

## Графічне диференціювання

Суть графічного диференціювання полягає в тому, що за графіком функції, заданому на деякому відрізку  $[a; b]$ , будується приблизно графік її похідної. Ця побудова заснована на геометричному змісті похідній і формулі Лагранжа скінчених різниць.

Нехай на деякому відрізку  $[x_0; x_0 + \Delta x]$  заданий графік функції  $y=f(x)$  (рис. 1). З формули скінчених різниць випливає, що

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \text{де } x_0 < \xi < x_0 + \Delta x.$$

Геометрично вираз, що розміщений праворуч, це тангенс кута нахилу хорди  $AB$ , а вираз розміщений ліворуч — кутовий коефіцієнт дотичної в деякій точці  $\xi \in [x_0; x_0 + \Delta x]$ . Якщо  $\Delta x$  мале, то в якості  $\xi$  можна взяти точку, що лежить посередині  $[x_0; x_0 + \Delta x]$ , тобто,  $\xi = x_0 + \frac{\Delta x}{2}$ , тоді отримаємо наближену рівність

$$f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

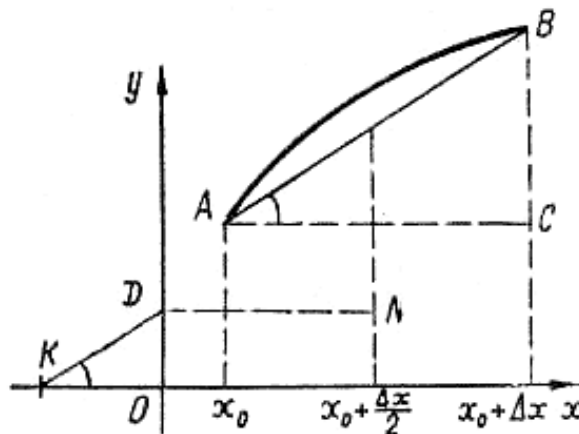


Рис. 1

Для відшукування похідної в точці  $x_0 + \Delta x$  потрібно знайти тангенс кута нахилу хорди  $AB$ . Для цього проведемо наступну побудову (див. рис. 1). Від точки  $O$  (або від будь-якої іншої точки поза відрізком  $[x_0; x_0 + \Delta x]$ ) вліво відкладемо одиничний відрізок  $OK$  і проведемо  $KD \parallel AB$ . Величина відрізка  $OD = OK \tan \varphi = \tan \varphi$ , де  $\varphi = \angle DKO = \angle BAC$ . Отже,  $OD = f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ . Проведемо  $DN$  паралельно осі  $Ox$ . Тоді точка  $N$ , що відповідає абсцисі  $x_0 + \frac{\Delta x}{2}$ , буде мати ординатою  $f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ , тобто це точка графіка похідної  $f'(x)$  функції  $f(x)$ .

Нехай тепер функція  $f(x)$  задана на відрізку  $[a; b]$ . Відрізок  $[a; b]$  розіб'ємо на  $n$  частинних відрізків, не обов'язково рівних між собою, але так, щоб на кожному з них функція поведилася монотонно. На кожному частковому відрізку проводимо побудову, аналогічну описаній вище для відрізка  $[x_0, x + \Delta x]$  (див. рис. 1). По закінченні побудови точки, аналогічні точці  $N$ , з'єднуємо ламаною, котра приблизно представляє графік похідної  $f'(x)$  заданої функції  $f(x)$ .

**Приклад.** Функція задана графічно на відрізку  $[0; b]$  кривою  $A_0A_1...A_6$  (рис. 2). Побудувати графік її похідної.

