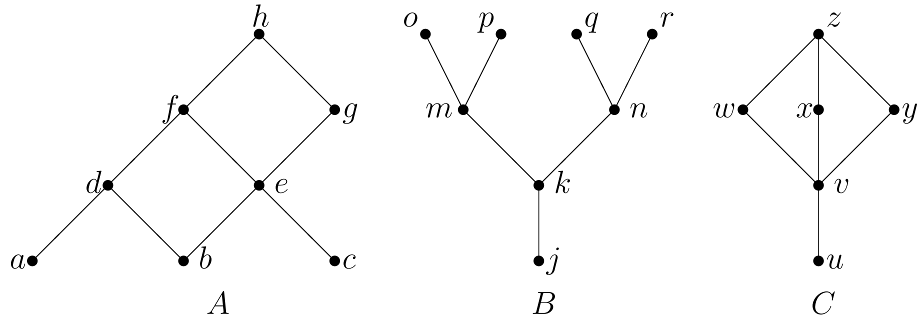
Introducción a la Lógica y la Computación - Estructuras de orden
Práctico 2: Posets.

Nota: Se sugiere resolver los ejercicios marcados con (*) al terminar el resto.

1. Considere los siguientes diagramas de Hasse.



   a) ¿Cuáles son los elementos maximales y minimales de estos conjuntos?
   b) ¿Cuáles de estos conjuntos tienen mínimo, cuáles máximo?
   c) En el diagrama A, ¿qué elementos cubren a e?
   d) Para cada uno de los siguientes conjuntos determine el conjunto de cotas superiores y, de existir, determine el supremo.

$$\{d, c\} \qquad \{w, y, v\} \qquad \{p, m\} \qquad \{m, n\} \qquad \{z\}$$

   e) Para cada uno de los siguientes conjuntos determine el conjunto de cotas inferiores y, de existir, determine el ínfimo.

$$\{a, g\} \qquad \{g, a, f\} \qquad \{z\}$$

2. Determine y justifique si son V o F las siguientes afirmaciones para un poset $(P, \leq)$:
   a) Si P tiene elemento máximo x, entonces x es el único elemento maximal.
   b) Si P es finito y tiene un único elemento maximal x, entonces x es el máximo.
   c) (*) Si P tiene un único elemento maximal x, entonces x es el máximo.

3. Sea $P = \{a, b, c, d, e\}$. Para cada item dé un diagrama de Hasse que satisfaga las condiciones.
   a) El supremo de $\{a, b\}$ es c, y el ínfimo es d. Además el ínfimo de P es e.
   b) El supremo de $\{a, b\}$, el supremo de $\{a, c\}$ y el supremo de $\{b, c\}$ coinciden, y son todos el elemento d.
   c) P no tiene supremo ni ínfimo.
   d) El supremo de $\{a, b\}$ no existe puesto que $\{a, b\}$ no tienen cotas superiores.
   e) Aunque $\{a, b\}$ tiene cotas superiores, el supremo de $\{a, b\}$ no existe.

4. Sea $P := [0, 1) \cup [2, 3)$ el subconjunto de $\mathbb{R}$ con el orden heredado. Decidir y justificar si son V o F las siguientes afirmaciones:
   a) Para todo $a, b \in P$, existe $\sup\{a, b\}$.
   b) Existe $\sup [2, 3)$.
   c) $\sup [0, 1) = 1$.

5. Sea $(P, \leq)$ un poset reticulado. Pruebe que $\sup(S)$ y $\inf(S)$ existen para cualquier $S \subseteq P$ finito y no vacío.

6. *a*) Dibuje los diagramas de Hasse de $A = (\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, |)$ y $B = (\{1, 2, 3, 4, 6\}, |)$.
   b) ¿Cuáles de esos posets son reticulados?
   c) Calcular $4 \wedge (2 \vee 3)$ en ambos posets.
   d) Determinar un subconjunto de $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$ cuyo diagrama de Hasse sea B.