{dt} = 2\operatorname{sen}(t)\cos(t) + 2e^{2t} + \cos(t)e^t + \operatorname{sen}(t)e^t$ que es igual a $(\blacktriangle)$.

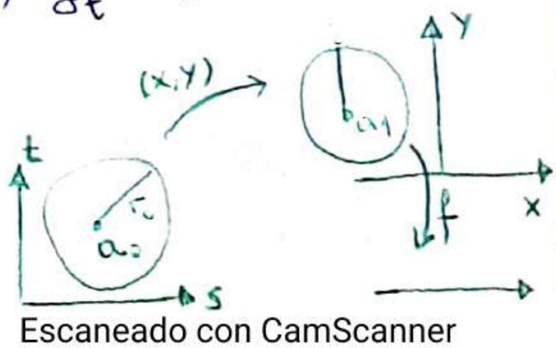
<u>Teorema (Regla de la Cadena, Caso 2)</u>: Sea $f: \operatorname{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\bar{a}_1 \in \operatorname{Dom}(f)$ y tq $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existen y son continuas en $B(\bar{a}_1, r_1)$ para algún $r_1 > 0$. Sean $x: \operatorname{Dom}(x) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $y: \operatorname{Dom}(y) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones con sus derivadas parciales continuas en $B(\bar{a}_0, r_0)$ para algún $r_0 > 0$ y tal que $(x(s,t), y(s,t)) \in B(\bar{a}_1, r_1)$ $\forall (s,t) \in B(\bar{a}_0, r_0)$.

Entonces, la función definida por $g(s,t) \doteq f(x(s,t), y(s,t))$ $\forall (s,t) \in B(\bar{a}_0, r_0)$ tiene derivadas parciales dadas por

- $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$
- $\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$

$$(s,t) \longmapsto (x(s,t), y(s,t)) \longmapsto f(x(s,t), y(s,t))$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$



Ejemplo: Sea $f(x,y) = xy + 2y^2 + x^3$, donde $x(s,t) = st$, $y(s,t) = e^{st}$.

Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ en el punto $(s,t) = (1,1)$.

- Tenemos que:

  - $f_x(x,y) = y + 3x^2$; $f_y(x,y) = x + 4y$
  - $x_s(s,t) = t$; $y_s(s,t) = t e^{st}$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t)) \cdot x_s(s,t) + f_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot y_s(s,t)$$

$$= (e^{st} + 3(st)^2)\, t + (st + 4e^{st})\, t e^{st} \quad (\blacksquare)$$

Finalmente, si evaluamos en $(s,t) = (1,1)$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(1,1) = (e+3) \cdot 1 + (1 + 4e)\, e = 4e^2 + 2e + 3$$

Observación: notar que si escribimos $f(s,t) = x(s,t)\, y(s,t) + 2y^2(s,t) + x^3(s,t)$

$$= st\, e^{st} + 2e^{2st} + s^3 t^3$$

entonces $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t) = te^{st} + st^2 e^{st} + 2 \cdot 2t\, e^{2st} + 3s^2t^3$ que es igual a $(\blacksquare)$.

Derivada direccional

Definición: decimos que $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario si $\|u\| = 1$.

Definición: Sean $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $B(\bar{a}, r) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ para algún $r > 0$ y $\bar{u}$ un vector unitario. Definimos la derivada direccional de f en la dirección de $\bar{u}$ en el punto $\bar{a}$ como

$$D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$ si este límite existe.

Observaciones:

① Si el vector $\bar{u}$ no es unitario, entonces consideramos $\bar{v} = \frac{\bar{u}}{\|u\|}$ (unitario y misma dirección que u)

② Si tomamos $\bar{u} = e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ i\text{-ésima coord.}}}{1}, 0, \dots, 0)$, entonces $D_{e_i} f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$. O sea, las derivadas parciales son un caso particular de derivada direccional.

Definición: Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ tq existen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ $\forall i = 1, \dots, n$. Llamamos gradiente de f en $\bar{a}$ al vector $\nabla f(\bar{a}) \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$.

Teorema: Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existen y son continuas $\forall x \in B(\bar{a}, r) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ y $\forall i = 1, \dots, n$ y $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un vector unitario. Entonces vale que

$$D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) u_n.$$

Demostración:

Definimos $g(h) = f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n)$ (función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$)

Luego, $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0)$. ①

Ahora, por la regla de la cadena (caso 1) $g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot \frac{\partial (a_1 + hu_1)}{\partial h} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\,) \frac{\partial (a_n + hu_n)}{\partial h}$

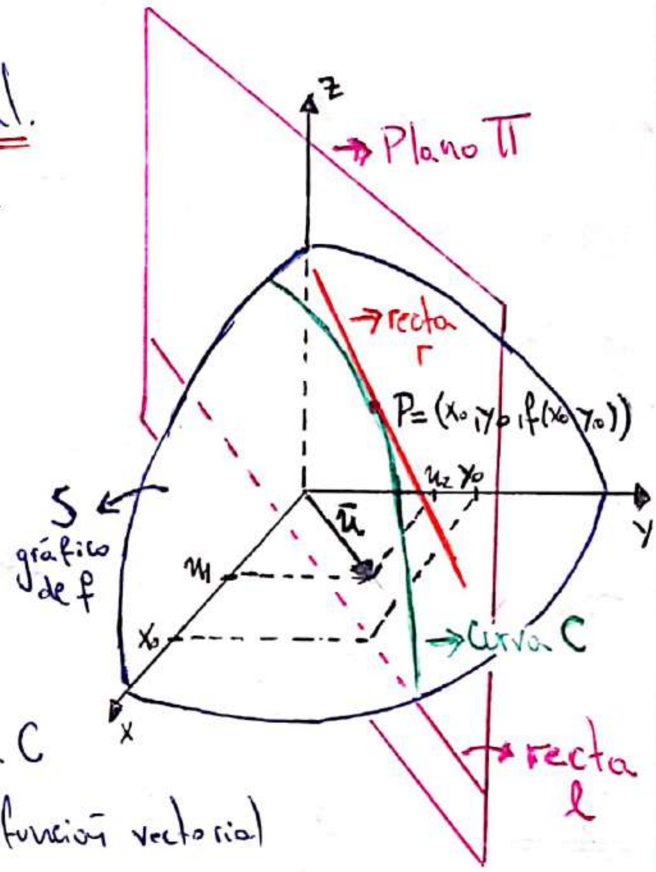
$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a} + h\bar{u}) \cdot u_n$$

$$= \langle \nabla f(\bar{a} + h\bar{u}), \bar{u} \rangle$$

Con lo cual, $g'(0) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle$. (2)

De (1) y (2) obtenemos que $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle$.

