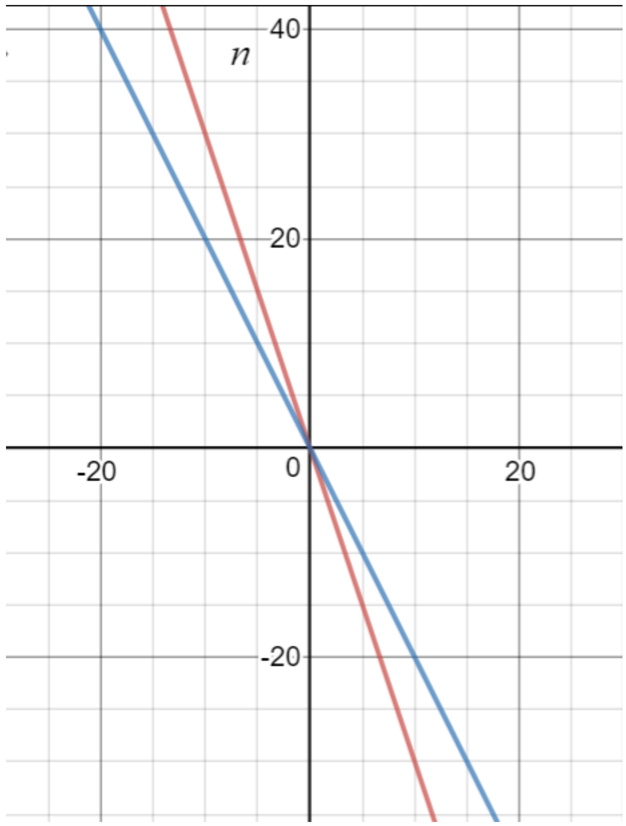
Филиппова Анастасия

Домашнее задание 1

(1) 1) A_n - количество натуральных решений уравнения $2x + 3y = n$.
$gcd(2,3) = 1$, так как $\forall\ n \in N \hookrightarrow\ n\ mod\ 1 = 0 \Rightarrow$ целочисленные решения существуют при любом n.
Решим данное диофантово уравнение:
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3k \\ 2k \end{pmatrix}, k \in Z.$
$x > 0, y > 0$, тогда количество решений при n - количество узлов клеток, лежащих на открытом интервале, который принадлежит прямой $f(n) = n$, с началом на синей прямой и концом на красной (прямые изображены на рисунке ниже).



Не сложно увидеть, что рекурента для последовательности A_n: $A_{n+6} = A_n + 1$.

Найдем производщую функцию, домножив на t^{n+6} и просуммируем от 0 до $+\infty$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_{n+6}t^{n+6} = t^6 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n t^n + t^6 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n \iff F(t) - t^5 = F(t)t^6 - \frac{1}{1-t} \iff F(t) = \frac{t^5}{1-t^6} + \frac{t^6}{(1-t)(1-t^6)}$

2) $T(n) = T(n-6) + 1 = \sum\limits_{k=1}^{\lfloor n/6 \rfloor} 1 = (\lfloor n/6 \rfloor) = \Theta(n)$.

3) Из диофантова уравнения получаем: $k > n/3, k < n/2$, тогда $A_n = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1 \cdot I(n\ mod\ 6 = 5)$, где I - индикатор того, что n имеет остаток 5 при делении на 6.

(2) 1) Рассмотрим пару чисел (x, y), не умоляя общности скажем, что $x > 0, y > 0$. Предположим, что $s_{i+1} > 2/3 s_i$, представим x_i в виде $x_i = qy_i + r$, где $q \in N, r < y_i$, тогда: $y_i + r > 2/3(y_i + qy_i + r) \iff 1/3r > (2/3q - 1/3)y_i \iff r > (2q-1)y_i \iff r > ky_i, k \in N \cup (0)$, получаем противоречие $\Rightarrow s_i <= 2/3 s_{i-1}$.
2) $gcd(F_{m+2}, F_{m+1}) = gcd(F_{m+1}, F_m) = ... = gcd(F_2, F_1) = 1$.

