

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра систем автоматизированного проектирования

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №8
«ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

Студентка гр. 3353

Карпенко А.Ю.

Преподаватель

Копец Е.Е.

Санкт-Петербург

2024

Цель работы

Решение СЛАУ различными методами

Ход работы:

8.1

Решим СЛАУ вручную, а потом проверим себя в sympy

Ручное решение первого примера

$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 7x - 3y = -23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ x = -\frac{23}{7} + \frac{3}{7}y \end{cases} \Rightarrow 2\left(-\frac{23}{7} + \frac{3}{7}y\right) + 5y = 11 \Rightarrow y = 3, x = -2$$

Решение при помощи матричного вида sympy

```
from sympy import*
x,y=symbols('x,y')
X=Matrix([[2,5],[7,-3]])
X

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$$

X_augmented=Matrix([[2,5,11],[7,-3,-23]])
X_augmented

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 \\ 7 & -3 & -23 \end{bmatrix}$$

linsolve(X_augmented,[x,y])
{(-2, 3)}
```

Рис.1

Ручное решение второго примера

$$\begin{cases} -3x + y = -2 \\ 3x + 5y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x + y = -2 \\ 3x = 8 - 5y \end{cases} \Rightarrow 2 - (8 - 5y) + y = -2 \Rightarrow y = 1, x = 1$$

Решение при помощи матричного вида sympy

```
from sympy import*
x,y=symbols('x,y')
X=Matrix([[3,1],[3,5]])
X

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

X_augmented=Matrix([[3,1,-2],[3,5,8]])
X_augmented

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

linsolve(X_augmented,[x,y])
{(1, 1)}
```

Рис. 2

Ручное решение третьего примера

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ y = -7 + 3x \end{cases} \rightarrow 2x + 3(-7 + 3x) = 12 \rightarrow x = 3, y = 2$$

Решение при помощи матричного вида sympy

```
from sympy import*

x,y=symbols('x,y')

X=Matrix([[2,3],[3,-1]])
X


$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$


X_augmented=Matrix([[2,3,12],[3,-1,7]])
X_augmented


$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$


linsolve(X_augmented,[x,y])

{(3, 2)}
```

Рис. 3

Ручное решение четвертого примера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x_3 = -4 \Rightarrow x_3 = -2, x_2 = 2, x_1 = 1$$

Решение при помощи матричного вида sympy

```
from sympy import*

x1,x2,x3=symbols('x1,x2,x3')

X_augmented=Matrix([[1,1,2,-1],[2,-1,2,-4],[4,1,4,-2]])
X_augmented


$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$


linsolve(X_augmented,[x1,x2,x3])

{(1, 2, -2)}
```

Рис.4

8.2

Необходимо умножить матрицу на вектор

```
from sympy import *  
from sympy import Matrix  
  
Matrix1=Matrix([[2,5],[7,-3]])  
Matrix1  
  
 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$   
  
vec1=Matrix([2,3])  
vec1  
  
 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$   
  
Matrix1*vec1  
  
 $\begin{bmatrix} 19 \\ 5 \end{bmatrix}$ 
```

Рис.5- Результат первого перемножения матриц и вектора

```
from sympy import *  
from sympy import Matrix  
  
Matrix1=Matrix([[-3,1],[3,5]])  
Matrix1  
  
 $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$   
  
vec1=Matrix([1,3])  
vec1  
  
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$   
  
Matrix1*vec1  
  
 $\begin{bmatrix} 0 \\ 18 \end{bmatrix}$ 
```

Рис.6- Результат второго перемножения матриц и вектора

```
from sympy import *  
from sympy import Matrix  
  
Matrix1=Matrix([[2,3],[3,-1]])  
Matrix1  
  
 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$   
  
vec1=Matrix([4,2])  
vec1  
  
 $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$   
  
Matrix1*vec1  
  
 $\begin{bmatrix} 14 \\ 10 \end{bmatrix}$ 
```

