必須確率分布

2018 年 3 月 19 日

概要

試験の主要な確率分布について

1　用語

X : 確率変数
$M_X(t)$: Xのモーメント母関数
$f_X(x)$: Xの確率密度関数

2　基礎知識

$$=$$

キュムラント母関数$C_X(t) := logM_X(t)$

$$
\begin{aligned}
\text{歪度:} &= \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3} \\
&= \frac{\mu_3}{\sigma^3} \\
&= \frac{C_X^{(3)}(0)}{\sigma^3} \\
\text{尖度:} &= \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4} \\
&= \frac{\mu_4}{\sigma^4} \\
&= \frac{C_X^{(4)}(0)}{\sigma^4} + 3 \\
\text{確率母関数 (離散型分布):} &= g_X(t) \\
&= E(t^X) \\
g'_X(1) &= E(X) \\
g''_X(1) &= E(X(X-1)) \\
V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 \\
&= g''_X(1) + g'_X(1) - g'_X(1)^2 \\
E(X) &= M_X^{(1)}(0) \\
&= C_X^{(0)} \\
V(X) &= C_X^{(2)}(0) \\
&= M_X^{(2)}(0) - M_X^{(1)}(0)^2 \\
\text{X,Y が独立} \Rightarrow M_{X+Y}(t) &= M_X(t)M_Y(t)
\end{aligned}
$$

3 離散確率分布

3.1 ファーストサクセス分布, 幾何分布, 負の二項分布

ファーストサクセス分布

$X \sim Fs(p)$, 独立にベルヌーイ試行を行うときにはじめて成功するまでの回数xの分布

後述の幾何分布より一回試行回数が多い

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= pq^{x-1} \\
M_X(t) &= \sum_{x=1}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} pq^{x-1} \\
M_X(t) &= p\mathrm{e}^{t} + p\mathrm{e}^{2t}q + p\mathrm{e}^{3t}q^2 ... \\
q\mathrm{e}^{t} M_X(t) &= p\mathrm{e}^{2t}q + p\mathrm{e}^{3t}q^2 ... \\
M_X(t) &= \frac{p\mathrm{e}^{t}}{1 - q\mathrm{e}^{t}} \\
E(X) &= \frac{p\mathrm{e}^{t}(1 - q\mathrm{e}^{t}) - p\mathrm{e}^{t}(-q\mathrm{e}^{t})}{(1 - q\mathrm{e}^{t})^2}|_{t=0} \\
&= \frac{p^2 + pq}{p^2} \\
&= \frac{1}{p} \because \text{p+q=1}
\end{aligned}
$$

3.2 ポアソン分布

3.3 ベルヌーイ分布, 二項分布

ベルヌーイ分布

$X \sim Be(p) = Bin(1, p)$, 確率pで1, 確率qで0をとる分布

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E[\mathrm{e}^{tX}] \\
&= \Sigma \mathrm{e}^{tx} p_X(x) \\
&= \mathrm{e}^{[}t] p_X(1) + \mathrm{e}^{0} p_X(0) \\
&= p\mathrm{e}^{t} + q
\end{aligned}
$$

二項分布, 独立にベルヌーイ試行をn回やる

$X \sim Bin(n, p)$

$Y_i(i = 1, 2, ..., n)$は独立で$Bin(1, p)$に従うとすれば, 二項分布の再生性質とモーメント母関数の性質より

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= M_{Y_1}(t)M_{Y_2}(t)...M_{Y_n}(t) \\
&= (p\mathrm{e}^t+q)(p\mathrm{e}^t+q)...(p\mathrm{e}^t+q) \\
&= (p\mathrm{e}^t+q)^n \\
E(X) &= M_X(0)' \\
&= \frac{d}{dt}(p\mathrm{e}^t+q)^n|_{t=0} \\
&= np\mathrm{e}^t(p\mathrm{e}^t+q)^{n-1}|_{t=0} \\
&= np(p+q)^{n-1} \\
&= np(\because \mathrm{p+q=1}) \\
E(X^2) &= M_X(0)''|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}np\mathrm{e}^t(p\mathrm{e}^t+q)^{n-1}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}np\mathrm{e}^t(p\mathrm{e}^t+q)^{n-1}+np^2\mathrm{e}^{2t}(n-1)(p\mathrm{e}^t+q)^{n-2}|_{t=0} \\
&= np+np^2(n-1) \\
&= np+n^2p^2-np^2 \\
V(X) &= E(X^2)-E(X)^2 \\
&= n^2p^2-np-n^2p^2+np^2 \\
&= np^2-np \\
&= np(p-1) \\
&= npq
\end{aligned}
$$

ファーストサクセス分布

4　連続確率分布

正規分布 $\rightarrow$ モーメント母関数 $\rightarrow$ 平均, 分散 $\rightarrow$ 標準正規分布
指数分布 $\rightarrow$ モーメント母関数 $\rightarrow$ 平均, 分散
正規分布, 標準正規分布
正規分布のモーメント母関数を計算して平均, 分散を出すことができる
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2}$

