Филиппова Анастасия

Домашнее задание 4

(1) Доказать, что не существует сюръективного гомоморфизма:

(a) $S_5 \to C_8$

$\forall\ y \in C_8 \exists\ x \in S_5 : \varphi(x) = y.$

Пусть $x^n = e, (\varphi(x))^n = e \Rightarrow Ord(\varphi(x)) | Ord(x).$

Теперь рассмотрим группы S_5 и C_8: в C_8 есть элемент порядка 8, но в группе S_5 нет элемента, порядок которго был бы кратен 8 (так как в группе всего 5 элементов). Следовательно, нет сюръективноо гомоморфизма.

(b) $(Q, +) \to (Z, +)$

Пусть $1 \to a, 1/2 \to b \Rightarrow 1/2 + 1/2 \to a = 2b$. Аналогично для $1/i$, где $i \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, получаем, что a кратно всем числам, чего быть не может. Что и требовалось доказать.

(2) $C_{12} \times C_{18} \cong C_4 \times C_3 \times C_9 \times C_2, C_4 \cong < a, e, e, e >, C_4 =< a >, C_4 \cong < a, e, b >, C_2 =< b >, (b^2 = e) \Rightarrow 2$ подгруппы.

Ответ: 2.

(3) $\varphi(G_1) \to G_2$ - гомоморфизм, $H < G_1$.

(a) В случае конечного порядка G_1, $|\varphi(H)|$ делит $|G_1|$.

Доказательство:

Порядок подгруппы делит порядок группы по теорме Лагранжа, а так как степени любого элемента образуют группу$\to$ порядок элемента делит порядок группы. По доказанному в пункте 1 имеем: $Ord(\varphi(x)) | Ord(x) \Rightarrow |G_1| \vdots |\varphi(H)|$. Доказано.

(b) Если гомоморфизм сюръективный и H - нормальная подгруппа в G, то $\varphi(H)$ - нормальная подгруппа.

Доказательство:

Гомоморфизм сюръективный $\Rightarrow \forall\ y \in G_2\ \exists\ x \in G_1 : \varphi(x) = y$

$\forall a \in G \hookrightarrow aH = Ha.$

$\varphi(aH) = \varphi(a) \cdot \varphi(H)$

$\varphi(Ha) = \varphi(H) \cdot \varphi(a) = \varphi(aH) = \varphi(a) \cdot \varphi(H) \Rightarrow$, так как $\varphi(H) < G_2$, то $\varphi(H)$ - нормальная подгруппа.

(c) Нет неверно, приведем контрпример:

$\varphi(C_4) \to S_4$ - это не сюръективный гомомрфизм, так как в группе S_4 есть элемент порядка 3, а в группе C_4 - нет.C_2 - нормальная подгруппа в C_4, так как C_4 - абелева группа.

$a \to (1\ 2\ 3\ 4), a^2 \to (1\ 3)(2\ 4), C_2 =< a^2 >$

Проверим прямым вычислением, $(1\ 2) \cdot (1\ 3)(2\ 4) = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 1\ 3\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 3\ 4\ 1\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 3\ 4\ 2\ 1 \end{pmatrix}$

$(1\ 3)(2\ 4) \cdot (1\ 2) = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 3\ 4\ 1\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 2\ 1\ 3\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 3\ 1\ 2 \end{pmatrix}$

Очевидно, что подгруппа не является нормальной.

(4) Рассмотрим отображение $f : (Z, Z) \to (Z/5Z, Z/5Z)$

$f : (a, b) \to ((a + 3b)\ mod\ 5, (2a + b)\ mod\ 5)$

(a) Сохраняется операция :$f(a + b, c + d) = f(((a + b) + 3(c + d))\ mod\ 5, ((2(a + b) + (c + d))\ mod\ 5) = f(a, c) + f(b, d) \Rightarrow$ гомоморфизм.

(b) Ядро: $(a + 3b) \equiv (2a + b) \equiv 0\ mod\ 5, a \equiv (-3b)\ mod\ 5 \Rightarrow a \equiv 2b\ mod\ 5$, тогда элементы ядра это такие пары:$([0], [0]), ([2], [1]), ([3], [4]), ([4], [2]), ([1], [3]))$, $[a]$ - числа, дающие остаток а при делении на 5. Также можно задать формулой: $(a, 2a + 5k)$, где $a, k \in Z$.

(c) $a + 3b = 5n + x, 2a + b = 5m + y$, при каких x и y данная система имеет решения в целых числах?

$\begin{pmatrix} \text{1 3 0 -5 x} \\ \text{2 1 -5 0 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{5 0 -15 5 3y-x} \\ \text{0 5 5 10 y-2x} \end{pmatrix} \Rightarrow 3y \equiv x\ mod\ 5, 2x \equiv y\ mod\ 5$ Образ - множество пар: $(0, 0), (1, 2), (4, 3), (2, 4), (3, 1))$.

