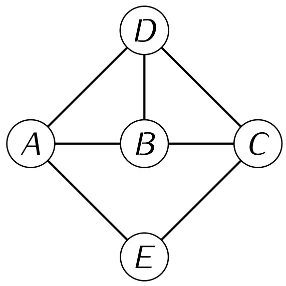
Práctico 5
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

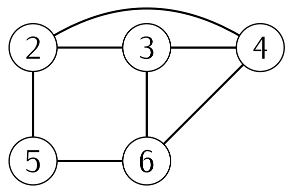
Ejercicios resueltos

(1) Escribir las listas de adyacencia de los siguientes grafos.

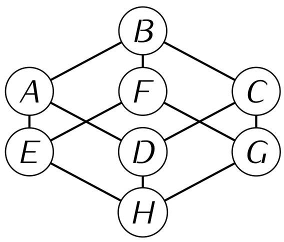
(a)



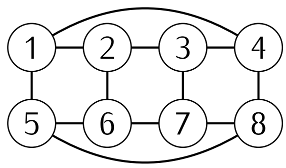
(b)



(c)



(d)



Rta:

(a)

A	B	C	D	E
B	A	B	A	A
D	C	D	B	C
E	D	E	C	

(b)

2	3	4	5	6
3	2	2	2	3
4	4	3	6	4
5	6	6		5

(c)

A	B	C	D	E	F	G	H
B	A	B	A	A	B	C	D
D	C	D	C	F	E	F	E
E	F	G	H	H	G	H	G

(d)

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	1	1	2	3	4
4	3	4	3	6	5	6	5
5	6	7	8	8	7	8	7

(2) Dibujar los grafos correspondientes a las siguientes listas de adyacencias.

(a)

a	b	c	d	e
b	a	b	a	a
d	c	d	c	b
e	e	e	e	c
				d

(b)

1	2	3	4	5
2	1	1	1	1
3	3	2	2	
4	4	4	3	
5				

(c)

1	2	3	4	5	6	7	8
6	3	2	5	4	1	1	6
7	7		6		4	2	7
					8	8	

(d)

1	2	3	4	5
2	1	1	1	1
3	3	2	2	4
4	4	4	3	
5			5	

(e)

a	b	c	d	e
b	a	b	a	a
d	c	d	c	c
e		e		

(f)

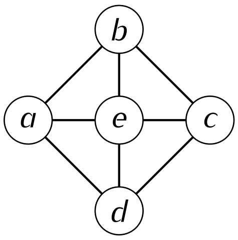
a	b	c	d	e
b	a	b	a	a
d	c	e	e	c
e				d

(g)

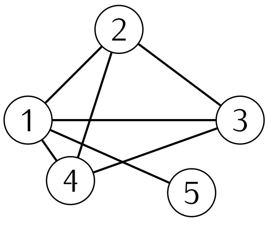
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	4	7	2	2	1	3	3	1	8	7	6
9	5	8			12	11	10	12	11	10	9

Rta:

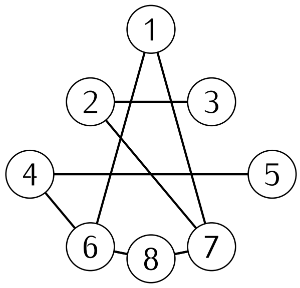
(a)



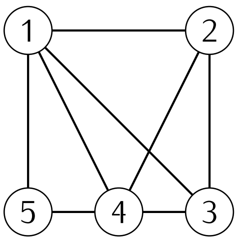
(b)



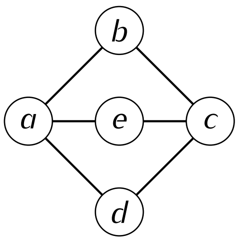
(c)



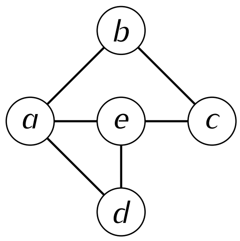
(d)



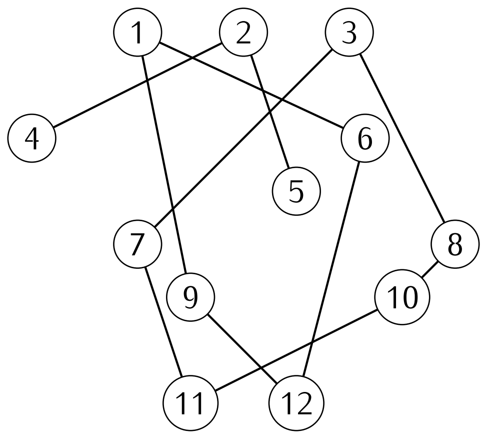
(e)



(f)



(g)



(3) Un *grafo planar* es un grafo para el que *existe* un dibujo del grafo en el plano tal que no hay ningún cruce de aristas. Por ejemplo, los grafos (a), (b) y (d) del ejercicio (1) son planares.

