# Графічне інтегрування

Наближене обчислення інтеграла методом графічного інтегрування застосовується тоді, коли підінтегральна функція задана графічно. Нехай на [$a$; $b$] задана неперервна крива, рівняння якої $y=f(x)$. На підставі теореми про середнє значення для певного інтеграла існує така точка $\xi \in$ [$a$; $b$], що $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. Геометрично це означає, що площа криволінійної трапеції чисельно дорівнює площі прямокутника з основою [$a$; $b$] і висотою $f(\xi)$.

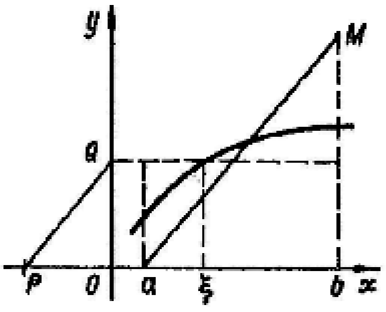

Рис. 1

Розглянемо криволінійну трапецію (рис. 1) і проведемо горизонтальну пряму приблизно так, щоб одержати необхідний прямокутник. Абсцисами точок перетину прямої і кривої будуть ті точки $\xi$, про які згадується в теоремі про середнє значення. Відкладемо на осі $Ox$ ліворуч від початку координат одиничний відрізок $OP$ і продовжимо проведену горизонтальну пряму до перетину віссю ординат (якщо $a<0$, то краще спочатку ліворуч від $a$ провести вертикальну пряму й при подальших діях замінити вісь $Oy$ цією прямою). Нехай пряма перетне вісь $Oy$ у точці $Q$, тоді $OQ= f(\xi)$. З'єднаємо точки $P$ и $Q$ і із точки $a$ проведемо пряму $aM$, паралельну $PQ$, до перетинання в точці $M$ з вертикаллю, проведеної із точки $b$. Покажемо, що $b=\int_a^b f(x)dx$ , тобто величина побудованого відрізка чисельно дорівнює значенню певного інтеграла. Дійсно, $\Delta\, PQO \sim \Delta\, aMb$. Звідси

$$\frac{PO}{ab}=\frac{QO}{bM},\ bM=\frac{QO\cdot ab}{PO}=f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)dx.$$

**Зауваження**. На рис. 1 функція $f(x)>0$. Однак отриманий результат має місце для будь-якої неперервної на [$a$; $b$] функції $y=f(x)$. Наприклад, на рис. 2 функція $f(x)$ міняє знак на [$a$; $b$]. Заштриховані площі приблизно рівні. Оскільки площа частини криволінійної трапеції, розташованої нижче осі $Ox$, більша, то $\int_a^b f(x)dx$ буде від'ємний. Провівши попередні побудови, одержуємо відрізок $b$, величина якого від'ємна, і тут $b=\int_a^b f(x)dx$ .

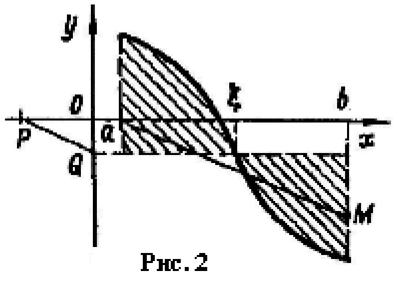

Рис. 2

На підставі проведеної побудови і здійснюється графічне інтегрування. Метод графічного інтегрування проілюстрований далі на прикладі.

**Зразок виконання завдання.**

**Завдання.** Функція представлена графічно на відрізку [*0*; *b*]=[*0*; *12*]. Побудувати графік її інтеграла $F(x)=\int_0^x f(x)dx$, $0 \le x \le b$. Визначити за графіком величину $\int_0^b f(x)dx$.