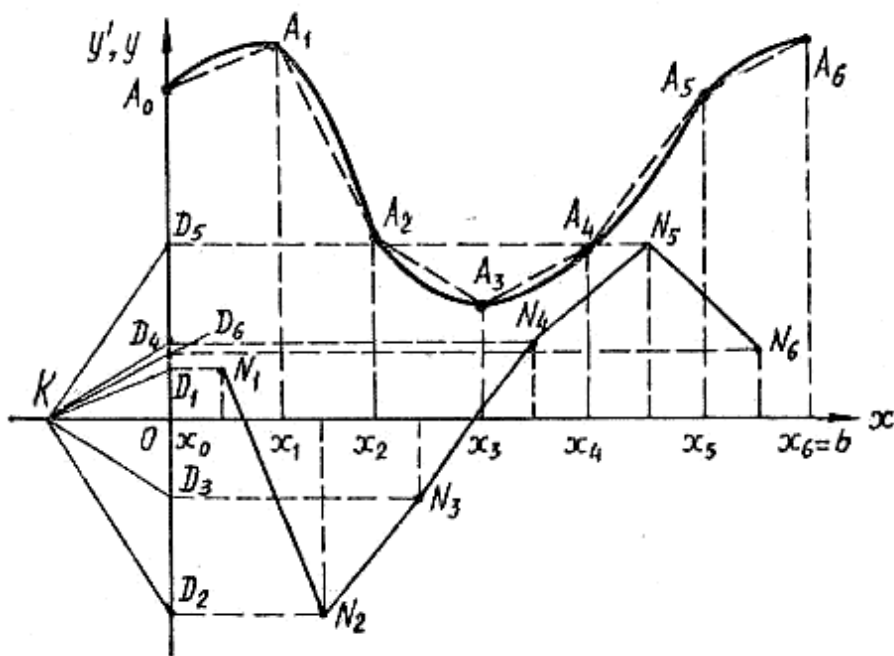


Рис. 2

### Розв'язання

Розіб'ємо відрізок  $[0; b]$  на 6 частин точками

$$x_0=0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6=b,$$

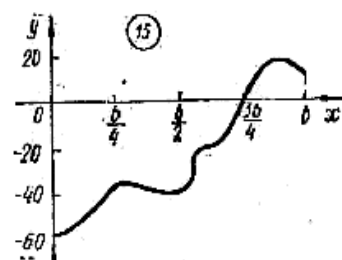
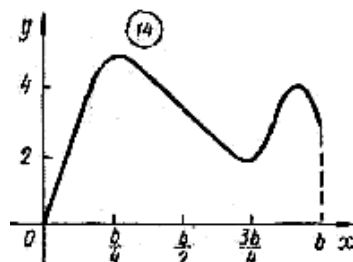
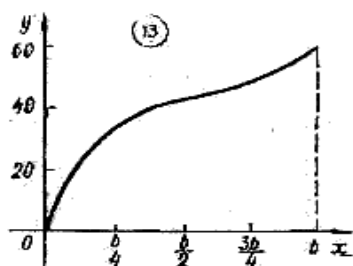
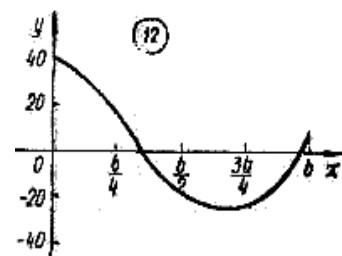
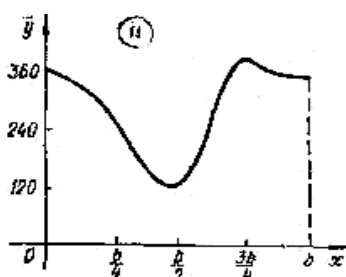
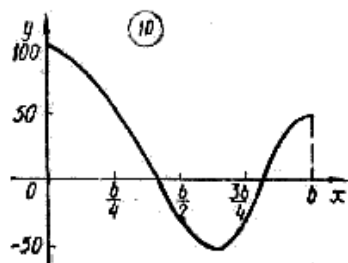
