

Práctico 2: Especificación, Derivación y Verificación de Programas Funcionales

Algoritmos y Estructuras de Datos I
2^{do} cuatrimestre 2023

Esta guía tiene como objetivo obtener las habilidades necesarias para llevar adelante un proceso de derivación o verificación de programas recursivos a partir de especificaciones formales.

Completan esta guía algunos ejercicios para demostrar tanto por inducción sobre naturales, como por inducción **estructural** sobre listas. Se busca mejorar la habilidad para utilizar esta técnica de prueba que es central para la tarea de cálculo de programas recursivos.

Los ejercicios de cálculo de programas tienen una dificultad creciente: en los primeros, la derivación o verificación se obtiene de manera directa a través de una demostración inductiva. Los ejercicios sucesivos son más complejos y requieren el uso de técnicas más avanzadas: modularización y generalización.

1. Dado el **programa**

$$\frac{\text{sum} : [Num] \rightarrow Num}{\begin{array}{l} \text{sum}[] \doteq 0 \\ \text{sum}(x \triangleright xs) \doteq x + \text{sum}.xs \end{array}}$$

- ¿Qué hace esta función? Escriba en lenguaje natural el **problema** que resuelve.
 - Escriba una **especificación** de la función con una expresión cuantificada.
 - Verifique** que esta especificación vale para toda lista xs .
 - En la vida real, ¿en qué orden se realiza la implementación del **programa**, el enunciado del **problema**, la redacción de la **especificación** y el proceso de **verificación**?
 - Ahora **derive** la definición de la función a partir de su especificación.
¿Esta derivación es parecida a la demostración en el punto 1c?
2. A partir de las siguientes especificaciones, dar el tipo de cada función y *derivar* las soluciones algorítmicas correspondientes.
- $\text{sum_cuad}.xs = \langle \sum i : 0 \leq i < \#xs : xs!i * xs!i \rangle$
 - $\text{iga}.e.xs = \langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : xs!i = e \rangle$
 - $\text{exp}.x.n = x^n$
 - $\text{sum_par}.n = \langle \sum i : 0 \leq i \leq n \wedge \text{par}.i : i \rangle$
a donde $\text{par}.i \doteq i \bmod 2 = 0$.
 - $\text{cuántos}.p.xs = \langle N i : 0 \leq i < \#xs : p.(xs!i) \rangle$
 - $\text{busca}.e.xs = \langle \text{Min } i : 0 \leq i < \#xs \wedge xs!i = e : i \rangle$
3. Para todos los ítems del ejercicio anterior, dar un ejemplo de uso de la función, es decir: elegir valores concretos para los parámetros y calcular el resultado usando la solución algorítmica obtenida. Las listas deben tener por lo menos tres elementos.
4. Derivar las siguientes funciones.

- a) $f : Num \rightarrow Nat \rightarrow Num$ computa la suma de potencias de un número, esto es