Interpretación geométrica de la derivada direccional.



- Sea $f: \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{Dom}(f)$ y $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathrm{Gra.}(f) \doteq S$
- Sea l la recta en el plano x-y dada por $(x, y) = (x_0, y_0) + t\,(u_1, u_2)$.

  Sea Π el plano vertical que contiene a la recta l.
- Sea $C \doteq \Pi \cap S$ y r la recta tangente a la curva C en el punto P. Notemos que C es la imagen de la función vectorial $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por $g(t) = (x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, \underbrace{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)}_{\doteq h(t)})$

Sabemos que $h'(t)$ da la pendiente de la recta al gráfico de h (pues $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Ahora, $h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}((x_0, y_0) + t\bar{u}) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}((x_0, y_0) + t\bar{u}) \cdot u_n$ y por lo tanto

$$h'(0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \bar{u} \rangle = D_{\bar{u}} f(x_0, y_0).$$

- Entonces $D_{\bar{u}} f(x_0, y_0)$ da la pendiente de r, o sea la tasa de crecimiento de f en (x_0, y_0), cuando nos movemos en la dirección $\bar{u} = (u_1, u_2)$.

Notar que r viene dado por la ecuación $(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t\,(u_1, u_2, D_{\bar{u}} f(x_0, y_0))$ para $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: calcular la derivada direccional de $f(x,y) = x e^y$ en el punto $P = (2,0)$ en la dirección de $\bar{v} = (1, \sqrt{3})$.

- Notemos que $\bar{v}$ no es unitario ya que $\|\bar{v}\| = \sqrt{1+3} = 2$. Luego, debemos considerar el vector $\bar{u} = \dfrac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \dfrac{1}{2}(1, \sqrt{3})$ que tiene la misma dirección que $\bar{v}$ pero es unitario.

Por otra parte, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^y$, ambas son funciones continuas.

Luego, por teorema, $D_{\bar{u}} f(2,0) = \langle \nabla f(2,0), \bar{u} \rangle$

$$= \left\langle (e^0, 2e^0), \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \quad \blacksquare$$

Teorema: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in Dom(f)$ tq $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existen y son continuos $\forall x \in B(\bar{a}, r)$ y para $1 \le i \le n$. Si $\nabla f(\bar{a}) \neq (0, \dots, 0)$, entonces

(i) el vector $\bar{u} = \dfrac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de máximo crecimiento de f en $\bar{a}$

(ii) el vector $\bar{v} = -\dfrac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la dirección de mínimo crecimiento de f en $\bar{a}$.

Demostración:

- Tenemos que $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = \|\nabla f(\bar{a})\| \overbrace{\|\bar{u}\|}^{=1} \overbrace{\cos(\theta)}^{\text{toma valores entre } -1 \text{ y } 1}$. El máximo valor de $\cos(\theta)$ (y por ende el máximo valor de $D_{\bar{u}} f(\bar{a})$) se da cuando $\cos(\theta) = 1$, o sea $\theta = 0$ y esto nos dice que $\nabla f(\bar{a})$ y $\bar{u}$ son paralelos y tiene mismo sentido.
- De manera análoga, el mínimo valor de $\cos(\theta)$ es cuando vale -1, o sea $\theta = \pi$. Es decir, cuando los vectores $\nabla f(\bar{a})$ y $\bar{u}$ son paralelos y con sentido opuesto.

Observación: $\tilde{u} = \nabla f(\bar{a})$ y $\tilde{v} = -\nabla f(\bar{a})$ tienen la misma dirección que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ respect. pero no son unitarios.

Ejemplo: ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de $(1,2)$, para obtener la mayor tasa de crecimiento y la mayor tasa de decrecimiento de la función $f(x,y)=(x+y-2)^2$?

- Tenemos que $\nabla f(x,y)=\left(2(x+y-2),\ 2(x+y-2)\right)$. Luego, $\nabla f(1,2)=(2,2)$.

Por lo tanto:

- la tasa de mayor crecimiento es en la dirección $\tilde{u}=\nabla f(1,2)=(2,2)$.
- la tasa de mayor decrecimiento es en la dirección $\tilde{v}=-\nabla f(1,2)=(-2,-2)$.

Observación: para poder calcular las derivadas direccionales y obtener los valores de las tasas de máximo crecimiento/decrecimiento debemos considerar los vectores $\overline{u}=\dfrac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|}$ y $\overline{v}=\dfrac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}$.

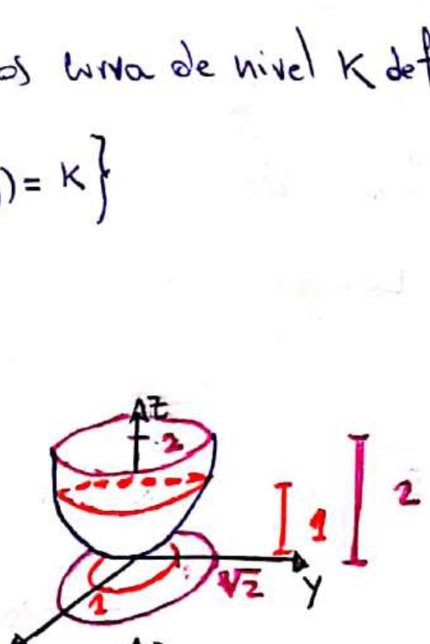
Curvas y Superficies de nivel

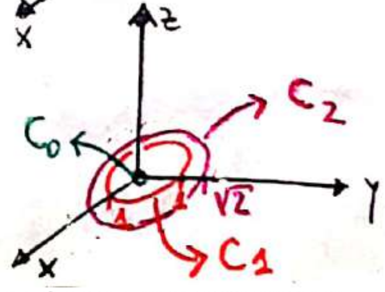
Definición: Sea $K\in\mathbb{R}$ y $f:\mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Llamamos curva de nivel K de f al subconjunto de $\mathrm{Dom}(f)$ definido por $C_K=\{(x,y)\in\mathrm{Dom}(f): f(x,y)=K\}$

(C_K puede ser $\emptyset$, puntos aislados o una curva).

Ejemplo: Sea $f(x,y)=x^2+y^2$.