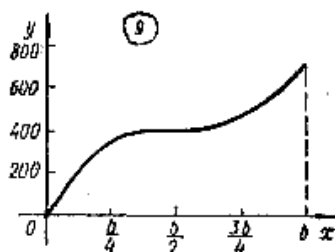
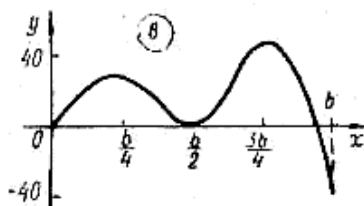
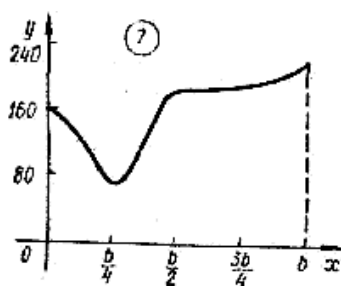
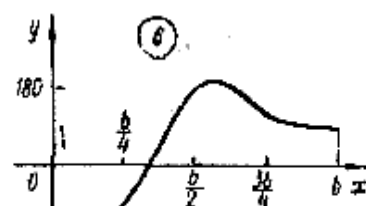
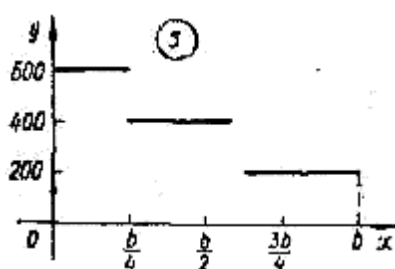
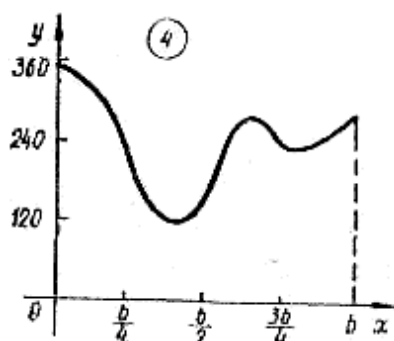
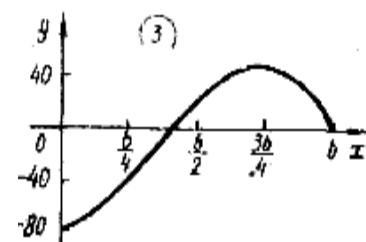
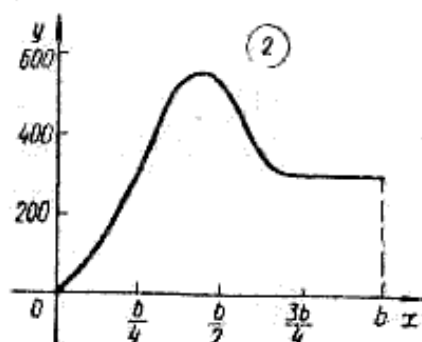
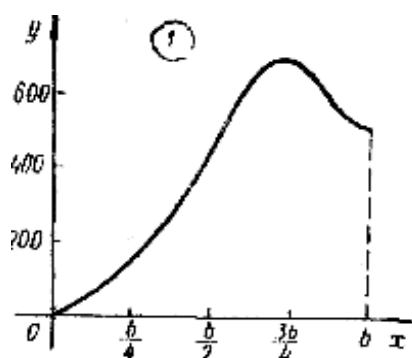
як зазначено на, мал. 2, і вліво від точки  $O$  відкладемо відрізок  $OK=1$ .