Un grafo planar divide al plano en *regiones* delimitadas por aristas, por ejemplo el grafo (a) del ejercicio (1) determina 4 regiones:

- la delimitada por las aristas AB, BD y DA,
- la delimitada por BC, CD y DB,
- la delimitada por AB, BC, CE y EA, y
- la región exterior.

Para todo grafo planar vale el famoso *Teorema de Euler para poliedros* que dice

$$C + V - A = 2, \qquad (*)$$

donde C es el número de regiones (en el caso de poliedros, caras), A es el número de aristas y V es el número de vértices.

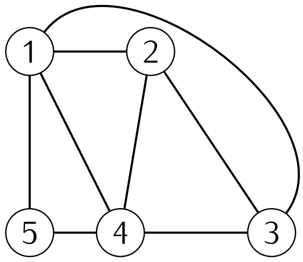
Comprobar que los grafos (a), (b) y (d) del ejercicio (1) satisfacen la fórmula (*).

Rta: Denotamos V la cantidad de vértices, A la cantidad de aristas y C la cantidad de regiones.

(a) $V = 5$, $A = 7$, $C = 4$, luego $C + V - A = 4 + 5 - 7 = 2$.
(b) $V = 5$, $A = 7$, $C = 4$, luego $C + V - A = 4 + 5 - 7 = 2$.
(d) $V = 8$, $A = 12$, $C = 6$, luego $C + V - A = 6 + 8 - 12 = 2$.

(4) Demostrar que el grafo (d) del ejercicio (2) es planar y comprobar la fórmula de Euler.

Rta: Recordemos que un grafo es planar si se *puede dibujar* sin cruces de aristas. Claramente el grafo en cuestión se puede dibujar también de la siguiente forma:



que es un grafo planar. En este caso $V = 5$, $A = 8$, $C = 5$, luego

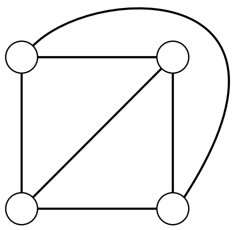
$$C + V - A = 5 + 5 - 8 = 2.$$

(5) ¿Cuántas aristas tiene el grafo completo K_n? ¿Para qué valores de n se puede afirmar que K_n es planar?
Rta: En un grafo completo de n vértices podemos contar las aristas de la siguiente manera: del primer vértice salen $n-1$ aristas, del segundo salen $n-2$ pues no debemos contar la arista al primer vértice, del tercer vértice salen $n-3$ aristas (no contamos las que van al primero y al segundo), y así sucesivamente. Concluyendo, la cantidad de aristas es

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1 + 0 = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Otra forma de contar es la siguiente: de cada arista salen $n-1$ aristas. Si las sumamos a todas tenemos $n(n-1)$ aristas, pero cada arista está contada dos veces, por lo tanto la cantidad total de aristas es $n(n-1)/2$.

Con respecto a la segunda pregunta, es claro que podemos dibujar K_1, K_2 y K_3 sin cruces de aristas. Aunque K_4 solemos dibujarlo como un cuadrado con sus diagonales, también podemos dibujar K_4 sin cruces:

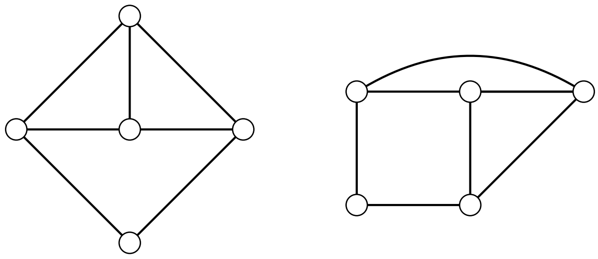


Sin embargo, no hay forma de dibujar K_5 sin cruces entre las aristas. La demostración de este hecho no es sencilla y debemos convencernos tratando (y fracasando) de hacer un dibujo de K_5 sin cruces entre aristas.

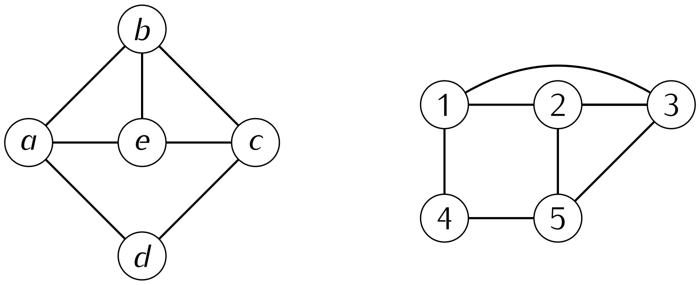
Para $n > 5$ es claro que si K_5 no es planar, como K_5 es un subgrafo de K_n, entonces K_n no puede ser planar.

(6) Demuestre que los siguientes pares de grafos son isomorfos, especificando un isomorfismo en cada caso.