- Si $K<0$, entonces $C_K=\emptyset$ (ya que $f(x,y)\geq 0$)
- Si $K=0$, entonces $C_K=\{(0,0)\}$
- Si $K>0$, entonces C_K es un círculo centrado en $(0,0)$ y de radio $\sqrt{K}$





(las curvas de nivel nos ayudan a entender el gráfico de f)

Definición: Sea $K \in \mathbb{R}$ y $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Llamamos superficie de nivel K de f al subconjunto de Dom (f) definido por

$$S_K = \{(x,y,z) \in Dom(f) : f(x,y,z) = K\}$$

Ejemplo: Si $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, tenemos que

- Si $K<0$, $S_K = \emptyset$
- Si $K=0$, $S_K = \{(0,0,0)\}$
- Si $K>0$, S_K es una esfera centrada en $(0,0,0)$ y de radio $\sqrt{K}$

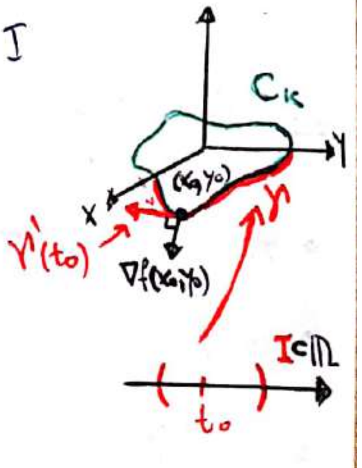
Observación: notar que dado $P \in Dom(f)$, existe a lo sumo una curva (o superficie) de nivel que pasa por P.

- Dada $f: Dom(f): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $K \in \mathbb{R}$, consideramos C_K. Sea γ una curva incluida en C_K. O sea, γ es la imagen de una función vectorial $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, con t en algún intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Sea $t_0 \in I$ y denotamos $(x_0,y_0) = (x(t_0), y(t_0))$.

Como $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in C_K \ \forall t \in I$, tenemos que $f(x(t),y(t)) = K \ \forall t \in I$

Luego, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)) \cdot y'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$



En particular, para $t=t_0$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0)) \cdot y'(t_0) = 0$$

O sea, $\langle \nabla f(x_0,y_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0$.

Luego, si $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$, tenemos que $\nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular (u ortogonal) al vector tangente a la curva γ, y por lo tanto a la curva de nivel de f, que pasa por (x_0, y_0).

Entonces, el vector $\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$ es tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0, y_0).

es perpendicular a $\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

Definición: la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0, y_0) está definida como $(x,y) = (x_0,y_0) + t\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ y $P = (1,1)$. Calcular

(i) el gradiente de f en P;

(ii) la ec. de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por P;

(iii) la ec. del plano tangente al gráfico de f en P.

Respuestas:

(i) Tenemos que $f_x(x,y) = \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$ y $f_y(x,y) = \frac{-1.(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}$

Por lo tanto $\nabla f(x,y) = \left(\frac{2y}{(x+y)^2}, \frac{-2x}{(x+y)^2}\right)$ y en particular $\nabla f(1,1) = \left(\frac{2}{4}, -\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

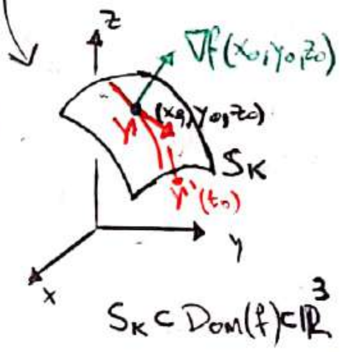
(ii) La ec. de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por $P = (1,1)$ es

$$(x,y) = (1,1) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

(iii) La ec. del plano tangente al gráfico de f en P es

$$z = \overset{0}{f(1,1)} + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1)$$
$$= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1).$$

- Dada $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $K \in \mathbb{R}$, consideramos S_K. Es fácil ver que si $(x_0,y_0,z_0) \in S_K$ y $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ entonces $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ es un vector perpendicular (ortogonal) al plano tangente a la superficie de nivel S_K (al igual que para $n=2$ podemos considerar $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tq su imagen esté contenida en S_K $\forall t \in I$ algún intervalo de $\mathbb{R}$, o sea $f(x(t), y(t), z(t)) = K$ $\forall t \in I$. Luego derivando con respecto a t obtenemos el resultado buscado).



Definición: la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel que pasa por (x_0,y_0,z_0) es:

$$\langle (x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) \, , \, \underbrace{\nabla f(x_0,y_0,z_0)}_{\text{vector normal al plano}} \rangle = 0$$

Observación: supongamos que S es el gráfico de una función $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. O sea, $S = \{(x,y,z) : z = g(x,y)\}$.

Sea $(x_0,y_0,z_0) = (x_0,y_0,g(x_0,y_0)) \in S$. Vimos (ver pág. 94) que el plano tangente al gráfico de g en el punto $(x_0,y_0,g(x_0,y_0))$ es

$$z = g(x_0,y_0) + g_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g_y(x_0,y_0)(y-y_0). \quad (\blacktriangle)$$

Si definimos ahora $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como $f(x,y,z) = z - g(x,y)$ tenemos que S (gráfico de g) es justamente S_0 la curva de nivel 0 de f. Por lo visto recién, el plano tangente a $(x_0,y_0,z_0) \in S_0 = S$ está dado por

$$\langle (x,y,z) - (x_0,y_0,z_0) \, , \, \nabla f(x_0,y_0,z_0) \rangle = 0$$

y como $z_0 = g(x_0,y_0)$, $f_x(x,y,z) = -g_x(x,y)$, $f_y(x,y,z) = -g_y(x,y)$; $f_z(x,y,z) = 1$, obtenemos

$$\langle (x-x_0, y-y_0, z-g(x_0,y_0)), (-g_x(x_0,y_0), -g_y(x_0,y_0), 1) \rangle = 0$$ que es justamente $(\blacktriangle)$

Por lo tanto, las dos definiciones de plano tangente coinciden.

Ejemplo: Dar la ecuación del plano tangente a la esfera S de centro O y radio 1, en el punto $(0,0,1)$.

- Consideremos la función $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

Tenemos que S es justamente la superficie de nivel S_1 de f, o sea

$$S = S_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=1\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

↓ solo la "cáscara"

Por lo tanto la ecuación del plano tangente a S en $(0,0,1)$ es

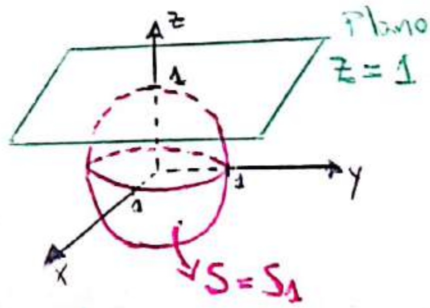
$$\langle (x,y,z)-(0,0,1)\, ,\, \nabla f(0,0,1)\rangle = 0 \, .$$

Como $\nabla f(x,y,z) = (2x,2y,2z)$, tenemos que $\nabla f(0,0,1) = (0,0,2)$ y por lo tanto la ecuación queda

$$\langle (x,y,z)-(0,0,1)\, ,\, (0,0,2)\rangle = 0$$

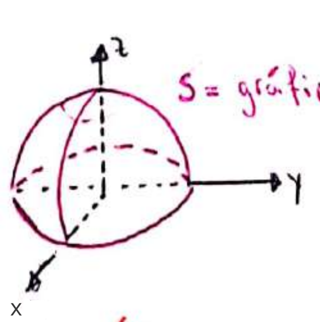
$$(z-1)\cdot 2 = 0$$

$$\boxed{z = 1}$$



$(Dom(f) = \mathbb{R}^3 \supset S)$

Ejercicio: Dar la ecuación del plano tangente al gráfico de la función $g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ en el punto $(0,0,1)$.



