Series de Potencias

Vamos a estudiar series en las cuales los términos dependen de una variable

o sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, con $a \in \mathbb{R}$ fijo y $x \in \mathbb{R}$.

Estas series son una generalización de los polinomios y tienen muchas aplicaciones. Por ejemplo, se las utiliza para aproximar funciones como $\operatorname{sen}(x)$, e^x, $\sqrt{x}$ y también para aproximar integrales como $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, ya que tienen propiedades que las convierten en fáciles de manipular.

<u>Definición:</u> sean $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales y $a \in \mathbb{R}$. Llamamos serie de potencias centrada en a, a la serie

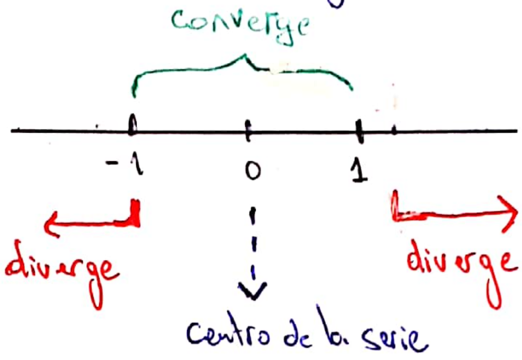
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots$$

(notar que adoptamos la convención $(x-a)^0 = 1$, aún cuando $x=a$).

- En el caso particular de $a=0$, la serie de pot. es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.
- Observemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es una serie de términos constantes, o sea una serie numérica. A continuación vamos a estudiar criterios para decidir para cuales $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.
- Notar que si $x=a$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 < \infty$, o sea, toda serie de potencias centrada en a converge en $x=a$.
- Hay series de potencias que sólo convergen en $x=a$, otras que convergen para "algunos" $x \in \mathbb{R}$ y otras que convergen en todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Sea $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty}$ y $a=0$, entonces la serie de potencias centrada en 0 tiene la forma $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(\star)$ $\rightsquigarrow$ serie geométrica

Ya sabemos que la serie $(\star)$ converge y vale $\frac{1}{1-x}$ $\iff$ $|x|<1$



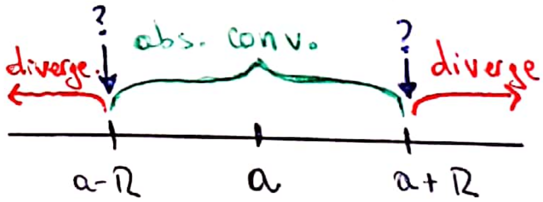
Teorema: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de pot. Entonces, se cumple exactamente una de las siguientes:

(i) La serie converge sólo cuando $x=a$.

(ii) La serie es absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\exists R>0$ tq la serie conv. absolutamente $\forall x$ tq $|x-a|<R$ y es divergente $\forall x$ tq $|x-a|>R$.

(más adelante veremos una manera de calcular R)



Definición: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ una serie de potencias.

(A) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=0$ si sólo converge en $x=a$.

(B) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=\infty$ si converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

(C) Si ocurre (iii) en el teorema anterior decimos que R es su radio de convergencia

Definición: Llamamos intervalo de convergencia al conjunto

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ converge} \right\}$$

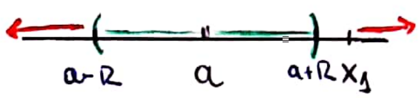
Observación:

- Si $R = 0$, entonces $I = \{a\}$.
- Si $R = \infty$, entonces $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.
- Si $0 < R < \infty$, entonces I puede ser

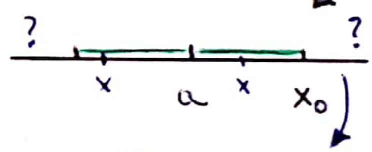
$(a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$ o $[a-R, a+R]$

Observación: notar que si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge en algún $x_0 \neq a$, entonces por (iii) del teorema anterior $R \geq |x_0 - a|$ y además la serie converge $\forall x$ tq $|x-a| < |x_0 - a|$

