現代保険リスク理論

2018 年 3 月 19 日

概要

アブスト書くところ

1　1-3

1.1

$\mathbf{E}[X] < \infty$のとき, 次のような$\rho(X)$に関する最適化問題を考える
$\min_{\rho(X)\in\mathbf{R}}\{\mathbf{E}[(X-\rho(X))_+] + \epsilon\rho(X)\}, \epsilon \in (0.1)$
このとき, $\rho(X) = VaR_{1-\epsilon}(X)$となることを示せ
証明
$VaR_{1-\epsilon}(X) := \inf\{x \in \mathbf{R} : \mathbf{P}(X > x) \leq 1-\epsilon\}$
が$\{\mathbf{E}[(X-\rho(X))_+] + \epsilon\rho(X)\}$を最小化することを示せばよい
それは$\forall A \in \mathbf{R}$に対して
$\{\mathbf{E}[(X-\rho(X))_+] + \epsilon\rho(X)\} \leq \{\mathbf{E}[(X-A)_+] + \epsilon A\}$
と同値であるが, $X - \rho(X)$の正の部分をとっているのでこれは問4.2の特別な場合となっている.
よって問4.2の答案がこの問いへの答案になっている.

1.2

1.3

1.4

$Wang$原理$\prod_\alpha$に対して以下を示せ
(1)$r.v.S$に対して, $Z := \phi^{-1}(F_S(S)) \sim N(0,1), \phi$は標準正規分布の分布関数
(2)$\prod_\alpha(S) = \mathbf{E}[S] + Cov(S, e^{a\phi^{-1}(F_S(S))-\frac{a^2}{2}})$
(4)$S \sim N(\mu,\sigma^2), \prod_\alpha(S) = \mu + a\sigma$
(1)
Xをϕを分布に持つ$r.v.$とする

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(F_S(S)) &= \phi^{-1}(\mathbf{P}\circ S^{-1}(-\infty,s]) \\ &= (X\circ\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\circ S^{-1}(-\infty,s]) \\ &= X\circ\mathbf{P}^{-1}\circ\mathbf{P}\circ id \\ &= X \sim N(0,1)\end{aligned}$$

(2)
任意の$r.v., X, Y$に対して,
$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] + Cov(X,Y)$であるから結論を得る
(4)
第一項同士が一致しているので, 第二項同士も等しいことをいえばよいが
$Cov(S, e^{a\phi^{-1}(F_S(S))-\frac{a^2}{2}}) = \mathbf{E}[(S-\mu)(e^{a\phi^{-1}(F_S(S))-\frac{a^2}{2}} - \mathbf{E}[e^{a\phi^{-1}(F_S(S))-\frac{a^2}{2}})]$を計算することにより結果を得る

2　4-6

2.1

$S=\sum_{i=1}^{N} U_i, N$は離散型確率変数で$\mathbf{P}(N=k)=p_k(\sum_{k=0}^{\infty}=1), U_i$は分布$F_U$に従う$iid$列とする, NとUは独立とする.
Sの分布をF_Sとかきそのラプラス変換は有限
この時以下を示せ
(1)$\mathcal{L}_{F_S(s)}=p_N(\mathcal{L}_{F_U(s)})$
(2)$\mathbf{E}[S]=\mathbf{E}[N]\mathbf{E}[U]$
(3)$Var(S)=Var(N)(\mathbf{E}[U])^2+\mathbf{E}[N]Var(U)$
(4)$\phi_S(s)=p_N(\phi_U(s))$
(1)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{F_S(s)} &= \int_0^{\infty} F_S(s)\rceil^(-st)dt \\ &= \int_{\mathbf{R}}\int_0^{\infty}(F_U(s))^N\rceil^{-st}dtdp \\ &= \mathbf{E}((\mathcal{L}_{F_U(s)})^N) \\ &= p_N(\mathcal{L}_{F_U(s)})\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S) &= \mathbf{E}(\sum_{i=1}^{N} U_i) \\ &= (\sum_{i=1}^{N}\mathbf{E}U_i) \\ &= (\mathbb{1}_{i=1,\ldots N})(\sum \mathbf{E}(U_i)) \\ &= \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(U)\end{aligned}$$

