Филиппова Анастасия

Домашнее задание 7

1

Докажем, что jk элемент матрицы M_n^{-1} равен $\frac{w^{-kj}}{n}$. Пусть матрица A составлена из таких элементов, тогда $[AM_n]_{il} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{w_n^{-ki}}{n} w^{kl} = (i = l)$ (по лемме о сложении). Получаем, что произведение равно единичной мартрице, следовательно, $M_n(w)^{-1} = \frac{1}{n} M_n(w^{-1})$.

$$M_n^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & ... & w_n^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & w_n^{n-1} & w_n^{2(n-1)} & ... & w_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & ... & w_n^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & w_n^{n-1} & w_n^{2(n-1)} & ... & w_n^{(n-1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & n & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

(по лемме о сумме комплексных корней из 1).
Тогда $M^4 = diag(n^2, n^2, ..., n^2)$.

2

Надо посчитать значение многочленов $x^3 + 3x + 2$ и $3x^3 + 3x^2 + 2$ в точках:
1,
$e^{\pi/4} = 1/\sqrt{2}(1+i)$,
$e^{\pi/2} = i$,
$e^{3\pi/4} = 1/\sqrt{2}(-1+i)$,
-1,
$-1/\sqrt{2}(1+i)$,
$-i$,
$-1/\sqrt{2}(1+i)$.
$A_0 = 6$,
$A_1 = \sqrt{2}(2i+1) + 2$,
$A_2 = 2i + 2$,
$A_3 = \sqrt{2}(2i-1) + 2$,
$A_4 = -2$,
$A_5 = -\sqrt{2}(2i+1) + 2$,
$A_6 = -4i + 2$,
$A_7 = -\sqrt{2}(2i-1) + 2$.
$B_0 = 8$,
$B_1 = 3i(1/\sqrt{2}(1+i)) + 3i + 2$,
$B_2 = -3i - 1$,
$B_3 = -3i(1/\sqrt{2}(-1+i)) - 3i + 2$,
$B_4 = 2$,
$B_5 = -3i(1/\sqrt{2}(1+i)) + 3i + 2$,
$B_6 = 3i - 1$,
$B_7 = -3i(1/\sqrt{2}(1-i)) - 3i + 2$.
$C_0 = 48$,
Далее находим столбец C, перемножив полученные значения. Затем с помощью обратного преобразования (домножая на обратную матрицу Фурье) находим коэффициенты многочлена.

3

$f(x) = \prod\limits_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$. Как мне кажется можно поступать следующим образом: запускать алгоритм рекурсивно на половине скобок, то есть: $T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n)$, $O(n \log n)$ — перемножение многочленов с помощью БПФ. По 2-му случаю мастер теоремы получаем $T(n) = O(n \log^2 n)$.

4

$Cx=b$, найти x. $C^T=V_nLV_n^{-1}$,где $L=diag(\lambda_0,...,\lambda_{n-1}), \lambda_m=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_kw_n^{mk}$. Тогда $C=(V_nLV_n^{-1})^T=\frac{1}{n}V_n^*LV_n$, тогда $x=V_n^{-1}(L^{-1}(V_nb))$.

В нашем случае $C=\begin{bmatrix}1&8&4&2\\2&1&8&4\\4&2&1&8\\8&4&2&1\end{bmatrix}, V_4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix}15&0&0&0\\0&-3-6i&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&-3+6i\end{bmatrix}$

, тогда: $V_nb=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\8\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\12+6i\\10\\12-6i\end{bmatrix}$,

$L^{-1}(V_nb)=\begin{bmatrix}1/15&0&0&0\\0&1/(-3-6i)&0&0\\0&0&-1/5&0\\0&0&0&1/(-3+6i)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30\\12+6i\\10\\12-6i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-\frac{72+64i}{45}\\-2\\-\frac{72+64i}{45}\end{bmatrix}$,

$x=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-i&-1&i\\1&-1&1&-1\\1&i&-1&-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-\frac{72+54i}{45}\\-2\\-\frac{72-54i}{45}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{8}{5}\\\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\end{bmatrix}$