Por otro lado, si la serie diverge en x_1, entonces $R \leq |x_1 - a|$ y además la serie diverge $\forall x$ tq $|x-a| > |x_1 - a|$



(podría ser $R = |x_1 - a|$)



(podría ser $a + R > |x_0 - a|$)

Ejemplo: determine el radio de convergencia R y el intervalo de convergencia I de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

- Si $x = 1$, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente (serie armónica). Luego, $R \leq 1$. ①
- Si $x = -1$, tenemos $\sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ convergente (crit. ser. alternantes). Luego, $R \geq 1$ ②

De ① y ② concluimos que $R = 1$ y que $I = [-1, 1)$.

A continuación veremos un criterio que nos permite calcular el radio de convergencia.

Teorema (Crit. del cociente para series de potencias): Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, con $c_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y R su radio de convergencia. Escribimos

$$L \doteq \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} .$$

(i) Si $0 < L < \infty$, entonces $R = \frac{1}{L}$

(ii) Si $L = 0$, entonces $R = \infty$

(iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$.

Demostración: Para cada $x \neq a$, podemos aplicar el criterio del cociente para series numéricas a la serie $I \doteq \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n (x-a)^n}_{a_n}$.

Tenemos que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|c_n (x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |x-a| = L|x-a| .$$

(i) Supongamos $0 < L < \infty$.

Luego, por el Crit. Cociente para series numéricas si $\begin{cases} L|x-a| < 1 \Rightarrow I \text{ conv. abs.} \\ L|x-a| > 1 \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases}$. O sea

si $\begin{cases} |x-a| < \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ conv. abs} \\ |x-a| > \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases}$ $\therefore R = \frac{1}{L}$.

(ii) Si $L = 0$, entonces $L|x-a| < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\therefore R = \infty$.

(iii) Si $L = \infty$, entonces $L|x-a| = \infty$ $\forall x \neq a$ y $\therefore R = 0$.

Ejemplo: Calcule el radio R e intervalo de convergencia I de las siguientes series de pot.

① $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$.

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$. Luego, $R=0$ e $I=\{0\}$

(o sea, la serie diverge $\forall\, x \neq 0$).

② $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$. Luego $R=1$.

Además, en $x=-1$ y en $x=1$ la serie diverge (por el criterio de la divergencia).

Entonces $I=(-1,1)$.

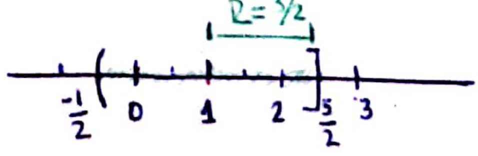
③ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n\,3^n} (x-1)^n$ (notar que $a=1$)

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{2^n}{n\,3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}$. Luego, $R=\frac{3}{2}$.

Veamos qué pasa en $x=a-R=1-\frac{3}{2}$ y en $x=a+R=1+\frac{3}{2}$

- Si $x=1-\frac{3}{2}$, obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2^n}{n\,3^n}\left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1}\frac{1}{n} \to$ diverge (por ser serie armónica)
- Si $x=1+\frac{3}{2}$, obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2^n}{n\,3^n}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \to$ converge (por criterio para series alternantes)

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $I=\left(1-\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{2}\right] = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$



Escaneado con CamScanner

Representación de funciones como series de potencias.

Para cada x tq la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ converge, la serie define una función $f(x) \doteq \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia.

Ejemplos

① $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si $|x|<1$

② $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, la igualdad (*) vale si $|-x^2|<1$

o sea, si $|x|<1$. Luego, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$, si $|x|<1$ ($\Leftrightarrow x \in (-1,1)$).

③ $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1-\left(\frac{-x}{2}\right)\right)} \overset{(\blacktriangle)}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$, la igualdad (▲) vale

si $\left|\frac{-x}{2}\right|<1$, o sea $|x|<2$. Luego, $\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$ si $x \in (-2,2)$.