S = gráfico de g (cáscara de hemisferio superior).

$\left(Dom(g) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \right)$

Derivadas de orden 2.

- Dada una función f de n variables, es decir $f(x_1, \dots, x_n)$, y tq existen sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ (que son funciones de n variables), podemos preguntarnos si existen las derivadas parciales de cada función $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$.
Estas se llaman derivadas parciales segundas (o de orden 2) de f.

- Si $n=2$, hay 4 derivadas parciales de orden 2:

$$(f_x)_x \doteq f_{xx} \doteq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y \doteq f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x \doteq f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y \doteq f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Si $n=3$, hay 9 derivadas parciales de orden 2: $f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}$, etc.
- En general, si f tiene n variables, entonces hay n^2 derivadas parciales de orden 2.

Ejemplos:

1. Calcular las derivadas parciales de orden 2 de $z = x^2(1+y^2)$.

Tenemos que $z_x = 2x(1+y^2)$ y $z_y = x^2 2y$.

Luego, $z_{xx} = 2(1+y^2)$

$z_{xy} = 2x\,2y = 4xy$

$z_{yx} = 2x\,2y = 4xy$

$z_{yy} = 2x^2$.

② Si $z = f(x,y)$, con $x(s,t) = 2s + 3t$, $y(s,t) = 3s - 2t$, calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$.

Primero debemos calcular $\frac{\partial z}{\partial t}$ y luego a esta función calcularle la derivada parcial con respecto a s.

Entonces, por la regla de la cadena (caso 2)

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t) \quad (A)$$

donde $\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = 3$ y $\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = -2$

Luego, (A) queda

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = 3\,\frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) - 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)).$$

Calculemos la derivada parcial con respecto a s de la función $\frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 3\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right] - 2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right]$$

donde $\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) = 2$ y $\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) = 3$

Finalmente,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 3\left[2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right] - 2\left[2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

Teorema: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in Dom(f)$. Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son ambas continuas en $B(\bar{a}, r) \subseteq Dom(f)$ para algún $r > 0$, entonces

$$f_{xy}(\bar{x}) = f_{yx}(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{a}, r).$$

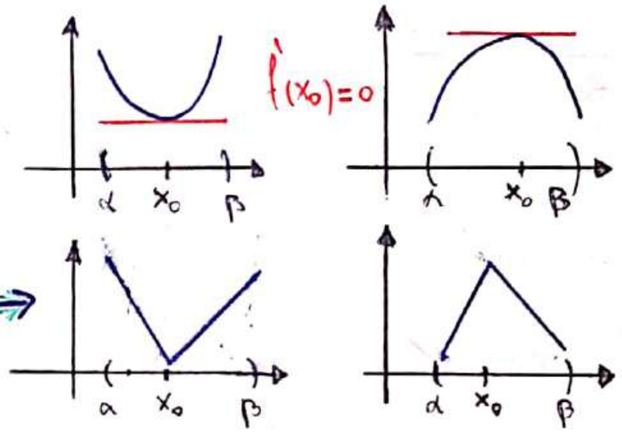
Máximos y mínimos de funciones de dos variables ($n=2$).

Repaso: Sea $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ y sea $x_0\in(\alpha,\beta)$. Si f tiene un mínimo local o un máximo local en x_0 entonces:

- $f'(x_0)=0$ (x_0 se llama punto crítico) $\Rightarrow$

o

- $f'(x_0)$ No existe (x_0 se llama pto. singular) $\Rightarrow$



Definición: Sea $f:\mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $(x_0,y_0)\in\mathrm{Dom}(f)$. Decimos que

- f tiene un máximo local (o relativo) en (x_0,y_0) si existe una bola (disco) B centrada en (x_0,y_0), con $B\subset\mathrm{Dom}(f)$ y tq $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ $\forall(x,y)\in B$.
  El número $f(x_0,y_0)$ se llama valor máximo local de f.

- f tiene un mínimo local (o relativo) en (x_0,y_0) si existe una bola B centrada en (x_0,y_0), con $B\subset\mathrm{Dom}(f)$ y tq $f(x_0,y_0)\leq f(x,y)$ $\forall(x,y)\in B$.
  El número $f(x_0,y_0)$ se llama valor mínimo local de f.

- Si las desigualdades se cumplen $\forall(x,y)\in\mathrm{Dom}(f)$, entonces decimos que f tiene un máximo absoluto (o mínimo absoluto, según corresponda) en (x_0,y_0).

Observación: decimos que f tiene un extremo local en (x_0,y_0) si f tiene un máximo local o un mínimo local en (x_0,y_0).

Teorema: Si $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene un extremo local en (x_0, y_0) y existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0), entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Demostración:
Sea $g(x) = f(x, y_0)$. Entonces, g tiene un extremo local en $x = x_0$. Luego,
$0 = g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$.
De la misma forma tambien deducimos que $f_y(x_0, y_0) = 0$ ∎

Definición: dado $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_0, y_0) se llama punto crítico de f si $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ (o sea $\nabla f(x_0, y_0) = 0$).
Decimos además que (x_0, y_0) es punto singular de f si $\nexists f_x(x_0, y_0)$ o $\nexists f_y(x_0, y_0)$.

Conclusión: si $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene un extremo local en (x_0, y_0), entonces
- o bien (x_0, y_0) es pto. crítico de f (y por lo tanto $\nabla f(x_0, y_0) = 0$)
- o bien (x_0, y_0) es pto. singular de f (y por lo tanto $\nexists \nabla f(x_0, y_0)$).

Repaso: si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y x_0 es punto crítico de f (o sea $f'(x_0) = 0$) y si además

$$\begin{cases} f''(x_0) > 0 & \Rightarrow x_0 \text{ es mínimo local de } f \\ f''(x_0) < 0 & \Rightarrow x_0 \text{ es máximo local de } f \\ f''(x_0) = 0 & \Rightarrow \text{no podemos asegurar nada.} \end{cases}$$

- Veamos un resultado similar para $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Teorema (Test de las derivadas segundas).

