Описание моделей

SIR модель

Sir модель -- одна из простейших компартментных моделей распространения эпидемий. Все особи популяции в данной модели делятся на группы (компартменты).
В sir модели особи поделены на три группы:

1. S(t) - подверженные заболеванию особи (susceptible)
2. I(t) - заражённые особи (infected)
3. R(t) - переболевшие (resistant)

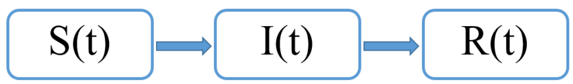

Диаграмма эволюции особи популяции
в SIR-модели

Sir модель рассматривает замкнутую популяцию, в которой не происходят процессы рождаемости и смертности. Поэтому будет верно следующее уравнение:

$$S + I + R = N,$$

где N - общее число особей популяции.

SEIR модель

Во многих болезнях есть инкубационный период, во время которого особь заражена, но не пока заразна. Можно учесть эту задержку между моментом заражения и моментом, когда особь становится заразной, в модели SIR, добавив дополнительную группу E (exposed). Соответственно немного изменится диаграмма эволюции особи, а именно добавятся связи S→E и E→I.

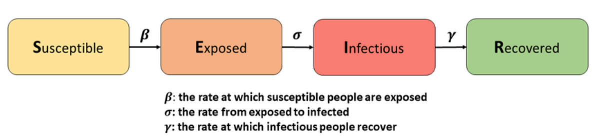

Диаграмма эволюции особи популяции
в SEIR-модели

На схеме показаны следующие коэффициенты:

- β - коэффициент заражения (вероятность того, что контакт между восприимчивым и заражённым приводит к новому заражению (переход S → E);
- σ - коэффициент инкубационного перехода (вероятность того, что зараженный индивид становится заразным (переход E → I));
- γ - коэффициент выздоровления (вероятность того, что заражённый индивид выздоравливает (переход I → R).

В замкнутой популяции, где отсутствуют процессы рождения и смерти, модель SEIR принимает следующий вид:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N},$$
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \sigma E,$$
$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I,$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

где $N = S + E + I + R$ - вся популяция.

SEIRS модель

Модель SEIR предполагает, что после выздоровления особь приобретает пожизненный иммунитет к заболеванию. Однако для многих инфекций иммунитет после перенесённого заболевания со временем ослабевает. В этом случае используется модель SEIRS, которая допускает возврат выздоровевших особей в восприимчивое состояние. Параметр ξ в этой модели характеризует вероятность потери иммунитета, то есть вероятность того, что выздоровевший индивид (R) со временем возвращается в категорию восприимчивых (S).

Если приток восприимчивых в популяцию достаточно велик, система в установившемся состоянии переходит в эндемическое равновесие (устойчивое состояние системы, в котором инфекция сохраняется на постоянном уровне: не исчезает и не угасает), сопровождаемое затухающими колебаниями численности заболевших.

Система дифференциальных уравнений для модели SEIRS имеет вид:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} + \xi R,$$
$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \sigma E,$$
$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I,$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \xi, R$$

где $N = S + E + I + R$ - вся популяция.

Также рассмотрим схему, на которой показано, как индивиды переходят между компартментами модели. Пунктирная стрелка показывает, как модель SEIR превращается в SEIRS (Susceptible – Exposed – Infectious – Recovered – Susceptible):

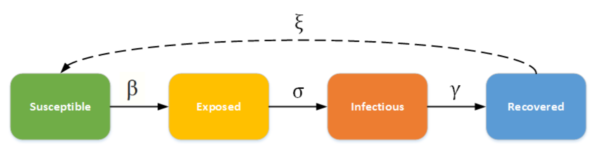

Диаграмма эволюции особи популяции в SEIRS-модели

Метод NIMFA

Классические модели SIR/SEIR описывают усреднённую динамику инфекционного процесса во всей популяции и не учитывают структуру взаимодействий между её элементами. В реальных же системах — например, в сетях Интернета вещей (IoT) — заражение распространяется по связям между конкретными устройствами, аналогично тому, как в популяции особи контактируют не со всеми, а только с соседями.

Для учёта этой сетевой структуры используется метод NIMFA (N-Intertwined Mean-Field Approximation). В нём каждая особь из классической модели рассматривается как отдельный узел графа, а вероятность её заражения определяется степенью заражённости соседних узлов.