$$f.x.n = \langle \sum i : 0 \leq i < n : x^i \rangle .$$

- b) $pi : Nat \rightarrow Num$ computa la aproximación del número π

$$pi.n = 4 * \langle \sum i : 0 \leq i < n : (-1)^i / (2 * i + 1) \rangle$$

Ayuda: Modularizar dos veces. La segunda con la función *exp* del ejercicio 2c

- c) $f : Nat \rightarrow Nat$ computa el cubo de un número natural x utilizando únicamente sumas. La especificación es muy simple: $f.x = x^3$.
- Ayuda:** Usar inducción y modularización varias veces
- d) $f.xs = \langle \exists i : 0 < i \leq \#xs : \langle \prod j : 0 \leq j < \#(xs \downarrow i) : (xs \downarrow i)!j \rangle = xs!(i-1) \rangle$
5. Especificar formalmente utilizando cuantificadores cada una de las siguientes funciones descriptas informalmente. Luego, *derivar* soluciones algorítmicas para cada una.
- a) $iguales : [A] \rightarrow Bool$, que determina si los elementos de una lista de tipo A son todos iguales entre sí. Suponga que el operador $=$ es la igualdad para el tipo A .
- b) $minimo : [Int] \rightarrow Int$, que calcula el mínimo elemento de una lista **no vacía** de enteros.
- Nota:** La función no debe devolver $\pm\infty$.
- c) $creciente : [Int] \rightarrow Bool$, que determina si los elementos de una lista de enteros están ordenados en forma creciente.
- d) $prod : [Num] \rightarrow [Num] \rightarrow Num$, que calcula el producto entre pares de elementos en iguales posiciones de las listas y suma estos resultados (producto punto). Si las listas tienen distinto tamaño se opera hasta la última posición de la más chica.
6. A partir de las siguientes especificaciones expresar en lenguaje natural qué devuelven las funciones, agregarles su tipo y derivarlas:
- a) $psum.xs = \langle \forall i : 0 \leq i \leq \#xs : sum.(xs \uparrow i) \geq 0 \rangle$, con sum la función del ejercicio 1.
- b) $sum_ant.xs = \langle \exists i : 0 \leq i < \#xs : xs!i = sum.(xs \uparrow i) \rangle$
- c) $sum8.xs = \langle \exists i : 0 \leq i \leq \#xs : sum.(xs \uparrow i) = 8 \rangle$.
- d) $f.xs = \langle \text{Max } i : 0 \leq i < \#xs \wedge sum.(xs \uparrow i) = sum.(xs \downarrow i) : i \rangle$.
7. Especificar formalmente utilizando cuantificadores cada una de las siguientes funciones descriptas informalmente. Luego, *derivar* soluciones algorítmicas para cada una.
- a) $cuad : Nat \rightarrow Bool$, que dado un natural determina si es el cuadrado de un número.
- b) $n8 : [Num] \rightarrow Nat$, que cuenta la cantidad de segmentos iniciales de una lista cuya suma es igual a 8.
8. **Segmentos de lista:** Para las siguientes expresiones cuantificadas:
- a) $\langle \forall as, bs : xs = as \uparrow\uparrow bs : sum.as \geq 0 \rangle$
- b) $\langle \text{Min } as, bs, cs : xs = as \uparrow\uparrow bs \uparrow\uparrow cs : sum.bs \rangle$
- c) $\langle \text{N } as, b, bs : xs = as \uparrow\uparrow (b \triangleright bs) : b > sum.bs \rangle$
- d) $\langle \text{Max } as, bs, cs : xs = as \uparrow\uparrow bs \wedge ys = as \uparrow\uparrow cs : \#as \rangle$
- Calcular los rangos como conjuntos de tuplas. Tomar $xs = [9, -5, 1, -3]$, $ys = [9, -5, 3]$.
 - Calcular los resultados para las listas dadas.
 - Expresar en lenguaje natural qué significa cada expresión.
9. Expresar utilizando cuantificadores las siguientes sentencias del lenguaje natural:
- a) La lista xs es un segmento inicial de la lista ys .
- b) La lista xs es un segmento de la lista ys .
- c) La lista xs es un segmento final de la lista ys .
- d) Las listas xs e ys tienen en común un segmento no vacío.
- e) La lista xs de numeros enteros tiene la misma cantidad de elementos pares e impares.
- f) La lista xs posee un segmento **no** inicial y **no** final cuyos valores son mayores a los valores del resto de la misma.