(a)



Rta: Si mandamos, en orden, los puntos del rombo a los puntos del cuadrado, y el punto del centro al punto exterior al cuadrado, obtenemos un isomorfismo. En efecto, consideremos los grafos G_1 (izquierda) y G_2 (derecha) dados por:



En este caso hay una biyección entre el conjunto de vértices de G_1 y el conjunto de vértices de G_2 la cual tiene la propiedad requerida; esta biyección es dada por:

$$\alpha(a) = 1, \quad \alpha(b) = 2, \quad \alpha(c) = 5, \quad \alpha(d) = 4, \quad \alpha(e) = 3.$$

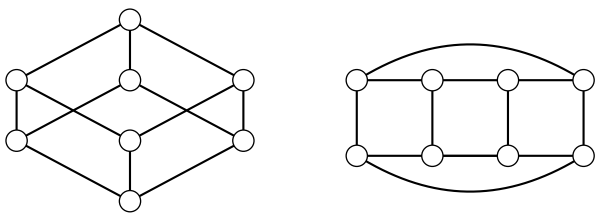
Además, por la definición de α, obtenemos:

$$\begin{array}{lll} \alpha : & \{a, b\} \longmapsto \{1, 2\}, & \{b, e\} \longmapsto \{2, 3\}, \\ & \{a, d\} \longmapsto \{1, 4\}, & \{c, d\} \longmapsto \{5, 4\}, \\ & \{a, e\} \longmapsto \{1, 3\}, & \{c, e\} \longmapsto \{5, 3\}, \\ & \{b, c\} \longmapsto \{2, 5\}. & \end{array}$$

De donde, α hace que a cada arista de G_1 le corresponda una y sólo una arista de G_2, y viceversa. Esto es, α es una biyección entre los conjuntos de aristas.

De todo lo anterior, por definición, α es un isomorfismo, y por lo tanto G_1 y G_2 son isomorfos.

(b)



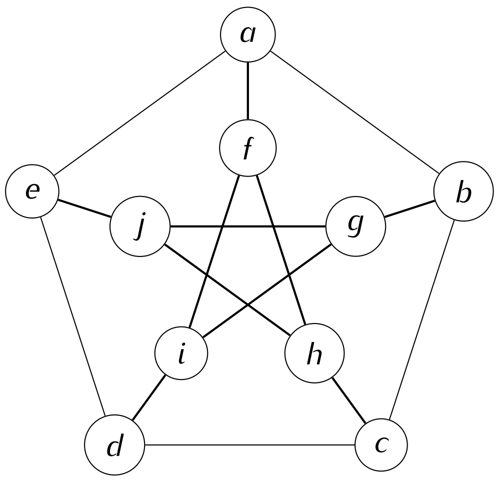
Rta: Observar que el primer grafo es un cubo. Si en el segundo grafo "levantamos" el cuadrado del centro, podemos deformar ese grafo a un cubo. Se deja al lector construir el isomorfismo α.

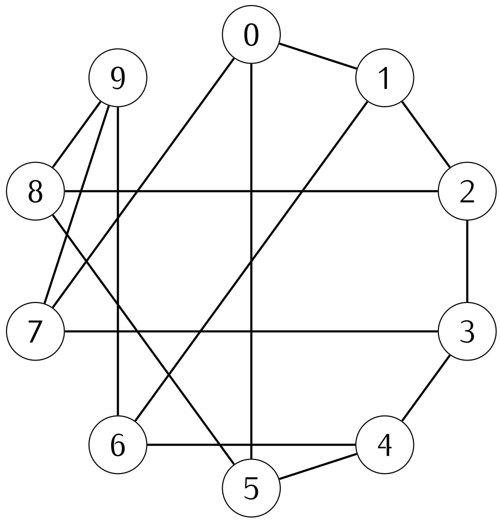
(7) Encuentre un isomorfismo entre los grafos dados por las siguientes listas (ambas listas especifican versiones de un famoso grafo conocido como *grafo de Petersen*).

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	a	a	b	c	d	e
e	c	d	e	d	h	i	f	f	g
f	g	h	i	j	i	j	j	g	h

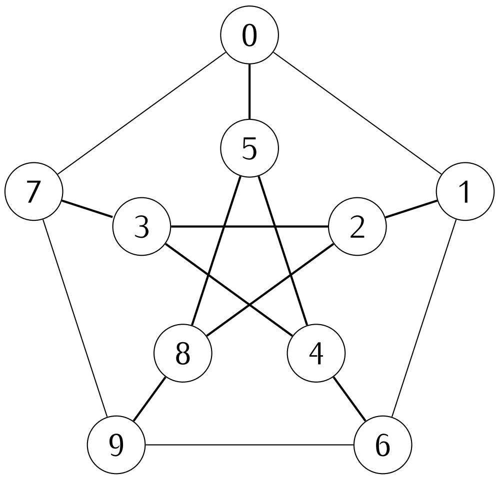
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	0	1	0	2	6
5	2	3	4	5	4	4	3	5	7
7	6	8	7	6	8	9	9	9	8

Rta: Podemos dibujar el primer grafo y el segundo grafo de la siguiente forma:





No es fácil darse cuenta que estos grafos son isomorfos. Sin embargo, reordenando el segundo grafo, por ejemplo buscando cuales vértices forman un 5-ciclo, obtenemos