Teorema (Derivación e integración de una serie de potencias).

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tiene radio de convergencia $R>0$, entonces la función $f(x) \doteq c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es derivable (y por tanto continua) en el intervalo $(a-R, a+R)$. Además

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)\,dx = C + c_0 (x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$.

Los radios de convergencia de las serie de potencias de (i) y (ii) son R.

Observación: puede suceder que los intervalos de convergencias de (i) y (ii) NO sean igual al de la serie original.

Observación: otra forma de escribir las ecuaciones (i) y (ii) es

(I) $\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$ ("se deriva término a término")

(II) $\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\, dx$ ("se integra término a término")

Ejemplo: expresar la función $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ como una serie de potencias.

Notemos que $g(x) \overset{(\bullet)}{=} f'(x)$ con $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Además sabemos que $f(x) \overset{(\bullet\bullet)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $|x|<1$, o sea su radio. de conv. es 1.

Luego, $\frac{1}{(1-x)^2} = g(x) \overset{(\bullet)}{=} f'(x) \overset{(\bullet\bullet)}{=} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]' \overset{(I)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0} (n+1) x^n$ y

el radio de convergencia es $R=1$

Ejemplo: expresar la función $\ln(1-x)$ como una serie de potencias.

Observemos que $-\ln(1-x) \overset{(\blacktriangle)}{=} \int f(x)\, dx$, con $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Además, $f(x) \overset{(\blacktriangle\blacktriangle)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si $|x|<1$.

Luego $-\ln(1-x) \overset{(\blacktriangle)}{=} \int f(x)\, dx \overset{(\blacktriangle\blacktriangle)}{=} \int \sum_{n=0}^{\infty} x^n\, dx \overset{(II)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n\, dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, si $|x|<1$.

Para determinar C, evaluamos en $x=0$ obteniendo

$$-\ln(1) = C \Rightarrow C = 0.$$

Por lo tanto $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, si $|x|<1$ (o sea $R=1$).

Serie de Taylor y Polinomio de Taylor.

Queremos estudiar: ¿qué funciones se pueden representar como series de potencias? ¿cómo es posible hallar esa representación?

- Sea f una función que se puede representar como serie de potencias, es decir

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \forall x \in (a-R, a+R).$$

- Si evaluamos f en $x=a$, obtenemos $\boxed{f(a) = c_0}$
- Por el teorema anterior, podemos derivar f y obtenemos

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \dots$$

- Si evaluamos f' en $x=a$, obtenemos $\boxed{f'(a) = c_1}$
- Aplicando nuevamente el teorema a f' nos queda

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3\, c_3(x-a) + 3.4\, c_4(x-a)^2 + \dots$$

- Si evaluamos f'' en $x=a$, obtenemos $\boxed{f''(a) = 2c_2}$
- Aplicando el teorema a f'' nos queda

$$f'''(x) = 2.3\, c_3 + 2.3.4\, c_4(x-a) + \dots$$

- Si evaluamos f''' en $x=a$, obtenemos $\boxed{f'''(a) = 2.3\, c_3}$

De manera general, obtenemos $\boxed{f^{(n)}(a) = n!\, c_n}$, donde $f^{(n)}$ es la derivada n-ésima de f y $n! = 1.2.3\dots n$ (con la convención $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$)

Hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema: Si f se puede representar como una serie de potencias centrada en a, es decir, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ $\forall x$ tq $|x-a| < R$. Entonces

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Definición: dada una función f que tiene derivadas de todos los órdenes en a, se llama serie de Taylor de f centrada en a a la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

Observaciones

1. Para el caso especial $a=0$ la serie queda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ y se suele llamar S. de Maclaurin.
2. El teorema anterior nos dice que si f se puede representar como una serie de potencias centrada en a, entonces esa serie es la serie de Taylor de f centrada en a (y por tanto f es igual a su serie de Taylor).

