

## Cálculo II / Análisis II

Lic. en Cs. de la Computación / Lic. Matemática Aplicada - 2024

### Práctico 5 - Funciones de varias variables

#### Dominios y gráficos

(1) Determinar el dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  de las siguientes funciones y graficarlo.

(a)  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{xy}$

(c)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

(d)  $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$

(2) *Bosquejar* la gráfica de las siguientes funciones.

(a)  $f(x, y) = y^2$ , donde  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$

(b)  $f(x, y) = x^2 + y^2$  (paraboloide)

(c)  $f(x, y) = x^2 - y^2$  (silla de montar)

(d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  (cono)

#### Derivadas parciales

(3) Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones y evaluarlas en el punto dado.

(a)  $f(x, y) = x - y$ ,  $p = (3, 2)$

(d)  $w = e^{y \ln z}$ ,  $p = (e, 2, e)$

(b)  $f(x, y, z) = \frac{xz}{y+z}$ ,  $p = (1, 1, 1)$

(e)  $f(x, y, z) = x^3 y^4 z^5$ ,  $p = (0, -1, -1)$

(c)  $f(x, y) = xy + x^2$ ,  $p = (2, 0)$

(f)  $w = \ln(1 + e^{xyz})$ ,  $p = (2, 0, -1)$

(4) Obtener las ecuaciones de la recta normal al plano tangente y del plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos dados.

(a)  $f(x, y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right)$ , en  $p = (\pi, 4)$ .

(b)  $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ , en  $p = (1, 2)$ .

(5) Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de la función  $f$  que pasa por el punto dado.

(a)  $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ , en  $p = (1, -1, 1)$ .

(b)  $f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z)$ , en  $p = (\pi/2, \pi, \pi)$ .

(6) Para las siguientes funciones  $f(x, y)$  encontrar:

(a) El gradiente en el punto  $p$  indicado.

(b) Una ecuación del plano tangente al gráfico de  $f$  en el punto dado.

(c) una ecuación de la recta tangente a la curva de nivel que pasa por el punto dado.

(a)  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ , en  $p = (1, 1)$ .

(b)  $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ , en  $p = (0, 2)$ .

(7) Calcular la derivada direccional de  $f$  en el punto  $P$  y en la dirección del vector  $\vec{u}$  dado.

(a)  $f(x, y) = xe^{2y}$ ,  $P = (2, 0)$ ,  $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

(b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ ,  $P = (1, 3, 2)$ ,  $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ .

(8) ¿En qué dirección debemos movernos, partiendo de  $(1, 1)$ , para obtener la más alta y la más baja tasa de crecimiento de la función  $f(x, y) = (x + y - 2)^2 + (3x - y - 6)^2$ ?

### Regla de la cadena

(9) Calcular las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.

(a)  $z = x^2(1 + y^2)$

(b)  $w = x^3y^3z^3$

(10) Aplique la regla de la cadena para hallar  $dz/dt$

(a)  $z = x^2 + y^2 + xy$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = e^t$

(c)  $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ ,  $x = \ln t$ ,  $y = \cos t$

(b)  $z = \cos(x + 4y)$ ,  $x = 5t^4$ ,  $y = 1/t$

(d)  $\arctan(y/x)$ ,  $x = e^t$ ,  $y = 1 - e^{-t}$

(11) Sea  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$  donde  $x = e^{st}$ ,  $y = 1 + s^2 \cos t$ . Calcular  $\frac{\partial u}{\partial t}$  usando la regla de la cadena y comparar con el resultado que se obtiene reemplazando  $x$  e  $y$  en  $u$  y luego derivar.

(12) Sea  $z = f(x, y)$ ,  $x = 2s + 3t$ ,  $y = 3s - 2t$ . Calcular:

(a)  $\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}$

(b)  $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$

(c)  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$

### Puntos críticos

(13) Encontrar y clasificar los puntos críticos de las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

(b)  $f(x, y) = \frac{xy}{2 + x^2 + y^2}$

(14) Encontrar los valores máximos y mínimos locales de  $f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}$

(15) Encontrar los valores máximos y mínimos locales de  $f(x, y) = xye^{-x^2 - y^4}$

(16) Calcular la distancia más corta desde el punto  $(1, 0, -2)$  al plano  $x + 2y + z = 4$ .

(17) Calcular los valores máximo y mínimo relativos o puntos silla de las siguientes funciones

(a)  $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

(c)  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

(b)  $f(x, y) = x^3y + 12x^2 + 8y$

(d)  $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x$  en  $1 \leq x \leq 7$ .