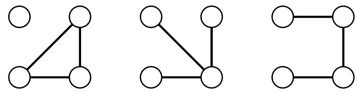
Luego el isomorfismo viene dado por

$$\begin{array}{lllll} a \to 0 & c \to 6 & e \to 7 & g \to 2 & i \to 8 \\ b \to 1 & d \to 9 & f \to 5 & h \to 4 & j \to 3 \end{array}$$

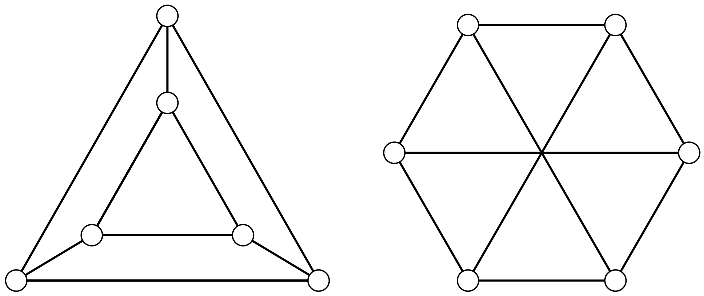
(8) (a) Encuentre todos los grafos de 5 vértices y 2 aristas no isomorfos entre sí.
Rta: Hay 2 posibilidades:
(i) las dos aristas no se tocan, es decir, por ejemplo las aristas podrían ser $\{v, v'\}, \{w, w'\}$, donde v, v', w, w' son todos distintos.

(ii) las dos aristas se tocan en un punto, por ejemplo $\{v, v'\}, \{v', w\}$, donde v, v', w son todos distintos.
Luego, hay solo dos grafos no isomorfos entre sí. Dibujándolos son:

(b) Encuentre todos los grafos de 4 vértices y 3 aristas no isomorfos entre sí.
Rta: Haciendo un analisis similar al del ítem anterior (por ejemplo considerar primero los grafos de 4 vértices y 2 aristas no isomorfos entre sí, y de ahí analizar lo que pasa si se agrega una arista más), obtenemos que hay solo tres grafos no isomorfos entre sí. Dibujándolos son:



(9) Pruebe que los siguientes grafos no son isomorfos.



Rta: Los grafos no son isomorfos pues el primero tiene un 3-ciclo y el segundo no lo tiene.

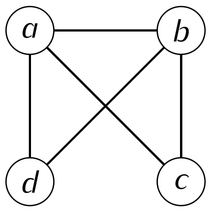
(10) Determinar la valencia máxima y la valencia mínima de cada grafo del ejercicio (1). Decir cual grafo es regular.
Rta:
(a) máxima 3, mínima 2, no regular.
(b) máxima 3, mínima 2, no regular.
(c) máxima 3, mínima 3, regular.
(d) máxima 3, mínima 3, regular.

(11) Escribir la lista de valencias de cada grafo del ejercicio (2). Es decir, escribir todos los valores que toman las valencias en cada grafo (sin repetir).
Rta:
(a) 3, 4.
(b) 1, 3, 4.
(c) 1, 2, 3.
(d) 2, 3, 4.
(e) 2, 3.
(f) 2, 3.
(g) 1, 2.

(12) Para cada una de las siguientes secuencias, encuentre un grafo que tenga exactamente las valencias indicadas o demuestre que tal grafo no existe.

a) $3, 3, 1, 1$

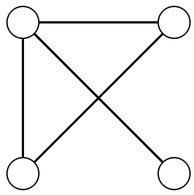
Rta: Como la suma de valencias $3 + 3 + 1 + 1 = 8$, el grafo debe tener 4 aristas. Como hay 4 vértices y dos de ellos tienen valencia 3, digamos a y b, de esos vértices salen aristas que llegan a todos los otros vértices. Es decir tenemos la siguiente situación:



Por lo tanto, los dos vértices restantes tienen valencia ≥ 2 y habrían 5 aristas, esto es contradictorio, lo cual nos dice que no puede haber un grafo con valencias $3, 3, 1, 1$.

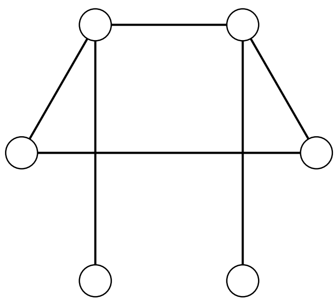
b) $3, 2, 2, 1$

Rta: Un grafo que cumple con esa secuencia es:



c) $3, 3, 2, 2, 1, 1$

Rta: El grafo tiene 6 vértices y $12/2 = 6$ aristas:



d) $4, 1, 1, 1, 1$

Rta: El grafo tiene 5 vértices y $8/2 = 4$ aristas. El único grafo posible es en el cual desde un vértice salen 4 aristas a los otros vértices.

