Задача 1.

Определение. Пусть Φ – это язык над алфавитом $A = \{a, b, c\}$. Язык состоит из всех слов вида $a^n b^m c^{n+m}$.

Теорема. Язык Φ не является регулярным.

Доказательство. Предположим, что верно обратное утверждение. Тогда для него выполняется лемма о накачке. Зафиксируем константу n из условия леммы и рассмотрим слово $a^n b^n c^{2n}$. В качестве фрагмента β из формулировки леммы выберем подслово a^n, длина которого соответствует условию леммы. При таком выборе $\alpha_1 = \epsilon$ и $\alpha_2 = b^n c^{2n}$. По условию леммы найдется представление $\beta = a^n = \beta_1 \gamma \beta_2$. Тогда подслово γ состоит из некоторого числа вхождений a, то есть $\gamma = a^r$, где $1 \le r \le n$. Тогда по условию леммы слово $\alpha_1 \beta_1 \gamma^{2n} \beta_2 \alpha_2$ также принадлежит языку. Построим это слово:

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma^{2n} \beta_2 \alpha_2 = a^{n-r+2rn} b^n c^{2n}$$

Таким образом, мы доказали, что это слово принадлежит языку, однако, это не верно. Следовательно исходное предположение было ложным, и язык не является регулярным.

Задача 2.

Определение. Пусть Φ – это язык над алфавитом $A = \{x, y\}$. Язык состоит из всех слов вида $(xyx)^n (yxy)^n$.

Теорема. Язык Φ не является регулярным.

Доказательство. Предположим, что верно обратное утверждение. Тогда для него выполняется лемма о накачке. Зафиксируем константу n из условия леммы и рассмотрим слово $(xyx)^n (yxy)^n$. В качестве фрагмента β из формулировки леммы выберем подслово $(xyx)^n$, длина которого соответствует условию леммы. При таком выборе $\alpha_1 = \epsilon$ и $\alpha_2 = (yxy)^n$. По условию леммы найдется представление $\beta = (xyx)^n = \beta_1 \gamma \beta_2$. Рассмотрим девять различных возможностей для такого разбиения.

1. $\beta_1 = (xyx)^t;\ \gamma = (xyx)^q;\ \beta_2 = (xyx)^{n-t-q}$. При этом $q \ge 1;$ $t \ge 0;\ n - t - q \ge 0$. По лемме о накачке слово:

   $$\alpha_1 \beta_1 \gamma^0 \beta_2 \alpha_2 = (xyx)^{n-q} (yxy)^n$$

   принадлежит языку, однако, в этом слове (xyx) встречается минимум на 1 раз меньше, чем (yxy), следовательно это слово не может принадлежать языку Φ.

2. $\beta_1 = (xyx)^t$; $\gamma = (xyx)^q x$; $\beta_2 = yx(xyx)^{n-t-q-1}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-1 \geq 0$. По лемме о накачке слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (xyx)^t yx(xyx)^{n-t-q-1}(yxy)^n$$

принадлежит языку, однако, это не верно, т.к. слово не принадлежит языку Ф.

3. $\beta_1 = (xyx)^t$; $\gamma = (xyx)^q xy$; $\beta_2 = x(xyx)^{n-t-q-1}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-1 \geq 0$. По лемме о накачке слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (xyx)^t x(xyx)^{n-t-q-1}(yxy)^n$$

принадлежит языку, однако, это не верно, т.к. слово не принадлежит языку Ф.

4. $\beta_1 = (xyx)^t x$; $\gamma = yx(xyx)^q$; $\beta_2 = (xyx)^{n-t-q-1}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-1 \geq 0$. По лемме о накачке слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (xyx)^t x(xyx)^{n-t-q-1}(yxy)^n$$

принадлежит языку, однако, это не верно, т.к. слово не принадлежит языку Ф.

5. $\beta_1 = (xyx)^t x$; $\gamma = yx(xyx)^q x$; $\beta_2 = yx(xyx)^{n-t-q-2}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-2 \geq 0$. По лемме о накачке слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (xyx)^{n-q-1}(yxy)^n$$

принадлежит языку, однако, в этом слове (xyx) встречается минимум на 1 раз меньше, чем (yxy), следовательно это слово не может принадлежать языку Ф.

6. $\beta_1 = (xyx)^t x$; $\gamma = yx(xyx)^q xy$; $\beta_2 = x(xyx)^{n-t-q-2}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-2 \geq 0$. По лемме о накачке слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (xyx)^t xx(xyx)^{n-t-2}(yxy)^n$$

принадлежит языку, однако, это не верно, т.к. слово не принадлежит языку Ф.

7. $\beta_1 = (xyx)^t xy$; $\gamma = x(xyx)^q$; $\beta_2 = (xyx)^{n-t-q-1}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-1 \geq 0$. По лемме о накачке слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (xyx)^t xy(xyx)^{n-t-q-1}(yxy)^n$$

принадлежит языку, однако, это не верно, т.к. слово не принадлежит языку Ф.

8. $\beta_1 = (xyx)^t xy$; $\gamma = x(xyx)^q x$; $\beta_2 = yx(xyx)^{n-t-q-2}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-2 \geq 0$. По лемме о накачке слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (xyx)^t xyyx(xyx)^{n-t-q-2}(yxy)^n$$

принадлежит языку, однако, это не верно, т.к. слово не принадлежит языку Φ.

9. $\beta_1 = (xyx)^t xy$; $\gamma = x(xyx)^q xy$; $\beta_2 = x(xyx)^{n-t-q-2}$. При этом $q \geq 0$; $t \geq 0$; $n-t-q-2 \geq 0$. По лемме о накачке слово:

$$\alpha_1\beta_1\gamma^0\beta_2\alpha_2 = (xyx)^{n-q-1}(yxy)^n$$

принадлежит языку, однако, в этом слове (xyx) встречается минимум на 1 раз меньше, чем (yxy), следовательно это слово не может принадлежать языку Φ.

Все рассмотренные случаи привели к противоречию, следовательно исходное предположение было ложным, и язык Φ не является регулярным.