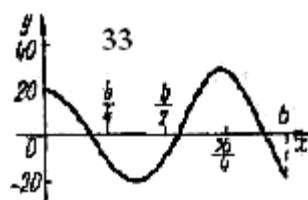
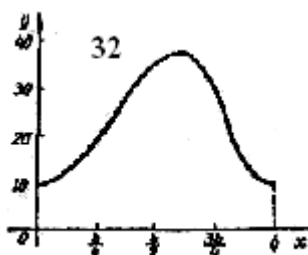
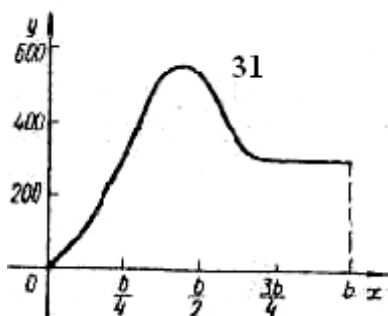
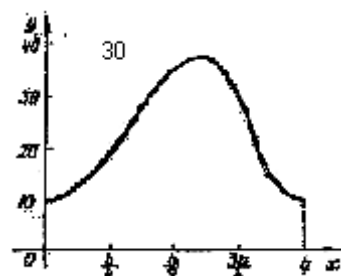
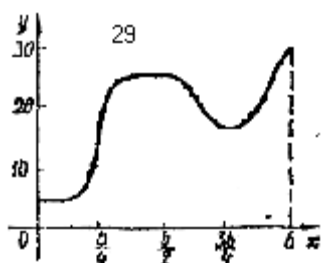
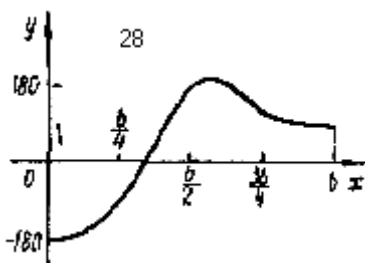
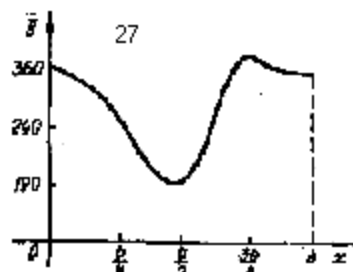
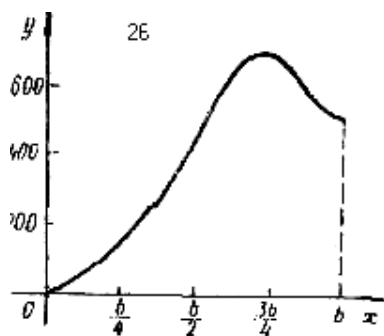
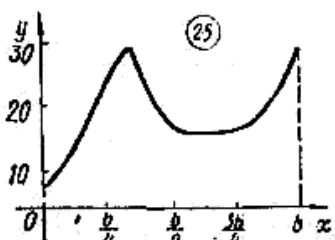
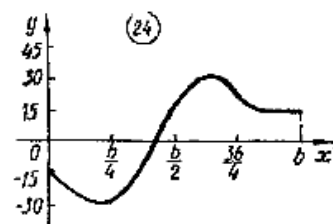
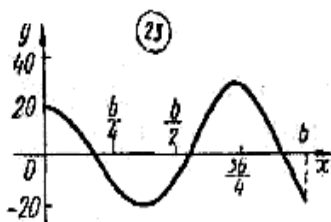
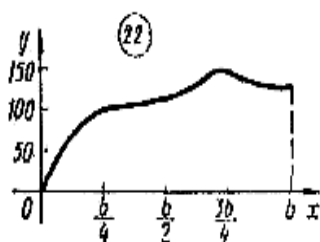
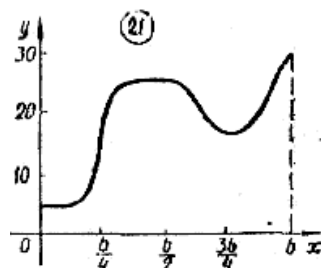
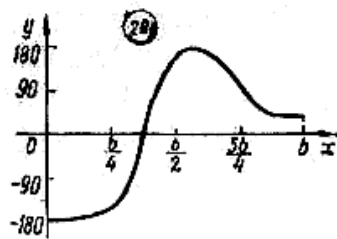
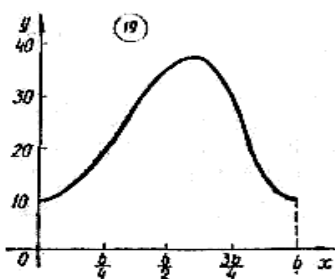
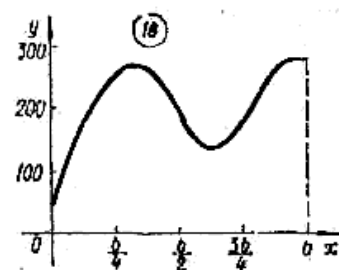
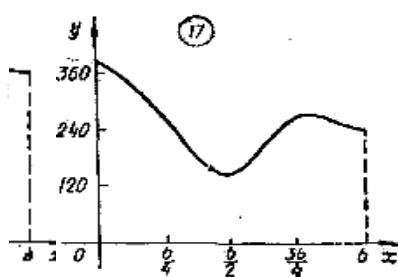
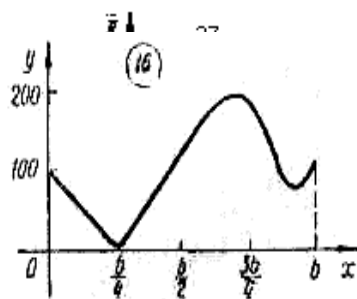
Розглядаємо перший відрізок  $[0; x_1]$  і проводимо хорду  $A_0A_1$ . Потім із точки  $K$  проводимо пряму  $KD_1 \parallel A_0A_1$  до перетину в точці  $D_1$  з віссю  $Oy$ . З  $D_1$  проводимо пряму  $D_1N_1$ , паралельну осі  $Ox$ , до перетинання в точці  $N_1$  із прямою, паралельною осі  $Oy$  і проведеної із середини відрізка  $[0; x_1]$ . Розглядаємо відрізок  $[x_1; x_2]$ . Будуємо хорду  $A_1A_2$  і пряму  $KD_2$ , паралельну хорді. Далі проводимо  $D_2N_2 \parallel Ox$  і відмічаємо точку  $N_2$ , що відповідає середині відрізка  $[x_1; x_2]$ . Проводимо аналогічні побудови на відрізках  $[x_2; x_3]$ ,  $[x_3; x_4]$ ,  $[x_4; x_5]$ ,  $[x_5; x_6]$ . Одержуємо точки  $N_3, \dots, N_6$ .