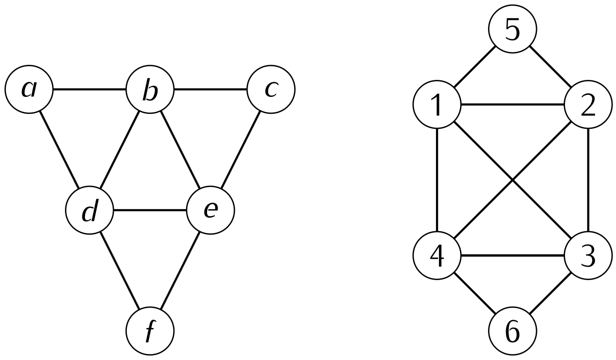
e) $7, 3, 3, 3, 2, 2$

Rta: El grafo tendría 6 vértices, por lo tanto la valencia máxima podría ser 5 y es imposible que uno de los vértices tenga valencia 7.

f) $4, 1, 1, 1$

Rta: Como la suma de las valencias $4 + 1 + 1 + 1 = 7$ es impar, no existe un grafo con esas valencias.

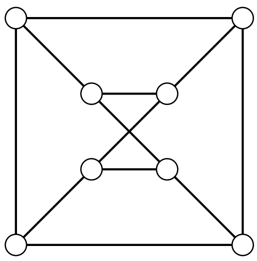
(13) Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



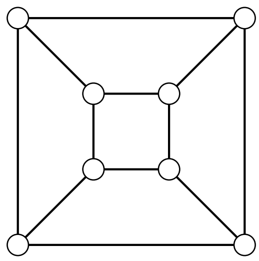
Rta: Denotemos por G_1 al grafo de la izquierda, y por G_2 al grafo de la derecha. Para cada $k \geq 0$, sea $n_i(k)$ el número de vértices de G_i que tienen valencia k $(i = 1, 2)$. Entonces $n_1(2) = 3$ y $n_2(2) = 2$. Así, por la Proposición 5.3.3. del Apunte, se sigue que G_1 y G_2 no pueden ser isomorfos.

(14) Encuentre una función del grafo G al H que preserve valencias. ¿Es un isomorfismo?.

G :



H :



Rta: Todos los vértices tienen valencia 3 en ambos grafos, así que cualquier función biyectiva entre los vértices del primer grafo y los vértices del segundo preserva valencias. Sin embargo, ninguna de estas funciones es un isomorfismo de grafos, pues el primer grafo tiene un 5-ciclo y el segundo no lo tiene.

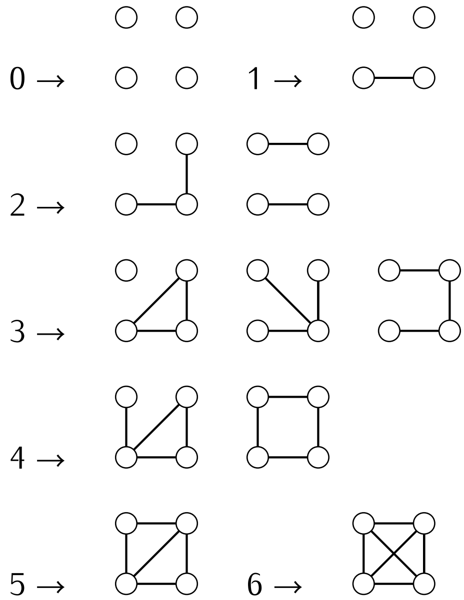
(15) Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos, y sea $\alpha : V \mapsto V'$ una función biyectiva tal que $\delta(v) = \delta(\alpha(v))\ \ \forall\ v \in V$.

a) ¿Puede afirmar que α es un isomorfismo?.
Rta: No. Los grafos del Ejercicio (9) son regulares de valencia 3, y no son isomorfos: el primero tiene 3-ciclos y el segundo no.

b) ¿Puede afirmarlo si $|V| = 3$ ó 4?.
Rta: Si $|\mathbf{V}| = \mathbf{3}$: los únicos grafos posibles son

La lista de valencias de estos grafos es $[0, 0, 0]$, $[1, 1, 0]$, $[1, 1, 2]$ y $[2, 2, 2]$, respectivamente. Por lo tanto, la lista de valencias determinan el grafo.

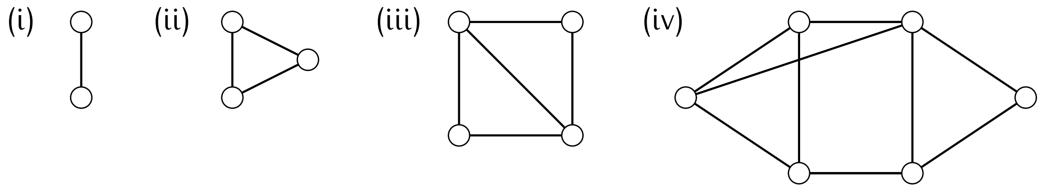
En el caso que $|\mathbf{V}| = \mathbf{4}$: tenemos un solo grafo sin aristas, un solo grafo con una arista, y si seguimos agregando aristas, podemos ver que hay 2 grafos con 2 aristas, 3 grafos con 3 aristas, 2 grafos con 4 aristas, un grafo con 5 aristas y un grafo con 6 aristas. Estos grafos son:



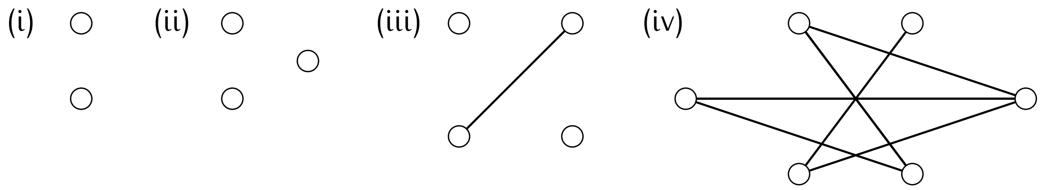
Es fácil verificar que las valencias determinan el grafo.