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E[\mathrm{e}^{tX}] \\
&= \int \mathrm{e}^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int \mathrm{e}^{t\mu + t\sigma u - \frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma du \\
u &= \frac{x-\mu}{\sigma} \text{とする} \\
x &= \mu + \sigma u \\
dx &= \sigma du \text{であるから} \\
&= \mathrm{e}^{t\mu} \int \mathrm{e}^{t\sigma u - \frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du \\
\text{ところで} t\sigma u - \frac{u^2}{2} &= -\frac{1}{2}(u^2 - 2t\sigma u + \sigma^2 t^2) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \\
&= -\frac{1}{2}(u - \sigma t)^2 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \text{であるから} \\
&= \mathrm{e}^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \int \mathrm{e}^{\frac{-(u-\sigma t)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du \\
&= \mathrm{e}^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \because \text{全確率の積分}
\end{aligned}
$$

また

$$
\begin{aligned}
E(X) &= M_X(0)' \\
&= (\mathrm{e}^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}})'|_{t=0} \\
&= (\mu + t\sigma^2)(\mathrm{e}^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}})|_{t=0} \\
&= \mu \\
E(X^2) &= M_X(0)'' \\
&= ((\mu + t\sigma^2)(\mathrm{e}^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}))'|_{t=0} \\
&= (\mu + t\sigma^2)'(\mathrm{e}^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}) + (\mu + t\sigma^2)(\mathrm{e}^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}})'|_{t=0} \\
&= \mu^2 + \sigma^2 \\
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

ガンマ分布

$X \sim \Gamma(\alpha, \beta)(0 < x < \infty)$

知識

$E(X^k) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\beta^k}$

$C_X(0)^{(k)} = \frac{\alpha\Gamma(k)}{\beta^k}$

$\Gamma f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}$

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E[\mathrm{e}^{tX}] \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{tx}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}dx \\
&= \beta^\alpha \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{x(t-\beta)}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}dx \\
&= \beta^\alpha \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\beta-t)x}}{\Gamma(\alpha)}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha}\int_0^\infty \frac{(\beta-t)^\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\beta-t)x}}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha,(\beta\text{-t}))\text{ のガンマ分布の全確率}dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha} \\
&= (\frac{\beta}{(\beta-t)})^\alpha\text{指数関数の積率母関数の積} \\
E(X) &= M_X(t)'|_{t=0} \\
&= \frac{0+\alpha\beta^\alpha(\beta-t)^{\alpha-1}}{(\beta-t)^{2\alpha}}|_{t=0} \\
&= \frac{\alpha\beta^{2\alpha-1}}{\beta^{2\alpha}} \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \\
E(X^2) &= M_X(t)''|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\frac{\alpha\beta^\alpha(\beta-t)^{\alpha-1}}{(\beta-t)^{2\alpha}}|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta-t)^{\alpha+1}}|_{t=0} \\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha(\alpha+1)(\beta-t)^\alpha}{(\beta-t)^{2\alpha+2}}|_{t=0} \\
&= \frac{\alpha\beta^{2\alpha}(\alpha+1)}{\beta^{2\alpha+2}} \\
&= \frac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2} \\
V(X) &= E(X^2)-E(X)^2 \\
&= \frac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2} \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2}
\end{aligned}
$$

指数分布

パラメータβの指数分布からモーメン母関数, 平均, 分散, 二次モーメントを導出

ガンマ分布のパラメータを変えるだけでもよい

$X \sim \Gamma(1,\beta)$

$f_X(x) = \beta\mathrm{e}^{-\beta x}$

$t < \beta$

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E[\mathrm{e}^{tX}] \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{tx}\beta{-}\beta\mathrm{x}dx \\
&= \beta(\lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{x(t-\beta)}) \\
&= \beta(\lim_{n\to\infty}[\frac{\mathrm{e}^{x(t-\beta)}}{t-\beta}]_0^n) \\
&= (\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t-\beta}(\mathrm{e}^{n(t-\beta)}-1)) \\
&= \frac{\beta}{\beta-t}(\because t<\beta) \\
E(X) &= M_X(t)'|_{t=0} \\
&= \frac{0-\beta(-1)}{(\beta-t)^2}|_{t=0} \\
&= \frac{1}{\beta} \\
E(X^2) &= M_X''(t)|_{t=0} \\
&= \frac{0-\beta(2t-2\beta)}{(\beta-t)^4}|_{t=0} \\
&= \frac{2}{\beta^2} \\
V(X) &= E(X^2)-E(X)^2 \\
&= \frac{2}{\beta^2}-\frac{1}{\beta^2} \\
&= \frac{1}{\beta^2}
\end{aligned}
$$