(3)
$Var(S):=Cov(S,S)$と(2)から結論を得る
(4)
フーリエ変換の性質から(1)と同様のことが成り立つ

3　7-9

3.1

Fが分布関数の時$(i),(ii)$,が同値であることを示せ
$(i)\forall r>0\int_0^{\infty}e^{rz}F(dz)=\infty$
$(ii)\forall r>0\limsup_{x\to\infty}e^{rx}\overline{F}(x)=\infty$

3.2

$\liminf_{x\to\infty}e^{rf}\overline{F}(x)>0$ならば$F$は$heavy-tailed-distribution$を示せ
$\limsup_{x\to\infty}e^{rf}\overline{F}(x)>\liminf_{x\to\infty}e^{rf}\overline{F}(x)$, であるから

$\limsup_{x\to\infty} e^{rf}\overline{F}(x) > 0$より$\overline{F}$は$heavy-tailed$
$\overline{F}$が$heavy-tailed$とFが$heavy-tailed$は同値だから結論を得る

4 10-

4.1

確率変数X, Yは可積分であるとし,$\mathcal{G}$は$\mathcal{F}$の部分$\sigma-$加法族とする.
このとき以下の性質を示せ:
(1)
$\mathcal{G}_0 = \{\phi, \Omega\}$のとき,

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_0] = \mathbf{E}[X] a.s.$$

(2)Xと$\mathcal{G}$が独立なとき,

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbf{E}[X] a.s.$$

(3)Xが$\mathcal{G}-$可測で,$E[XY]$が存在するとき,

$$\mathbf{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbf{E}[Y|\mathcal{G}] a.s.$$

(4)$\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$が$\mathcal{F}$の部分$\sigma-$加法族のとき,

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = X\mathbf{E}[X|\mathcal{G}_1] a.s.$$

証明
(1) 後述の条件付き期待値の基本性質 (a) とその証明を参照
(2) 後述の条件付き期待値の基本性質 (l) をその証明を参照
(3) 後述の条件付き期待値の基本性質 (k) の一例を参照
(4) 後述の条件付き期待値の基本性質 (j) とその証明を参照

4.2

$X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$のとき,任意の$\mathcal{G}-$可測な$Z \in (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$に対して,

$$\mathbf{E}[(X-Z)^2] \geq \mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X|\mathcal{G}])^2] a.s.$$

となることを示せ,この意味で$Y = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$は$X$の最良近似と言われる.
証明
後述の直交射影の応用から,$Y = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$は$X$の$L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$上への直交射影
であるから最良最小二乗推定量であることがわかる
よって$\forall\mathcal{G}-$可測な$Z \in (\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$に対して,
$\mathbf{E}[(X-Z)^2] \geq \mathbf{E}[(X-\mathbf{E}[X|\mathcal{G}])^2] a.s.$であり,これが示すべきことであった

4.3

確率変数列$U_i (i = 1, 2, ..., n)$は互いに独立に$(0, t)$上の一様分布$U(0, t)$に従うとする.
これに対する順序統計量$(U_1, ..., U_n)$の確率密度関数$f(u_1, ..., u_n)$は

$$f(u_1, ..., u_n) = \frac{n!}{t^n}, u_1 \leq u_2 \leq ... u_n$$

となることを示せ

$(X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)})$の台は, 順序統計量の定義から, $C_n = \{(x_1, ..., x_n) : x_1 \leq, ..., \leq x_n\} \subset \mathbf{R}^n$

で与えられる.