(16) Sea $G = (V, E)$ un grafo. El *grafo complemento* de G es $\overline{G} = \left(V, \overline{E}\right)$, donde $\overline{E}$ son todos los 2-subconjuntos de V que no están en E. Es decir, el grafo complemento tiene los mismos vértices que el grafo original y todas las aristas que le faltan para ser un grafo completo. Un propiedad importante del grafo complemento es: *Si los grafos G y H son isomorfos entonces $\overline{G}$ y $\overline{H}$ son isomorfos.*

(a) Halle el complemento de los siguientes grafos:



Rta:



(b) Si $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\delta(v_i) = d_i \;\; \forall \; i = 1, \ldots, n$, calcule las valencias del grafo complemento.
Rta: Si v es un vértice del grafo con valencia $\delta(v) = k$, por definición de grafo complemento, la valencia de v en el grafo complemento es $n-1-k$. Por lo tanto, si denotamos $\delta'(v)$ a la valencia de v en el grafo complemento, la respuesta del ejercicio es $\delta'(v_i) = n - 1 - d_i, \;\; \forall \; i = 1, \ldots, n$.

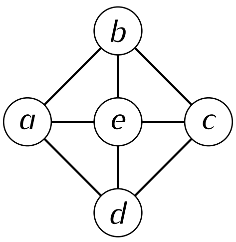
(c) Pruebe que los grafos del ejercicio (9) no son isomorfos usando los grafos complemento.
Rta: El grafo complemento del primer grafo es un 6-ciclo, y el grafo complemento del segundo son dos 3-ciclos (es decir tiene dos componentes conexas donde cada una es un K_3). Así, los grafos complemento no pueden ser isomorfos, y se concluye que los grafos originales tampoco lo son.

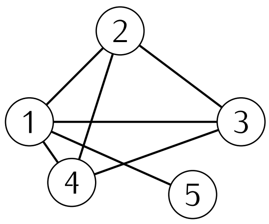
(17) Pruebe que si G es un grafo con más de un vértice, entonces existen dos vértices con la misma valencia.
Rta: Si G es un grafo de n vértices, con $n > 1$, entonces como de cada vértice pueden salir como máximo $n-1$ aristas, las valencias pueden ser $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

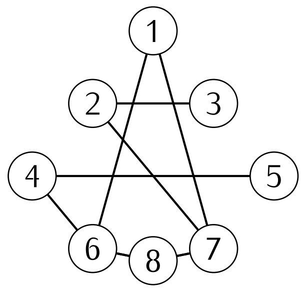
Supongamos primero que en el grafo no hay vértices con valencia 0, por lo tanto, las valencias posibles son $1, 2, \ldots, n-1$, que son $n-1$ números, y como tenemos n vértices, por el principio de las casillas (Conteo) hay una valencia que se repite.

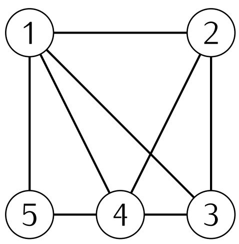
Ahora, Si G tiene dos vértices con valencia 0, entonces se repite una valencia y listo. Nos queda el caso de que hay un solo vértice de valencia 0. Si consideramos el subgrafo que se obtiene eliminando el vértice de valencia 0, obtenemos un grafo de $n-1$ vértices y cuyas valencias están en el rango $1, 2, \ldots, n-2$, es decir $n-2$ valores posibles. Por lo tanto, uno de los valores de las valencias se debe repetir.

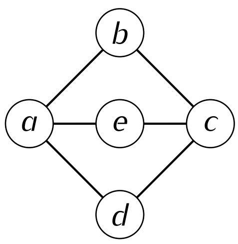
(18) Dados los siguientes grafos:

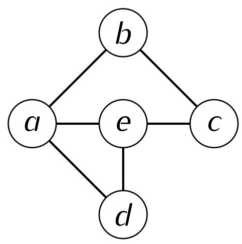
(1)


(2)


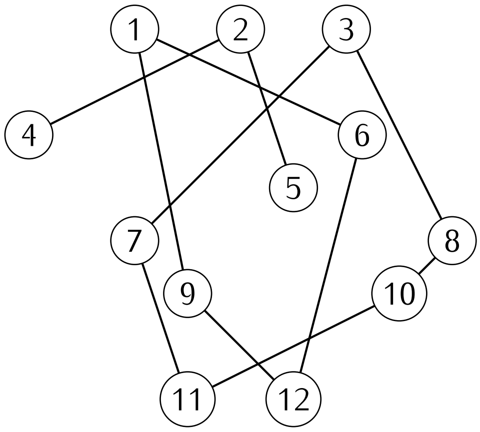
(3)


(4)


(5)


(6)


(7)



(a) Determine en cada caso si existen subgrafos completos de más de 2 vértices.
Rta: En (1), hay varios K_3: abe, bec, aed, ecd. En (2), el subgrafo con vértices $1, 2, 3, 4$ es un K_4. En (3) no hay grafos completos. En (4) hay varios subrafos isomorfos K_3, por ejemplo el formado por los vértices $1, 4, 5$. En (5) no hay subgrafos completos. En (6) hay un K_3 formado por los vértices a, e, d. En (7) no hay grafos completos.