- Sean $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(x_0,y_0) \in Dom(f)$. Supongamos que las derivadas parciales de 1^{er} y 2^{da} orden de f son continuas en una bola $B^{\subset Dom(f)}$ de centro (x_0,y_0) y supongamos además que $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$ (o sea, (x_0,y_0) es pto. crítico de f).

Sea $D \doteq D(x_0,y_0) \doteq f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - [f_{xy}(x_0,y_0)]^2$, entonces:

1. Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ (o $f_{yy}(x_0,y_0) > 0$) $\Rightarrow f$ tiene mínimo local en (x_0,y_0).
2. Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ (o $f_{yy}(x_0,y_0) < 0$) $\Rightarrow f$ tiene un máximo local en (x_0,y_0).
3. Si $D < 0$, entonces f no un máx. local ni un mín. local en (x_0,y_0). En este caso decimos que f tiene un punto silla en (x_0,y_0).
4. Si $D = 0$, no se puede asegurar nada.

<u>Observación</u>: para recordar la fórmula que define $D(x_0,y_0)$ notemos que $D(x_0,y_0)$ es el determinante de la matriz $H(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$

ya que $\det(H(x_0,y_0)) = f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - \underbrace{f_{yx}(x_0,y_0)\, f_{xy}(x_0,y_0)}_{f_{xy}(x_0,y_0)^2}$ pues $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$ por Teo. anterior (pág. 107).

Insert text here

- La matriz H se llama hessiana de f en (x_0,y_0) y su determinante se llama hessiano de f en (x_0,y_0).
(o discriminante)

Ejemplo Caso 3. Sea $f(x,y) = y^2 - x^2$

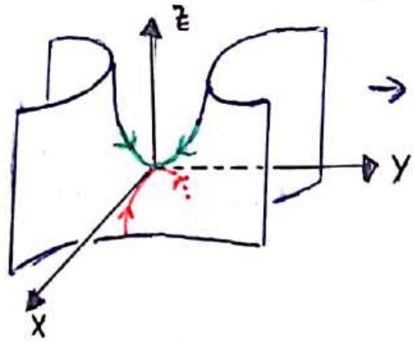
• Tenemos que $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$. Luego, $\nabla f(0,0) = (0,0)$, o sea $(0,0)$ es punto crítico de f.

• Además, $f_{xx}(x,y) = -2$, $f_{yy}(x,y) = 2$ y $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$.

Por lo tanto, $D(0,0) = \det\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0$ y entonces estamos en el caso 3.

• Analicemos el comportamiento de f cuando nos acercamos al punto $(0,0)$.

- Si nos acercamos por el eje y tenemos $f(0,y) = y^2 \geq 0 = f(0,0)$ luego $(0,0)$ NO es máx local
- Si nos acercamos por el eje x tenemos $f(x,0) = -x^2 \leq 0 = f(0,0)$ luego $(0,0)$ NO es mín local



→ Gráfico de f

(cerca del $(0,0)$ el gráfico tiene la forma de una silla de montar)

• En este caso decimos que $(0,0)$ es un punto de silla.

Ejemplo caso 4

i) Sea $f(x,y) = x^4 + y^4$.

Es fácil ver que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y que $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0) = 0$.

Por lo tanto, $D(0,0) = 0$ y estamos en el caso 4

Ahora, por como está definida f tenemos que $f(x,y) = x^4 + y^4$

$f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$ y entonces $(0,0)$ es un mínimo local de f (y global)

(ii) Sea $h(x,y) = -(x^4+y^4)$.

Es fácil ver (¡ejercicio!) que $D(0,0)=0$ y entonces también se cumple el caso (4).

Sin embargo, por como está definida h tenemos que $(0,0)$ es un máximo local (y global) de h.

(iii) Sea $g(x,y) = y^4 - x^4$

Es fácil ver (ejercicio) que $D(0,0)=0$ y entonces estamos en el caso (4).

Sin embargo, si graficamos g nos damos cuenta que $(0,0)$ es un punto de silla de g (analizar el comportamiento cuando nos acercamos a $(0,0)$).

- Por lo tanto, de (i), (ii) y (iii) vemos que si $D(x_0,y_0)=0$, el punto (x_0,y_0) podría ser un max local, mín. local o punto silla. Es decir, $D(x_0,y_0)=0$ no nos asegura nada sobre qué tipo de punto es (x_0,y_0).

Ejemplo: Encontrar y clasificar (máx./mín relativo, pto. silla) los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4+y^4-4xy+2$.

- Recordemos que (x_0,y_0) es pto. crítico de f si $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$.

Tenemos que $\nabla f(x,y) = (4x^3-4y,\ 4y^3-4x)$, entonces

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{matrix} 4x^3-4y=0 \\ 4y^3-4x=0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} x^3 = y \\ y^3 = x \end{matrix} \iff y^9 = y \iff y(y^8-1)=0$$

reemplazo

Por lo tanto, los únicos puntos críticos de f son: $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$

Clasifiquemos estos ptos. críticos utilizando el Test de las 2das derivadas.

Tenemos que: • $f_{xx}(x,y) = 12x^2$

• $f_{yy}(x,y) = 12y^2$

• $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4$

Entonces $D(x,y) = \det \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} = 144x^2y^2 - 16$.

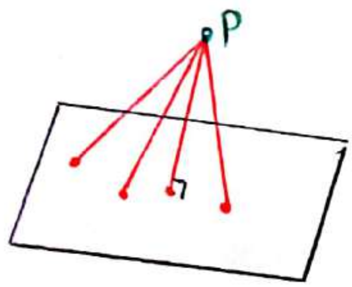
Luego,

• $D(0,0) = -16 < 0$, y por lo tanto $(0,0)$ es pto. de silla de f.

• $D(1,1) = 144 - 16 > 0$, y por lo tanto $(1,1)$ es mínimo local de f.

• $D(-1;1) = 144 - 16 > 0$ y por lo tato $(-1,-1)$ es mínimo local de f.

Ejemplo: Encontrar la distancia más corta desde el punto $(1,0,-2)$ al plano $x + 2y + z = 4$



• Recordamos que si $Q = (x,y,z)$ es un pto. en el espacio, la distancia entre P y Q es

$$d(\underbrace{(1,0,-2)}_{P}, \underbrace{(x,y,z)}_{Q}) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2} \quad (\blacksquare)$$

• Ahora, si consideramos que Q está en el plano $x + 2y + z = 4$, entonces Q es de la forma $Q = (x, y, 4 - x - 2y)$. Reemplazando en $(\blacksquare)$ tenemos que la distancia de P a un pto. Q que está en el plano es:

$$d(P, Q_{(x,y,z)}) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2} \quad (\geq 0)$$

Por lo tanto, para hallar la distancia más corta de P al plano basta hallar el mínimo de la función (¿por qué?)

