MATEMATICA DISCRETA II-2025, Práctico 1
(REPASO DE DFS Y BFS)

Vieron DFS y BFS en Algoritmos II. Repasen los conceptos y hagan los siguientes ejercicios.

(1) Sea G el grafo definido por la siguiente lista de adyacencia:

a	b	c	d	e	f	g	h
b	a	b	a	b	g	c	a
d	c	d	b			f	g
h	d	g	c			h	
	e						

a) Use el metodo DFS en G empezando por g. (A partir de alli, cada vez que una elección sea posible, elija por orden alfabetico).
b) ¿Es G conexo?
c) Idem que a) pero empezando en c.
d) Idem que a) pero usando el metodo BFS.
e) Idem que c) pero usando el metodo BFS.

Coloreo

Recordatorio general: si se pide el número cromático de un grafo y Ud. dice que $\chi(G) = k$, entonces debe hacer DOS COSAS: 1) dar un coloreo propio con k colores y 2) probar que no hay uno con $k-1$. Si en el parcial hacen una sola y creen que con eso basta,tendran solo 0,1 puntos en el ejercicio.

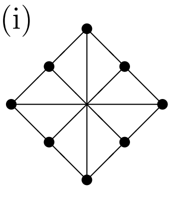
(2) El grafo de Petersen viene dado por la siguiente lista de adyacencia:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	b	c	d	a	b	c	d	e
e	c	d	e	a	h	i	j	f	g
f	g	h	i	j	i	j	f	g	h

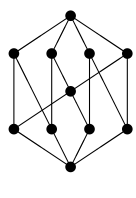
a) Correr Greedy en el grafo de Petersen en el orden afcegdbhij.
b) Correr Greedy en el grafo de Petersen en el orden alfabetico.
c) Calcular el numero cromatico del grafo de Petersen.

(3) Hallar el número cromático de los siguientes grafos.

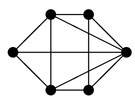
(i)



(ii)



(iii)



(4) Dado r natural, sea G el grafo formado por vertices:

$$\{x_i, y_i, z_i, w_i : i = 0, 1, 2, ..., 2r\} \cup \{p\}$$

y lados:

$$\{x_i x_{(i+1)\mathrm{mod} 2r+1} : i = 0, ..., 2r\} \cup \{x_i y_i, x_i z_i, y_i z_i, y_i w_i, z_i w_i, w_i p : i = 0, ..., 2r\}$$

Es decir, es un C_{2r+1} con unos triangulos de vertices x_i, y_i, z_i mas otros triangulos y_i, z_i, w_i mas los lados $w_i p$.

Probar que $\chi(G) = 4$.

(5) En la isla de los caballeros y los picaros (recordemos que los caballeros siempre dicen la verdad y los picaros siempre mienten) hay una fiesta para n (≥ 10) personas de la isla, cada una de las cuales sabe quienes de entre ellos son caballeros y quienes picaros. Durante la fiesta, algunas personas se dan la mano. Al termino de la fiesta, se le preguntó a cada persona a cuantos **caballeros** le habia dado la mano. Las n respuestas fueron diferentes, entre 0 y n incluidos ambos, (por lo tanto hay algun número entre 1 y $n-1$ que nadie contestó).

Sea G el grafo cuyos vertices son esas n personas, y hay un lado entre dos personas si se dieron la mano en la fiesta. Sea H el subgrafo de G cuyos vertices son los caballeros (con los lados inducidos como subgrafo de G).

Demostrar que hay al menos un caballero y al menos un picaro y calcular $\chi(H)$.

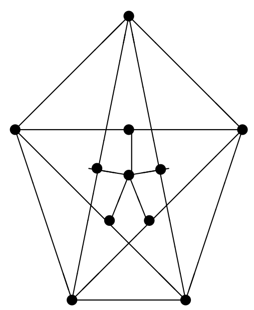
(6) Dado n natural, sea G_n el grafo cuyos vertices son los números $1, 2, ..., n$ y cuyos lados son los $\{i, j\}$ tales que $mcd(i, j) = 1$. Calcular $\chi(G_{100})$.

(7) Para $r \geq 2$, el grafo M_r se obtiene del grafo C_{2r} agregando las aristas que unen vértices opuestos. (i.e., i con $r + i$ para $i = 1, 2, ..., r$). Un ejemplo se puede ver en el ejercicio 3, item (i), donde se tiene M_4. Calcular $\chi(M_r)$. (Deberá distinguir entre los casos r impar, $r = 2$ y r par > 2).