$\tilde{\Omega} := \{X_{(1)} < ... < X_{(n)}\} = \{X_i \neq X_j 1 \leq i < j \leq n\}$

$A_\pi := \{X_{\pi(i)} = X_{(i)}, i = 1, ..., n\} \bigcap \tilde{\Omega} \bigcap \{X_{\pi(1)} \leq x_1, ..., X_{\pi(n)} \leq x_n\}$

$\prod_n : \{1, ..., n\}$の順列

と決めると

$x_1 < ... < x_n$のとき

$\mathbf{P}(X_{(1)} \leq x_1, ..., X_{(n)} \leq x_n) = \mathbf{P}(\bigcup_{\pi \in \prod_n} A)$

A_πは$disjoint$であるから$\mathbf{P}(\bigcup_{\pi \in \prod_n} A) = \Sigma_{\pi \in \prod_n} \mathbf{P}(A_\pi)$

さらにX_iはiid列であるから$\mathbf{P}(A_\pi) = \mathbf{P}((X_{\pi(1)}, ..., X\pi(n)) \in C_n \bigcap (-\infty, x_1] \times ... \times (-\infty, x_n])$

$= \mathbf{P}((X_1, ..., X_n \in C_n \bigcap (-\infty, x_1] \times ... \times (-\infty, x_n])$

$= \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f(y_i) \mathbb{1}_{\{y_1 < ... < y_n\}} dy_n ... dy_1$

もちろん$\prod_n$の元の個数は$n!$であるから

$\mathbf{P}(X_{(1)} \leq x_1, ..., X_{(n)} \leq x_n) = n! \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f(y_i) \mathbb{1}_{\{y_1 < ... < y_n\}}$

よって一般なiid列に対してその順序統計量は

$f_{X_{(1)}, ..., X_{(n)}}(x_1, ..., x_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \mathbb{1}_{\{x_1 < ... < x_n\}}$

である

また$U(0, t)$のpdfは$\frac{1}{t-0}$であるから

$U(0, t)$に従うiid列の順序統計量はfに$\frac{1}{t}$を代入して

$f(u_1, ..., u_n) = \frac{n!}{t^n}, u_1 \leq u_2 \leq ... u_n$であり,

これが示すべきことであった.

また, $\leq$ を $<$ に取り換えてもよい.

$\leq$ と $<$ を交換してもよいかを示すには

$\mathbf{P}(\tilde{\Omega}) = 1$を示せばよい

$i \neq j$に対して,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_i = X_j) &= \mathbf{E}[\mathbf{P}(X_i = X_j | X_j)] \\
&= \int_{\mathbf{R}} \mathbf{P}(X_i = y) f(y) dy \\
&= 0 \\
\therefore & \\
1 - \mathbf{P}(\tilde{\Omega}) &= \mathbf{P}(\bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{X_i = X_j\}) \\
&\leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(X_i = X_j) = 1 \\
\therefore & \\
\mathbf{P}(\tilde{\Omega}) &= 1
\end{aligned}
$$

よって $\leq$ と $<$ を交換してもよく

$$
\begin{aligned}
f(u_1, ..., u_n) &= \frac{n!}{t^n}, u_1 \leq u_2 \leq ... u_n \\
&= \frac{n!}{t^n}, u_1 < u_2 < ... < u_n (a.s.)
\end{aligned}
$$

4.4

確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$上に与えられた強度$\lambda$の$Poisson$過程$N=(N)_{t\geq 0}$に対して,$N$が生成する自然なフィルトレーションを$\mathbf{F}^N=(\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}$とする.このとき,以下を示せ

(1)$\tilde{N}=(N_t-\lambda t)_{t\geq 0}$は$\mathbf{F}^N-$マルチンゲール

(2)$\phi_{N_t}(s)=exp(\lambda(\mathrm{e}^{is}-1))$

(1)を示す

まずポアソン過程だから可積分で,フィルトレーションの決め方から$\mathbf{F}^N-adapted$である

だからあとは

$s\leq t$にたいして,$\mathbf{E}(\tilde{N}_t|\mathcal{F}_s)=\tilde{N}_s$を示せばよい

条件付き期待値の線形性からこれは$\mathbf{E}(\tilde{N}_t-\tilde{N}_s|\mathcal{F}_s)=0$と同値であるからこれを示す

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\tilde{N}_t-\tilde{N}_s|\mathcal{F}_s)&=\mathbf{E}(N_t-N_s|\mathcal{F}_s)-\lambda(t-s)\\&=\mathbf{E}(N_{(t-s)}|\mathcal{F}_s)-\lambda(t-s)\\&=\lambda(t-s)-\lambda(t-s)\\&=0\end{aligned}$$