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

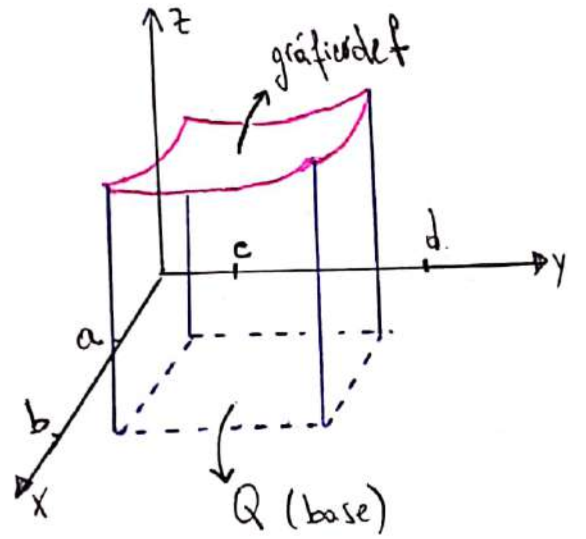
(el punto (x_0, y_0) donde las funciones $d(x,y)$ y $f(x,y)$ toman su mínimo valor coinciden, sin embargo no es cierto que $d(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$).

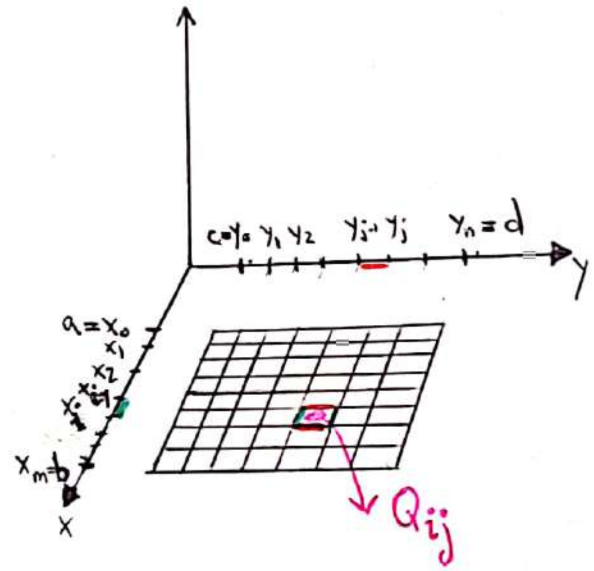
Ejercicio (está en el práctico!): Hallar el punto (x_0, y_0) donde f alcanza su mínimo valor y calcular $d(x_0,y_0)$ = distancia más corta de $P=(1,0,-2)$ al plano $x+2y+z=4$.

Integrales dobles en rectángulos

- Sea $Q = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f: Q \to \mathbb{R}$ no negativa $(f(x,y) \geq 0)$

¿Cuál es el volumen debajo del gráfico de f y arriba de Q?





- Para calcular el volumen haremos un procedimiento análogo al que realizamos para cálcular el área bajo una curva.

- Dadas particiones de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$, es decir

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ y $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$

formamos una partición del rectángulo Q de la siguiente manera:

definimos $Q_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ $\begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$

En total hay $m.n$ subrectángulos Q_{ij} y su unión cubre a Q.

- Si llamamos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, tenemos que el área de Q_{ij} es $\Delta x_i . \Delta x_j$

- Luego, en cada Q_{ij} elegimos un pto (x_{ij}, y_{ij}) y consideramos la (doble) suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \rightarrow$$ suma de los volúmenes de los paralelepípedos de base Q_{ij} y altura $f(x_{ij}, y_{ij})$.

- El volumen debajo del gráfico de f y arriba de Q es el límite de este proceso.

Definición: dado una partición $P = \{Q_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ de un rectángulo $Q \subset \mathbb{R}^2$ definimos la norma de la partición P como la mayor longitud de las diagonales de los subrectángulos Q_{ij} y la denotamos por $\|P\|$.

Definición: Sea Q un rectángulo en $\mathbb{R}^2$ y $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$, la integral doble de f sobre el rectángulo Q es

$$\iint_Q f(x,y)\, dA = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$$ si este límite existe.

En tal caso, f se dice integrable sobre Q.

Observaciones:

1. En la def. de int. doble no pedimos $f \geq 0$. La def. vale también si $f \leq 0$ o f cambia de signo.
2. Se puede demostrar que si f es continua en $Q \Rightarrow f$ es integrable sobre Q. Más aún, si f es acotada y continua en Q, salvo una cantidad finita de curvas suaves entonces f es integrable sobre Q (resultado análogo a de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)
3. Si $f \geq 0$ e integrable sobre $Q \Rightarrow \iint_Q f(x,y)\, dA =$ volumen bajo la gráfica de f y arriba del rectángulo Q
4. A veces denotamos $\iint_Q f(x,y)\, dx\, dy$ en lugar de $\iint_Q f(x,y)\, dA$.

Integrales iteradas

- Al igual que para el caso de funciones de una variable, **no resulta muy fácil calcular** integrales dobles a partir de la definición (Para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ utilizamos el TFC)
- Veremos que, en muchos casos, el cálculo de integrales dobles se reduce al cálculo de integrales de funciones de una variable. En efecto, sean $Q = [a,b] \times [c,d]$ y $f: Q \to \mathbb{R}$. Notemos que si fijamos una de las dos variables, por ejemplo y, obtenemos una función de la otra variable y entonces podemos integrarla como ya sabemos. O sea, para cada $y \in [c,d]$ hacemos $\int_a^b f(x,y)\, dx$ → esto define una función de y que podemos volver a integrar obteniendo $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$ → esta integral se llama integral iterada de f.

Observaciones:

① Podríamos haber hecho el proceso en el otro orden obteniendo $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$, lo que nos daría la "otra" integral iterada de f.

② Usualmente se omiten los paréntesis y se escribe $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$ ó $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy$.

Ejemplo: calcule la siguiente integral iterada $\int_0^2 \int_{-1}^1 x^2 y^3\, dx\, dy$.

- Primero debemos integrar $f(x,y) = x^2 y^3$ con respecto a x en el intervalo $[-1,1]$.

Entonces, $\int_{-1}^1 x^2 y^3\, dx = \underbrace{y^3}_{\text{"cte"}} \int_{-1}^1 x^2\, dx = y^3 \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = y^3 \left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) = y^3 \cdot \frac{2}{3}$.

