PRÁCTICO 1

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:

a) $2v + 3w - 5u$,

b) $5(v + w)$,

c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

SOLUCIÓN:

a) $2v + 3w - 5u = 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1) - 5 \cdot (1, -1, 1) = (-2, 4, 0) + (6, -9, -3) + (-5, 5, -5) = \boxed{(-1, 0, -8)}$

b) $5(v + w) = 5 \cdot ((-1, 2, 0) + (2, -3, -1)) = 5 \cdot (1, -1, -1) = \boxed{(5, -5, -5)}$

c) $5v + 5w = 5 \cdot (-1, 2, 0) + 5 \cdot (2, -3, -1) = (-5, 10, 0) + (10, -15, -5) = \boxed{(5, -5, -5)}$

$\square$

(2) Calcular los siguientes productos escalares.

a) $\langle(-1, 2, 0), (2, -3, -1)\rangle$,

b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

SOLUCIÓN:

a) $\langle(-1, 2, -0), (2, -3, -1)\rangle = (-1)\cdot 2+2\cdot(-3)+0\cdot(-1) = -2+(-6)+0 = \boxed{-8}$

b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -4 + (-2) = \boxed{-6}$

$\square$

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

SOLUCIÓN: Calculamos ambos miembros por separado.

Miembro izquierdo: $\langle 2v+3w, -u\rangle = \langle 2\cdot(-1, 2, 0)+3\cdot(2, -3, -1), -(1, -1, 1)\rangle$
$= \langle(-2, 4, 0) + (6, -9, -3), (-1, 1, -1)\rangle = \langle(4, -5, -3), (-1, 1, -1)\rangle$
$= 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = -4 + (-5) + 3 = \boxed{-6}$

Miembro derecho: $-2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle = -2\langle(-1, 2, 0), (1, -1, 1)\rangle - 3\langle(2, -3, -1), (1, -1, 1)\rangle$
$= -2 \cdot (-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1) - 3 \cdot (2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1)$
$= -2 \cdot (-1 + (-2) + 0) - 3 \cdot (2 + 3 + (-1)) = -2 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = \boxed{-6}$

$\square$

(4) Probar que

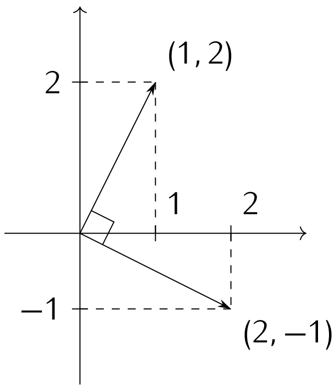
a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.

b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

Solución: Calculamos su producto interno para ver si es nulo.

a) $\langle (2, 3, -1), (1, -2, -4) \rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) = 2 + (-6) + 4 = \boxed{0}$. Por lo tanto, son vectores ortogonales.

b) $\langle (2, -1), (1, 2) \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 2 - 2 = \boxed{0}$. Por lo tanto, son vectores ortogonales y su gráfica es:



$\square$

(5) Encontrar

a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,

b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,

c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$,

Solución:

a) $(4, 3)$ es un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$, pues:

$$\langle (3, -4), (4, 3) \rangle = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 = 12 - 12 = \boxed{0}.$$

b) $(1, 2, 0)$ es un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$, pues:

$$\langle (2, -1, 4), (1, 2, 0) \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = \boxed{0}.$$

c) Primero notar que cualquier vector de la pinta (a, b, b) será ortogonal a $(0, 1, -1)$, pues:

$$\langle (0, 1, -1), (a, b, b) \rangle = 0 \cdot a + 1 \cdot b + (-1) \cdot b = 0 + b - b = \boxed{0}.$$

Si ahora multiplicamos nuestro candidato (a, b, b) con $(2, -1, 4)$ tenemos:

$$\langle (2, -1, 4), (a, b, b) \rangle = 2 \cdot a + (-1) \cdot b + 4 \cdot b = \boxed{2a + 3b}.$$

Luego, si elegimos por ejemplo $a = -3$ y $b = 2$ vamos a tener a nuestro candidato ortogonal a ambos vectores. Es decir, $(-3, 2, 2)$ cumple lo requerido.

$\square$

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

a) $(2,3)$, *b)* (t,t^2), *c)* $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

Solución:

a) $||(2,3)|| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$

b) $||(t,t^2)|| = \sqrt{t^2+(t^2)^2} = \sqrt{t^2+t^4} = \boxed{|t|\sqrt{1+t^2}}$

c) $||(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)|| = \sqrt{\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

□

(7) Calcular $\langle v,w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

a) $v=(2,2)$, $w=(1,0)$, *b)* $v=(-5,3,1)$, $w=(2,-4,-7)$.