(b) Para el grafo (1), dé todos los caminos que unen a con b.
Rta: ab, $adcb$, $adeb$, $adceb$, $adecb$, aeb, $aecb$, $aedcb$.

(c) Dé caminatas eulerianas en los grafos (4), (5) y (6).
Rta: En el grafo (4), $\delta(2) = 3$, $\delta(3) = 3$ y todas las demás valencias son pares. Luego, la caminata debe salir de 2 y llegar a 3, o viceversa. Una caminata posible es 234514213.
En el grafo (5) la caminata euleriana debe salir de a y llegar a c, o viceversa. Una caminata posible es: $abcdaec$.
En el grafo (6) la caminata euleriana debe salir de a y llegar a e, o viceversa. Una caminata posible es: $abcedae$.

(d) Para (2) y (3), decir si existen ciclos hamiltonianos.
Rta: En (2), no hay ciclos hamiltonianos que pasen por el vértice 5.
En (3) no hay ciclos hamiltonianos: observemos que un ciclo hamiltoniano puede empezar de cualquier vértice. Supongamos que (3) tiene un ciclo hamiltoniano y lo empezamos del vértice 3. El comienzo del ciclo es 327, luego podría ser (i) 3271 o (ii) 3278.
En el caso (i) solo puede continuar como 32716 y de ahí como 327168 o 327164. El 327168 solo puede continuar en 3271687 repitiendo vértice sin ser ciclo. El 327164 solo puede continuar en 3271645 y ahí terminar sin ser ciclo.
En el caso (ii) solo puede continuar como 32786 y luego como 3278645 terminando sin ser ciclo, o 3278617 repitiendo vértice sin ser ciclo.
En definitiva no hay ciclos hamiltonianos en (3).

(e) Determinar cuales de los siguientes pares de grafos son isomorfos:
(i) (4) y (2),
Rta: (2) tiene un vértice de valencia 1, mientras que en (4) todas las valencias son mayores que 1, por lo tanto (2) y (4) no pueden ser isomorfos.
(ii) (5) y (6),
Rta: En este caso la lista de valencias de ambos grafos es 2, 2, 2, 3, 3 y por lo tanto no podemos usar valencias para distinguir estos grafos. Ahora bien, en (6) tenemos el 3-ciclo aed, mientras que en (5) no hay 3-ciclos, por lo tanto (5) y (6) no son isomorfos.
(iii) (5) y (1).
Rta: En (1) hay un vértice de valencia 4 mientras que en (5) no lo hay, por lo tanto los grafos no son isomorfos.

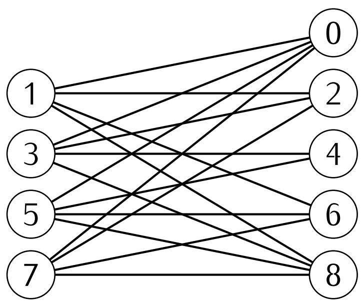
(f) Halle las componentes conexas del grafo (7).
Rta: Los subgrafos con vértices $\{1, 6, 12, 9\}$, $\{4, 2, 5\}$ y $\{3, 7, 11, 10, 8\}$ son las componentes conexas de (7).

(19) Dado el siguiente grafo

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	3	0	1	0	1
3	2	3	2	5	4	5	2	3
5	6	7	4		6	7	6	5
7	8		8		8		8	7

encuentre un ciclo hamiltoniano (si existe). Determine si existe una caminata euleriana, y en caso de ser así, encuentre una.

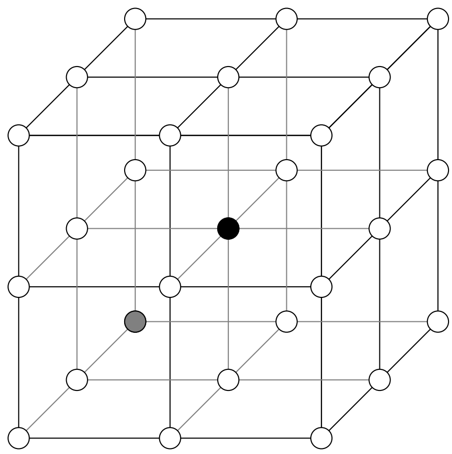
Rta: En general el problema de encontrar ciclos hamiltonianos es difícil de resolver, pero en este caso hay una pista que nos puede ayudar: observar que los vértices pares (es decir los vértices etiquetados con un número par, no tiene que ver con sus valencias) se relacionan solamente con vértices impares, y recíprocamente, los vértices impares solo son adyacentes a vértices pares. Podemos graficar el grafo poniendo todos los vértices impares en una columna a la izquierda y los pares a la derecha. Vemos como hay aristas que van de un costado al otro pero no hay aristas dentro de la misma columna, estos grafos se llaman *bipartitos*.