Ejemplo: calcule la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ centrada en $a=0$ (Maclaurin) y determine su radio de convergencia.

- Para calcular la S. de Taylor de f en 0 debemos hallar $f^{(n)}(0)$ $\forall n \geq 0$.

Como en este caso $f^{(n)}(x) = e^x$ $\forall n \geq 0$, tenemos que $f^{(n)}(0) = 1$ $\forall n \geq 0$.

Luego, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

- Para averiguar su radio de convergencia utilizamos el criterio del cociente.

Como $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \implies R = \infty$.

Conclusión: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(\text{esto nos dice que } \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R}\right)$

• Nos preguntamos ahora: ¿es cierto que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$?

O de manera más general: ¿cuándo una función f es igual a su serie de Taylor?

es decir, ¿cuándo es cierto que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$?

Definición: Sea f tq existen $f(a), f'(a), \dots, f^{(n)}(a)$. Para $n \geq 0$, definimos el polinomio de Taylor de f de orden n centrado en a como

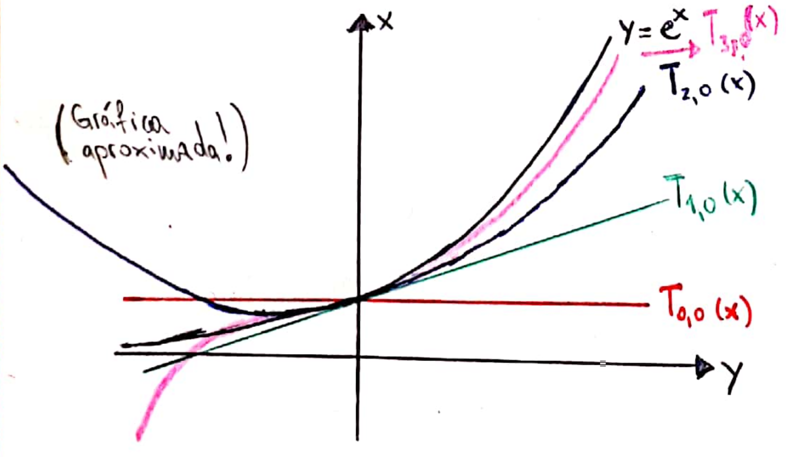
$$T_{n,a}(x) \doteq \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observaciones

① Notar que la n-ésima suma parcial de la serie de Taylor es justamente el polinomio de Taylor de orden n.

② Notar que $T_{1,a}$ es la recta tangente al gráfico de f en el pto. $(a, f(a))$.

③ Notar que f y su polinomio de Taylor de orden n $T_{n,a}$ satisfacen $f^{(j)}(a) = T^{(j)}(a)$ $\forall\, 0 \leq j \leq n$.



$T_{0,0}(x) = f(0) = e^0 = 1$

$T_{1,0}(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x$

$T_{2,0}(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$T_{3,0}(x) = f(0) + \dots + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

$\vdots$

Definición: se define el resto de Taylor de orden n centrado en a como

$$R_{n,a}(x) \doteq f(x) - T_{n,a}(x).$$

(Por lo tanto, $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$).

Teorema: Sea f una función tq existe $f^{(n)}(a)$ $\forall n \geq 0$. Se cumple

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ \forall x \in (a-c, a+c) \iff \lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0 \ \forall x \in (a-c, a+c).$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Entonces por definición de serie tenemos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x) \quad \text{(límite de sumas parciales)}.$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - T_{n,a}(x)\right) = f(x) - \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x) = f(x) - f(x) = 0$.

$\Leftarrow$) Si $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$ $\forall x \in (a-c, a+c)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - R_{n,a}(x)\right) = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = f, \quad \forall x \in (a-c, a+c).$$

Luego, por definición $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ $\forall x \in (a-c, a+c)$.

- Para usar el teorema anterior necesitamos tener alguna expresión para $R_{n,a}$.