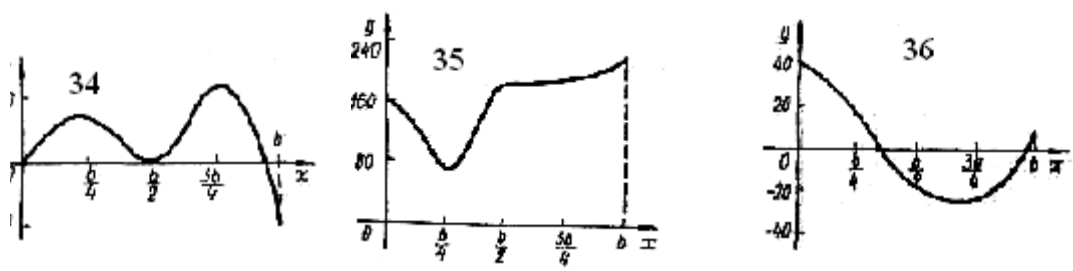
З'єднуємо точки  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$  ламаної (див. рис. 2), що приблизно дають собою уявлення про графік похідної заданої функції.

# Завдання для самостійної роботи

Функція задана графічно на відрізку  $[0; b]$ . Побудувати графік її похідної. Значення  $b$  варто взяти з таб. 1.







Таблиця 1

Варіант Т	$b$	Варіант	$b$	Варіант	$b$
1	4,4	13	9,2	25	6,8
2	4,8	14	9,6	26	7,2
3	5,2	15	10,0	27	7,6
4	5,6	16	10,4	28	8,0
5	6,0	17	10,8	29	8,4
6	6,4	18	11,2	30	8,8
7	6,8	19	11,6	31	10,4
8	7,2	20	12,0	32	10,8
9	7,6	21	12,4	33	11,2
10	8,0	22	12,8	34	11,6
11	8,4	23	13,2	35	12,0
12	8,8	24	13,6	36	12,4