Задача о поиске числа с особой структурой в битовом представлении

Коломиец Анастасия

МФТИ

7 апреля 2024 г.

План

1. Постановка задачи
2. Ответ задачи
3. Решение задачи
   - Доказательство S(x) = S(inv(x))
   - В x_{max} не может быть больше двух одинаковых цифр подряд
   - В битовом представлении x_{max} не может быть 0011 или 1100
   - В битовом представлении x_{max} не может быть 00 10..01 00 или 11 01...10 11
   - В битовом представлении x_{max} не может быть 00 10..01 00 или 11 01...10 11
   - В битовом представлении x_{max} не может быть 11 01..01 00 или 00 10...10 11
   - Промежуточный результат
   - Результат
   - Эксперимент

Постановка задачи

Фиксируем натуральное число p - четное.
Пусть x число в двоичной записи имеет вид $\overline{x_{p-1}x_{p-2}...x_0}$.
Запишем все циклические сдвиги числа x и найдем сумму тех из этого списка, которые начинаются с 0. Обозначим эту сумму как S(x)
Нужно найти максимум S(x) и значение x_{max}, в котором он достигается.

Ответ задачи

При p = 2k.
Максимальное значение функции достигается при x = 0101...01 и равно $\frac{k(4^k-1)}{3}$.

Решение задачи

Доказательство S(x) = S(inv(x))

Обозначения:

- P(x) - сумму чисел, начинающихся с единицы, из всех циклических сдвигов.
- y = inv(x) - p-значное двоичное число : $y_i = \overline{x_i}$
- t - количество единиц в битовом представлении x.

Тогда можно записать несколько равенств:

- $x + inv(x) = 111...1 =_{10} 2^p - 1$
- $S(x) + P(inv(x)) = (p - t)(2^p - 1)y$, так как всего слагаемых в S: (p - t) - колиество нулей
- $S(inv(x)) + P(x) = t(2^p - 1)y$
- $S(x) + P(x) = t(2^p - 1)$, так как всего t единиц и каждая единица будет входить в сумму на каждой позиции p-значного двоичного числа (2^i, где i от 0 до p - 1).

Тогда S(x) = S(inv(x)).

В x_{max} не может быть больше двух одинаковых цифр подряд

- Если в x существует $\overline{000}$,
  То посмотрим, как изменится S(x) при замене $\overline{000} \to \overline{010}$:
  $x = \overline{000y} \to x' = \overline{010y} \to$, где y - (p-3)-значное

Обозначение:

- $\Delta_i := x_i' - x_i$, где x_i - это p-значное число, начинающееся с i символа в x и получившееся из x с помощью циклических сдвигов.
- $\Delta_{p-1} = \overline{010y} - \overline{000y} = 2^{p-2}$
- $\Delta_{p-2} = -\overline{00y} \geq -2^{p-2} + 1$
- $\Delta_i = \overline{y_1 01 y_2} - \overline{y_1 00 y_2} \geq 0$ - для остальных i

Тогда $\Delta_\Sigma > 0$ и $S(x') > S(x)$.
Аналогичное верно и для чисел x, в которых встерчается $\overline{111}$:
$x \to inv(x) \to (000 \to 010) = x'$
Тогда, если в числе встретилось больше двух одинаковых цифр подряд, то мы можем построить x' с большей S(x).

В битовом представлении x_{max} не может быть 0011 или 1100

- Если в числе нашелся фрагмент 0011,
  То он будет внутри 100110 по 2п.
- Найдем, как изменится S(x) при преобразовании:
  $x = \overline{10\ \ 01\ \ 10y} \to x' = \overline{10\ \ 10\ \ 10y}$

Найдем Δ_i:

- $\Delta_{p-2} = \overline{0101y} - \overline{0011y} = 2^{p-2} - 2^{p-3} = 2^{p-3}$
- $\Delta_{p-3} = \overline{010y1} - \overline{0110y} = 2^{p-2} + 2y + 1 - 2^{p-2} - 2^{p-3} - y = -2^{p-3} + y + 1$
- $\Delta_i = \overline{0y_1 10y_2} - \overline{0y_1 01y_2} > 0$, для остальных i

Тогда $\Delta_\Sigma > 0$ и $S(x') > S(x)$
Аналогичное верно и для случая, когда в числе встретились 1100 по 1п.
Тогда, если в числе встретились две пары одинаковых цифр подряд, то мы можем построить x' с большей S(x)