Рис.7- Результат третьего перемножения матриц и вектора

```
from sympy import *  
from sympy import Matrix  
  
Matrix1=Matrix([[1,1,2],[2,-1,2],[4,1,4]])  
Matrix1  
  
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$   
  
vec1=Matrix([2,3,5])  
vec1  
  
 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$   
  
Matrix1*vec1  
  
 $\begin{bmatrix} 15 \\ 11 \\ 31 \end{bmatrix}$ 
```

Рис.8- Результат четвертого перемножения матриц и вектора

8.3

1. Необходимо решить СЛАУ вручную и проверить в symru.

Ручное решение первого примера

$$\begin{cases} -x + 7y = -34 \\ 8x - 8y = -48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 34 + 7y \\ 8x - 8y = -48 \end{cases} \Rightarrow 8(34 + 7y) - 8y = -48 \Rightarrow y = -5, x = -1$$

Решение при помощи матричного вида symru

```
from sympy import *
from sympy import Matrix

x1,x2=symbols('x1,x2')

X_augmented=Matrix([[ -1,7,-34],[8,8,-48]])
X_augmented


$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & -34 \\ 8 & 8 & -48 \end{bmatrix}$$


linsolve(X_augmented, [x1,x2])

{(-1, -5)}
```

Рис.9

Ручное решение второго примера

$$\begin{cases} 4x - 7y = -4 \\ 3x - 4y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 7y = -4 \\ x = -1 + \frac{4}{3}y \end{cases} \Rightarrow 4\left(-1 + \frac{4}{3}y\right) - 7y = -4 \Rightarrow y = 0, x = -1$$

Решение при помощи матричного вида symru

```
from sympy import *
from sympy import Matrix

x1,x2=symbols('x1,x2')

X_augmented=Matrix([[4,-7,-4],[3,-4,-3]])
X_augmented


$$\begin{bmatrix} 4 & -7 & -4 \\ 3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$


linsolve(X_augmented, [x1,x2])

{(-1, 0)}
```

Рис.10

Ручное решение третьего примера

$$\begin{cases} 8a - 4b = 64 \\ -3a + 3b = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a - 4b = 64 \\ a = 7 + b \end{cases} \Rightarrow 8(7 + b) - 4b = 64 \Rightarrow b = 2, a = 9$$

Решение при помощи матричного вида symru

```
from sympy import *
from sympy import Matrix

x1,x2=symbols('x1,x2')

X_augmented=Matrix([[8,-4,64],[-3,3,-21]])
X_augmented


$$\begin{bmatrix} 8 & -4 & 64 \\ -3 & 3 & -21 \end{bmatrix}$$


linsolve(X_augmented, [x1,x2])

{(9, 2)}
```

Рис. 11

Ручное решение четвертого примера

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -47 \\ -2x_2 + 2x_3 = 10 \\ -4x_1 - 8x_2 - 7x_3 = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -47 \\ x_2 = -5 + x_3 \\ -4x_1 - 8x_2 - 7x_3 = 63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_3 = -12 \\ -4x_1 - 15x_3 = 23 \end{cases} \Rightarrow -67x_3 = 67 \Rightarrow x_3 = -1, x_2 = -6, x_1 = -2$$

Решение при помощи матричного вида sympy

```
from sympy import *
from sympy import Matrix

x1,x2,x3=symbols('x1,x2,x3')

x_augmented=Matrix([[5,7,-5,-47],[0,-2,2,10],[-4,-8,-7,63]])
x_augmented


$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 & -47 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ -4 & -8 & -7 & 63 \end{bmatrix}$$


1 linsolve(x_augmented, [x1,x2,x3])

((-2, -6, -1))
```

Рис. 12

2. умножим матрицу на число вручную и проверим в sympy

Ручное решение первого примера

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1) + 7(-5) \\ 8(-1) + 8(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -34 \\ -48 \end{bmatrix}$$