Ответ: $x=(-\frac{4}{5},\frac{8}{5},\frac{4}{5},\frac{2}{5})^T$

6

На семинаре было доказано, что $CF=FL$, где $L=diag(\lambda_0,...,\lambda_n)$. Тогда $(CF)^T=(FL)^T \iff F^TC^T=L^TF^T$. Заметим, что первый столбец матрицы $C^T=(c_0,...,c_n)^T$. Докажем, что первый столбец произведения $L^TF^T=LF$, равен столбцу собственных значений матрицы C, умноженному на $1/\sqrt{(n+1)}$. Действительно, первый столбец такого произведения: $\frac{1}{\sqrt{n+1}}\begin{bmatrix}\lambda_0+0+0+...+0\\0+\lambda_1+0+...+0\\...\\...\\0+0+0+...+\lambda_n\end{bmatrix}$.

В данном случае матрица Фурье F имеет нормирующий множитель $1/\sqrt{n+1}$.

С помощью БПФ найдем собственные значение матрицы $circ((1,2,4,6)^T)$. То есть надо вычислить ДПФ для массива $[2,4,6,1]$ с помощью БПФ за $O(n\log_n)$. Представим в виде многочлена $x^3+6x^2+4x+2=x(2x^2+6)+(4x^2+1)=xB(x)+A(x)$.

$w_4^0=1, w_4^1=i, w_4^2=-1, w_4^3=-i$.

$A(x_0)=A(x_2)=5, A(x_1)=A(x_3)=-3, B(x_0)=B(x_2)=8, B(x_1)=B(x_3)=4i, x_0B(x_0)=8, x_1B(x_1)=4i, x_3B(x_3)=-4i, x_2B(x_2)=-8$.

$FFT(1,6,4,2)=(5+8,-3+4i,5-8,-3-4i)=(13,-3+4i,-3,-3-4i)$.

Проверим: $V_4(1,6,4,2)^T$.

$V_4(1,6,4,2)^T=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\6\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\-3+4i\\-3\\-3-4i\end{bmatrix}$.

7

Представим множество в виде многочлена степени m. Если $k\in A$, тогда $a_k=1$, в противном случае 0. Получаем многочлен: $A(x)=x\cdot I(1\in A)+...+x^m\cdot I(m\in A)$. Возведем полученный многочлем в квадрат: $A(x)^2=B(x)$. Посмотрим на ненулевые коэффициенты этого многочлена: $b_k=\sum\limits_{j=0}^{k}a_ja_{k-j}$.

Но коэффициент не ноль, если в сумме хотя бы одно слагаемое не ноль. А это значит, что $a_j\overline{0}, a_{k-j}\overline{0}$, тогда $a_j, a_{k-j}\in A \iff j+(k-j)=j\in A+A$. Таким образом, за $O(m\log m)$ построили процедуру, $O(m\log n)=o(m^2)$. (Перемножение многочленов с помощью БПФ за $O(m\log m)$).