10. Derivar funciones recursivas a partir de cada una de las especificaciones que escribiste para los ejercicios 9a y 9b.
11. Derivar las funciones especificadas como:
- a) $\text{sumin}.xs = \langle \text{Min } as, bs, cs : xs = as ++ bs ++ cs : \text{sum}.bs \rangle$
(suma mínima de un segmento).
 - b) $\text{f}.xs = \langle \text{N } as, bs, cs : xs = as ++ bs ++ cs : 8 = \text{sum}.bs \rangle$
(cantidad de segmentos que suman eso).
 - c) $\text{maxiga}.e.xs = \langle \text{Max } as, bs, cs : xs = as ++ bs ++ cs \wedge \text{iga}.e.bs : \#bs \rangle$
(máxima longitud de iguales a e)
donde *iga* es la función del ejercicio 2b.
12. Describir en lenguaje natural y dar el *tipo* de cada una de las siguientes funciones especificadas formalmente:
- a) $\text{f}.xs = \langle \text{N } i, j : 0 \leq i < j < \#xs : xs!i = xs!j \rangle$
 - b) $\text{g}.xs = \langle \text{Max } p, q : 0 \leq p < q < \#xs : xs!p + xs!q \rangle$
 - c) $\text{h}.xs = \langle \text{N } k : 0 \leq k < \#xs : \langle \forall i : 0 \leq i < k : xs!i < xs!k \rangle \rangle$
 - d) $\text{k}.xs = \langle \forall i, j : 0 \leq i \wedge 0 \leq j \wedge i + j = \#xs - 1 : xs!i = xs!j \rangle$
 - e) $\text{l}.xs = \langle \text{Max } p, q : 0 \leq p \leq q < \#xs \wedge \langle \forall i : p \leq i < q : xs!i \geq 0 \rangle : q - p \rangle$
13. Derivar la función definida en el ejercicio 12b.
14. Expresar utilizando cuantificadores las siguientes sentencias del lenguaje natural:
- a) El elemento *e* ocurre un número par de veces en la lista *xs*.
 - b) El elemento *e* ocurre en las posiciones pares de la lista *xs*.
 - c) El elemento *e* ocurre únicamente en las posiciones pares de la lista *xs*.
 - d) Si *e* ocurre en la lista *xs*, entonces *l* ocurre en alguna posición anterior en la misma lista.
 - e) Existe un elemento de la lista *xs* que es estrictamente mayor a todos los demás.
 - f) Cualquier valor *x* que anula la función *f* (es decir que $f.x = 0$) ocurre en la lista *xs*.
 - g) En la lista *xs* solo ocurren valores que anulan la función *f*.
15. Derivar funciones recursivas a partir de cada una de las especificaciones que escribió para el ejercicio 14.

Ejercicios extra

16. Sea *fib* la definición recursiva estándar para la función de Fibonacci. Derivá la función de Fibolucci, $\text{Fbl} : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$, especificada como:
- $$\text{Fbl}.n = \langle \sum i : 0 \leq i < n : \text{fib}.i \times \text{fib}.(n - i) \rangle$$
17. Derivar la función recursiva a partir de la especificación del ejercicio 9c.
18. Especificá formalmente utilizando cuantificadores cada una de las siguientes funciones descritas informalmente. Luego, derivá soluciones algorítmicas para cada una.
- a) $\text{listas_iguales} : [A] \rightarrow [A] \rightarrow \text{Bool}$, que determina si dos listas son iguales, es decir, contienen los mismos elementos en las mismas posiciones respectivamente.
 - b) $\text{primo?} : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}$, que determina si un número es primo.
19. Derivar las funciones a partir de las especificaciones en el ejercicio 12.
20. [Torres de Hanoi]. Se tienen tres postes numerados 0, 1 y 2, y *n* discos de distinto tamaño. Inicialmente se encuentran todos los discos ubicados en el poste 0, ordenados según el tamaño con el disco más grande en la base. El problema consiste en llevar todos los discos al poste 2, con las siguientes restricciones:

- a) Se puede mover sólo un disco a la vez
- b) Sólo se puede mover el disco que se encuentra mas arriba en algún poste.
- c) No se puede colocar un disco sobre otro de menor tamaño.

Resolvé los siguientes items:

- a) Sea $B = \{0, 1, 2\}$. Definí la función $hanoi : B \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow Nat \rightarrow [(B, B)]$ tal que $hanoi.a.b.c.n$ calcula la secuencia de *movimientos* para llevar n discos desde el poste a hacia el poste c , utilizando posiblemente el poste b de forma auxiliar. Un *movimiento* es un par (B, B) cuya primer componente indica el poste de salida, y la segunda el poste de llegada.

Ayuda: Por ejemplo, $hanoi$ para los postes 0, 1 y 2, con dos discos es: $hanoi.0.1.2.2 = [(0, 1), (0, 2), (1, 2)]$

- b) Demostrá $\#hanoi.a.b.c.n = 2^n - 1$
- c) ¿En qué movimiento se cambia de poste por primera vez el disco de mayor tamaño?