Решение при помощи sympy

```
from sympy import *
from sympy import Matrix

Matrix1=Matrix([[-1,7],[8,8]])
Matrix1


$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$


vec1=Matrix([-1,-5])
vec1


$$\begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$$


Matrix1*vec1


$$\begin{bmatrix} -34 \\ -48 \end{bmatrix}$$

```

Рис.13

Ручное решение второго примера

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-1) + (-7) \cdot 0 \\ 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Решение при помощи sympy

```

from sympy import *
from sympy import Matrix

Matrix1=Matrix([[4,-7],[3,-4]])
Matrix1


$$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$


vec1=Matrix([-1,0])
vec1


$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$


Matrix1*vec1


$$\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$


```

Рис.14

Ручное решение третьего примера

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \cdot 9 + (-4) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 9 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ -21 \end{bmatrix}$$

Решение при помощи sympy

```

from sympy import *
from sympy import Matrix

Matrix1=Matrix([[8,-4],[-3,3]])
Matrix1


$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$


vec1=Matrix([9,2])
vec1


$$\begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$


Matrix1*vec1


$$\begin{bmatrix} 64 \\ -21 \end{bmatrix}$$


```

Рис.15

Ручное решение четвертого примера

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ -4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot (-2) + 7 \cdot (-6) + (-5) \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-6) + 2 \cdot (-1) \\ (-4) \cdot (-2) + (-8) \cdot (-6) + (-7) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47 \\ 10 \\ 63 \end{bmatrix}$$

Решение при помощи sympy

```

from sympy import *
from sympy import Matrix

Matrix1=Matrix([[5,7,-5],[0,-2,2],[-4,-8,-7]])
Matrix1


$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ -4 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$


vec1=Matrix([-2,-6,-1])
vec1


$$\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$


Matrix1*vec1


$$\begin{bmatrix} -47 \\ 10 \\ 63 \end{bmatrix}$$


```

Рис.16

3. Решите переопределённую СЛАУ. Достигните значения MSE < 55

```
from sympy import *
from sympy import Matrix

x,y,z=symbols('x,y,z')

f=(1/6)*((5*x+7*y-5*z+47)**2+\
(-2*y+2*z-10)**2+\
(-4*x-8*y-7*z-63)**2+\
(x+y+2*z+1)**2+\
(2*x-y+2*z+4)**2+\
(4*x+y+4*z+2)**2)

delta_MSE_x=diff(f,x)

delta_MSE_y=diff(f,y)

delta_MSE_z=diff(f,z)

f_func =lambdify((x,y,z),f)

delta_MSE_x_func=lambdify((x,y,z),delta_MSE_x)

delta_MSE_y_func=lambdify((x,y,z),delta_MSE_y)

delta_MSE_z_func=lambdify((x,y,z),delta_MSE_z)

value_x=0

value_y=0

value_z=0

count=0

while f_func(value_x,value_y,value_z)>=37:
    value_x_num=delta_MSE_x_func(value_x,value_y,value_z)
    value_y_num=delta_MSE_y_func(value_x,value_y,value_z)
    value_z_num=delta_MSE_z_func(value_x,value_y,value_z)

    value_x=value_x+(0.01*(- value_x_num))
    value_y=value_y+(0.01*(- value_y_num))
    value_z=value_z+(0.01*(- value_z_num))

    count=count+1

print(f"Значение MSE стало меньше 55 после {count} итераций")
print(f"Значение x: {value_x} ")
print(f"Значение y: {value_y} ")
print(f"Значение z: {value_z} ")
print(f"Значение MSE: {f_func(value_x,value_y,value_z)} ")

Значение MSE стало меньше 55 после 0 итераций
Значение x: -0.3530993476889083
Значение y: -6.777503332609442
Значение z: -0.5114435759984534
Значение MSE: 36.95852053476304
```

Рис. 17

Вывод

В лабораторной работе мы применили уже изученные навыки для решения СЛАУ и перемножения матрицы на вектор