(5) Фактор-группа комплексных матриц изоморфна мультипликативной группе положительных чисел по подгруппе матриц с определителем, по модулю равным единице.$(GL(n, C)/SL(n, C) \cong (R^*, \cdot))$

Доказательство:

Подберем такой гомоморфизм f, при котором $SL(n, C) = Ker(f)$. Очевидно, что $f : A \to |det(A)|$. Построим смежные классы по подгруппе $SL(n, C)$: $A \cdot SL(n, C), f(A \cdot SL(n, C)) = |det(A)|$. Тогда каждому смежному классу по ядру гомоморфизма поставим в соответствие det матрицы - какое-то комплексное число $ai + b, |ai + b| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Таким образом, каждому смежному классу по ядру ставим в соответствие положительное действительное число. Заметим, что сохраняется операция :$f(AB) = |det(AB)| = |det(A)| \cdot |det(B)| = f(A) \cdot f(B)$. Получаем, что Фактор-группа комплексных матриц изоморфна мультипликативной группе положительных чисел по подгруппе матриц с определителем, по модулю равным единице.

(6) Необходимо доказать, что нормализатор $N(yxy^{-1})$ есть множество $yN(x)y^{-1}$
Доказательство:
Пусть $g'x = xg', g' \in N(x)$ Предположим, что $g = yg'y^{-1}$, докажем, что $g \in N(yxy^{-1})$:
$yxy^{-1}g = yxy^{-1}yg'y^{-1} = yxg'y^{-1} = yg'xy^{-1}$, а так как $g' = y^{-1}gy$, получаем $yxy^{-1}g = gyxy^{-1} \Rightarrow g \in N(yxy^{-1})$. Что и требовалось доказать.

(7) (a) Доказать, что для любого элемента группы $g \in G$ отображение $\varphi : G \to G$ является изоморфизмом группы в себя.
Доказательство:
1) биекция: $x \to g^{-1}xg$.При эо очевидно, что $g^{-1}xg \in G$, то есть группа отображается в себя.
2) сохранение операции: $\varphi(xy) = g^{-1}xyg = g^{-1}xgg^{-1}yg = \varphi(x)\varphi(y)$.

(b) Доказать, что у элементов ab и ba одинаковые порядки.
Доказательство:
$ab \in G, ba \in G, \varphi_a(ab) = a^{-1}aba = ba$. Отображение является изоморфизмом, следовательно, у элементов одинаковые порядки.

(c) $N(a)$ - нормализатор элемента $a, a \in G$. Докажем, что $N(a)$ - подгруппа в G:
1) $e \in N(a)$
2) $b, c \in N(a) \Rightarrow ab = ba, ac = ca \Rightarrow a = caa^{-1} \Rightarrow ab = bcac^{-1} \Rightarrow a(bc) = (bc)a \Rightarrow bc \in N(a)$
3) $b \in N(a) \Rightarrow ab = ba \Rightarrow b^{-1}a = ab^{-1}$. Следовательно, $N(a)$ - подгруппа G.
Теперь докажем, что существует взаимооднозначное соответствие между элементами класса сопряженности, в котором лежит элемент a и классами смежности по подгруппе $N(a)$. Для этого докажем, что если $g^{-1}ag = h^{-1}ah$, то элементы g и h принадлежат одному классу смежности по подгруппе $N(a)$. Действительно :$g^{-1}ag = h^{-1}ah \Rightarrow hg^{-1}a = ahg^{-1} \Rightarrow hg^{-1} \in N(a) \Rightarrow h = ng, n \in N(a)$. То есть элементы отличаются на элемент из подгруппы, следовательно, лежат в одном классе смежноти по этой подгруппе. Получается, какие бы элементы группы из одного и того же класса смежности по подгруппе мы не брали, все равно получим один и тот же элемент, сопряженны с a. Следовательно, между классами смежности и элементами класса сопряженности есть взаимооднозначное соответствие, количество элементов в классе сопряженности равно количеству классов смежности.

(8) (a) Пусть σ - перестановка, представимая в виде простого цикла длины n. Доказать, что уравнение $x^k = \sigma$ имеет решения ,только если $(k, n) = 1$.
Доказательство:
$Ord(\sigma) = n \Rightarrow x^{nk} = \sigma^n = e$. Пусть перестановка x представима в виде t простых циклов длины $l_i, i \in [1, t]$. Очевидно, что $(k, l_i) = 1$, иначе $x^k = e = \sigma$, что неверно$\Rightarrow$ $l_i|n$. Предлоложим, что $(n, k) = f, f < n$,пусть $n = fj$, тогда $x^{jk} = \sigma^j = e$, но σ - простой цикл длины $n \Rightarrow Ord(\sigma) = n$, но $j < n$. Получаем противоречие. Следовательно, уравнение имеет решения только если $(n, k) = 1$.

(b) Чтобы было решение, необходимо, чтобы перестановка x и σ имели одинаковое цикловое разложение, потому что в перестановке σ все циклы разной длины, следовательно ни один из них не был получен из большего возведением в степень, так как в этом случае длины каких-то циклов совпадали бы. Значит, между циклами, входящими в разложение перестановки x и циклами, входящими в разложение перестановки σ существует взаимооднозначное соответствие. То есть цикл длины k_i получается при возведении цикла той же длины в степень k. Из пункта a: уравнение будет иметь решение, если $(k, k_i) = 1$ и при этом те числа, которые входят в цикл длины k_i входят в цикл k_i, возведенный в $k-$ую степень. Следовательно, зная перестановку σ мы однозначно получим перестановку x, то есть есть единственное возможное решение.