(8) Sea G el grafo cuyos vertices son los 1225 casilleros de un tablero cuadrado con 35 filas y 35 columnas. Dos vertices son vecinos si poniendo una reina de ajedrez en cada uno de los casilleros las reinas se atacan mutuamente. (es decir, si los casilleros estan en una misma fila, columna o diagonal, donde diagonal no es necesariamente una de las diagonales principales). Probar que $\chi(G) = 35$.

(9) En el teórico vimos un ejemplo de un grafo bipartito con n vertices, con n par, tal que Greedy usa $n/2$ colores a pesar de ser bipartito.
   (a) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde Greedy use $n/2 + 1$ colores, con n par.
   (b) Dé un ejemplo de un grafo bipartito donde Greedy use $(n+1)/2$ colores con n impar.

(10) Hallar el número cromático del siguiente grafo.



(11) Similar al anterior pero ahora con un C_7:

El grafo G tiene vertices $x_i, i = 0, ..., 6$ con lados $\{x_i x_{(i+1)\text{mod}7}\}_{i=0,...,6}$ (i.e., un C_7) y ademas vértices $y_i, i = 0, ..., 6$ con lados $\{y_i x_{(i\pm1)\text{mod}7}\}_{i=0,...,6}$ y un vértice extra p con lados py_i, $i = 0, ..., 6$.

(12) Para todos los casos siguientes, G es un grafo que YA ESTA coloreado POR GREEDY (en algún orden). Sea t el numero de colores que tiene G y sean V_i los vertices coloreados con i.

(a) Probar que si se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_1 luego los de V_2, etc hasta V_t, en ese orden entonces corriendo Greedy con este nuevo orden se colorea a cada vértice con exactamente el mismo color que tenia antes.

(b) Supongamos ahora que $t = 5$ y ordene los vértices poniendo primero los vertices de V_1 luego los de V_2, luego los de V_3, luego los de V_5 y al final los vértices de V_4.

(i) Probar que corriendo Greedy con este nuevo orden se colorea a G con exactamente 5 colores.

(ii) Probar que nunca es cierto que cada vértice tenga exactamente el mismo color que tenia antes (esto deberia ser obvio)

(iii) De un ejemplo donde no sea cierto que los vertices de V_4 tengan todos el color 5.

(c) Supongamos que $t = 5$ y se ordenan los vértices poniendo primero los vertices de V_1 luego los de V_2, luego los de V_4, luego los de V_3 y al final los vértices de V_5. De un ejemplo donde con el nuevo orden G sea coloreado por Greedy con 4 colores.

(13) Dar un algoritmo polinomial que resuelva el siguiente problema:

Input: Un grafo G que se garantiza que es conexo no regular con $\Delta \leq 3$.

Output: $\chi(G)$ y un coloreo propio con $\chi(G)$ colores.

(nota: para probar que es polinomial debe probar su complejidad).

(14) Recordemos que $\mathbb{Z}_n$ denota el conjunto $\{0, 1, ..., n - 1\}$.

Dados $p, q \geq 3$ definimos el grafo $G_{p,q}$ como el grafo con conjunto de vertices $v_{i,j}$ con $i \in \mathbb{Z}_p$, $j \in \mathbb{Z}_q$ y cuyo conjunto de lados es $E = E_1 \cup E_2$ donde E_1, E_2 son los siguientes: (en los subindices, la operación de suma en el primer índice es módulo p, y en el segundo modulo q, es decir, donde dice i+1 es (i+1)$mod\ p$ y donde dice j+1 es (j+1)$mod\ q$)

$$E_1 = \{v_{i,j}v_{i+1,j} : i \in \mathbb{Z}_p, j \in \mathbb{Z}_q\}$$
$$E_2 = \{v_{i,j}v_{k,j+1} : i, k \in \mathbb{Z}_p, j \in \mathbb{Z}_q\}$$

Calcular $\chi(G_{p,q})$ para todos los valores posibles de $p \geq 3$ y $q \geq 3$.

Ayuda: $\chi(G_{p,q})$ puede tomar 6 valores diferentes dependiendo de p y q. La mayoria de los casos son faciles, pero hay un par que no.