(3) При больших k можем считать, что $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = k/4$, тогда ассимптотика: $G(k) = 4G(k/4) + k^3/4 = k^3/4 + 4(4G(k/4^2 + (k/4)^3/4) = \sum\limits_{i=0}^{\log_4 k} 4^i \frac{(\frac{k}{4^i})^3}{4} < \sum\limits_{i=0}^{+\infty} 4^i \frac{(\frac{k}{4^i})^3}{4} = \frac{k^3}{4}\frac{1}{1-1/16} = \Theta(k^3)$, также $G(k) = 4G(k/4) + k^3/4 = k^3/4 + 4(4G(k/4^2 + (k/4)^3/4) = \sum\limits_{i=0}^{\log_4 k} 4^i \frac{(\frac{k}{4^i})^3}{4} > \frac{k^3}{4} = \Theta(k^3)$. Получаем, что $G(k) = \Theta(k^3)$.

(4) 1) Очевидно, что число правильно составленных скобочных выражений, содержащих n скобок, в которых в любом непустом префиксе число открывающих скобок больше числа закрывающих равно числу правильных скобочных выражений, содержащих $n-2$ скобки. Действительно: пусть $A-$правильное скобочное выражение, тогда (A) - правильно составленное скобочное выражение, удовлетворяющее условию задачи. Из курса АКТГ известно, что число правильных скобочных выражений длины $2k$ равно числу путей Дика из точки $(0,0)$ в $(2k,0)$ равно числу Каталана: $c_k = \frac{1}{k+1}C_{2k}^k$, тогда число правильных скобочных выражений длины n при условии не нулевого префикса: $P(n) = \frac{2}{n}C_{n-2}^{\frac{n-2}{2}} \cdot (-n \; mod \; 2 + 1)$.

(5) $T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + 10\frac{n^3}{\log n}$

Оценим рекуренту снизу: очевидно, что $T(n) = \Omega(\frac{n^3}{\log n})$.

Оценим сверху: $T(n) \leqslant 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil) + 10\frac{n^3}{\log n}$. В силу монотонности $T(n)$ можем сказать, что $T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil) + 10\frac{n^3}{\log n}$ ассимптотически эквивалентно $T(\frac{n}{\sqrt{3}}) + 10\frac{n^3}{\log n}$. Воспользуемся основной теоремой о рекурсии: если $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, при этом $f(n) = \Omega(n^c), c > \log_b a$

$af(\frac{n}{b}) <= kf(n)$, для некоторой константы $k < 1$ и достаточно больших n , тогда $T(n) = \Theta(f(n))$.

$f(n) = 10\frac{n^3}{\log n}, a = 3, b = \sqrt{3}$.

Покажем, что $\exists\ c_1 \exists\ n_0 : \forall n > n_0 \hookrightarrow \frac{n^3}{\log n} > c_1 n^c$. Так как $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$, возьмем $c = 5/2$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{n^3}{\log n}/n^{2.5}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^2\log n - n^3 1/n \ln_a}{2.5n^{1.5}} = +\infty$, то есть $10\frac{n^3}{\log n} = \Omega n^{2.5}$. Осталось доказать условие регулярности $(af(\frac{n}{b}) <= kf(n), k < 1)$: $\frac{30}{\sqrt{3}^3}\frac{n^3}{\log n - \log\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}\frac{n^3}{\log n - \log\sqrt{3}}$, при больших n выполняется: $\sqrt{3}(\log n - \log\sqrt{3}) > \sqrt{2}\log n \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{3}}\frac{n^3}{\log n - \log\sqrt{3}} <= \frac{10}{\sqrt{2}}\frac{n^3}{\log n} \Rightarrow$ выполняется условие регулярности при $k = 1/\sqrt{2}$, следовательно, по основной теормеме о рекурсии сверху $T(n)$ оцениваем как $c(\frac{n^3}{\log n}), c = const$, тогда, учитывая нижнюю оценку, получаем: $T(n) = \Theta(\frac{n^3}{\log n})$.