よって$\tilde{N}$は$\mathbf{F}^N-$マルチンゲール

(2)を示す

$$\begin{aligned}\phi_{N_t}(s)&=\mathbf{E}[exp(itX)]\\&=\Sigma_{x\in\mathbf{R}}(exp(it))^x exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}\\&=exp(-\lambda)\Sigma_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda exp(it))^x}{x!}\\&=exp(-\lambda)exp(\lambda exp(it))\\&=exp(\lambda(\mathrm{e}^{it}-1))\end{aligned}$$

となり証明できた

4.5

$S=(S_t)_{t\geq 0}$を$S\ CP(\lambda, F)$なる複合$Poisson$過程で,Fの平均,分散が存在し,それぞれをμ, σ^2とする

$\mu := \int_{\mathbf{R}} xF(dx) < \infty$

$\sigma^2 := \int_{\mathbf{R}} (x-\mu)^2 F(dx) < \infty$

このとき,以下が成り立つ

(1)

(2)

5 L^p 空間について

ルベーグ空間,$p\in[1,\infty)$, $L^p(\mathbf{R^n})$で書き,次を満たす可測関数fの空間とする

$$\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}=(\int_{\mathbf{R}^n}|f|^p dx)^{1/p}<\infty$$

5.1

L^p空間の性質、完備性、単調性、ベクトル空間をなすこと

L^p空間の完備性

L^p空間$(1 \leq p < \infty)$は完備である, つまり任意のコーシー列が収束する
$1 \leq p < \infty, f_n \in L^p(\mathbf{R}^d), n \in \mathbf{N}$
$\|f_k - f_l\| \to 0(k, l \to \infty) \Rightarrow \exists f \in L^p(\mathbf{R}^d) s.t. \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$
が成立する

$\because$
仮定から$n_1 < n_2 < ...$となる番号が選べば, $\|f_{nk} - f_{nk+1}\| < \frac{1}{2^k}$と抑えられる
$F_N(x) := |f_{n1}(x)| + \sum_{k=1}^{N}$とすれば
$F_N(x) \leq F_{N+1}(x) \leq ...$となるから無限大まで許せば
$\lim_{N\to\infty} F_N(x)^p$が存在する
$\therefore MON$が適用できて

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R^d}} F_N(x)^p dx &= \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbf{R^d}} F_N(x)^p dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \|F_N\|_p^p\end{aligned}$$

ここで$Minkowski$の不等式を適用して

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \|F_N\|_p &\leq \|f_{n1}\|_p + \sum_{k=1}^{N} |f_{nk}(x) - f_{nk+1}| \\ &= \|f_{n1}\|_p + (1 - 2^{-N})\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{\mathbf{R^d}} F(x)^p dx \leq (1 + \|f_{n1}\|_p)^p < \infty$$

よって零集合を除けば$x \in \mathbf{R^d}$にたいして, $F(x)^p < \infty$
これは絶対収束する実数列だから収束するであるから
$f(x) = f_{n1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{nk}(x) - f_{nk+1}(x))$が存在する
$G_N(x) := f_{n1}(x) + \sum_{k=1}^{N}(f_{nk}(x) - f_{nk+1}(x))$
とすれば$|f(x) - G_N(x)| \to 0$で$|f(x) - G_N(x)| \leq |f(x)| + |G_N(x)| \leq 2F(x)$で
$\int_{\mathbf{R}^d} F(x)^p dx < \infty$であるから, DOMが適用できて
$\int_{\mathbf{R}^d} |f(x) - G_N(x)|^p dx \to 0(N \to \infty)$
また$\|f(x)\|_p < \infty$であるから$f \in L^p(\mathbf{R}^d)$, よって完備

L^pは単調

L^pノルム, $\|f\|_p := (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}$は単調
すなわち, $1 \leq p \leq r < \infty, f \in L^r \to f \in L^p \|f\|_p \leq \|f\|_r$

