Задача 1.

Определение. Пусть Φ – это язык над алфавитом $A = \{a, b, c\}$. Язык состоит из всех слов вида $(ab)^n c^n$.

Теорема. Язык Φ не является регулярным.

Доказательство. Предположим, что верно обратное утверждение. Тогда для слов вида $(ab)^n c^n$ выполняется лемма о накачке. Зафиксируем константу n из условия леммы. В качестве фрагмента β из формулировки леммы выберем подслово c^n, длина которого соответствует условию леммы. При таком выборе $\alpha_1 = (ab)^n$ и $\alpha_2 = \epsilon$. По условию леммы найдется представление $\beta = c^n = \beta_1\gamma\beta_2$. Тогда подслово γ состоит из некоторого числа вхождений c, то есть $\gamma = c^r$, где $1 \leq r \leq n$. Тогда по условию леммы слово $\alpha_1\beta_1\gamma^{2n}\beta_2\alpha_2$ также принадлежит языку. Построим это слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^{2n}\beta_2\alpha_2 = (ab)^n c^{n-r+2rn}$$

Подставим в слово $r = n$:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^{2n}\beta_2\alpha_2 = (ab)^n c^{n-n+2n^2}$$

$$\alpha_1\beta_1\gamma^{2n}\beta_2\alpha_2 = (ab)^n c^{2n^2}$$

Это слово не принадлежит языку из определения, так как полученное слово не соответствует виду $(ab)^n c^n$ ($n \neq 2n^n$). Следовательно исходное предположение ложно, и язык не является регулярным.

Задача 2.

Определение. Пусть Φ – это язык над алфавитом $A = \{0, 1\}$. Язык состоит из всех слов вида $A = 01^{n_1}01^{n_2}...01^{n_k}$, причём последовательность $n_1, ...n_k$ возрастает.

Теорема. Язык Φ не является регулярным.

Доказательство. Предположим, что верно обратное утверждение, то есть данный язык является регулярным. Тогда для слова представляемого в виде $01^n01^{n+a_1}...01^{n+a_k}$, где $a_1, ...a_k$ - возрастающая последовательность, выполняется лемма о накачке. Зафиксируем константу n из условия леммы. В качестве фрагмента β из формулировки леммы выберем подслово 1^n, длина которого соответствует условию леммы. При таком выборе $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 01^{n+a_1}...01^{n+a_k}$. По условию леммы найдется представление $\beta = 1^n = \beta_1\gamma\beta_2$. Тогда подслово γ состоит из некоторого числа вхождений 1, то есть $\gamma = 1^r$, где $1 \leq r \leq n$. Тогда по условию леммы слово $\alpha_1\beta_1\gamma^{2n}\beta_2\alpha_2$ также принадлежит языку. Построим это слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^{2n}\beta_2\alpha_2 = 01^{n-r+2rn}01^{n+a_1}...01^{n+a_k}$$

Подставим в слово $r = n$ и $a_1 = 1$:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^{2n}\beta_2\alpha_2 = 01^{n-n+2n^2}01^{n+1}...01^{n+a_k}$$

$$\alpha_1\beta_1\gamma^{2n}\beta_2\alpha_2 = 01^{2n^2}01^{n+1}...01^{n+a_k}$$

Это слово не принадлежит языку из определения, так как полученное $n_1 \geq n_2$ $(n_1 = 2n^2,\ n_2 = n + 1)$ при $n > 0$. Следовательно исходное предположение ложно, и язык не является регулярным.