***Розв'язання.*** Розділимо відрізок [*0*; *12*] на часткові відрізки (див. рис. 3). У даному прикладі взяті 6 часткових відрізків і точки поділу $x_0=0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, $x_6=12$ відзначені на рис. 3. Відкладаємо від точки *O* ліворуч по осі *Ox* одиничний відрізок. Визначаємо середину часткового відрізка $[x_0;\ x_1]$ і ординату графіка функції *f(x)* у цій точці проектуємо на вісь *Oy*. Одержимо точку $Q_1$. Проводимо $PQ_1$, а потім $OM_1$ паралельно $PQ_1$. При цьому

$$x_1M_1 \approx \int_0^{x_1} f(x)dx.$$

Визначаємо середину часткового відрізка $[x_1;\ x_2]$. Ордината графіка в цій точці проектується на відрізок $OQ_2$. З'єднуємо *P* з $Q_2$ і будуємо $M_1M_2 \parallel PQ_2$. Тоді $x_2M_2 \approx \int_0^{x_2} f(x)dx$.

Відзначаємо середину відрізка $[x_2;\ x_3]$, потім $OQ_3$ і проводимо $M_2M_3 \parallel PQ_3$. Маємо $x_3M_3 \approx \int_0^{x_3} f(x)dx$ і т.д., поки не одержимо точку $M_6$. Ламана $OM_1M_2 \ldots M_6$ — графік первісної для функції, представленої на рис. 3.

Наближене значення $\int_0^{12} f(x)dx$ дорівнює ординаті $x_6M_6$. За графіком знаходимо $x_6M_6 \approx 7{,}8$.

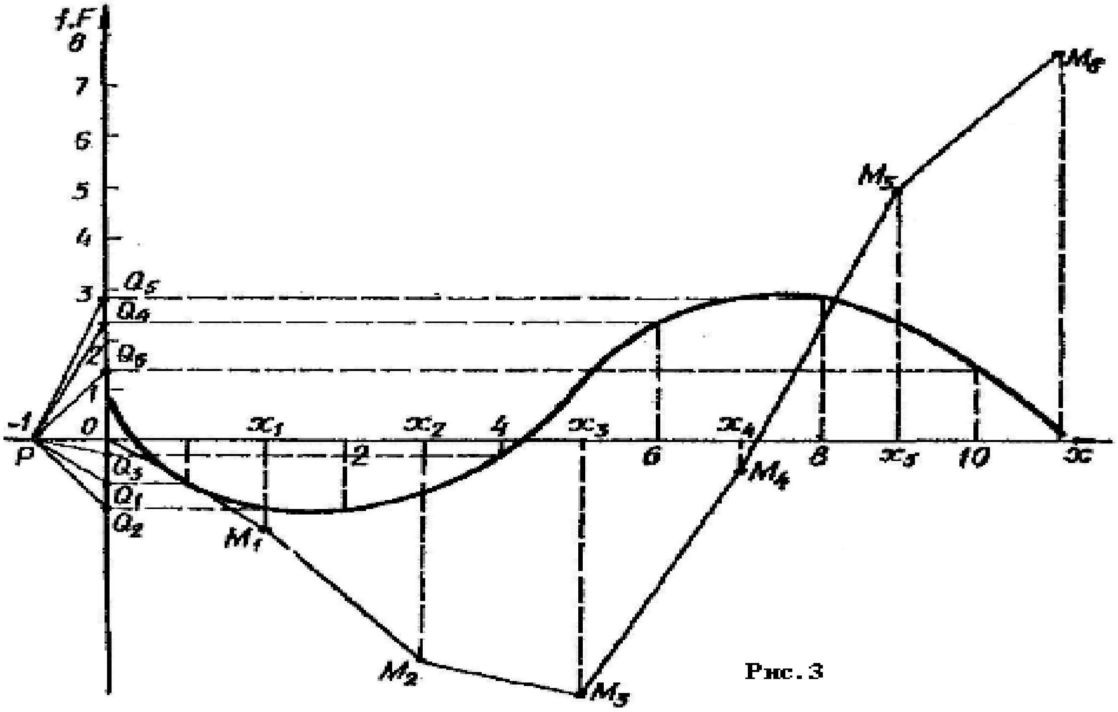


Рис. 3

**Завдання для самостійної роботи**

Функція задана графічно (варіанти завдань взяти з роботи «Графічне диференціювання») на відрізку [0; b]. Побудувати графік її інтеграла $F(x)=\int_0^x f(x)dx$, $0 \le x \le b$. Визначити за графіком величину $\int_0^b f(x)dx$.