

Análisis Matemático II / Cálculo II

Lic. en Ciencias de la Computación / Matemática Aplicada - 2024

Práctico 1 - Integración

0) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (33 - 2x)^{\frac{4}{3}}$	d) $f(x) = \ln(7 - x)$	g) $f(x) = \ln(\cos(x) + \sin(x))$
b) $f(x) = e^{2x}$	e) $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 4)$	h) $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
c) $f(x) = 2^x$	f) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$	

1. Dar las primitivas de las siguientes funciones:

a) $g(x) = x^3 - 5x$	c) $g(x) = \sin(2x)$	e) $g(x) = x^{3/2}$
b) $g(x) = e^{0,3x}$	d) $g(x) = 2x \cos(x^2)$	f) $g(x) = \sqrt{x+2}$

2. Encontrar la primitiva F de $f(x) = \frac{3}{x}$ tal que $F(1) = 5$.

3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int e^{2x} dx$	d) $\int \frac{dx}{7-x}$	g) $\int \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$
b) $\int 2^x dx$	e) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx$	h) $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$
c) $\int \sqrt[3]{33-2x} dx$	f) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$	

Ayuda: usa el Ejercicio 0)

4. Sin realizar el cálculo de la integral, justificar las siguientes igualdades y desigualdades:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x) dx = 0$	b) $\pi/6 \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin(x) dx \leq \pi/3$
c) $\int_1^2 \sqrt{5-x} dx \geq \int_1^2 \sqrt{x+1} dx$	

5. Calcular la derivada de las siguientes funciones donde sea posible:

a) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t^2)}{1 + \cos^2 t} dt$	b) $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^{t^2} + 1}{\sqrt{1-t^2}} dt$	c) $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \frac{t+1}{\sqrt{1+2t}} dt$
--	--	--

6. Calcular las siguientes integrales usando el Teorema Fundamental del Cálculo:

a) $\int_1^2 2^x dx$	c) $\int_1^5 \frac{dx}{7-x}$	e) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$
b) $\int_3^5 \sqrt[3]{33-2x} dx$	d) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx$	f) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$

7. Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \int x e^x dx & \text{d)} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2(x)} & \text{g)} \int_0^2 x \ln(x^2 + 4) dx \\
\text{b)} \int_{-1}^1 (1 - 2x) e^{-2x} dx & \text{e)} \int_3^9 x \ln(x - 1) dx & \text{h)} \int_0^2 e^{-x} \sin(2x) dx \\
\text{c)} \int x^2 \cos(x) dx & \text{f)} \int_3^9 \ln(x^2 + 1) dx & \text{i)} \int_0^{2\pi} \cos^4(x) dx
\end{array}$$

8. Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx & \text{d)} \int \frac{1}{x \ln(x)} dx & \text{g)} \int e^x (1 - e^x)^{-1} dx \\
\text{b)} \int \sin(\sqrt{x}) dx & \text{e)} \int_0^1 \arccos(x) dx & \text{h)} \int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \\
\text{c)} \int_0^1 (2x + 1) \ln(x + 1) dx & \text{f)} \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx & \text{i)} \int \sin^3(x) dx
\end{array}$$

9. Trazar la región limitada por las curvas dadas y calcular su área:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} y = 4x^2, \quad y = x^2 + 3 \\
\text{b)} y = \cos(x), y = \sin(x), \quad x = 0, x = \pi/2. \\
\text{c)} y = |x|, \quad y = (x + 1)^2 - 7, \quad x = -4
\end{array}$$

10. Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \int_2^4 \frac{x^2 + 4x + 24}{x^2 - 4x + 8} dx & \text{b)} \int_0^2 \frac{x - 1}{x^2 + 4} dx & \text{c)} \int_2^4 \frac{x}{x^3 - 3x + 2} dx
\end{array}$$

11. La sustitución $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, o equivalentemente, $x = 2 \arctan(t)$, transforma cualquier integral que involucre sólo senos y cosenos vinculados por suma, producto o cociente, en la integral de una función racional. Verificar que con esta sustitución resulta

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt.$$

Utilizar esta sustitución en los siguientes casos:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \int_0^{\pi/2} \frac{2}{1 + \cos(x)} dx & \text{b)} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)} dx
\end{array}$$

12. Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \int \tan^2(x) dx & \text{c)} \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}} & \text{e)} \int \frac{x + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx
\end{array}$$

13. Determinar si las siguientes integrales impropias convergen y en tal caso calcularlas.

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s + 1}} ds & \text{b)} \int_0^2 \frac{1}{(1 - y)^{2/3}} dy & \text{c)} \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx
\end{array}$$

14. Determinar si cada una de las siguientes integrales impropias converge o no.

$$\text{a) } \int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s}-1} ds$$

$$\text{c) } \int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}}$$

$$\text{e) } \int_0^4 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$$

Ejercicios adicionales

1. Encontrar la primitiva F de $f(x) = x + \cos(x)$ que pasa por el punto $(0, 4)$.
2. Sin realizar el cálculo de la integral, justificar las siguientes igualdades y desigualdades:

$$\text{a) } \int_{-5}^5 x^4 dx = 2 \int_0^5 x^4 dx$$

$$\text{b) } \int_0^4 (x-2)^3 dx = 0$$

$$\text{c) } \int_{-99}^{99} (ax^3 + bx^2 + cx) dx = 2 \int_0^{99} bx^2 dx$$

3. Trazar la región limitada por las curvas dadas y calcular su área:

$$\text{a) } y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 1, \quad x = 2$$

$$\text{b) } y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = -2, \quad x = 1$$

$$\text{c) } y = x + 6, \quad y = x^3, \quad x = -2, \quad 2y + x = 0$$

4. Usar el cálculo integral para calcular el área de los triángulos con vértices:

$$\text{a) } (0,0); (1,8); (4,3).$$

$$\text{b) } (-2,5); (0,-3); (5,2).$$

5. Calcular el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la tangente a ella en el punto $(1,1)$ y el eje x .

6. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1} dx$$

$$\text{b) } \int_2^3 \frac{1}{x^2+3x+2} dx$$

$$\text{c) } \int \frac{x^3}{(x^2+1)^3} dx$$

Ayuda: en el inciso (c) sustituya $u = x^2 + 1$.

7. Calcular las siguientes integrales:

$$\text{b) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$\text{d) } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{12x-8-3x^2}}$$

$$\text{f) } \int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos(2x)} dx$$

8. Determinar si las siguientes integrales impropias convergen y en tal caso calcularlas.

$$\text{d) } \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$$

$$\text{e) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{f) } \int_0^1 \ln(x) dx$$

9. Determinar si cada una de las siguientes integrales impropias converge o no.

$$\text{b) } \int_0^{\infty} e^{-x} \cos(x) dx$$

$$\text{d) } \int_0^1 x \ln(x) dx$$

$$\text{f) } \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2} dx$$