В битовом представлении x_{max} не может быть 00 10..01 00 или 11 01...10 11

- Если в числе идут подряд пары 00, между которыми строго чередуются k чисел - 10..01:
  $x = \overline{0010..010010y}$
- Найдем, как изменится S(x) при
  $x = \overline{00\ \ 10..01\ \ 00\ \ 10y} \to x' = \overline{01\ \ 01..10\ \ 10\ \ 10y}$

Найдем Δ_i:

- $\Delta_{p-1} = \overline{01\ \ 01..10\ \ 10\ \ 10y} - \overline{00\ \ 10..01\ \ 00\ \ 10y} =$
  $2^{p-2} + 2^{p-4} + ... + 2^{p-k-3} - (2^{p-3} + 2^{p-5} + ... + 2^{p-k-2}) =$
  $(2^{p-3} + 2^{p-5} + ... + 2^{p-k-2}) + 2^{p-k-3}$
- $\Delta_{p-k-3} = -\overline{0010y} \geq -2^{p-3} - 2^{p-4} + 1$

В битовом представлении x_{max} не может быть 00 10..01 00 или 11 01...10 11

- $\Delta_{a_i} = \overline{010...01\ \ 010y1} - \overline{010...1\ \ 0010y} = 2^i + 2y + 1 - 2^{i-1} - y = 2^{i-1} + y + 1 \geq 2^{i-1} + 1$, для чисел, начинающихся с одного из первых k нулей, не считая самый первый;
  i - степень двойки, которую прибавляет первая отличная цифра в новом числе, тогда $i \in \{p-4, p-6, ..., p-k-3\}$

Тогда $\Delta_{p-1} + \Delta_{p-k-3} + \Delta_{a_{p-4}} \geq$
$(2^{p-3} + 2^{p-5} + ... + 2^{p-k-2}) + 2^{p-k-3} - 2^{p-3} - 2^{p-4} + 1 + 2^{p-5} + 1 > 0$

- $\Delta_j = \overline{y_1 101...y_2} - \overline{y_1 010 y_2} > 0$, для остальных j
- Тогда $\Delta_\Sigma > 0$ и $S(x') > S(x)$
- Аналогичное верно и для случая, когда в числе подряд идут 11 по 1п

4 шаг

Вывод: Если в числе встретились две пары одинаковых цифр, между которыми строго чередуются 0 и 1,
То мы можем построить x' с большим значением S, у которого ровно на две пары из одинаковых цифр меньше.

В битовом представлении x_{max} не может быть 11 01..01 00 или 00 10...10 11

- Если в числе идут подряд пары 00 и 11, между которыми строго чередуются k чисел - 10..10:
  $x = \overline{00\ \ 10..10\ \ 1101y}$
- Найдем, как изменится S(x) при
  $x = \overline{00\ \ 10..10\ \ 11\ \ 01y} \to x' = \overline{01\ \ 01..01\ \ 01\ \ 01y}$

Найдем Δ_i:

- $\Delta_{a_i} = \overline{01...01\ \ 01y1} - \overline{01...01\ \ 101y} = -2^i - 2^{i-2} - y + 2^{i-1} + 2y + 1 = -2^{i-1} - 2^{i-2} + y \geq -2^{i-1} - 2^{i-2} + 2^{i-5}$, для чисел, начинающихся с одного из первых k нулей, не считая самый первый;
  i - степень двойки, которую вычитает первая отличная цифра в новом числе, тогда $i \in \{p-3, p-6, ..., p-k-3\}$
  $y \geq 2^{i-5}$, так как больше двух нулей подряд идти не может
- $\Delta_{Sum(\Delta_{a_i})} \geq -2^{p-4} - 2^{p-6} .. - 2^{p-k-4} - 2^{p-5} - 2^{p-7} - ... - 2^{p-k-5} + 2^{p-8} + ... + 2^{p-k-8}$

В битовом представлении x_{max} не может быть 11 01..01 00 или 00 10...10 11

Найдем Δ_i:

