

Cálculo II / Análisis Matemático II

Lic. en Ciencias de la Computación / Lic. en Matemática Aplicada - 2024

Práctico 4 - Rectas, planos y funciones vectoriales

Producto escalar, rectas y planos

(1) Calcular los vectores $A + B$, $A - B$, $3A$, $-2B$, y representarlos gráficamente.

(a) $A = (2, -1)$, $B = (-1, 1)$

(b) $A = (0, 3, -1)$, $B = (2, -3, 7)$

(2) (a) Calcular el producto escalar o interno $A \cdot B$:

(i) $A = (-1, 3)$, $B = (0, 4)$

(ii) $A = (-1, -1, 3)$, $B = (-1, 3, -4)$.

(b) ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores son perpendiculares ($A \cdot B = 0$) entre sí?

(i) $A = (1, -1, 1)$, $B = (2, 3, 1)$

(ii) $A = (-5, 2, 7)$, $B = (3, -1, 2)$.

(c) Obtener la longitud o norma ($\sqrt{X \cdot X}$) de cada uno de los siguientes vectores:

$$A = (2, -1), \quad B = (2, 3, 1), \quad C = (-t/2, 2, 7).$$

(3) Dar la ecuación vectorial de las siguientes rectas:

(a) L pasa por $(-3, 2)$ y es paralela a $(1, -2)$.

(b) L está definida por $x = 3t + 1$; $y = 5t - 2$; $z = 2t + 1$.

(c) L pasa por $(2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

(4) (a) Dar la ecuación vectorial del plano S generado por $(-2, 1, \frac{1}{2})$ y $(4, -\frac{1}{5}, -1)$ y contiene al punto $(0, -1, 4)$

• ¿Pasa este plano por el origen?

• ¿Contiene a los puntos $(1, -1, \frac{1}{2})$, $(0, -\frac{1}{10}, \frac{7}{2})$ y $(0, \frac{3}{2}, 1)$?

(b) Dar la ecuación vectorial del plano que determina la ecuación $3x + 3y + z = 1$.

(c) Dar la ecuación normal de los siguientes planos:

(i) el plano que contiene a los puntos $(1, -1, 1)$, $(-2, 0, 1)$ y $(-1, 1, 1)$.

(ii) $X = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Funciones vectoriales

(5) Bosquejar la imagen de la curva descrita por las siguientes funciones vectoriales. Indicar con una flecha la dirección en la que t aumenta.

(a) $r(t) = (t, -t, 2t)$

(b) $r(t) = (\sin t, 3, \cos t)$

(6) Calcular los siguientes límites:

(a) $\lim_{t \rightarrow 0} (t, \cos^2 t, 5)$

(b) $\lim_{t \rightarrow 0} (t, \ln(t+1), e^{-1/t^2})$

(7) Determinar el dominio y la derivada de las siguientes funciones vectoriales:

$$(a) \ r(t) = (\ln(4 - t^2), t^3, \arctan(t)) \quad (b) \ r(t) = t\mathbf{a} + \langle \mathbf{b}, t\mathbf{c} \rangle \mathbf{d},$$

donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y \mathbf{d} son vectores.

(8) Para cada una de las siguientes funciones vectoriales bosquejar su imagen y obtener $r'(t)$. Además, dar el vector posición y el vector tangente para el valor de t indicado.

$$(a) \ r(t) = (\cos(t), \sin(t)), \ t = \pi/4. \quad (c) \ r(t) = (t^3, t^2), \ t = 1.$$

$$(b) \ r(t) = (1 + t, t^2), \ t = 1.$$

Ejercicios adicionales

(1) Sea $A \in \mathbb{R}^3$ un vector perpendicular a todo vector $X \in \mathbb{R}^3$. Probar que $A = 0$.

(2) Dar la ecuación vectorial de las siguientes rectas:

- (a) L pasa por los puntos $(-3/2, 4)$ y $(1, -5)$.
 (b) L pasa por $(1, 3)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-1, 4)$ y $(3, -2)$.

(3) Dar la ecuación vectorial de los siguientes planos:

- (a) S está generado por $(-1, 0, 4)$ y $(2, 3, -10)$, y contiene al punto $(2, 3, -5)$.
 (b) S está generado por $(-1, 0, 4)$ y $(2, 3, -10)$, y contiene al punto $(3, -3, 6)$.

(4) Dar una ecuación vectorial de los siguientes planos:

$$(a) \ x + y - z = 2 \quad (b) \ x - 3y + z + 2 = 0$$

(5) Calcular el coseno de los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son: $(3, 1, 1)$, $(-1, 2, 1)$ y $(2, -2, 5)$.

(6) Obtener el coseno del ángulo comprendido entre los planos S_1 y S_2 , donde:

$$(a) \ S_1: x + y + z = 0, \ S_2: x + 2y + 3z = 1. \quad (c) \ S_1: x + z = 1, \ S_2: y + z = 1.$$

$$(b) \ S_1: 3x + 2y - z = 0, \ S_2: 6x - 3y + 2z = 5.$$

(7) Determinar en qué punto se intersecan las siguientes curvas, $r_1(t) = (t, 1 - t, 3 + t^2)$ y $r_2(s) = (3 - s, s - 2, s^2)$, y calcular el ángulo de la intersección.

(8) Bosquejar la imagen de la curva descrita por las siguientes funciones vectoriales. Indicar con una flecha la dirección en la que t aumenta.

$$(a) \ r(t) = (\sin t, t, \cos t) \quad (b) \ r(t) = (t^2, t, 2)$$