Теорема 1.

Язык, состоящий из всех слов, в которых нет трех трех букв a подряд, и количество букв a больше, чем количество букв b, над алфавитом $A = \{a, b\}$ не является регулярным.

Доказательство:

Предположим, что верно обратное утверждение, то есть данный язык является регулярным. Тогда для него выполняется лемма о накачке. Зафиксируем константу n из условия леммы и рассмотрим слово $(aab)^{2n}b^n$, такое что $\alpha_1 = (aab)^{2n}$, $\beta = b^n$, $\alpha_2 = \epsilon$. По условию леммы найдется представление $\beta = b^n = \beta_1\gamma\beta_2$. Тогда подслово γ состоит из некоторого числа вхождений буквы b, то есть $\gamma = b^r$, где $1 \le r \le n$. Тогда по условию леммы слово $\alpha_1\beta_1\gamma^{n+1}\beta_2\alpha_2$ также принадлежит языку. Построим это слово, $\alpha_1\beta_1\gamma^{n+1}\beta_2\alpha_2 = (aab)^{2n}b^{nr+n}$. Количество вхождений a равняется $4n$, а минимальное количество вхождений b равняется $4n$, что противоречит условию. Следовательно исходное предположение было ложным, и данный язык не является регулярным.

Теорема 2.

Язык, состоящий из всех слов, в которых никакая буква не встречается три раза подряд, и количество вхождений букв a равно количеству вхождений букв b, над алфавитом $A = \{a, b\}$ не является регулярным.

Доказательство:

Предположим, что верно обратное утверждение, то есть данный язык является регулярным. Тогда для него выполняется лемма о накачке. Зафиксируем константу n из условия леммы и рассмотрим слово $(aab)^n(abb)^n$, такое что $\alpha_1 = \epsilon$, $\beta = (aab)^n$, $\alpha_2 = (abb)^n$. По условию леммы найдется представление $\beta = (aab)^n = \beta_1\gamma\beta_2$. Рассмотрим 9 вариантов для такого разбиения:

1. $\beta_1 = (aab)^t$; $\gamma = (aab)^q$; $\beta_2 = (aab)^{n-t-q}$. При этом $q \geq 1$; $t \geq 0$; $n - t - q \geq 0$; По лемме о накачке найдётся слово $\alpha_1\beta_1\gamma^2\beta_2\alpha_2 = (aab)^t(aab)^q(aab)^q(aab)^{n-t-q}(abb)^n$ принадлежит языку, но в полученном слове кол-во букв $a = 3n+2q$, а кол-во букв $b = 3n+q$. Количество букв a и b различное, следовательно данное слово не может принадлежать языку.

2. $\beta_1 = (aab)^t a$; $\gamma = ab(aab)^q$; $\beta_2 = (aab)^{n-t-q-1}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n - t - q - 1 \geq 0$; По лемме о накачке найдётся слово $\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (aab)^t a(aab)^{n-t-q-1}(abb)^n$ принадлежит языку, но в полученном слове встречается более двух букв a подряд, следовательно данное слово не может принадлежать языку.

3. $\beta_1 = (aab)^t aa$; $\gamma = b(aab)^q$; $\beta_2 = (aab)^{n-t-q-1}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n - t - q - 1 \geq 0$; По лемме о накачке найдётся слово $\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (aab)^t aa(aab)^{n-t-q-1}(abb)^n$ принадлежит языку, но в полученном слове встречается более двух букв a подряд, следовательно данное слово не может принадлежать языку.

4. $\beta_1 = (aab)^t$; $\gamma = (aab)^q aa$; $\beta_2 = b(aab)^{n-t-q-1}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n - t - q - 1 \geq 0$; По лемме о накачке найдётся слово $\alpha_1\beta_1\gamma^2\beta_2\alpha_2 = (aab)^t(aab)^q aa(aab)^q aab(aab)^{n-t-q-1}(abb)^n$ принадлежит языку, но в полученном слове встречается более двух букв a подряд, следовательно данное слово не может принадлежать языку.

5. $\beta_1 = (aab)^t$; $\gamma = (aab)^q a$; $\beta_2 = ab(aab)^{n-t-q-1}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n - t - q - 1 \geq 0$; По лемме о накачке найдётся слово $\alpha_1\beta_1\gamma^2\beta_2\alpha_2 = (aab)^t(aab)^q a(aab)^q aab(aab)^{n-t-q-1}(abb)^n$ принадлежит языку, но в полученном слове встречается более двух букв a подряд, следовательно данное слово не может принадлежать языку.

6. $\beta_1 = (aab)^t a$; $\gamma = ab(aab)^q a$; $\beta_2 = ab(aab)^{n-t-q-2}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-2 \geq 0$; По лемме о накачке найдётся слово $\alpha_1\beta_1\gamma^2\beta_2\alpha_2 = (aab)^t aab(aab)^q aab(aab)^q aab(aab)^{n-t-q-2}(abb)^n$ принадлежит языку, но в полученном слове кол-во букв $a = 3n + 2q + 2$, а кол-во букв

$b = 3n+q+1$. Количество букв a и b различное, следовательно данное слово не может принадлежать языку.

7. $\beta_1 = (aab)^t a$; $\gamma = ab(aab)^q aa$; $\beta_2 = b(aab)^{n-t-q-2}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-2 \geq 0$; По лемме о накачке найдётся слово $\alpha_1\beta_1\gamma^2\beta_2\alpha_2 = (aab)^t aab(aab)^q aaab(aab)^q aab(aab)^{n-t-q-2}(abb)^n$ принадлежит языку, но в полученном слове встречается более двух букв a подряд, следовательно данное слово не может принадлежать языку.

8. $\beta_1 = (aab)^t aa$; $\gamma = b(aab)^q a$; $\beta_2 = ab(aab)^{n-t-q-2}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-2 \geq 0$; По лемме о накачке найдётся слово $\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (aab)^t aaab(aab)^{n-t-q-2}(abb)^n$ принадлежит языку, но в полученном слове встречается более двух букв a подряд, следовательно данное слово не может принадлежать языку.

9. $\beta_1 = (aab)^t aa$; $\gamma = b(aab)^q aa$; $\beta_2 = b(aab)^{n-t-q-2}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-2 \geq 0$; По лемме о накачке найдётся слово $\alpha_1\beta_1\gamma^2\beta_2\alpha_2 = (aab)^t aab(aab)^q aab(aab)^q aab(aab)^{n-t-q-2}(abb)^n$ принадлежит языку, но в полученном слове кол-во букв $a = 3n + 2q + 2$, а кол-во букв $b = 3n+q+1$. Количество букв a и b различное, следовательно данное слово не может принадлежать языку.

Все рассмотренные случаи привели к противоречию, следовательно исходное предположение было ложным, и данный язык не является регулярным.