- $\Delta_{p-1} = \overline{01 \;\; 01..01 \;\; 0101y} - \overline{00 \;\; 10..10 \;\; 1101y} = 2^{p-2} + 2^{p-4} + ... + 2^{p-k-2} - (2^{p-3} + 2^{p-5} + ... + 2^{p-k-3}) = 2^{p-3} + 2^{p-5} + ... + 2^{p-k-3}$
- $\Delta_{Sum(\Delta_{a_i})} + \Delta_{p-1} \geq (2^{p-3} + 2^{p-5} + ... + 2^{p-k-3}) - (2^{p-4} + 2^{p-6} .. + 2^{p-k-4}) - (2^{p-5} + 2^{p-7} + ... + 2^{p-k-5}) + (2^{p-8} + ... + 2^{p-k-8}) = 2^{p-3} - (2^{p-4} + 2^{p-6} .. + 2^{p-k-4}) - 2^{p-k-5} + (2^{p-8} + ... + 2^{p-k-8}) > 0$
- $\Delta_j = \overline{y_1 01 y_2} - \overline{y_1 00 y_2} > 0$, для остальных j

Тогда $\Delta_{\Sigma} > 0$ и $S(x') > S(x)$

Аналогичное верно и для случая, когда в числе пары 11 и 00, между которыми строго чередуются k чисел (01...01): (из 1п)

Вывод: Если в числе встретились две пары одинаковых цифр между которыми чередуются 0 и 1, то мы можем построить x' с большим значением S, у которого ровно на две пары из одинаковых цифр меньше.

Промежуточный результат

- Любое числј можем перестроить так, чтобы в его двоичной записи одинаковые цифры не встречались больше двух подряд и S(x) увеличилась.
- Затем любое число, в двочиной записи которого пары одинаковых цифр встречаются больше одного раза, можно перестроить так, чтобы количество таких пар уменьшилось ровно на два и значение S(x) увеличилось.

$x_{max} = 01...0101$

После модификаций первого типа, когда одинаковые цифры рядом встерчаются не более двух раз подряд, получили:

- Четное количество (2m) пар из одинаковых подряд идущих цифр
  Тогда после m операций второго типа мы получаем число, в котором не могут идти подряд одинаковые цифры. То есть $x' = 010101...01$. И такой случай возможен только при четном p
- Нечетное количество $(2m + 1)$ пар из одинаковых подряд идущих цифр
  Тогда после m операций второго типа мы получаем число, в котором ровно одна пара, повторяющихся и соседних цифр могут идти подряд. Но тогда число имеет вид: 001010..101 - состоит из нечетного количества цифр, что противоречит условию. Следовательно, такой случай возможен тогда и только тогда, когда p - нечетное.

Результат

- Любое число x из четного количества цифр можно преобразовать к виду $x' = 01...01$ и $S(x) < S(x')$. Следовательно, $x_{max} = 0101...01$.
- Тогда при p = 2k:
  $max(S(x_{max})) = (2^{p-2}+2^{p-4}+..+2^0)\cdot\frac{p}{2} = (4^0+...4^{k-1})\cdot k = \frac{4^k-1}{3}\cdot k$
- Любое число x из нечетного количества цифр можно преобразовать к виду $x' = 001...01$ и $S(x) < S(x')$. Следовательно, $x_{max} = 00101...01$.
- Тогда при p = 2k + 1:
  $max(S(x_{max})) = (2^{2k-2} + 2^{p-4} + .. + 2^0) + 2(2^{2k-2} + 2^{p-4} + .. + 2^0) + \sum_{i=1}^{k-1}(2^0 + 2^2 + ...2^{2i-2} + 2^{2i+1} + ...2^{2k-1}) =$
  $3\frac{4^k-1}{3} + \sum_{i=1}^{k-1}(2^0 + 2^2 + ...2^{2i-2} + 2(2^{2i} + ...2^{2k-2})) =$
  $4^k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1}(2(2^0 + ...2^{2k-2}) - (2^0 + 2^2 + ...2^{2i-2})) =$
  $4^k - 1 + \sum_{i=1}^{k-1}(\frac{2(4^k-1)}{3} - \frac{4^i-1}{3}) =$
  $(4^k - 1)(1 + \frac{2(k-1)}{3}) - \sum_{i=1}^{k-1}(\frac{4^i-1}{3}) = k(4^k - 1) + \frac{k-1}{3} - \frac{4^k-4}{9}$

Эксперимент

Для проверки теоретических результатов была написана программа, которая для фиксированного p считает по определению значение функции S для каждого x от 1 до 2^p.

Результаты теории подтвердились экспериментом при p от 1 до 30.