8

Пусть $t_0t_1, ..., t_{n-1}$ — текст, $p_0, p_1, ..., p_{m-1}$ — строка, вхождения которой мы ищем. Строка входит в текст с i-ой позиции, если $p_j = t_{i+j}$ для $j = 0, ..., m-1$.
(i) Построим $O(n \log n)$-алгоритм:
Закодируем текст и строку последовательностями чисел. Тогда вхождение строки в текст с i-ой позиции эквивалентно обнулению суммы квадратов $B_i = \sum\limits_{j=0}^{m-1}(p_j - t_{i+j})^2 = \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j^2 + 2\sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j} + \sum\limits_{j=0}^{m-1} t_{i+j}^2$.
Сумму квадратов p_j считаем за $O(m)$. Сумму квадратов t_{i+j} также считаем за $O(m)$. Далее рассмотрим 2 многочлена: $T(x) = t_0 + xt_1 + ... + x^{n-1}t_{n-1}$ и $P(x) = p_0x^{m-1} + ... + p_{m-1}$.
Можем найти произведение $A(x) = T(x)P(x)$ за $O(n \log n)$, используя БПФ. Посмотрим на коэффициенты полученного многочлена: $a_{m-1+i} = p_0t_i + p_1t_{i+1} + ... + p_{m-1}t_{m-1+i} = \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j t_{j+i}$. Видно, что это одно из слагаемых B_i. Далее за $O(1)$ считаем сумму получившихся 3-х слагаемых. Следовательно, сложность нахождение B_i — $O(n \log n)$.
Заметим, что $B_1 = B_0 - 2a_{m-1} + 2a_m - t_0^2 + t_m^2$ (просто передвигаемся на одну позицию вправо). Тогда в общем случае имеем: $B_{i+1} = B_i - 2a_{m-1+i} + 2a_{m+i} + t_{m+i}^2 - t_{m-1+i}^2$. Следовательно, зная B_i, находим B_{i+1} за $O(1)$. Тогда значения всех B_i, $i = 1, ..., m-1$ находим за $O(m)$ (нашли B_0 за $O(n \log n) + O(m)$ и далее находим остальные B_i за $O(m)$). Общая сложность построенного алгоритма — $O(n \log n)$.
(ii) В тех же обозначениях, что и в пункте (i) необходимо вычислить $U_i = \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j}(p_j - t_{i+j})^2 = \sum\limits_{j=0}^{m-1}(p_j^3 t_{i+j} + 2p_j^2 t_{i+j}^2 + p_j t_{i+j})$. За $O(m)$ вычислим последовательности
$a : a_j = p_j^3$,
$b : b_j = t_{i+j}^3$,
$c : c_j = p_j^2$,
$d : d_j = t_{i+j}^2, j = 0, ..., m-1$.
Пусть $B(x) = t_0^3 + xt_1^3 + ... + x^{n-1}t_{n-1}^3$,
$A(x) = p_0^3 x^{m-1} + ... + p_{m-1}^3$,
$D(x) = t_0^2 + xt_1^2 + ... + x^{n-1}t_{n-1}^2$,
$C(x) = p_0^2 x^{m-1} + ... + p_{m-1}^2, T(x) = t_0 + xt_1 + ... + x^{n-1}t_{n-1}$,
$P(x) = p_0 x^{m-1} + ... + p_{m-1}$.
Тогда $N(x) = A(x)T(x)$, причем $n_{m-1+i} = \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j^3 t_{j+i}$,
$L(x) = B(x)P(x)$, причем $l_{m-1+i} = \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j t_{j+i}^3$,
$K(x) = C(x)D(x)$, причем $k_{m-1+i} = \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j^2 t_{j+i}^2$,
таким образом нашли все слагаемые U_i за $O(n \log n)$ с помощью БПФ. Заметим, что $U_{i+1} = U_i - 2k_{m-1+i} + 2k_{m+i} - l_{m-1+i} + l_{m+i} - n_{m-1+i} + n_{m+i}$. Следовательно, зная U_0, находим остальные U_i за $O(1)$. Получается, общая сложность $O(n \log n)$.
(iii) Нужно разделить текст на n частей длины $2m$ так, чтобы каждый накладывался половиной своей длины на два соседних(кроме первого и последнего). Запустить алгоритм из первого или второго пункта на каждой части. Если на какой-нибудь части будет найден образец, значит, и в исходном тексте есть образец. Итоговая ассимптотика будет равна заявленной, а кооректность этого разбиения следует из ограниченности m длины образца. То есть если образец целиком лежит в одной части, то алгоритм выдаст да, что и должен. Если же он выходит за его пределы, то он будет распознан в следующей части, так как его длины равна m и есть захлест на половину следующего образца.

9

Все арифметические операции стоят константу. Тогда за $O(n \log n)$ находим ДПФ последовательности коэффициентов многочлена $A(x)$. Получаем массив $(y_0, ..., y_k)$ комплексных чисел. Заведем 2 дополнительные переменные Re, Im. Проходимся по массиву и увеличиваем $Re, Im : Re = Re +$

$Re(y_i), Im = Im + Im(y_i)$, $i \in [0, n-1]$. Получаем $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(Rey_k + Imy_k) = Re + Im$. Сложность алгоритма: FFT за $O(n \log n)$, подсчет Re и Im за $\Theta(n)$. Итоговая сложность $O(n \log n) = o(n^2)$.