$\because$
$n \in \mathbf{N}$として, $g_n(x) := |f(x)| \wedge n^p$とする
g_nは有界だから, $g_n, g_n^{\frac{r}{p}} \in L^1$である
$(0, \infty)$において$c(x) := x^{\frac{r}{p}}$とすればこれは凸であるから
$Jensen$の不等式をつかって
$(\int g_n)^{\frac{r}{p}} \leq \int (g_n^{\frac{r}{p}}) = \int ((|f| \wedge n)^r) \leq \int (|f|^r)$
よって単調である

L^pはベクトル空間をなす

$a, b \in \mathbf{R}^+$に対して
$(a+b)^p \leq (2max\{a,b\})^p \leq 2^p(a^p + b^p)$
である, $-\infty, +\infty$で結合性が成り立たなそうだがL^pの関数が無限大になるような集合は零集合なので問題ない, よってベクトル空間である

L^2空間の内積, 角, 直交性, ピタゴラスの定理, 平行四辺形法則, 直交射影

L^2空間の内積, 角

$U, V \in L^2$に対して, 内積を
$< U, V > := \mathbf{E}(UV)$とする, $\|U\|_2 \neq 0 \|V\|_2 \neq 0$の時$U, V$の間の角度の余弦を
$cos\theta := \frac{<U,V>}{\|U\|_2 \|V\|_2}$とすると$Schwarz$の不等式からこの絶対値は1を超えないので,
これを相関係数とする

L^2空間の直行性, ピタゴラスの定理, 平行四辺形法則

$\langle U, V \rangle = 0 \Rightarrow \|U+V\|_2^2 = \|U\|_2^2 + \|V\|_2^2, < U, V >= 0$の時$U \perp$Vと書き直交するという
平行四辺形法則
$\langle , \rangle$の双線形性に注意して
$\|U+V\|_2^2 + \|U-V\|_2^2 = \langle U+V, U+V \rangle + \langle U-V, U-V \rangle = 2\|U\|_2^2 + 2\|V\|_2^2$

L^2空間の直交射影

KをL^2の部分ベクトル空間で完備とする$f \in L^2$に対して, Kにgが存在して
$(i) \|f - g\| = \Delta := inf \|f - W\| : W \in K$
$(ii) \forall Z \in K, f - g \perp Z$
が成立し, (i)と(ii)は同値で, これを満たすgは$a.s.$で一意である

L^2空間の直交射影は存在する

$g_n \in K$を$\|f - g_n\| \to \Delta$とえらぶ
平行四辺形法則から
$\|f - g_r\|^2 + \|f - g_s\|^2 = 2\|f - \frac{1}{2}(g_r + g_s)\|^2 + 2\|\frac{1}{2}(g_r - g_s)\|^2$
ここで$\frac{1}{2}(g_r + g_s) \in K$
$\therefore \|f - \frac{1}{2}(g_r + g_s)\|^2 \geq \Delta^2$
よってg_nはコーシー列であるから$\|g_n - g\| \to 0$となるgがKに存在する
よって$\|f - g\| \leq \|f - g_n\| + \|g_n - g\|$
$\therefore \|f - g\| = \Delta$また,$\forall Z \in K, \forall t \in \mathbf{R}$に対して$f + tZ \in \mathbf{R}$
$\therefore \|f - g - tZ\| \geq \|f - g\| - 2t\langle Z, f - g\rangle + t^2\|Z\|^2 \geq 0$
tの絶対値の小さいほうを考えると
$\langle Z, f - g\rangle = 0$

条件付き期待値の定義, L^2空間の直交射影の応用

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$: 確率空間
X : 確率変数, $\mathbf{E}(|X|) < \infty$をみたすとする
$\mathcal{G}$: $\mathcal{F}$の$sub - \sigma - algebra$
このとき次の性質を満たす確率変数Yが存在する
$(a)Y$は$\mathcal{G}$ − 可測
$(b)\mathbf{E}(|Y|) < \infty$
$(c)\forall G \in \mathcal{G}, \int_G Y d\mathbf{P} = \int_G X d\mathbf{P}$
このようなYを$Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})(a.s.)$とかき$\mathcal{G}$を与えた時の条件付き期待値とよぶ
(このYは$a.s.$で一意であるが, それは背理法からすぐに示される)
$\mathbf{E}(X^2) < \infty$とすると$Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$は$X$の$L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$上への直交射影である
$\therefore Y$は$\mathcal{G}$ − 可測な関数の中で$\mathbf{E}[(Y - X)^2]$を最小にする
このことからYはXの$\mathcal{G}$ − 可測な最良最小二乗推定量とよぶ