Сеть IoT представляется как неориентированный граф $G(V, E)$, где V — множество узлов (устройств), E — множество связей. Матрица смежности $A = [a_{ij}]$ отражает наличие соединений: $a_{ij} = 1$, если устройства i и j связаны, иначе 0.

Метод NIMFA описывает вероятности заражения $p_i(t)$ для каждого узла i во времени с помощью системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\delta p_i(t) + (1 - p_i(t))\beta \sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_j(t).$$

где:

- $p_i(t)$ — вероятность того, что узел i заражён в момент времени t;
- β — коэффициент заражения (интенсивность передачи между связанными узлами);
- δ — коэффициент восстановления (скорость устранения заражения);
- a_{ij} — элемент матрицы смежности, определяющий связь между узлами i и j.

Таким образом, вероятность заражения конкретного узла зависит от состояния его соседей и от параметров распространения вредоносного ПО.

Модель SEIRS-NIMFA

Модель SEIRS-NIMFA объединяет принципы SEIRS-модели и сетевого приближения NIMFA, что позволяет описывать распространение заражения в гетерогенных системах, где каждое устройство В отличие от усреднённых моделей, здесь рассматривается **индивидуальное состояние каждого узла**.

Для каждого устройства i вводятся вероятности нахождения в четырёх состояниях:

$$x_i(t),\ w_i(t),\ y_i(t),\ z_i(t),$$

соответствующие компартментам S, E, I, R, при этом выполняется нормировка:

$$x_i(t) + w_i(t) + y_i(t) + z_i(t) = 1.$$

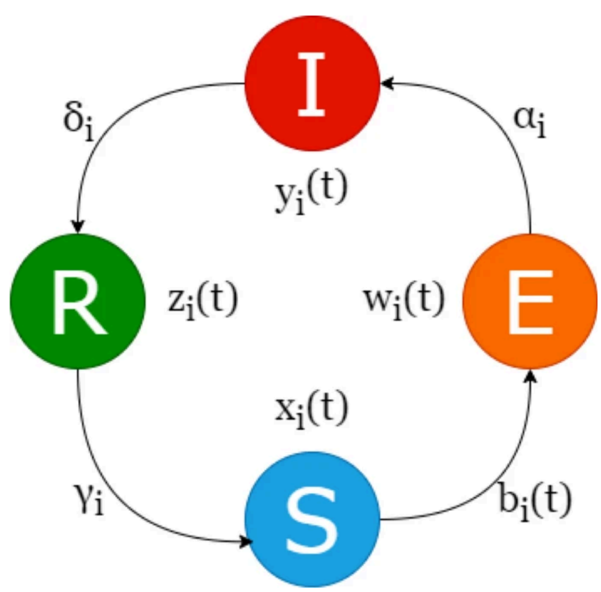

Схема переходов между состояниями
в модели SEIRS-NIMFA

Переходы между состояниями описываются независимыми пуассоновскими процессами со следующими параметрами:

- β_i — вероятность заражения при контакте с инфицированным соседом (S → E);

- α_i — вероятность перехода из экспонированного в заразное состояние (E → I);
- δ_i — вероятность выздоровления (I → R);
- γ_i — вероятность потери иммунитета и возвращения в восприимчивое состояние (R → S).

Скорость заражения

В сетевой постановке интенсивность заражения узла i зависит от вероятности заражённости его соседей и выражается как:

$$b_i(t) = \beta_i \sum_{j=1}^{N} a_{ij} y_j(t),$$

где a_{ij} — элемент матрицы смежности, показывающий наличие связи между узлами.

Уравнения SEIRS-NIMFA

Динамика вероятностей описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = -b_i(t) x_i + \gamma_i z_i,$$
$$\frac{dw_i}{dt} = b_i(t) x_i - \alpha_i w_i,$$
$$\frac{dy_i}{dt} = \alpha_i w_i - \delta_i y_i,$$
$$\frac{dz_i}{dt} = \delta_i y_i - \gamma_i z_i.$$

Эта система моделирует изменения вероятностей для каждого узла во времени, учитывая топологию графа и параметры переходов. Для численного решения используется метод Эйлера при заданных начальных условиях.