

Cálculo II / Análisis Matemático II

Lic. en Ciencias de la Computación / Lic. en Matemática Aplicada - 2024

Práctico 3 - Series de potencias y de Taylor

Series de potencias

- (1) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+2}{2} \right)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n^{1/4}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3} (4-x)^n$

- (2) Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de las series siguientes?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

- (3) Usar la expansión $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, válida en el rango $-1 < x < 1$, para representar las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, en potencias de x .

(c) $f(x) = \ln x$, en potencias de $(x-4)$.

(b) $f(x) = \frac{3}{1-x^4}$, en potencias de x .

(d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, en potencias de $(x+2)$.

(e) $f(x) = x \ln(1-x)$, en potencias de x .

- (4) Expresar las siguientes integrales como una serie de potencias en x .

(a) $\int \frac{1}{1+x^4} dx$

(c) $\int \frac{x}{1-x^8} dx$

(b) $\int \frac{x}{1+x^5} dx$

(d) $\int \frac{\ln(1-x)}{x} dx$

Series de Taylor

- (5) Encontrar la representación en serie de Taylor, centrada en $a = 0$, de las siguientes funciones. ¿Para qué valores de x vale la representación?

(a) $f(x) = \cos(x)$

(b) $f(x) = \ln(1+x)$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}(5x^2)$

(d) $f(x) = xe^x$

- (6) Determinar el orden de los polinomios de Taylor que deberían usarse para aproximar los siguientes valores con un error menor que $5 \cdot 10^{-5}$.

(a) $e^{0.1}$

(b) $\ln 1.4$

- (7) Estimar el error cometido al aproximar la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por su polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $a = 8$, para $7 \leq x \leq 9$.

Ejercicios adicionales

- (1) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (2x-3)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} x^n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n! (2x-1)^n$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$

- (2) Si $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \dots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.

- (3) Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n (n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

- (4) Sea $f(x) = (1+x)^{1/2}$. Usando el polinomio de Taylor de orden 3 de f , centrado en $a = 0$, calcular el valor aproximado de $\sqrt{2}$ que da dicho polinomio, y estimar el error en esta aproximación.

- (5) ¿Para qué valores de x se puede aproximar $\operatorname{sen} x$ por $x - \frac{x^3}{3!}$ con un error menor que 10^{-4} ?