6　条件付き期待値の基本性質

$\mathbf{E}(|X|) < \infty, \mathcal{G}\mathcal{H}$: $\mathcal{F}$の部分σ加法族, cは条件付きを意味する
(a)(情報が無いということ)$\mathcal{G}_0 = \phi, \Omega$の時, $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}_0) = \mathbf{E}(X)$
$(b)Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$なら$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X)$
$(c)X$が$\mathcal{G}$ − 可測ならば$\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = X(a.s.)$
(d)(線形性)$\mathbf{E}(a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}) = a_1\mathbf{E}(X_1|\mathcal{G}) + a_2\mathbf{E}(X_2|\mathcal{G})$
(e)(正値性)$X \geq 0$ならば$\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$
$(f)(cMON)0 \leq X_n \uparrow X$ならば$\mathbf{E}(X_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$
$(g)(cFATOU)X_n \leq 0$ならば$\mathbf{E}[\liminf X_n|\mathcal{G}] \leq \liminf \mathbf{E}[X_n|\mathcal{G}]$
$(h)(cDOM)\forall n, |X_n(\omega)| \leq V(\omega), \mathbf{E}(V) < \infty, X_n \to X(a.s.)$ならば,
$\mathbf{E}(X_n|\mathcal{G}) \to \mathbf{E}(X|\mathcal{G})(a.s.)$
$(i)(cJENSEN)c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$が凸, $\mathbf{E}|c(X)| < \infty$
ならば, $\mathbf{E}[c(X)|\mathcal{G}] \geq c(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}])$
また, $p \geq 1$に対して, $\|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})\|_p \leq \|X\|_p$
(j)(塔の性質)$\mathcal{H}$が$\mathcal{G}$の部分σ加法族なら

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$$

(k)(既知のものを取り出す)
$(k-1)Z$が$\mathcal{G}$ − 可測かつ有界
$(k-2)p > 1, p^{-1} + q^{-1} = 1, X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), Z \in L^q(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$

$(k-3) X \in (m\mathcal{F})^+, Z \in (m\mathcal{G})^+, \mathbf{E}(ZX) < \infty$
のいずれかを満たすとき, $\mathbf{E}[ZX|\mathcal{G}] = Z\mathbf{E}[X|\mathcal{G}], a.s.$
(l)(独立性の役割)$\mathcal{H}$と$\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$が独立なら
$\mathbf{E}(X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = \mathbf{E}(X|\mathcal{G}), a.s.$
特に$X \perp \mathcal{H}$ならば, $\mathbf{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbf{E}(X), a.s.$
それぞれの証明
$(m\mathcal{G})^+ : \mathcal{G}-$可測な非負関数
$SF^+(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, 単純な非負関数
MON : 単調収束定理
DOM : 優収束定理
とする
(a)定義から

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{G}_0} X d\mathbf{P} &= \int_{\phi} X d\mathbf{P} + \int_{\Omega} X d\mathbf{P} \\
&= 0 + \int_{\Omega} X d\mathbf{P} \\
&= \mathbf{E}(X)
\end{aligned}$$