Por lo tanto, $\int_0^2 \underbrace{\int_{-1}^1 x^2 y^3\, dx}_{\frac{2}{3}y^3}\, dy = \int_0^2 \frac{2}{3} y^3\, dy = \frac{2}{3} \frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{16}{4} - \frac{0}{4} \right) = \frac{8}{3}$

Ejemplo: calcule la siguiente integral iterada $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} x^2y^3\,dy\,dx$.

- En este caso primero debemos integrar $f(x,y)=x^2y^3$ con respecto a y en $[0,2]$.

Luego, $\int_0^2 x^2y^3\,dy = x^2\int_0^2 y^3\,dy = x^2\,\frac{y^4}{4}\Big|_0^2 = x^2\left(\frac{16}{4}-\frac{0}{4}\right) = x^2 4$.

Finalmente, $\int_{-1}^{1}\int_0^2 x^2y^3\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} 4x^2\,dx = 4\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{(-1)}{3}\right) = \frac{8}{3}$.

- Notemos que las integrales iteradas dieron el mismo resultado. Esta situación es bastante general según el siguiente teorema.

Teorema de Fubini: si f es continua en el rectángulo $Q=[a,b]\times[c,d]$, entonces

$$\iint_Q f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy .$$

Observación: el teorema anterior también vale si f es acotada en Q, discontinua sólo en un nro. finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

Ejemplo: calcule el volumen del sólido debajo del plano $z=4-x-y$ y arriba del rectángulo definido por $0\leq x\leq 1$, $1\leq y\leq 2$.

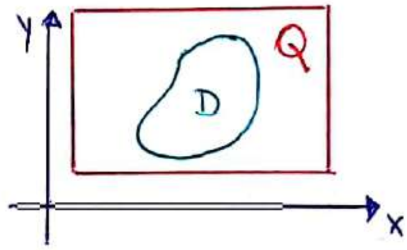
- Sea $f(x,y)=4-x-y$. Notemos que $f(x,y)\geq 0$ $\forall (x,y)\in Q$ y entonces lo que se nos pide es calcular $\iint_Q f(x,y)\,dA$ $\rightarrow$ para esto usaremos Fubini.

$$\iint_Q (4-x-y)\,dA = \int_1^2\int_0^1 (4-x-y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(4x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_0^1 dy = \int_1^2\left(4-\frac{1}{2}-y\right)dy = \left(4y-\frac{y}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^2$$
$$= 2.$$

- Por lo tanto, el volumen del sólido bajo el gráfico de f y arriba de Q es 2.

Integrales dobles en regiones generales

- Sea D una región acotada en $\mathbb{R}^2$, o sea D está contenida en algún rectángulo Q con lados paralelos a los ejes cartesianos.



- Dado f definida en D queremos definir la integral de f sobre la región D. Para esto vamos a extender f al rectángulo Q de la siguiente manera:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D \cap Q \\ 0 & \text{si } (x,y) \in D^c \cap Q \end{cases}$$

Definición: decimos que f es integrable sobre D si F es integrable sobre Q y en ese caso definimos

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_Q F(x,y)\,dA .$$

Observaciones:

1. Como F vale cero fuera de D, está región no contribuye a la integral y por lo tanto la definición es independiente del rectángulo Q elegido.

2. Si $f \geq 0$ en D, entonces la integral se puede interpretar como el volúmen del solido debajo del gráfico de f y arriba de la región D.

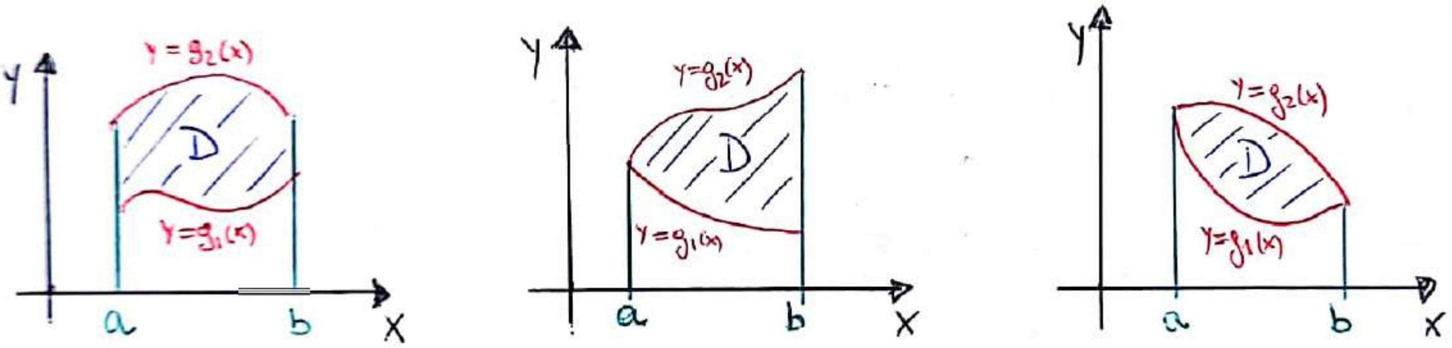
- Las integrales dobles se pueden calcular con facilidad para cierto tipo de regiones D "bastante" generales.

Definición: una región D se denomina

(i) región de tipo I (x-simple) si es de la forma

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ , \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$

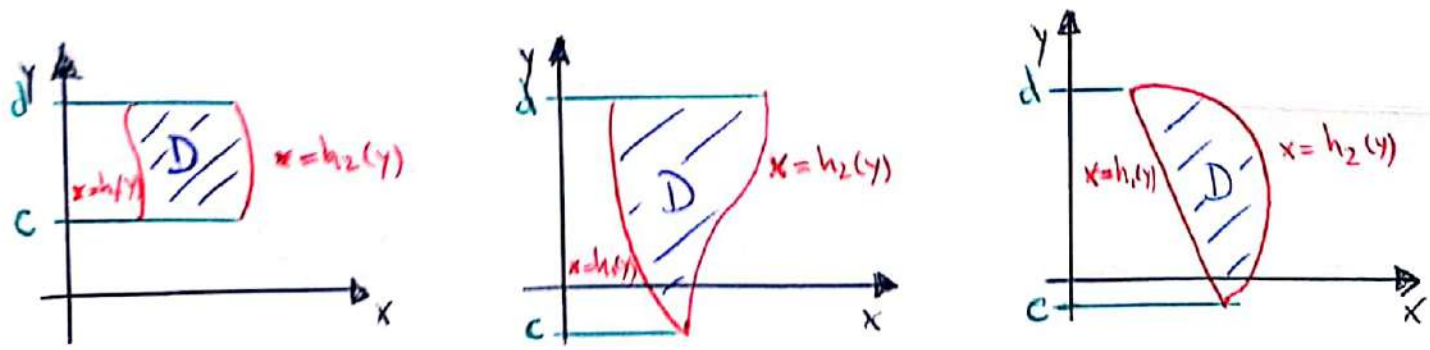
con g_1 y g_2 funciones continuas en $[a,b]$. (O sea, está entre la gráfica de dos func. continuas)



(ii) región de tipo II (y-simple) si es de la forma

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \ , \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \}$$

con h_1 y h_2 funciones continuas en $[c,d]$.