Teorema (Fórmula de Lagrange para el resto). Sea f una función tq existen $f', f'', \dots, f^{(n+1)}$ en un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Entonces, para cada $x \in I$ existe t entre x y a ($t \in (x,a)$ si $x < a$ y $t \in (a,x)$ si $x > a$) tq

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Definición: llamamos fórmula de Taylor a $f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

con t entre a y x.

$$= T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

Ejemplos y Aplicaciones

Ejemplo: Probar que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- Ya vimos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es la serie de Taylor de f ($f(x) = e^x$) centrada en $a=0$ y su radio es $R=\infty$.
- Para probar que vale la igualdad, por el teorema anterior basta ver que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$

Por la Fórmula de Lagrange $R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!}$, para algún t entre 0 y x.

Luego, para $t \in (-x, x)$ tenemos

$$0 \leq |R_{n,0}(x)| = \frac{e^t |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(Ya vimos que $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$)

- Entonces, $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto vale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Dar la serie de Taylor de $f(x) = \text{sen}(x)$ alrededor de $a=0$ (Maclaurin) y probar que coincide con $\text{sen}(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Para hallar la serie de Taylor debemos calcular $f^{(n)}(0)$ $\forall n \geq 0$. Tenemos que

$$f(x) = \text{sen}(x) \longrightarrow f(0) = \text{sen}(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$$
$$f''(x) = -\text{sen}(x) \longrightarrow f''(0) = -\text{sen}(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos(x) \longrightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1$$
$$f^{IV}(x) = \text{sen}(x) \longrightarrow f^{IV}(0) = \text{sen}(0) = 0$$

y luego se va repitiendo lo anterior. En general, tenemos que

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \quad \forall n \geq 0.$$

- Luego, la serie de Taylor de $\operatorname{sen}(x)$ centrada en $a=0$ queda

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

- Veamos ahora que la serie coincide con la función $\forall x\in\mathbb{R}$.

Como $f^{(n+1)}(t)=\pm\operatorname{sen}(t)$ ó $\pm\cos(t)$, en cualquier caso vale $|f^{(n+1)}(t)|\leq 1$.

Luego,

$$0\leq |R_{n,0}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(t)|\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- O sea, $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ y por lo tanto $\operatorname{sen}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Ejemplo: Estimar el error que se comete si se aproxima $\operatorname{sen}(0.2)$ por el valor en $x=0.2$ de su polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$, ó sea $T_{7,0}(0.2)$.

- Queremos estimar el valor de $|\operatorname{sen}(0.2)-T_{7,0}(0.2)|$.

Sabemos que $\operatorname{sen}(x)=T_{7,0}(x)+R_{7,0}(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ (Fórmula de Taylor)

Por lo tanto $|\operatorname{sen}(0.2)-T_{7,0}(0.2)| = |R_{7,0}(0.2)|$.

Ahora, $R_{7,0}(0.2)=\frac{\operatorname{sen}^{(8)}(t)}{8!}(0.2)^8$, para algún $t\in(0,0.2)$. Como $|\operatorname{sen}^{(8)}(t)|\leq 1$ $\forall t\in\mathbb{R}$, entonces

$$|R_{7,0}(0.2)| = \frac{|\operatorname{sen}^{(8)}(t)|}{8!}(0.2)^8 \leq \frac{1}{8!}\left(\frac{2}{10}\right)^8 = \frac{1}{8!\,5^8}.$$

- Conclusión: el error que se comete al aproximar $\operatorname{sen}(0.2)$ por $T_{7,0}(0.2)$ es menor que $\frac{1}{8!\,5^8}\approx 6.3\times 10^{-11}$.