Ωだけを知っているとき, そこにルベーグ測度を構成し(これは容易ではないが)全測度
を1に制限して$\mathbf{P}$を得る, また$\{\Omega\}$だけでは補集合をとる演算に対して閉じて
おらずσ加法族の定義を満たしていないから
仕方なく$\{\Omega, \phi\}$としてその上でXを積分していると考えると上記の演算は自然である
$(b)\Omega \in \mathcal{G} \therefore \mathbf{E}(Y; \Omega) = \mathbf{E}(X; \Omega)$
(c)定義からわかる
(d)積分なので線形である
$(e)W = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$とする, もし$\mathbf{P}(W < 0) > 0$ならば,
あるnに対して, 集合$G := W < n^{-1} \in \mathcal{G}$は正の確率をもつから
$0 \leq \mathbf{E}(U; G) = (W : G) < -n^{-1}\mathbf{P}(G) < 0$で矛盾が生じる, よって
この条件付き期待値は正値である
$(f) 0 \leq X_n \uparrow X$のとき, (e)を使って, 各nに対して$Y_n = \mathbf{E}(X_n|\mathcal{G})(a.s.)$であれば
$0 \leq Y_n Y(a.s.)$である.ここで$Y := \limsup Y_n$とすればこのYは$\mathcal{G}-$可測で$Y_n \uparrow$
$Y(a.s.)$
ここでMONを使えば, $\mathbf{E}(Y_n; G) = \mathbf{E}(X_n; G)(\forall G \in \mathcal{G})$
$(g), (h)$条件付き期待値はルベーグ積分の積分範囲を狭めたものであるから自然に成立する
MONから$FATOU$, $FATOU$からDOMを導出した過程とほとんど同じである
$(i) c(x) = \sup_n(a_n x + b_n)$を満たす可算列$(a_n, b_n)$が$\mathbf{R}^2$にあるから,
$\mathbf{R}[c(X)|\mathcal{G}] \geq a_n \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] + b_n (a.s.)$
であるから$\mathbf{E}[c(X)|\mathcal{G}] \geq \sup_n(a_n \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] + b_n) = c(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}])$
重要な系
また, $p \geq 1, c(x) = |x|^p$として$\mathbf{E}(|X|^p|\mathcal{G}) \geq |\mathbf{E}(X|\mathcal{G}|^p$である
期待値をとって(a)を用いれば結論を得る(j)条件付き期待値の定義から
$\int_H \mathbf{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbf{P} = \int_H \mathbf{E}(X|\mathcal{H}) d\mathbf{P}$を示せばよいことが分かるが
(j)の右辺をAと置けば, $\forall H \in \mathcal{H}, \int_H \mathbf{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbf{P} = \int_H A d\mathbf{P}$
また$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$だから
$\int_H \mathbf{E}(X|\mathcal{H}) d\mathbf{P} = \int_H A d\mathbf{P}$を得る
上記より$\int_H \mathbf{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbf{P} = \int_H \mathbf{E}(X|\mathcal{H}) d\mathbf{P}$であるから結論を得る.
$(k)(k-1)$から示す
$Y := \mathbf{E}(X|\mathcal{G})(a.s.)$と$\mathcal{G} \in G$を固定する
このときZが$\mathcal{G}$の指示関数であればYが条件付き期待値である定義から真である
さらに, 線形性から$Z \in SF^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$に対して真である

だからMONによって$Z \in (m\mathcal{G})^+$に対しても真
$(k-3)$の場合はZが有界かつL^1であるから明らか
$(k-2)$のときは$Holder$の不等式から明らか
$(l) G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}$に対して$, XI_G$と$I_H$は独立であるから
$\mathbf{E}(X; G \cap H) = \mathbf{E}[(XI_G)I_H] = \mathbf{E}(XI_G)\mathbf{P}(H)$
$Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})(a.s.)$ならば$Y$は$\mathcal{G}-$可測$, YI_G \perp \mathcal{H}$
だから$\mathbf{E}[(YI_G)I_H] = \mathbf{E}(YI_G)\mathbf{P}(H)$
$\mathbf{E}[X; G \cap H] = \mathbf{E}[Y; G \cap H]$である
よって$\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$上の測度
$F \hookrightarrow \mathbf{E}(X; F), F \hookrightarrow \mathbf{E}(Y; F)$
は$G \cap F$が作る$\pi - system$上で一致する
よって$\pi - \lambda - theorem$からこの測度は$\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$上全体で一致する
これが示すべきことであった

7 参考文献

David Williams
Probability with Martingale
CAMBRIDGE University Press(1991)
Terence Tao
An introduction to measure theory
(https://terrytao.files.wordpress.com/2011/01/measure-book1.pdf)