Observación: existen regiones de tipo I y II simultaneamente, por ejemplo un círculo, un rectángulo, etc.

- ¿Cómo calcular $\iint_D f(x,y)\,dA$ si D es de tipo I?

. Tomamos $Q = [a,b] \times [c,d]$ tal que $D \subset Q$ y definimos F como antes.

Luego, por el Teo. de Fubini tenemos que

$$\iint_Q F(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx .$$

. Ahora, como $F(x,y) = 0$ fuera de D, entonces para cada x fijo tal que $x \in [a,b]$ tenemos que $F(x,y) = 0$ si $y < g_1(x)$ o si $y > g_2(x)$. Por lo tanto para esos valores de x tenemos que $\int_c^d F(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy$.

Obs.

. Luego,

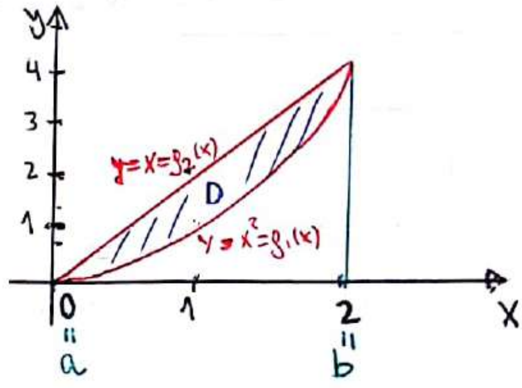
$$\iint_D f(x,y)\,dA \underset{\text{definición}}{=} \iint_Q F(x,y)\,dA \underset{\text{Fubini}}{=} \int_a^b\!\int_c^d F(x,y)\,dy\,dx \overset{\text{Obs.}}{=} \int_a^b\!\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy\,dx \underset{F(x,y)=f(x,y) \text{ en } D}{=} \int_a^b\!\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

<u>Conclusión:</u> la integral de una función f en una región de tipo I, o sea

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, es

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx . \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Integral de } f \\ \text{sobre } D \text{ de} \\ \text{tipo I}\end{array}\right)$$

Ejemplo: Calcular $\iint_D (x-2y)\,dA$, donde D es la región del primer cuadrante comprendida entre la parábola $y=x^2$ y la recta $y=2x$.



- Notemos que la región D es de tipo I con $g_1(x)=x^2$ y $g_2(x)=2x$.

Estas curvas se intersecan cuando $x^2=2x$, o sea cuando $x=0$ o $x=2$.

Así tenemos que $a=0$ y $b=2$.

Luego,

$$\iint_D (x-2y)\,dA = \int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x-2y)\,dy\,dx = \int_0^2 (xy-y^2)\Big|_{x^2}^{2x}\,dx = \int_0^2 (2x^3-4x^2-x^3+x^4)\,dx$$

$$= \int_0^2 (x^4+x^3-4x^2)\,dx = \frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^5}{5}+\frac{2^4}{4}-\frac{2^5}{3} = -\frac{2^4}{60} \blacksquare$$

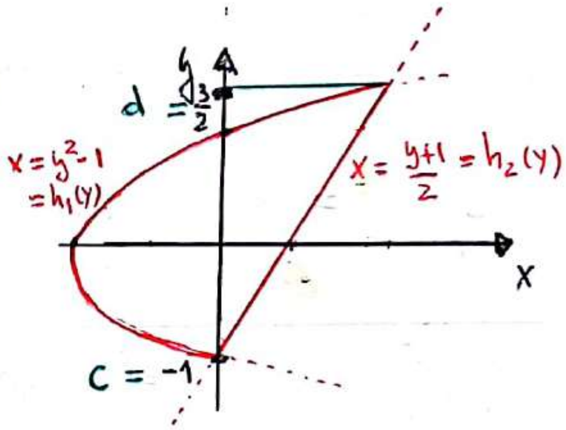
- ¿Cómo calcular $\iint_D f(x,y)\,dA$ si D es una región de tipo II?

- Procediendo de manera similar, se puede ver que si f está definida en una región D de tipo II, es decir $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\leq y\leq d,\ h_1(y)\leq x\leq h_2(y)\}$ entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

(Integral de f sobre D de tipo II)

Ejemplo: Calcular el área A de la región acotada por las curvas $y = 2x-1$ y $x = y^2 - 1$.



• **Solución:** observemos que la región acotada por las curvas

$y = 2x+1$ $\left(\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}\right)$ y $x = y^2 - 1$

definen una región de tipo II.

• Para averiguar los valores c y d debemos ver dónde se cortan ambas curvas o sea cuando $\frac{y+1}{2} = y^2 - 1$. Esto sucede si $y = -1$ o $y = \frac{3}{2}$.

Por lo tanto, $c = -1$ y $d = 3/2$.

• Finalmente, para calcular el área debemos integrar sobre D la función identicamente 1, o sea $f(x,y) \equiv 1$. Así,

$$A = \iint_D 1\, dA = \int_{-1}^{3/2} \int_{y^2-1}^{\frac{y+1}{2}} dx\, dy = \int_{-1}^{3/2} \left(\frac{y+1}{2} - (y^2-1)\right) dy = \int_{-1}^{3/2} \left(-y^2 + \frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right) dy$$

$$= \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{2}y\right)\Big|_{-1}^{3/2} = \frac{125}{48}.$$

Conclusión: el área es $A = \frac{125}{48}$ $(\geq 0 \checkmark)$.

Propiedades de la integral doble.

- Sea D una región y f y g funciones tales que $\iint_D f(x,y)\,dA$ y $\iint_D g(x,y)\,dA$ existen. Entonces, las siguientes son válidas:

1. $\iint_D 1\,dA = A(D)$ (área de la región D).

2. $\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA$.

3. $\iint c\cdot f(x,y)\,dA = c\iint f(x,y)\,dA$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

4. Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ $\forall (x,y)\in D \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA$.

5. Si $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 no se superponen excepto quizás en sus fronteras, entonces

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA.$$