Ahora bien, más allá del dibujo, un ciclo hamiltoniano pasa por los 9 vértices y por lo tanto debe tener 9 aristas. Si partimos de la columna de impares (por ejemplo de 1), la primera arista va a la columna de pares, la segunda vuelve a la columna de impares, y así sucesivamente hasta que nos damos cuenta que una arista impar debe terminar en la columna de pares. Si partimos de la columna de pares el razonamiento es análogo y podemos concluir: *cualquier ciclo termina en la columna opuesta a la de donde comienza.* Por lo tanto no hay ciclos hamiltonianos.

Con respecto a las caminatas eulerianas, como solo hay dos vértices de valencia impar (2 y 6), hay caminatas eulerianas que van de 2 a 6 o viceversa. La cantidad de aristas total es $\frac{6 \cdot 4+2 \cdot 3+2}{2} = 16$, que debe ser el largo de la caminata. Una posible caminata es 21034567850723816.

(20) Un ratón intenta comer un $3 \times 3 \times 3$ cubo de queso. Él comienza en una esquina y come un subcubo de $1 \times 1 \times 1$, para luego pasar a un subcubo adyacente. ¿Podrá el ratón terminar de comer el queso en el centro?
Rta: Podemos modelar este problema como un grafo en el espacio, con coordenadas (x, y, z) para cada vértice, $0 \leq x, y, z \leq 2$, lo cual se logra pensando cada vértice como la representación de cada subcubo de $1 \times 1 \times 1$. El grafo sería como en el siguiente dibujo, donde el vértice de partida está en gris y el vértice de llegada en negro.



Más allá de la representación gráfica, lo que se pregunta en el ejercicio es sobre la existencia de un camino hamiltoniano desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$, es decir, un camino que comience en $(0, 0, 0)$, pase por todos los vértices y termine en $(1, 1, 1)$. Veremos que no podremos hacer el camino requerido por el ejercicio y que la forma de resolver el problema es similar a la del ejercicio anterior.

Primero definiremos un concepto muy sencillo: diremos que una 3-upla de enteros (x, y, z) es par si $x+y+z$ es un número par, en caso contrario diremos que es impar.

Ahora bien, podemos ver el pasaje de un vértice a otro como una operación algebraica, por ejemplo, la arista que une $(0, 0, 2)$ con $(0, 1, 2)$ se obtiene sumando $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 2)$. En general, para pasar de un nodo a otro debemos sumar o restar $(1, 0, 0)$ ó $(0, 1, 0)$ ó $(0, 0, 1)$, y es claro que al hacer esta operación cambiamos la paridad del vértice. Notemos que si pasamos de v_0 a v_1 y de v_1 a v_2 (v_0, v_1, v_2 vértices), entonces la parida de v_0 es igual a la paridad de v_2. A partir de esta observación, podemos concluir que si partimos de un vértice par y hacemos una caminata con un número par de aristas, entonces terminaremos en un vértice par.

Ahora, el ejercicio nos pregunta sobre un camino hamiltoniano desde $(0,0,0)$ hasta $(1,1,1)$, en este caso el camino hamiltoniano debería tener 26 aristas, pues pasa por 27 vértices, y por lo tanto, al partir de un vértice par, debería terminar en otro vértice par, sin embargo $(1,1,1)$ es un vértice impar, y concluimos que este camino hamiltoniano no puede existir.

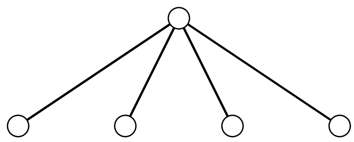
(21) Dé todos los árboles de 5 vértices no isomorfos.
Rta: Sabemos que un árbol (conexo por definición) con 5 vértices debe tener 4 aristas. Y que cualquier grafo con 4 aristas tendría un grado total (suma de todas las valencias) de 8.

Así que nuestro problema se reduce en encontrar árboles con 5 vértices cuyo grado total sea 8, y donde, cada uno de los vértices tiene valencia ≥ 1. Las posibles configuraciones de valencias son:

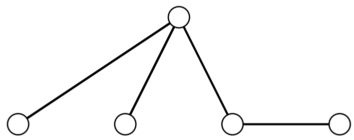
$$1,1,1,1,4$$
$$1,1,1,2,3$$
$$1,1,2,2,2$$

Veamos caso por caso.

$1,1,1,1,4$: es claro que en este caso hay un solo grafo posible.



$1,1,1,2,3$: se puede construir a partir del anterior "cambiando" una arista de lugar



y vemos que no hay más.

$1,1,2,2,2$: en este caso solo podemos tener