

ANÁLISIS NUMÉRICO I / ANÁLISIS NUMÉRICO  
PRÁCTICO N°5 - 2025

**Temas:** Aproximación por Cuadrados Mínimos.

1. Obtener el polinomio que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos del grado indicado en cada caso:

a) polinomio de grado 1, para la siguiente tabla de datos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-0.1	1.1	1.9	3.2	3.8	5.0	6.0	7.3	8.1	8.9

b) polinomio de grado 2, para la siguiente tabla de datos

x	-1	0	1	3	6
y	6.1	2.8	2.2	6	26.9

2. Probar que si se tienen  $n + 1$  puntos distintos, la mejor aproximación polinomial (en el sentido de cuadrados mínimos) de grado  $n$  coincide con el polinomio interpolante.
3. Hallar el polinomio de grado cero que mejor aproxime en el sentido de cuadrados mínimos a una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $n$  puntos  $x_1, \dots, x_n$  del intervalo  $[a, b]$ .
4. Aproximar los datos de la siguiente tabla con un modelo de la forma  $f(x) \sim ae^{bx}$  en el sentido de cuadrados mínimos.

x	-1	0	1	2
y	8.1	3	1.1	0.5

5. Aproximar los datos de la siguiente tabla con un modelo de la forma  $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$  en el sentido de cuadrados mínimos.

x	-1	0	1	2
y	-1.1	-0.4	-0.9	-0.5

6. Suponer que se realizó un experimento para encontrar la constante de elasticidad  $k$  de la Ley de Hooke:  $F = k(l - 5.3)$ . La función  $F$  es la fuerza requerida para estirar el resorte  $l$  unidades.

a) Se midieron las fuerzas  $F(l)$  para distintas longitudes  $l$  y se obtuvo la siguiente tabla:

$l$	7	9.4	12.3
$F$	2	4	5

Encontrar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos para  $k$

b) Realizando más mediciones se obtuvieron nuevos datos

$l$	8.3	11.3	14.4	15.9
$F$	3	5	8	10

Calcular la nueva aproximación para  $k$  sólo con el segundo grupo de valores.

c) ¿Cuál valor de  $k$  aproxima mejor utilizando los datos de todas las mediciones?

7. Obtener la aproximación lineal en el sentido de cuadrados mínimos de la función  $f$  en el intervalo indicado si:

- a)  $f(x) = x^2 + 3x + 2$  en el intervalo  $[0, 1]$ .
- b)  $f(x) = x^2 + 3x + 2$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .
- c)  $f(x) = e^x$  en el intervalo  $[0, 2]$ .

8. Aproximar los datos de la siguiente tabla en el sentido de cuadrados mínimos con un modelo de la forma  $f(x) \sim a \cos(x) + b \sin(x)$ .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.8	3.5	2.1	-1.0	-3.3	-2.7	0.9	3.3	2.8	-0.1	-3.0

- 9. Considerar el conjunto de polinomios ortogonales de Legendre  $\{P_0, P_1, P_2\}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , dados por  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$  y  $P_2(x) = x^2 - 1/3$ . Verificar que  $\{P_0, P_1, P_2\}$  es un conjunto ortogonal de funciones.
- 10. Determinar las aproximaciones lineal y cuadrática de la función  $f(x) = e^x$  en el sentido de cuadrados mínimos usando los polinomios ortogonales de Legendre, en el intervalo  $[-1, 1]$ .
- 11. Hallar una base ortogonal  $\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$  del conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2 en el intervalo  $[-1, 1]$  respecto a la función de peso  $\omega(x) = x^2$ .

*Ayuda: elegirlos de modo que  $gr(\Phi_k) = k$ ,  $k = 0, 1, 2$ .*