Ejemplo: Estimar el error que se comete si se aproxima $\text{sen}(x)$ por $T_{7,0}(x)$ para cualquier $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

- Queremos estimar $|\text{sen}(x) - T_{7,0}(x)| = |R_{7,0}(x)|$ para $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Como $|R_{7,0}(x)| = \dfrac{|\text{sen}^{(8)}(t)|\,|x|^8}{8!} \leq \dfrac{|x|^8}{8!} \leq \dfrac{1}{8!} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^8 = \dfrac{1}{8!\,2^8}$, entonces

el error será menor que $\dfrac{1}{8!\,2^8}$ para cualquier $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ejemplo: Encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tq el polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$ de $f(x) = \text{sen}(x)$ aproxima a $\text{sen}(x)$ con un error menor que 10^{-5}.

- Buscamos hallar los $x \in \mathbb{R}$ tq $|\text{sen}(x) - T_{7,0}(x)| < 10^{-5}$.

Como $|\text{sen}(x) - T_{7,0}(x)| = |R_{7,0}(x)|$ basta hallar los $x \in \mathbb{R}$ tq $|R_{7,0}(x)| < 10^{-5}$.

Ahora, $|R_{7,0}(x)| \underset{\substack{t \in (0,x) \\ \text{ó} \\ t \in (x,0)}}{=} \dfrac{|\text{sen}^{(8)}(t)|\,|x|^8}{8!} \leq \dfrac{1}{8!}\,|x|^8 \overset{?}{<} 10^{-5}$

Luego, basta tomar $x \in \mathbb{R}$ tq $|x|^8 < \dfrac{8!}{10^5}$. O sea, todos los $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < \left(\dfrac{8!}{10^5}\right)^{1/8}$ cumplen lo requerido.

Ejemplo: Usando un polinomio de Taylor adecuado, hallar un valor aprox. de $\sqrt{e}$ con un error menor a 10^{-2}.

- Notemos que $\sqrt{e} = e^{1/2}$. Luego, elegimos $f(x) = e^x$ y $a=0$ (ya que es fácil de calcular $f^{(n)}(0)$ $\forall n$)

Sabemos que $f(x) = T_{n,0}(x) + R_{n,0}(x)$.

- Lo que se nos pide es hallar n tal que

$$\left|f(\tfrac{1}{2}) - T_{n,0}(\tfrac{1}{2})\right| = \left|R_{n,0}(\tfrac{1}{2})\right| < 10^{-2}.$$

Ahora, como $R_{n,0}(\frac{1}{2}) = \frac{e^t}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}$, para algún $t \in (0, 1/2)$ y $f(x) = e^x$ satisface que $e^t < e^{1/2}$ # Insert text here para $t \in (0, 1/2)$, tenemos

$$\left|R_{n,0}(\tfrac{1}{2})\right| < \frac{e^{1/2}}{(n+1)!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} < 10^{-2} \quad \text{o equivalentemente} \quad e^{1/2} \cdot 10^2 < 2^{n+1}(n+1)! \quad (\star)$$

?

Probamos cuál n satisface $(\star)$ $(e^{1/2} \cdot 10^2 \approx 165)$

$n=0 \rightsquigarrow 2 \cdot 1! = 2$ No ✗

$n=1 \rightsquigarrow 4 \cdot 2! = 8$ No ✗

$n=2 \rightsquigarrow 8 \cdot 3! = 48$ No ✗

$n=3 \rightsquigarrow 16 \cdot 4! = 384$ Si ✓

O sea, $T_{3,0}(\frac{1}{2})$ aproxima a $\sqrt{e}$ con un error menor a 10^{-2}.

Como $T_{3,0}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, el valor aproximado que obtuvimos es

$$T_{3,0}(\tfrac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} \approx 1.6458 \qquad (\sqrt{e} \approx 1.6487)$$

Como justamente suponemos que no sabemos calcular e^{1/2}, sería mejor acotar e^t de la siguiente manera:

e^t < e^{1/2} < e^1 = 2.7183... < 3,

Luego, usando la acotación e^t < 3, la desigualdad (*) se convierte en: 3*10^2 < 2^{n+1} * (n+1)!

El primer natural que satisface la ecuación anterior es también n=3.