統計力学最終レポート課題

2018 年 3 月 19 日

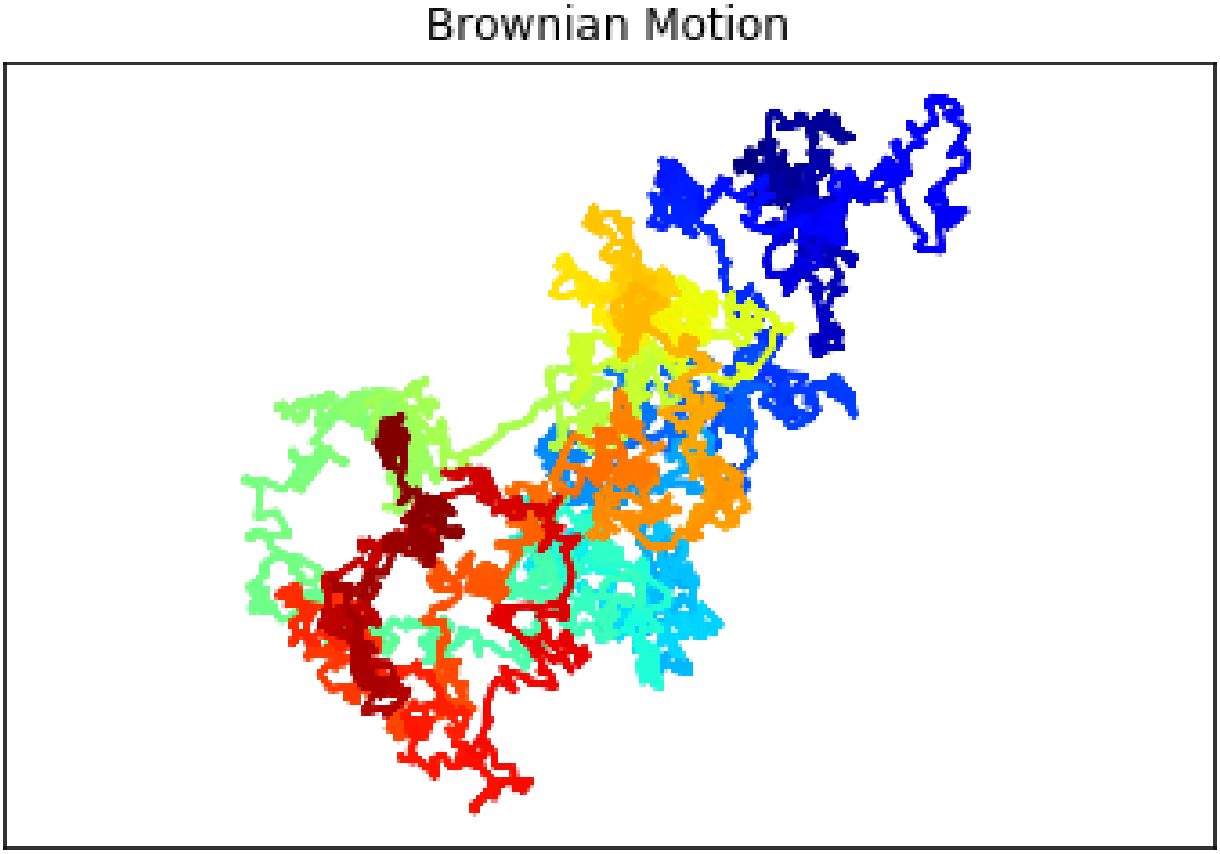
概要

研究室のテーマは確率解析となっていて,4 年生ゼミでは
Probability with Margingale(David.Williams) と
粒子法入門 (越塚誠一) 輪読した.
修士論文は確率偏微分方程式か粒子法について書くことになるだろう.
特に粒子法を選択した場合偏微分方程式や力学の理論を無視できない.
このレポートでは確率論を用いて第三章, 四章で学習した Fokker-Planck 方程式つまり前進 Kolmogorov 方程式の解の性質を述べる.

1 二次元ブラウン運動の可視化

配布資料図 1 は三次元ブラウン運動を二次元平面に射影したものであるから、まず二次元のブラウン運動を図示し直しておく
ブラウン運動はランダムウォークのステップサイズを無限小に制限することでも得られるから、以下のように Python3 で得た
4000 ステップのランダムウォークを x,y 軸共に取り, 点で補間することによりブラウン運動を得ている