Solución: Para encontrar el ángulo se deben calcular además las normas de los vectores:

a) $\langle v,w\rangle = \langle(2,2),(1,0)\rangle = 2b\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2+0 = \boxed{2}$

$||v|| = ||(2,2)|| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$||w|| = ||(1,0)|| = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v,w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}\cdot 1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{45^\circ}$$

b) $\langle v,w\rangle = \langle(-5,3,1),(2,-4,-7)\rangle = -5\cdot 2 + 3\cdot(-4) + 1\cdot(-7) = -10-12-7 = \boxed{-29}$

$||v|| = ||(-5,3,1)|| = \sqrt{(-5)^2+3^2+1^2} = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$

$||w|| = ||(2,-4,-7)|| = \sqrt{2^2+(-4)^2+(-7)^2} = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v,w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-29}{\sqrt{35}\sqrt{69}}\right) = \boxed{126^\circ 9' 55.57''}$$

□

(8) Recordar los vectores e_1, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v,e_1\rangle e_1 + \langle v,e_2\rangle e_2 + \langle v,e_3\rangle e_3.$$

Solución: Podemos empezar desde el miembro de la derecha, pasar por el del medio y llegar al de la izquierda aplicando las definiciones y propiedades conocidas:

$\langle v,e_1\rangle e_1 + \langle v,e_2\rangle e_2 + \langle v,e_3\rangle e_3 =$

$= \langle(x_1,x_2,x_3),(1,0,0)\rangle e_1 + \langle(x_1,x_2,x_3),(0,1,0)\rangle e_2 + \langle(x_1,x_2,x_3),(0,0,1)\rangle e_3$

$= (x_1\cdot 1 + x_2\cdot 0 + x_3\cdot 0)e_1 + (x_1\cdot 0 + x_2\cdot 1 + x_3\cdot 0)e_2 + (x_1\cdot 0 + x_2\cdot 0 + x_3\cdot 1)e_3$

$= (x_1+0+0)e_1 + (0+x_2+0)e_2 + (0+0+x_3)e_3 = \boxed{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}$

$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) =$

$= (x_1\cdot 1, x_1\cdot 0, x_1\cdot 0) + (x_2\cdot 0, x_2\cdot 1, x_2\cdot 0) + (x_3\cdot 0, x_3\cdot 0, x_3\cdot 1)$

$= (x_1,0,0) + (0,x_2,0) + (0,0,x_3) = (x_1+0+0, 0+x_2+0, 0+0+x_3) = (x_1,x_2,x_3) = \boxed{v}$

□

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$

b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

Solución:

a) $\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle \overset{\mathbf{P2}}{=} \langle u, \lambda_1 v\rangle + \langle u, \lambda_2 w\rangle \overset{\mathbf{P3}}{=} \lambda_1\langle u, v\rangle + \lambda_2\langle u, w\rangle \overset{\mathbf{P1}}{=} \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle$

b) $\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle \overset{\mathbf{P2}}{=} \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \overset{\mathbf{P2}}{=}$
$\overset{\mathbf{P2}}{=} \langle \lambda_1 v, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v, \lambda_2 w\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \overset{\mathbf{P3}}{=}$
$\overset{\mathbf{P3}}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_1\lambda_2\langle v, w\rangle + \lambda_2\lambda_1\langle w, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle \overset{\mathbf{HIP}}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle$

En el último paso se utilizó la hipótesis $\langle v, w\rangle = 0$.

□

(10) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

Solución: Vamos a usar la definición de norma y el inciso b) del ejercicio anterior, tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$||v + w||^2 \overset{def}{=} \langle v + w, v + w\rangle \overset{9.b)}{=} \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle \overset{def}{=} ||v||^2 + ||w||^2.$$

En $\mathbb{R}^2$ esta igualdad es el *Teorema de Pitágoras*.

□

(11) @ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v, w\rangle| \le ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$

Solución: Vamos a escribir $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$. Veamos la pinta del cuadrado del lado izquierdo:

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle (v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle^2 = (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 \tag{1.1}$$

Ahora comenzamos por el cuadrado del lado derecho con el objetivo de llegar a (1.1):

$$||v||^2||w||^2 = (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) = (v_1 w_1)^2 + (v_1 w_2)^2 + (v_2 w_1)^2 + (v_2 w_2)^2.$$

Mirando el primer y último término tenemos que si completamos ese cuadrado obtendríamos (1.1). Sumamos y restamos $2(v_1w_1)(v_2w_2)$ y agrupamos:

$$\begin{aligned}||v||^2||w||^2 &= (v_1w_1)^2 + (v_1w_2)^2 + (v_2w_1)^2 + (v_2w_2)^2 + \\ &\qquad + 2(v_1w_1)(v_2w_2) - 2(v_1w_1)(v_2w_2) = \\ &= [(v_1w_1)^2 + 2(v_1w_1)(v_2w_2) + (v_2w_2)^2] + [(v_2w_1)^2 - 2v_1w_1v_2w_2 + (v_1w_2)^2]\end{aligned}$$

El segundo grupo de términos también forma un cuadrado perfecto. Escribimos ambos como cuadrados y acotamos:

$$||v||^2||w||^2 = \underbrace{(v_1w_1 + v_2w_2)^2}_{=\langle v,w\rangle^2} + \underbrace{(v_2w_1 - v_1w_2)^2}_{\geq 0} \geq \langle v, w\rangle^2.$$

$\square$