(6) Совершаем аналогичные действия, как в алгоритме поиска k-ой порядковой статистике при разбиении элементов на группы по 5 в каждой. Получаем, что число элементов больших найденной медианы медиан как минимум $3(\lceil \frac{1}{2}\lceil \frac{n}{4} \rceil \rceil - 2) >= \frac{3n}{8} - 6$, ($\lceil \frac{1}{2}\lceil \frac{n}{4} \rceil \rceil$ групп содержат по 3 элемента, превышающих x, кроме группы, содержащей x и группы, в которой меньше 4 элементов (если n не делится на 4). Количесвто элементов, которые не больше x не менее $2(\lceil \frac{1}{2}\lceil \frac{n}{4} \rceil \rceil - 2) >= (\frac{n}{4} - 4)$.

В лучшем случае $T(n) >= T(n/4) + T(n - 3n/8 + 6) + O(n) = T(n/4) + T(5n/8) + O(n), T(1) <= O(1)$. То есть в лучшем случае, мы всегда будем отбрасывать элементы, больше x. Тогда $T(n) = O(n)$, (доказательство аналогично доказательство в случае с разбиением на 5 элементов). Теперь рассмотрим наихудший случай (каждый раз отбрасываем элементы, не больше x): $T(n) <= T(n/4) + T(n - n/4 + 6) + an = T(n/4) + T(3n/4 + 6) + an <= an\sum\limits_{k=0}^{\log_4 n} 1 = O(n\log n)$. Получаем, что при делении элементов на группы по 4 сложность алгоритма поиска k-ой порядковой статистики в худшем случае будет уже не линейная (как при делении на 5), а $n\log n$.

(7) Количество вызовов равно количество ребер в дереве рекурсий, то есть количество вершин минус один. $S(n) < 2S(n-1)$, тогда количество рекурсивных вызовов сверху можно оценить как: $\sum\limits_{k=1}^{n-100} 2^k = \frac{2(2^{n-100}-1)}{1} = 2^{n-100+1} - 2$ (по формуле суммы первых n членов геометрической прогрессии). $S(n) > 2S(n-3)$, аналогично для верхней оценки получаем: $2^{n/3-100+1} - 2$. Тогда: $2^{10^{12}/3-100+1} - 2 < S(10^{12}) < 2^{10^{12}-100+1} - 2$.

(8) $T(n) = T(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor) + T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \Theta(n)$, так как T монотона, сделаем замену $n = 2^k = 2^{2^m}$, тогда: $G(m) > G(m-1) \Rightarrow$ снизу высоту дерева оцениваем как $\log\log n$.

Оценим высоту дерева сверху: $T(n) = T(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor) + T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \Theta(n)$, высота дерева точно не меньше чем n (видно из рекуренты). Следовательно, получаем, что высота дерева есть $O(n)$ и $\Omega(\log\log n)$.

(9) $T(n) = nT(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + O(n)$, в силу монотонности T, представим $n = 2^k$, оценим сложность снизу: $G(k) = 2^k G(k-1) + O(2^k) > 2^k G(k-1) = 2^{\frac{k(k+1)}{2}} = \Theta(2^{k^2}) = \Theta(2^k)^k \to T(n) = \Omega(n^{\log_2 n})$. Оценим сложность сверху: $T(n)$ можем считать ассимптотически эквивалентной $nT(n/2) + O(n) < nT(n/2) + cn = \sum\limits_{k=0}^{\log_2 n} \frac{cn^k}{2^{\frac{k(k+1)}{2}}} < c\sum\limits_{k=0}^{\log_2 n} (\frac{n}{2})^k = c\frac{n}{2}((\frac{n}{2})^{\log_2 n} - 1)/(n/2 - 1) = \Theta(n^{\log_2 n}) \Rightarrow T(n) = O(n^{\log_2 n})$. Получаем, что $T(n) = \Theta(n^{\log_2 n})$.