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
n=4000#ステップ数
x=np.cumsum(np.random.randn(n))#cumsumで足し合わせていく
y=np.cumsum(np.random.randn(n))
a=20#中間点を補完する点の数
x2=np.interp(np.arange(n*a),np.arange(n)*a,x)
y2=np.interp(np.arange(n*a),np.arange(n)*a,y)
plt.scatter(x2,y2,c=range(n*a),linewidths=0,marker='o',s=3,cmap=plt.cm.jet)#色相を時間の関数
#にする
plt.title("Brownian Motion")#グラフのタイトル
plt.axis('equal')
plt.xticks([]);plt.yticks([])
```



2　前進 Kolmogorov 方程式 (Fokker-Planck 方程式) の基本解の一意性

確率解析と偏微分方程式は密接に関係していて, 偏微分方程式の解に確率表現を与えられることがあるのはよく知られている.
確率積分の理論を介して前進 Kolmogorov 方程式の基本解が一意的であることを示す

2.1　準備

次の確率積分方程式の解を考える

$$X_s^{(t,x)} = x + \int_t^s b(\theta, X_\theta^{(t,x)}) + \int_t^s \sigma(\theta, X_\theta^{(t,x)}) dW_\theta, W_\theta : Weiner-process, t \leq s < \infty$$

ただし次の条件 (i),(ii),(iii) を仮定する
(i) 係数 b,σ は連続で一次増大
(ii) 方程式は弱解をもつ
(iii) 解は確率法則の意味で一意である
基本解の定義
2 階偏微分方程式

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + ku = \mathcal{A}_t u$$

の基本解とは $0 \leq t < \tau \leq T, x \in \mathbf{R^d}, \xi \in \mathbf{R^d}$ 上で定義された G が非負関数で次の二つの条件を満たすものとする
$u(t,x) := \int_{\mathbf{R^d}} G(t,x;\tau,\xi) f(\xi) d\xi, 0 \leq t < \tau, x \in \mathbf{R^d}$ は有界かつ $C^{1,2}$ 級で $-\frac{\partial u}{\partial t} + ku = \mathcal{A}_t u$,
$\lim_{t \uparrow \tau} u(t,x) = f(x), x \in \mathbf{R^d}$
このように基本解を定義すると一様楕円性, 有界性,Holder 連続性を持つときに基本解が存在することは

(Friedman(1964)) によって示された

2.2 Feynman-Kac の定理から得られる補題

放物型方程式の解を確率表現する Feynman-Kac の定理がある, この解の一意性の証明は伊藤の公式, 上限収束定理, 単調収束定理を使うので良い演習問題として知られている

Feynman-Kac の定理を認めると次の補題が得られる.

補題

(i),(ii),(iii) の条件の下で Cauchy 問題を考える

$v(t,x)$: 連続かつ$C^{1,2}$級 かつ $M > 0, \mu \geq 0$ に対して $\max_{0\leq t\leq T}|v(t,x)| \leq M(1+\|x\|^{2\mu})$ とする, このとき以下を満たす v(t,x) を求める

$\frac{\partial v}{\partial t} + kv = \mathcal{A}_t v + g$

$v(T,x) = f(x)$

すると,$v(t,x)$ は確率表現

$v(t,x) = E^{t,x}[f(X_T)exp(-\int_t^T k(\theta,X_\theta)d\theta) + \int_t^T g(s,X_s)exp(-\int_t^s k(\theta,X_\theta)d\theta)ds]$

をもち, そのような解は一意である

$\because$

Feynman-Kac の公式の証明のように, 伊藤の公式を適用すれば

$\tau_n := inf_{\{s\geq t,\|X_s\|\geq n\}}$ に対して

$v(t,x) = E^{t,x}[\int_{T\wedge\tau_n} g(s,X_s)exp(-\int_t^s k(\theta,X_\theta)d\theta)ds]$

$+ E^{t,x}[v(\tau_n,X_{\tau_n})exp(-\int_t^{\tau_n} k(\theta,X_\theta)d\theta)\mathbb{1}_{\{\tau_n\leq T\}}]$

$+ E^{t,x}[f(X_T)exp(-\int_t^T k(\theta,X_\theta)d\theta)\mathbb{1}_{\{\tau_n>T\}}]$ を得る, 第一項と第三項を Feynman-Kac の時と同様に単調収束定理と上限収束定理から評価すると

$E^{t,x}[f(X_T)exp(-\int_t^T k(\theta,X_\theta)d\theta) + \int_t^T g(s,X_s)exp(-\int_t^s k(\theta,X_\theta)d\theta)ds]$ に収束することが分かる

よって第二項が 0 に収束することを示せばよい, 第二項の絶対値を上から評価して,Cebysev の不等式を用いることにより

$$\begin{aligned}
E^{t,x}[|v|\mathbb{1}_{\{\tau_n\leq T\}}] &\leq M(1+n^{2\mu})P^{t,x}[\tau_n \leq T] \\
&= M(1+n^{2\mu})P^{t,x}[\max_{t\theta\leq T}\|X_\theta\| \geq n] \\
&\leq n^{-2m}E^{t,x}[\max_{t\leq\theta T}\|X_\theta\|^{2m}] \\
&\leq Cn^{-2n}(1+\|x\|^{2m})e^{CT}
\end{aligned}$$

となり $m > \mu$ を選べば $n \to \infty$ の時に 0 に収束することがわかる

よって一意性が示せた

2.3 基本解の一意性の条件と説明

2.1 の条件 (i),(ii),(iii) を満たす前進 Kolmogorov 方程式

$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(\tau,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial\xi_i\partial\xi_k}[a_{ik}(\tau,\xi)\phi(\tau,\xi)]$

$-\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial}{\partial\xi_i}[b_i(\tau,\xi)\phi(\tau,\xi)] - k(\tau,\xi)\phi(\tau,\xi)$ に対して基本解を考えると,Cauchy 問題から

$u(t,x) = Ef(X_\tau^{t,x}), f \in C_0(\mathbf{R^d})$

と与えらる.

さらに 2.2 からこの解は一意である.

3　参考文献

IPython データサイエンスクックブック (2015 年 12 月 25 日)

I.Karatzas and S.E.Shreve Brownian Motion and Stochastic Calculus 2nd Edition(1998)

Friedman, A. (1964) Partial Differential Equations of Parabilic Type.